Groupoïdes d'holonomie de feuilletages singuliers.

Claire Debord

Rubrique : Géométrie différentielle.
Dépt. de Mathématiques, université d'Orléans, BP 6759, 45067 Orléans Cedex 02, France.
Courriel : claire.debord@labomath.univ-orleans.fr -tel : 02 38 49 48 95 -Fax : 02 38 41 72 05

Résumé

Nous étendons ici la notion de groupoïde d'holonomie différentiable à certains feuilletages singuliers de type Stefan. Nous donnons un critère d'existence ainsi qu'une construction explicite d'un tel groupoïde. Cela passe par un résultat d'intégrabilité pour les algébroïdes de Lie de fléchage presque injectif. Nous obtenons notamment une nouvelle description des résultats de J. Pradines [4, 5].

Holonomy groupoids for singular foliations.
Abstract

We define a notion of differentiable holonomy groupoid for some Stefan singular foliations. We have a necessary and sufficient condition for the existence of such a groupoid and a construction of it. This involves a result of integrability for Lie algebroids for which the anchor is almost injective. In particular we get a new description of J. Pradines' results [4, 5].

1 Les feuilletages considérés

Une *distribution généralisée* $\mathcal{D} = \cup_{x\in M}\mathcal{D}_x \subset TM$ sur une variété M est *différentiable* lorsque pour tout $(x, v) \in \mathcal{D}_x$, il existe un champ de vecteurs local X sur M tel que : $x \in \mathrm{Dom}(X),\ X(x) = (x, v)$ et $\forall y \in \mathrm{Dom}(X),\ X(y) \in \mathcal{D}_y$. Elle est *intégrable* si pour tout $x \in M$, il existe une sous-variété immergée F_x de M contenant x et telle que $T_yF_y = \mathcal{D}_y$ pour tout $y \in F_x$.

Un *feuilletage de Stefan* $\mathcal{F}$ sur une variété M est une partition de M par les sous-variétés intégrales connexes maximales d'une distribution différentiable intégrable. Les éléments de la partition sont appelés les *feuilles* et contrairement au cas régulier leur dimension peut varier [7]. Lorsque l'union M_0 des feuilles de dimension maximale est un ouvert dense de M, nous dirons que le feuilletage de Stefan $(M, \mathcal{F})$ est *presque régulier*. La restriction $\mathcal{F}_0$ du feuilletage $\mathcal{F}$ à M_0 est alors un feuilletage régulier appelé *le sous-feuilletage régulier maximal* de $(M, \mathcal{F})$.

Exemples

1. Les composantes connexes des orbites d'une action différentiable d'un groupe de Lie sur une variété M sont les feuilles d'un feuilletage de Stefan. Lorsque l'action est preque libre, c'est-à-dire libre sur une partie dense, le feuilletage est presque régulier.

2. Les sphères concentriques dans $\mathbb{R}^3$ sont les feuilles d'un feuilletage presque régulier.

3. Soit N une sous-variété plongée de M. La partition $\mathcal{F}_N$ de M suivant N et les composantes connexes de $M \setminus N$ est un feuilletage presque régulier.

4. Soient $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux feuilletages réguliers sur une variété M, $\mathcal{F}_1$ étant un sous-feuilletage de $\mathcal{F}_2$. Le feuilletage $\mathcal{F}$ sur $M \times \mathbb{R}$ défini par $\mathcal{F}_1 \times \{0\}$ et $\mathcal{F}_2 \times \{t\}$ pour $t \neq 0$ est presque régulier.

5. Soient $\mathcal{A}$ un algébroïde de Lie sur M de fléchage $p : \mathcal{A} \to TM$. La distribution $p(\mathcal{A})$ est intégrable et définit un feuilletage de Stefan $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ sur M. Lorsque $\mathcal{A}$ est l'algébroïde de Lie d'un groupoïde différentiable G sur M, les feuilles de $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ sont les composantes connexes des orbites de G.

2 Les quasi-graphoïdes

Nous recherchons des groupoïdes différentiables dépourvus d'isotropie superflue. Cela nous amène à poser la

Définition-Proposition 1 *[1] Un groupoïde différentiable $G \rightrightarrows G^{(0)}$ de source α et de but β est un quasi-graphoïde s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :*

1. Si $\nu : O \to G$ est une section locale de α alors $\beta \circ \nu = 1_O$ si et seulement si ν est la restriction à O de l'inclusion des unités.

