UFR MATHÉMATIQUES
Université Clermont Auvergne

Licence première année - portail Physique, SPI, Chimie

Mathématiques

(unité d'enseignement du premier semestre)

Notes de cours de François DUMAS - année 2023-2024

version du 12 juillet 2023

Ces notes correspondent au programme de l'unité d'enseignement de mathématiques du premier semestre de première année des licences scientifiques relevant du portail "physique, sciences pour l'ingénieur, chimie". Elles sont organisées en 8 leçons correspondant chacune à une séance de cours d'une heure et demi, suivie d'une séance de travaux dirigés d'une heure et demi également.

Il subsiste probablement dans ce document des coquilles ou des erreurs. Merci de m'en faire part.

Francois.Dumas@uca.fr

Table des matières

1 Introduction des nombres complexes

1.1 Introduction

On connaît les ensembles de nombres $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Des équations de degré 2 qui n'ont pas de solution dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$ peuvent avoir des solutions dans $\mathbb{R}$, par exemple l'équation $x^2 = 3$. Plus généralement, toute équation de la forme $x^2 = a$ a des solutions dans $\mathbb{R}$ *lorsque le réel a est positif*. Le but de ce qui suit est de construire un ensemble plus grand que $\mathbb{R}$, que l'on va noter $\mathbb{C}$, dans lequel toutes les équations de degré 2 ont des solutions (et même de tous degrés).

Le principe est le suivant. On considère l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de réels (x, y), avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Un tel couple s'écrit $x.(1, 0) + y.(0, 1)$. On a sur $\mathbb{R}^2$ l'addition usuelle. On construit une multiplication entre couples tels que le couple $i = (0, 1)$ vérifie $i \times i = (-1, 0)$. L'ensemble $\mathbb{R}^2$, lorsqu'on le munit de cette multiplication, est noté $\mathbb{C}$ et appelé l'ensemble des nombres complexes.

1.2 Forme algébrique d'un nombre complexe

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. Tout nombre complexe z s'écrit de façon unique :

$$\boxed{z = x + iy \quad \text{avec } x, y \in \mathbb{R}.}$$

Le réel x s'appelle la *partie réelle* de z, le réel y s'appelle la *partie imaginaire* de z ; on note parfois :

$$\boxed{x = \mathrm{Re}(z), \quad y = \mathrm{Im}(z).}$$

Deux nombres complexes sont égaux s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire :

$$\boxed{\text{si } x, x', y, y' \in \mathbb{R}, \quad x + iy = x' + iy' \iff x = x' \text{ et } y = y'}$$

Un nombre complexe est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle. Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle s'appelle un imaginaire pur ; leur ensemble est noté $i\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{si } \ x, y \in \mathbb{R}, \quad \text{alors} \quad [x + iy \in \mathbb{R} \iff y = 0], \quad \text{et} \quad [x + iy \in i\mathbb{R} \iff x = 0].}$$

1.3 Addition des nombres complexes.

La somme de deux nombres complexes s'obtient en additionnant leurs parties réelles et leurs parties imaginaires :

$$\boxed{(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y').}$$

Propriétés. Cette addition a toutes les bonnes propriétés usuelles : commutativité $[z + z' = z' + z]$, associativité $[z+(z'+z'') = (z+z')+z'']$. Le nombre complexe $0 = 0+i0$ est neutre pour cette addition $[0 + z = z + 0 = z$ pour tout $z \in \mathbb{C}]$. L'opposé d'un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ est $-z = (-x) + i(-y)$; c'est le nombre complexe tel que $z + (-z) = (-z) + z = 0$.

1.4 Multiplication des nombres complexes

Le produit de deux nombres complexes est défini de façon à prolonger le produit des réels et à partir de la formule fondamentale :

$$\boxed{i^2 = i \times i = -1.}$$

Le produit de deux nombres complexes quelconques est donné par la formule :

$$\boxed{(x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y).}$$

Propriétés. Cette multiplication a toutes les bonnes propriétés usuelles : commutativité $[zz' = z'z]$, associativité $[z(z'z'') = (zz')z'']$. Le nombre complexe $1 = 1 + i0$ est neutre pour cette addition $[1z = z1 = z$ pour tout $z \in \mathbb{C}]$. La multiplication est distributive sur l'addition $[z(z' + z'') = zz' + zz'']$.

1.5 Inverse d'un nombre complexe non-nul

Tout nombre complexe z non-nul admet un inverse noté z^{-1} ou $\frac{1}{z}$; c'est par définition l'unique nombre complexe tel que $zz^{-1} = z^{-1}z = 1$; sa partie réelle et sa partie imaginaire sont données par la formule fondamentale :

$$\boxed{\frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}} \quad \text{pour } x, y \in \mathbb{R} \text{ non tous les deux nuls.}$$

En effet. Remarquons d'abord que le fait que $z = x + iy \neq 0$ équivaut à dire que x et y ne sont pas simultanément nuls, donc $x^2 + y^2 \neq 0$. On pose alors $x' = \frac{x}{x^2+y^2}$ et $y' = -\frac{y}{x^2+y^2}$. On calcule :

$$xx' - yy' = x\frac{x}{x^2+y^2} - y\frac{-y}{x^2+y^2} = 1 \text{ et } xy' + x'y = x\frac{-y}{x^2+y^2} + \frac{x}{x^2+y^2}y = 0,$$

ce qui prouve que $(x + iy)(x' + iy') = 1$ et montre le résultat voulu.

