UNIVERSITÉ BLAISE PASCAL Année 2013-2014

U.E. Mathématiques Générales 2 - Licence L1 M.A.S.S., Maths, Info

Corrigé du partiel du 07 avril 2014

Exercice 1 :

(a) $\forall x \in \mathbb{R},\ (x^2 = 4 \Leftarrow x = 2)$;

(b) $\forall z \in \mathbb{C},\ (z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R})$;

(c) $\forall n \in \mathbb{Z},\ (n^2$ est multiple de 4 $\Leftarrow$ n est multiple de 4).

Exercice 2 :

Voir le cours

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = |1 - 2(x - E(x))|$.

Comme la fonction partie entière est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, continue à droite en tout ponit de $\mathbb{Z}$ et la fonction valeur absolue $|.|$ est continue sur $\mathbb{R}$ alors la fonction f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ et elle est continue à droite en tout point de $\mathbb{Z}$ (composée de fonctions continues). Pour montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ il suffit de montrer que f est continue à gauche en tout point de $\mathbb{Z}$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a $\lim\limits_{x \to n^-} f(x) = \lim\limits_{x \to n, x \in]n-1,n[} f(x) = \lim\limits_{x \to n} |1 - 2(x - (n-1))| = |-1| = 1 = f(n)$. D'où f est continue à gauche en n. Comme n est quelconque dans $\mathbb{Z}$, f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 :

Fait en classe.

Exercice 5 :

(a) est vraie. Démonstration par l'absurde. Soi f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui admet une limite finie en x_0 et soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui n'a pas de limite en x_0. Supposons que $f + g$ admet une limite en x_0. Comme $g = (f + g) - f$, g est la somme de deux fonctions qui admettent des limites finies en x_0. Par conséquent g admet une limite finie en x_0, ce qui est absurde.

(b) est fausse. En effet, il suffit de prendre f la fonction nulle et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. On voit que g n'a pas de limite en 0 mais que fg admet une limite nulle en 0.

Exercice 6 :

Soit $T > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et telle que

$$(*) \quad \forall t \in \mathbb{R},\, f(t + T) = f(t)\,.$$

Une telle fonction possède la propriété

$$(**) \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \forall t \in \mathbb{R},\, f(t + kT) = f(t)\,,$$

qu'on pourra utiliser sans la démontrer.

1. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x + \frac{T}{2}) - f(x)$ est la somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, g est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[0, \frac{T}{2}]$. En outre, 0 est compris entre $g(\frac{T}{2})$ et $g(0)$ puisque $g(\frac{T}{2}) = f(\frac{T}{2} + \frac{T}{2}) - f(\frac{T}{2}) = f(T) - f(\frac{T}{2}) = f(0) - f(\frac{T}{2}) = -g(0)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel c compris entre 0 et $\frac{T}{2}$ tel que $g(c) = 0$. D'où $f(c + \frac{T}{2}) = f(c)$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $x_0 \in [0, T]$ et $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = x_0 + kT$. D'après $(**)$ on a $f(x) = f(x_0 + kT) = f(x_0)$. Ce qui montre que $f(\mathbb{R}) = f([0, T])$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, l'image de l'intervalle fermé borné $[0, T]$ par f est un intervalle fermé borné. D'où l'image de $\mathbb{R}$ par f est un segment.

3. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
   $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ (x > A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$.

4. Supposons que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$.

   (a) Soit $\varepsilon > 0$. D'après 3) il existe $A > 0$ tel que :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ (x > A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon) \quad (***).$$

   Soit x un réel quelconque. Comme la suite $(x + Tn)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x + Tn > A$. D'après $(***)$ on a $|f(x + nT) - l| < \varepsilon$ et $(**)$ implique que $|f(x) - l| < \varepsilon$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq \ell$. On a donc $|f(x) - \ell| > 0$. D'après (a), pour $\varepsilon = |f(x) - \ell|$, on a $|f(x) - l| < \varepsilon = |f(x) - \ell|$. Ce qui est absurde et par conséquent $f(x) = \ell$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.