2. Si S est une variété munie de deux submersions surjectives a et b sur $G^{(0)}$, il existe au plus une application différentiable $\phi : S \to G$ qui vérifie $\alpha \circ \phi = a$ et $\beta \circ \phi = b$.

Lorsque $G \rightrightarrows G^{(0)}$ est un groupoïde différentiable local [2], on dira que c'est un *quasi-graphoïde local* s'il vérifie l'assertion 2. ci-dessus.
La structure algébrique d'un quasi-graphoïde (local) est entièrement déterminée par ses applications source et but. De plus on montre la

Proposition 1 *Soient G_1 et G_2 deux quasi-graphoïdes α-connexes de base M. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. Les groupoïdes G_1 et G_2 sont isomorphes.

2. Il existe un voisinage V_i des unités dans G_i, $i = 1, 2$ et un difféomorphisme $\phi : V_1 \to V_2$ qui respecte la source et le but.

3. Les algébroïdes de Lie de G_1 et de G_2 sont isomorphes.

Ces groupoïdes sont très liés aux feuilletages presque réguliers. On montre que lorsque G est un quasi-graphoïde, le fléchage de son algébroïde de Lie est injectif en restriction à un ouvert dense de la base. On déduit alors la

Proposition 2 *Soit G un quasi-graphoïde α-connexe de base M.*

1. Les orbites de G sont les feuilles d'un feuilletage presque régulier $\mathcal{F}_G$ sur M.

2. Si $(M_0, \mathcal{F}_0)$ est le sous-feuilletage régulier maximal de $(M, \mathcal{F}_G)$ la restriction de G à M_0 est isomorphe à $Hol(M_0, \mathcal{F}_0)$, le groupoïde d'holonomie de $(M_0, \mathcal{F}_0)$.

Par analogie au cas des feuilletages réguliers, on pose la

Définition 1 *Un groupoïde G de base M est un groupoïde d'holonomie du feuilletage presque régulier $(M, \mathcal{F})$ si c'est un quasi-graphoïde α-connexe dont les orbites sont les feuilles de $\mathcal{F}$.*

Contrairement au cas des feuilletages réguliers, il n'y a généralement pas unicité du groupoïde d'holonomie d'un feuilletage presque régulier.

3 Groupoïde d'holonomie

Le fléchage $p : \mathcal{A} \to TM$ d'un algébroïde de Lie $\mathcal{A}$ sur M est dit *presque injectif* lorsqu'il est injectif en restriction à un ouvert dense de la base M.

Théorème 1 *Les algébroïdes de Lie dont le fléchage est presque injectif sont intégrables.*

Corollaire 1 *Soit $(M,\mathcal{F})$ un feuilletage presque régulier et k la dimension du sous-feuilletage régulier maximal. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $(M,\mathcal{F})$ admet un groupoïde d'holonomie.

2. Il existe un algébroïde de Lie $\mathcal{A}$ sur M de dimension k qui définit le feuilletage $\mathcal{F}$.

Exemples

1. Soit $\mathcal{F}_H$ le feuilletage presque régulier sur M défini par une action différentiable et presque libre $\Phi : M \times H \to M$ d'un groupe de Lie connexe H sur M. Notons $\mathcal{H}$ l'algèbre de Lie de H. Soit

$$\begin{array}{rccc} p: & \mathcal{A}_H := M \times \mathcal{H} & \to & TM \\ & (x,v) & \mapsto & (\Phi)_*(x,v) \ . \end{array}$$

Il existe une unique structure d'algébroïde de Lie sur $\mathcal{A}_H$ de fléchage p. Cet algébroïde définit le feuilletage $\mathcal{F}_H$ et son fléchage est presque injectif. Le groupoïde d'holonomie correspondant est le goupoïde produit croisé $M \ltimes H \rightrightarrows M$.

2. Puisque la sphère S^2 n'est pas parallèlisable, le feuilletage de $\mathbb{R}^3$ par les sphères concentriques n'admet pas de groupoïde d'holonomie.