1.6 Conjugué d'un nombre complexe

On appelle conjugué d'un nombre complexe z le nombre complexe noté $\overline{z}$ qui a la même partie réelle que z et une partie imaginaire opposée :

$$\boxed{\text{si } z = x + iy \text{ avec } x, y \in \mathbb{R}, \quad \text{alors } \overline{z} = x - iy.}$$

Les propriétés suivantes sont immédiates :

$\overline{\overline{z}} = z$	$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z}'$ et $\overline{-z} = -\overline{z}$
$z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$ et $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$	$\overline{zz'} = \overline{z}.\overline{z}'$
$\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ et $\overline{z} = -z \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$	si $z \neq 0$, $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$

1.7 Module d'un nombre complexe.

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe quelconque, avec $x, y \in \mathbb{R}$. Le produit de z par son conjugué est toujours un réel positif :

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \geq 0.$$

On appelle module de z, noté $|z|$, la racine carrée de ce réel :

$$\boxed{\text{si } z = x + iy \text{ avec } x, y \in \mathbb{R}, \quad \text{alors } |z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}_+.}$$

On résume dans le tableau ci-dessous les principales propriétés du module.

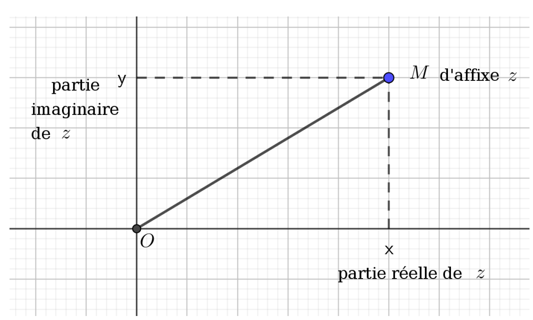
$\lvert z\rvert = 0 \Leftrightarrow z = 0$	$\lvert zz'\rvert = \lvert z\rvert.\lvert z'\rvert$	$\lvert z + z'\rvert \leq \lvert z\rvert + \lvert z'\rvert$
$\lvert\overline{z}\rvert = \lvert z\rvert$ et $\lvert -z\rvert = \lvert z\rvert$	$\lvert z^{-1}\rvert = \lvert z\rvert^{-1}$ pour $z \neq 0$	*inégalité triangulaire*

1.8 Interprétation géométrique.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, tout point M est déterminé par ses deux coordonnées réelles : son abscisse x et son ordonnée y.

Le nombre complexe $z = x+iy$ est alors appelé l'*affixe* du point M.

Réciproquement, il est clair qu'à tout nombre complexe $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, on associe l'unique point M de coordonnées (x, y) dans le repère choisi.



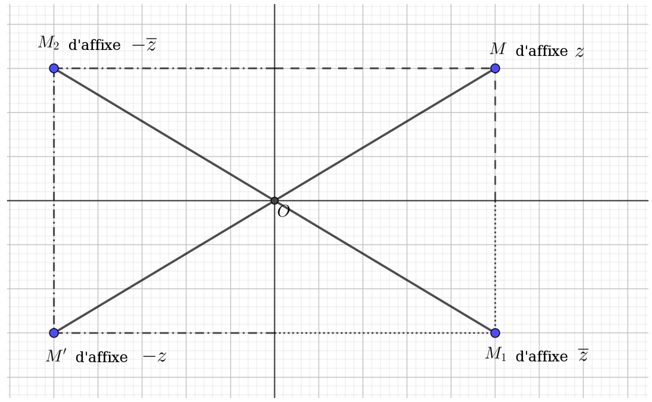
On a ainsi une correspondance entre les points du plan et les nombres complexes.

Il est clair que, si M d'affixe z, alors :

• le point M' d'affixe $-z$ est le symétrique de M par rapport à l'origine O du repère.

• le point M_1 d'affixe $\overline{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses du repère.

• le point M_2 d'affixe $-\overline{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées du repère.



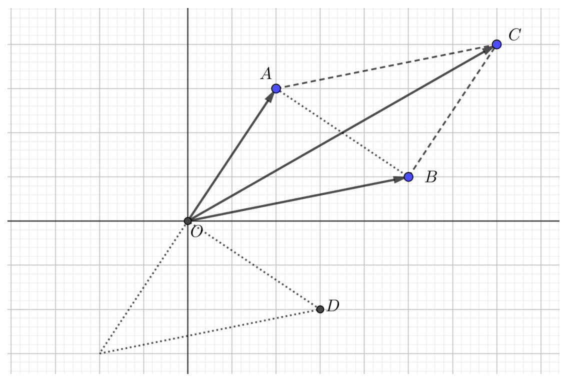
De plus, par définition du module d'une part et de la distance dans le plan d'autre part, on a :

> Pour tout point M d'affixe z, le réel positif $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = OM$
> est la distance entre le point M et l'origine O du repère.

Il en résulte que, si A et B sont deux points d'affixes respectives z_A et z_B, alors :

• $|z_B - z_A| = AB = OD$
où D est le point d'affixe $z_B - z_A$.

• $|z_A + z_B| = OC$
où C est le point défini par la somme de vecteurs (règle du parallélogramme) : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$.



1.9 Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations de degré 2 à coefficients réels

a) Equations de la forme $z^2 = \Delta$, avec $\Delta \in \mathbb{R}$

Il s'agit donc de déterminer les racines carrées dans $\mathbb{C}$ d'un nombre réel Δ fixé.

1. Si $\Delta > 0$, on sait ses racines carrées sont $\sqrt{\Delta}$ et $-\sqrt{\Delta}$, qui sont dans $\mathbb{R}$.

2. Si $\Delta < 0$, alors $-\Delta > 0$, et les racines carrées de Δ sont $i\sqrt{-\Delta}$ et $-i\sqrt{-\Delta}$, qui ne sont pas dans $\mathbb{R}$.

   En effet, cela provient simplement du fait que $(i\sqrt{-\Delta})^2 = i^2(\sqrt{-\Delta})^2 = -1 \times (-\Delta) = \Delta$, et de même pour son opposé. □

b) Equations de la forme $az^2 + bz + c = 0$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, qui est un nombre réel.

1. Si $\Delta > 0$, on sait que l'équation a deux solutions réelles distinctes :
$$\boxed{x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \text{avec } \Delta > 0.}$$

2. Si $\Delta = 0$, on sait que l'équation a une solution réelle double $-\frac{b}{2a}$.

3. Si $\Delta < 0$, on utilise l'étape précédente pour montrer que l'équation a deux solutions complexes distinctes, qui sont conjuguées l'une de l'autre :
$$\boxed{z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \quad \text{avec } \Delta < 0.}$$

1.10 Complément : formule du binôme

a) Convention de notation générale d'une somme. Supposons que l'on ait une famille de nombres réels ou complexes $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$. Pour alléger les notations, on note leur somme :

$$\boxed{a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k}.$$

L'indice inférieur sous le sigma donne le rang où démarre la somme (ici, c'est 0, mais ce peut être 1 ou n'importe quel autre entier naturel). L'indice supérieur sur le sigma donne le rang où se termine la somme (ici n). L'indice muet de sommation noté ici k peut être désigné par n'importe quelle autre lettre (souvent i, ou j,...).

Par exemple : $\sum_{k=0}^{5} k^2 = 0 + 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$, ou encore $\sum_{k=1}^{4} 2^k = 2 + 4 + 8 + 16 = 30$.

On peut ainsi écrire brièvement des formules générales (comme les deux suivantes vues au lycée) :

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \tfrac{1-x^{n+1}}{1-x}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \tfrac{n(n+1)}{2}.$$

b) Factorielle. Pour n un entier ≥ 0, on note $\boxed{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}$.

Ceci se lit "n factorielle". Par exemple, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. On ajoute la convention $0! = 1$.

c) Coefficients binomiaux. Ils sont définis par :

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \text{pour tous } n, k \text{ des entiers} \geq 0 \text{ tels que } n \geq k.}$$

On démontre (ce n'est pas immédiat) que *les coefficients binomiaux sont des entiers naturels.*

Par exemple, $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10.$

On a les formules suivantes

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{et} \quad \binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Ces formules permettent de calculer de proche en proche les coefficients binomiaux suivant le triangle de Pascal.

	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
...				...			

d) Formule du binôme. Soient a, b deux nombres réels ou complexes, et n un entier ≥ 0. Alors

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}.$$

Par exemple, avec $n = 2$ ou $n = 3$, on retrouve les identités remarquables bien connues :

$$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^k b^{2-k} = \binom{2}{0} a^0 b^2 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^2 b^0 = 1 \cdot b^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot a^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$(a+b)^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} a^k b^{3-k} = \binom{3}{0} b^3 + \binom{3}{1} ab^2 + \binom{3}{2} a^2 b + \binom{3}{3} a^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3.$$

1.11 Quelques exercices

Exercice 1. On considère les nombres complexes $z_1 = 1+i$, $z_2 = 3-2i$ et $z_3 = -1+3i$.

1. Placer dans le plan complexe les affixes de ces trois nombres. Calculer leurs modules.
2. Calculer z_1+z_2, z_2+z_3 et z_3-z_1, puis z_1z_2, z_2z_3 et z_3z_1.
3. Calculer $\overline{z}_1+z_2$, $z_2+\overline{z}_3$ et $\overline{z_3-z_1}$, puis $\overline{z}_1z_2$, $z_2\overline{z}_3$ et $\overline{z_3z_1}$.

Exercice 2. Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$4(-2+3i)+3(-5-8i)\ \ ;\ \ (2-i)(3+7i)\ \ ;\ \ (2-i)\,\overline{(1+i)}\ \ ;\ \ (1-i)^2\ \ ;\ \ (1+i)^3\ \ ;$$
$$\frac{1}{4-i}\ ;\ \frac{1+2i}{3+4i}\ ;\ \frac{1-i}{-6+5i}\ ;\ \frac{2-3i}{4i-1}.$$

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

$$(4-2i)z^2 = (1+5i)z, \qquad (1+4i)\bar{z}-3-5i = 1+2i, \qquad 2z+\bar{z} = 2+3i,$$
$$z+\bar{z} = 2, \qquad z-\bar{z} = 2, \qquad \bar{z} = z^2 \qquad (2+3i)\bar{z}-\overline{1-z} = \overline{7-3i}.$$

Exercice 4. On pose $j = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

1. Calculer $|j|$, j^2, j^3, $\dfrac{1}{j}$ puis $1+j+j^2$.
2. Représenter dans le plan complexe les affixes de j et j^2.

Exercice 5. Déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie :

$$-3 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 2 \text{ et } 1 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 3\,; \qquad |z-3+i| = 3\,; \qquad z = \overline{z}\,; \qquad z\overline{z} = 13.$$

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$3z^2+2z-1 = 0\,; \qquad z^2+3z+4 = 0\,; \qquad z^2+z+1 = 0$$

Exercice 7. Résoudre rapidement dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 16$ et représenter graphiquement ses solutions dans le plan complexe.

Exercice 8. Calculer sous forme algébrique les nombres complexes $(1+i)^6$ et $(2-i)^4$.

2 Nombres complexes et trigonométrie

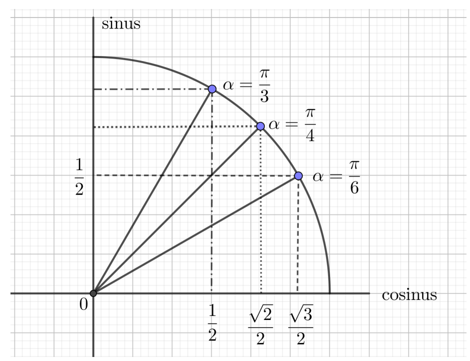
2.1 Quelques rappels de trigonométrie

Rappelons que :

- $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ sont des réels compris entre -1 et 1, définis quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$,
- ils vérifient $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$ et $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha$ pour tout entier k.
- On peut définir $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ dès lors que $\cos\alpha \neq 0$.