3. Soit N une sous-variété de M de codimension 1 et $\mathcal{F}_N$ la partition de M suivant N et les composantes connexes de $M \setminus N$. Supposons pour simplifier que $M = N \times \mathbb{R}$. Soit

$$\begin{array}{rccc} p: & \mathcal{A}_N := TM \simeq TN \times T\mathbb{R} & \to & TM \simeq TN \times T\mathbb{R} \\ & (x,v;t,\lambda) & \mapsto & (x,v;t,t.\lambda) \ . \end{array}$$

Il existe une unique structure d'algébroïde de Lie sur $\mathcal{A}_N$ de fléchage p. Cet algébroïde de Lie définit $\mathcal{F}_N$ et son fléchage est presque injectif. Le groupoïde d'holonomie correspondant est le groupoïde de l'éclatement de la sous-variété N, c'est-à-dire le produit du groupoïde des couples sur N et du groupoïde de l'action de $\mathbb{R}_*^+$ sur $\mathbb{R}$ par multiplication.

4. Reprenons les notations de l'exemple 4 du paragraphe 1. Soit G_1 (resp. G_2) le groupoïde d'holonomie de $\mathcal{F}_1$ (resp. $\mathcal{F}_2$) et $\varphi : G_1 \to G_2$ l'immersion induite par l'inclusion de $\mathcal{F}_1$ dans $\mathcal{F}_2$. On se donne une métrique euclidienne sur $T\mathcal{F}_2$ et on note N l'orthogonal de $T\mathcal{F}_1$ dans $T\mathcal{F}_2$. Alors $T\mathcal{F}_2$ s'identifie à $T\mathcal{F}_1 \oplus N$. On munit $\mathcal{A} = (T\mathcal{F}_1 \oplus N) \times \mathbb{R}$ de la structure d'algébroïde de Lie sur $M \times \mathbb{R}$ admettant pour fléchage

$$\begin{array}{rccc} p: & \mathcal{A} = (T\mathcal{F}_1 \oplus N) \times \mathbb{R} & \longrightarrow & T(M \times \mathbb{R}) = TM \times T\mathbb{R} \\ & (v_1, v_2, t) & \mapsto & (v_1 + tv_2, (t,0)) \end{array} .$$

Cet algébroïde de Lie définit $\mathcal{F}$ et son fléchage est presque injectif. Le groupoïde d'holonomie correspondant est le groupoïde normal de φ [3]. Lorsque $\mathcal{F}_1$ est le feuilletage de M par ses points et $\mathcal{F}_2$ le feuilletage de M admettant pour unique feuille M, on obtient le groupoïde tangent de M.

Idée de la preuve du théorème 1 Soit $\mathcal{A}$ un algébroïde de Lie sur une variété M de fléchage p presque injectif. L'intégration de $\mathcal{A}$ se fait en deux temps.

Passage de l'infinitésimal au local. Soient O un ouvert de M, $\{Y_1, \cdots, Y_k\}$ une base de sections locales de $\mathcal{A}$ définies sur O et $X_i = p(Y_i)$ le champ de vecteurs sur M correspondant. On suppose que X_i est complet et on note φ_i^t le flot de X_i. Pour tout $i,j = 1, \cdots, k$ on note f_{ij}^l la famille de fonctions différentiables sur O telle que $[Y_i, Y_j] = \sum_{l=1}^k f_{ij}^l Y_l$.

On définit les submersions surjectives

$$\alpha := pr_1 : \ O \times \mathbb{R}^k \ \to \ O \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \beta : & O \times \mathbb{R}^k & \to & O \\ & (x, t_1, \cdots, t_k) & \mapsto & \varphi_1^{t_1} \circ \cdots \circ \varphi_k^{t_k}(x) \ . \end{array}$$

La presque injectivité de p assure qu'il existe un ouvert D de $O \times \mathbb{R}^k$ contenant $O \times \{0\}$ tel que toute section locale à la fois de α et de β et à valeurs dans D est une restriction de la section nulle. On construit ensuite une famille $\{Z_1, \cdots, Z_k\}$ de champs de vecteurs sur $\mathcal{A}|_O$ qui vérifient (moyennant l'identification de $\mathcal{A}|_O$ à $O \times \mathbb{R}^k$) :

i) $T\alpha(Z_i) = 0$ et $T\beta(Z_i)(x,t) = p(Y_i(\beta(x,t))) = X_i(\beta(x,t))$, $\forall (x,t) \in O \times \mathbb{R}^k$;

ii) $[Z_i, Z_j](x,t) = \sum_{l=1}^k f_{ij}^l(\beta(x,t))Z_l(x,t)$, $\forall (x,t) \in O \times \mathbb{R}^k$.

Il existe un ouvert G de $O \times \mathbb{R}^k$ contenant $O \times \{0\}$ et une unique structure de quasi-graphoïde local sur G de source α et de but β, les flots des champs Z_i étant des translations locales à gauche de ce groupoïde local.