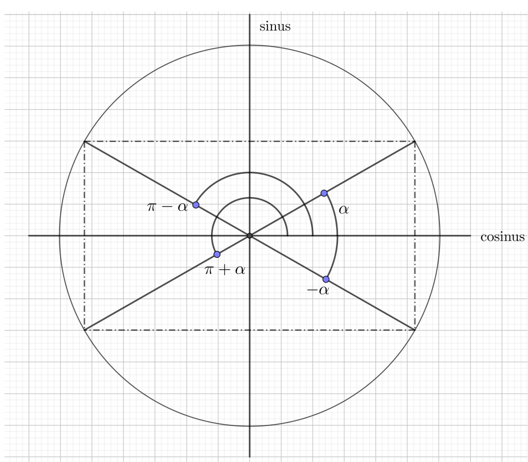
Il faut connaître quelques valeurs de référence des cosinus et sinus(les tangentes s'en déduisent) :

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

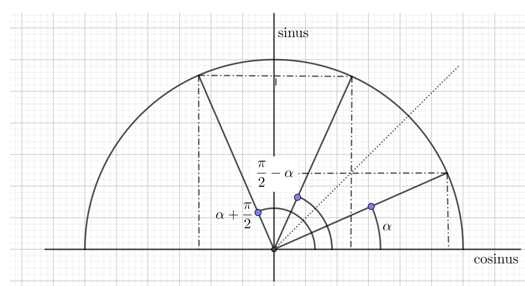


On peut déduire de nombreuses autres valeurs en utilisant les propriétés de symétrie :

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	$\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	$\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$



$\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin\alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$
$\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos\alpha$	$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$



Formule fondamentale : $\boxed{\cos^2 a + \sin^2 a = 1 \quad \text{pour tout } a \in \mathbb{R}}$

Il est utile de connaître aussi les relations pour la somme, où a et b sont deux réels :

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \qquad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b}$$

2.2 Argument d'un nombre complexe non-nul

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe quelconque, avec $x, y \in \mathbb{R}$. Notons ρ son module :

$$\boxed{\rho = |z| = \sqrt{\bar{z}z} = \sqrt{x^2 + y^2}.}$$

Si $\rho = 0$, alors $z = 0$, et réciproquement.

On supposera désormais que z est non-nul, donc $\rho > 0$.
Introduisons alors le nombre complexe $z_1 = \frac{1}{\rho} z$. Il s'écrit sous forme algébrique $z_1 = x_1 + iy_1$ avec :

$$x_1 = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{et} \quad y_1 = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

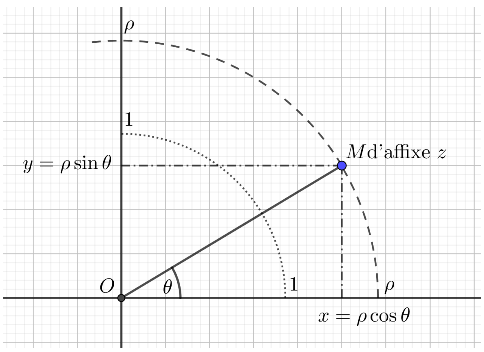
On a $|z_1| = |\frac{1}{\rho} z| = \frac{1}{|\rho|}|z| = \frac{1}{\rho}|z| = 1$. Ainsi les réels x_1 et y_1 vérifient $x_1^2 + y_1^2 = 1$.
Il existe donc un réel θ tel que $x_1 = \cos\theta$ et $y_1 = \sin\theta$. Ainsi on a montré que :

$$\boxed{\text{tout } z \in \mathbb{C} \text{ non-nul s'écrit :} \quad z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta), \quad \text{avec } \rho = |z| > 0, \ \text{ et } \ \theta \in \mathbb{R}.}$$

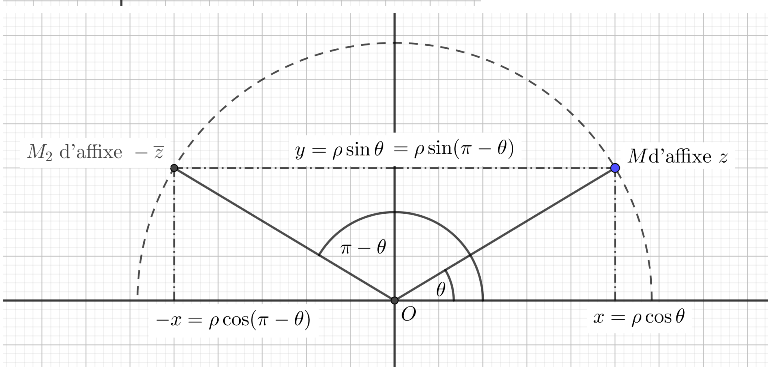
L'expression ci-dessus s'appelle la *forme trigonométrique* du nombre complexe non-nul z.

Un réel θ satisfaisant cette égalité s'appelle un *argument* du nombre complexe non-nul z.

On note $\theta = \arg z$ (modulo 2π, voir ci-dessous).

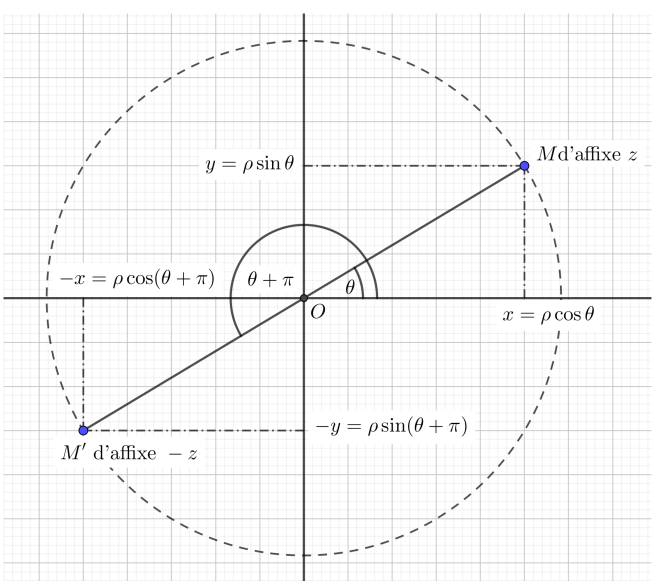


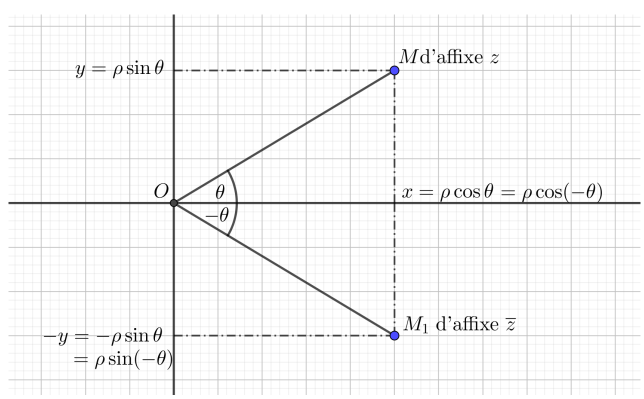
1. Par définition, θ est une mesure en radians de l'angle orienté des vecteurs $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ où M est le point du plan d'affixe z et I le point de l'axe des abscisses d'affixe 1.
2. *Attention* : θ n'est pas unique ;
   tout réel $\theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ est un autre argument de z.
   On appelle parfois argument principal de z, noté $\operatorname{Arg} z$, celui des arguments de z qui appartient à $[-\pi, \pi[$.



On a modulo 2π les égalités :

$\arg \overline{z} = -\arg z$
$\arg(-z) = \arg z + \pi$
$\arg(-\overline{z}) = \pi - \arg z$





2.3 Argument du produit de deux nombres complexes

a) Propriété fondamentale : *si θ est un argument de z et θ' un argument de z', alors $\theta+\theta'$ est un argument du produit zz'.*

Comme on sait déjà que $|zz'| = |z||z'|$, on peut donc résumer en :

$$\boxed{\rho(\cos\theta + i\sin\theta) \times \rho'(\cos\theta' + i\sin\theta') = \rho\rho'\,[\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')].}$$

Preuve. Soient $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = \rho'(\cos\theta' + i\sin\theta')$. On sait que $|zz'| = \rho\rho'$.
Posons $z_1 = \frac{1}{\rho}z = \cos\theta + i\sin\theta$ et $z_1' = \frac{1}{\rho'}z' = \cos\theta' + i\sin\theta'$, de sorte que $zz' = \rho\rho' z_1 z_1'$. On calcule :

$$\begin{aligned} z_1 z_1' = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') &= (\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta') \\ &= \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta'), \quad \text{ce qui montre le résultat voulu.} \end{aligned}$$

Une conséquence immédiate mais très importante pour les applications est la formule suivante :

b) Formule de Moivre : $\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).}$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

2.4 Notation exponentielle.

On introduit la notation : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta}, \quad \text{ou encore} \quad \boxed{\mathrm{e}^{i\,\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}.$$

Il en résulte immédiatement que l'on a, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\begin{aligned} |\,\mathrm{e}^{i\,\theta}\,| &= 1, \\ \overline{\mathrm{e}^{i\,\theta}} &= \mathrm{e}^{-i\,\theta}, \end{aligned}} \quad \text{d'où les } \textbf{formules d'Euler :} \quad \boxed{\begin{aligned} \cos\theta &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{i\,\theta} + \mathrm{e}^{-i\,\theta}), \\ \sin\theta &= \tfrac{1}{2i}(\mathrm{e}^{i\,\theta} - \mathrm{e}^{-i\,\theta}). \end{aligned}}$$

Comme conséquence de la propriété 2.3, on obtient :

$$\boxed{\mathrm{e}^{i\,\theta}\,\mathrm{e}^{i\,\theta'} = \mathrm{e}^{i\,(\theta+\theta')}} \quad \text{en particulier} \quad \boxed{(\mathrm{e}^{i\,\theta})^n = \mathrm{e}^{i\,n\theta}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{1}{\mathrm{e}^{i\,\theta}} = \mathrm{e}^{-i\,\theta}}$$

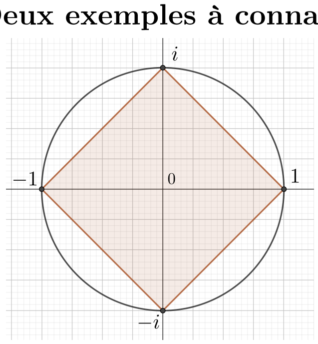
Avec cette notation : $\boxed{\text{tout } z \in \mathbb{C} \text{ non-nul s'écrit :} \quad z = \rho\,\mathrm{e}^{i\,\theta}, \quad \text{avec } \rho = |z| > 0, \ \text{ et } \ \theta \in \mathbb{R}.}$

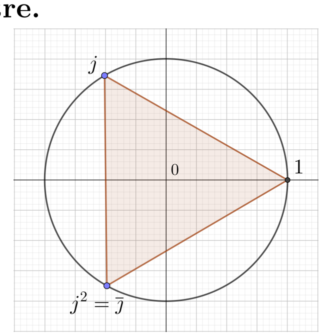
Cette expression est appelée la *forme exponentielle* du nombre complexe non-nul z.