On obtient ainsi une famille $\mathcal{U} = \{G_i \rightrightarrows O_i \ ; \ i \in I\}$ où $\{O_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de M, $G_i \rightrightarrows O_i$ est un quasi-graphoïde local et qui satisfait à de bonnes conditions de recollement : il existe un quasi-graphoïde local $G_{\mathcal{U}}$ de base M tel que chaque G_i est un sous-quasi-graphoïde local de $G_{\mathcal{U}}$. Par construction $G_{\mathcal{U}}$ intègre $\mathcal{A}$.

Passage du local au global. On étend la notion d'équivalence de Morita [6] aux quasi-graphoïdes locaux ; on parle alors d'*isomorphisme Morita local*. On montre alors le

Lemme 1 *Si $(b,a) : Z \to O_0 \times O_1$ est un graphe d'un isomorphisme Morita local entre deux quasi-graphoïdes locaux alors Z peut être recouvert par des ouverts $\{V_j \ , \ j \in J\}$ tels que si S est une variété muni de deux submersions surjectives a_S et b_S sur $a(V_j)$ et $b(V_j)$, il existe au plus une application différentiable $\phi : S \to V_j$ telle que $b \circ \phi = b_S$ et $a \circ \phi = a_S$.*

L'ensemble $P_{\mathcal{U}}$ de tous les isomorphismes Morita locaux entre éléments de $\mathcal{U}$ se comporte presque comme un pseudogroupe. La différence essentielle réside dans le fait que l'on n'a pas une composition globale : si f et g sont deux éléments de $P_{\mathcal{U}}$, certaines restrictions de f sont composables avec certaines restriction de g, mais il n'y a pas de meilleur choix.

On définit la notion de *germe d'isomorphisme Morita local* : soit $(b_f, a_f) : Z_f \to O_0 \times O_1$ et $(b_g, a_g) : Z_g \to O'_0 \times O'_1$ des graphes respectivement de f et g deux isomorphismes Morita locaux entre éléments de $\mathcal{U}$. Soit $\gamma_f \in Z_f$ et $\gamma_g \in Z_g$. On dira que le *germe* de f en γ_f, noté $[f]_{\gamma_f}$, est égal au germe de g en γ_g, s'il existe un voisinage ouvert V_{γ_f} de γ_f dans Z_f (resp. V_{γ_g} de γ_g dans Z_g) et un difféomorphisme $\Phi : V_{\gamma_f} \to V_{\gamma_g}$ qui envoie γ_f sur γ_g et tel que $a_g \circ \Phi = a_f$ et $b_g \circ \Phi = b_f$. Cela signifie qu'il existe une restriction de f égale à une restriction de g admettant pour graphe $(b_f, a_f) : V_{\gamma_f} \to b_f(V_{\gamma_f}) \times a_f(V_{\gamma_f})$. La *source* de $[f]_{\gamma_f}$ est $a_f(\gamma_f)$ et son *but* est $b_f(\gamma_f)$.

On construit ainsi le groupoïde des germes du "pseudogroupe" $P_{\mathcal{U}}$. Le lemme précédent garantit que ce groupoïde est différentiable et qu'il s'agit d'un quasi-graphoïde. De plus il "contient" $G_{\mathcal{U}}$ et intègre $\mathcal{A}$ par construction.

Références

[1] B. Bigonnet. *Holonomie et graphe de certains feuilletages avec singularités.* PhD thesis, Université Paul Sabatier, 1986.

[2] W.T. van Est. *Rapport sur les S-atlas. Astérisque*, 116 :235–292, 1984.

[3] M. Hilsum and G. Skandalis. *Morphismes K-orientés d'espaces de feuilles et fonctorialité en théorie de Kasparov. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 20 (4) :325–390, 1987.

[4] J. Pradines. *Troisième théorème de Lie pour les groupoïdes différentiables. CRAS*, 267 :21–23, 1968.

[5] J. Pradines. *How to define the differentiable graph of a singular foliation. C. de Top. et Geom. Diff. Cat.*, XXVI (4) :339–381, 1985.

[6] J. Renault. *C^*-algebras of groupoids and foliations. Proc. Sym. Pure Math.*, 38 :339–350, 1982.

[7] P. Stefan. *Accessible sets, orbits and foliations with singularities. Proc. of the London Math. Society*, 29 :699–713, 1974.