Elle est particulièrement bien adaptée aux calculs multiplicatifs puisque, dans un produit, les modules se multiplient alors que les arguments s'ajoutent :

$$\boxed{\rho\,\mathrm{e}^{i\,\theta}\,.\,\rho'\,\mathrm{e}^{i\,\theta'} = (\rho\rho')\,\mathrm{e}^{i\,(\theta+\theta')}}, \quad \text{et en particulier} \quad \boxed{(\rho\,\mathrm{e}^{i\,\theta})^n = \rho^n\,\mathrm{e}^{i\,n\theta}}$$

Deux exemples à connaître.





$$i = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}, \quad i^2 = -1 = \mathrm{e}^{i\pi},$$
$$i^3 = -i = \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{2}} = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}, \quad i^4 = 1.$$

$$j = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}, \quad j^3 = 1,$$
$$j^2 = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i = \mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{3}} = \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}} = \bar{\jmath},$$
$$1 + j + j^2 = 0.$$

2.5 Deux applications classiques.

a) Linéarisation des puissances de $\sin$ **ou** $\cos$**.** Il s'agit d'exprimer $\cos^n x$ ou $\sin^n x$ comme une somme de $\cos(px)$ ou de $\sin(px)$ avec $p \leq n$. Pour cela, on applique directement les formules d'Euler, et la formule du binôme.

Exemple : $\cos^3 x = \frac{1}{2^3}(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix})^3 = \frac{1}{2^3}\left[(\mathrm{e}^{ix})^3 + 3(\mathrm{e}^{ix})^2(\mathrm{e}^{-ix}) + 3(\mathrm{e}^{ix})(\mathrm{e}^{-ix})^2 + (\mathrm{e}^{-ix})^3\right]$
$= \frac{1}{2^3}\left[\mathrm{e}^{3ix} + \mathrm{e}^{-3ix} + 3(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix})\right] = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$

b) Problème réciproque. Il s'agit d'exprimer $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ comme un polynôme en $\cos x$ ou $\sin x$. Pour cela, on applique directement la formule de Moivre, et la formule du binôme.

Exemple : On part du développement :

$$\begin{aligned}(\cos x + i\sin x)^3 &= \cos^3 x + 3\cos^2 x(i\sin x) + 3\cos x(i\sin x)^2 + (i\sin x)^3\\ &= \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x + i(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x),\end{aligned}$$

d'où : $\cos(3x) = \mathrm{Re}(\cos x + i\sin x)^3 = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x$
et $\quad\sin(3x) = \mathrm{Im}(\cos x + i\sin x)^3 = 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x$.

2.6 Quelques exercices

Exercice 1. Ecrire sous forme trigonométrique et sous forme explonentielle les nombres complexes :

$$1 + i\sqrt{3}\,; \qquad 4i\,; \qquad 1+i\,; \qquad -2\,; \qquad \tfrac{1+i}{1-i}\,; \qquad j = -\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,; \qquad -7 + 7i\sqrt{3}\,; \qquad \tfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}.$$

Exercice 2. Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes :

$$\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{i\pi/3}\,; \qquad 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-3i\pi/3}\,; \qquad 2\,\mathrm{e}^{4i\pi}\,; \qquad \overline{\tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2i\pi/3}}\,; \qquad \tfrac{1+i}{1-i}.$$

Exercice 3. On pose : $z_1 = 4\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = 3i\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_3 = -2\,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes : z_2, z_3, $z_1 z_2$, $\frac{z_1 z_2}{z_3}$, $z_1(z_2 z_3)^2$.

Exercice 4. Déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie :

(1) $\arg(z^6) = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$; $\qquad$ (2) $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $3 \leq r \leq 4$ et $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$.

Exercice 5. Déterminer la distance entre les points A et B du plan d'affixes respectives $a = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b = -2 + i$.

Exercice 6.

1. Linéariser $\sin^4(x)$.
2. Exprimer $\cos(4x)$ et $\sin(4x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

3 Polynômes à coefficients réels ou complexes

Dans ce chapitre, la notation $\mathbb{K}$ désigne soit l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, soit l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

3.1 Qu'est ce qu'un polynôme ?

Un polynôme P est une expression de la forme

$$\boxed{P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots a_2X^2 + a_1X + a_0},$$

où les *coefficients* $a_0, \dots, a_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$ et X est un symbole formel appelé *indéterminée* du polynôme. On peut bien sûr utiliser la notation plus globale :

$$\boxed{P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n = \sum_{i=0}^{n} a_iX^i},$$

Pour tout $b \in \mathbb{K}$, on peut considérer le nombre $P(b) = a_nb^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots a_2b^2 + a_1b + a_0$, qui est un élément de $\mathbb{K}$, que l'on l'appelle *la valeur prise par P en b.*

On a déjà rencontré des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont “polynomiales". Effectivement, on associe au polynôme P la fonction $\widetilde{P} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par : $\widetilde{P}(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_2x^2 + a_1x + a_0$ pour tout $x \in \mathbb{K}$. Elle vérifie par construction $P(b) = \widetilde{P}(b)$ pour tout $b \in \mathbb{K}$. □

3.2 Notions de bases sur les polynômes

▶ Dans l'écriture 3.1, on a les notions suivantes :

1. Chacun des termes a_kX^k constituant la somme est appelé un *monôme.*
2. P est appelé le *polynôme nul* lorsque tous les coefficients $a_0, \dots, a_n$ sont nuls ; on note $P = 0$.
3. Si un polynôme P n'est pas le polynôme nul, on appelle *degré* de P le plus grand exposant de X devant lequel le coefficient n'est pas nul. On note $\deg(P)$ le degré du polynôme P :
$$\boxed{\deg P = \max\{j \in \mathbb{N} \mid a_j \neq 0\}}.$$
Par convention, le degré du polynôme nul vaut $\deg 0 = -\infty$.
4. Pour un polynôme non nul, le *coefficient dominant* est le coefficient a_n pour lequel $n = \deg P$ (ce coefficient dominant est non nul par définition du degré). Si le coefficient dominant vaut 1, on dit que le polynôme est *unitaire.* Un polynôme de degré 0 est un élément de $\mathbb{K}$.

▶ Conséquences importantes. On retiendra en particulier que, par définition :

— Deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils sont de même degré et que les coefficients de leurs monômes de même indice sont égaux :

$$\boxed{\left[\sum_{i=0}^{n} a_iX^i = \sum_{i=0}^{m} b_iX^i\right] \iff \left[n = m \text{ et } a_i = b_i \text{ pour tout } 0 \leq i \leq n\right]}.$$

— En particulier, un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

$$\boxed{\left[\sum_{i=0}^{n} a_iX^i = 0\right] \iff \left[a_i = 0 \text{ pour tout } 0 \leq i \leq n\right]}.$$

▶ Notations. On note $\mathbb{K}[X]$ désigne l'ensemble de tous les polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Pour tout entier $N \geq 0$, on note $\mathbb{K}_N[X]$ l'ensemble de tous les polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à N.

3.3 Addition des polynômes

L'addition de deux polynômes est définie de façon naturelle, en additionnant terme à terme les monômes de même indice.

EXEMPLES. $(2X^3+5X^2-X+2)+(X^3-4X^2+3X-3)$
$= (2+1)X^3+(5-4)X^2+(-1+3)X+(2-3) = 3X^3+X^2+2X-1.$

$(3X^3+6X^2-4X+7)+(X^3+X^2+4X-5) = 4X^3+7X^2+2.$

$(3X^3-4X+1)+(5X^2+7X) = 3X^3+5X^2+3X+1.$

On peut donner la formule générale :

$$\boxed{\text{Si } \ P=\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \ \text{ et } \ Q=\sum_{i=0}^{m} b_i X^i, \ \text{ alors } \ P+Q=\sum_{i=0}^{\max(n,m)} (a_i+b_i)X^i},$$

avec la convention de notation $a_i = 0$ si $i > n$ et $b_i = 0$ si $i > m$.

Il en résulte que : $\boxed{\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)}$.

Cette addition vérifie de façon évidente que, pour tous $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$, on a :

$$P+Q=Q+P, \quad (P+Q)+R=P+(Q+R), \quad P+0=P.$$

3.4 Produit d'un polynôme par un nombre réel ou complexe

Le produit d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ par un nombre $\lambda \in \mathbb{K}$ est définie de façon naturelle en multipliant par λ chacun des monômes de P.

$$\boxed{\text{Si } \ P=\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \ \text{ et } \ \lambda \in \mathbb{K}, \ \text{ alors } \ \lambda.P=\sum_{i=0}^{n} \lambda a_i\, X^i},$$

En combinant ce type de produit avec des sommes (ou des différences), on peut calculer des *combinaisons linéaires* de polynômes.

EXEMPLE. Prenons $P = X^3-X^2+2X+1$ et $Q = 3X^2+X-4$. On peut calculer :
$P-Q = X^3-4X^2+X+5$; $2P-4Q = 2X^3-14X^2+18$; $\frac{1}{3}Q = X^2+\frac{1}{3}X-\frac{4}{3}$.

Ce produit "externe" vérifie de façon évidente que, pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a :

$$\lambda.(P+Q)=\lambda.P+\lambda.Q, \quad (\lambda+\mu).P=\lambda.P+\mu.P, \quad \lambda.(\mu.P)=(\lambda\mu).P, \quad 1.P=P, \quad 0.P=0.$$

3.5 Multiplication des polynômes

Pour comprendre comment l'on effectue le produit de deux polynômes, commençons par regarder la situation en petits degrés :

Soient $P = a_4X^4+a_3X^3+a_2X^2+a_1X+a_0$ et $Q = b_3X^3+b_2X^2+b_1X+b_0$.

On définit PQ comme étant le polynôme de degré 7 donné par :

$$\begin{aligned} PQ &= a_4b_3X^7+(a_4b_2+a_3b_3)X^6+(a_4b_1+a_3b_2+a_2b_3)X^5+(a_4b_0+a_3b_1+a_2b_2+a_1b_3)X^4 \\ &\quad +(a_3b_0+a_2b_1+a_1b_2+a_0b_3)X^3+(a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2)X^2+(a_1b_0+a_0b_1)X+a_0b_0. \end{aligned}$$

On peut donner la formule générale :

$$\boxed{\text{Si } \ P=\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \ \text{ et } \ Q=\sum_{i=0}^{m} b_i X^i, \ \text{ alors } \ PQ=\sum_{i=0}^{n+m} \Big(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}\Big)X^i},$$

Il en résulte que : $\boxed{\deg(PQ) = \deg P + \deg Q}$.

Cette multiplication vérifie de façon évidente que, pour tous $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$, on a :

$$PQ=QP, \quad (PQ)R=P(QR), \quad P(Q+R)=PQ+PR.$$

3.6 Polynôme dérivé

Pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$, on définit son polynôme dérivé P' en posant :

$$\boxed{\text{Si } \ P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i, \quad \text{alors} \quad P' = \sum_{i=1}^{n} i a_i X^{i-1}},$$

On en déduit que $\big[\ (P' = 0) \Leftrightarrow (P = a_0) \Leftrightarrow (\deg P = 0)\ \big]$; on dit alors que P est *constant*.
Il en résulte aussi que :

$$\boxed{\text{si } P \text{ est non constant, alors } \deg P' = \deg P - 1}.$$

Cette dérivation vérifie de façon évidente que, pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$(P+Q)' = P' + Q', \quad (\lambda.P)' = \lambda.P', \quad (PQ)' = P'Q + PQ'.$$

Exemple. Prenons $P = 3X^2 - 5X + 2$ et $Q = X^2 + X + 1$.
► On calcule $P + Q = 4X^2 - 4X + 3$, d'où $(P+Q)' = 8X - 4$,
Par ailleurs $P' = 6X - 5$ et $Q' = 2X + 1$, et on a bien $P' + Q' = 8X - 4 = (P+Q)'$.
► On calcule $PQ = 3X^4 - 2X^3 - 3X + 2$, d'où $(PQ)' = 12X^3 - 6X^2 - 3$.
Par ailleurs $P'Q = (6X-5)(X^2+X+1) = 6X^3 + X^2 + X - 5$
et $PQ' = (3X^2 - 5X + 2)(2X+1) = 6X^3 - 7X^2 - X + 2$
dont la somme est $12X^3 - 6X^2 - 3$. On a bien $(PQ)' = P'Q + PQ'$.

3.7 Multiples et diviseurs d'un polynôme

Soient A et B deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, avec $B \neq 0$. On dit que B divise A dans $\mathbb{K}[X]$ s'il existe un polynôme Q à coefficients dans $\mathbb{K}$ tel que $A = BQ$. On note alors : $B|A$.

$$\boxed{\big[\ B|A \text{ dans } \mathbb{K}[X]\ \big] \Longleftrightarrow \big[\text{ il existe } Q \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } A = BQ\big]}$$

On dit aussi que A est un multiple de B dans $\mathbb{K}[X]$, ou que B est un diviseur de A dans $\mathbb{K}[X]$.

Exemples. $X - 3$ et $X + 3$ divisent $X^2 - 9$ dans $\mathbb{R}[X]$ car $X^2 - 9 = (X-3)(X+3)$.
$2X + 5$ divise $2X^3 + 5X^2 + 2X + 5$ dans $\mathbb{R}[X]$ car $2X^3 + 5X^2 + 2X + 5 = (2X+5)(X^2+1)$.
$X + 2i$ divise $3X^2 + 12$ dans $\mathbb{C}[X]$ car $3X^2 + 12 = 3(X^2+4) = 3(X+2i)(X-2i)$.

3.8 Complément : division euclidienne de polynômes

La situation ci-dessus est un cas particulier simple du résultat plus général suivant (que nous ne démontrons pas ici) :

Théorème. Soient A et B deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, avec $B \neq 0$.
Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ tel que

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg B.$$

Trouver (Q, R) c'est effectuer la *division euclidienne* de A par B dans $\mathbb{K}[X]$.
Le polynôme A est appelé le *dividende*, B le *diviseur*, Q le *quotient* et R le *reste*.

► Remarque 1 (lien avec ce qui précède). Dire que B divise A signifie donc que le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

► Remarque 2 (utile pour la suite). Pour tout $b \in \mathbb{K}$, le reste de la division euclidienne de P par $X - b$ est égal à $P(b)$.

En effet, dans la division euclidienne $P = (X-b)Q + R$, le reste R vérifie $\deg R < \deg(X-b) = 1$, donc $R \in \mathbb{K}$, et la valeur prise par P en b est $P(b) = 0 \times Q(b) + R$, donc $R = P(b)$.

3.9 Quelques exercices

Exercice 1. Pour chacun des polynômes suivants, donner son degré et son coefficient dominant.

$$P_0 = 1 + \sqrt{3}X - 2X^2 \qquad P_1 = X^7 + 4X^8 + (1 - \mathrm{i})X^3$$
$$P_2 = 3X(1 + X^2) + 2X^3 - 1 \qquad P_3 = (\mathrm{i} + X)(1 + 3X^2 - \mathrm{i}X)$$
$$P_4 = \sum_{k=1}^{4} (k! + 1)X^k \qquad P_5 = (3X - 7X^2 + 4)'$$
$$P_6 = \big[X(X + 1)(X + 2)(X + 3)(X + 4)\big]' \qquad P_7 = (1 - X^n)(1 + X)^2 + X^{n+2}, \quad n \geq 0.$$

Exercice 2. Pour chacune des entrées du tableau ci-dessous, donner sous une forme adaptée et simple, la somme, le produit ou la dérivée des polynômes considérés :

Polynôme P	Polynôme Q	$P + Q$	$P \times Q$	P'	Q'
$2X - 1$	$X^2 - 2X + 2$	?	?	?	?
$3(X - 1)(X + 2)$	$(X + 3)^2$	?	?	?	?
$(X - 2)(4 - X)(X + 1)$	$X^3 - 5X^2 + 8$	?	?	?	?

Exercice 3. Déterminer les réels a, b et c pour lesquels l'égalité suivante est vraie :

$$2(X - a)(X + 4)^2 = 2X^3 + bX^2 + cX + 32.$$

Exercice 4. Trouver tous les polynômes P de degré inférieur ou égal à 3 tels que que l'on ait à la fois :

$$P(0) = 1, \quad P(1) = 0, \quad P(-1) = -2 \quad \text{et} \quad P(2) = 4.$$

Exercice 5. Trouver tous les polynômes Q de degré inférieur ou égal à 3 tels que :

$$Q(0) = Q'(0) = Q''(0) = Q'''(0) = 1.$$

Exercice 6 (pratique de la division euclidienne). Dans chacun des cas suivants, effectuer la division euclidienne de A par B dans $\mathbb{K}[X]$:

$$A = X^8 - 1 \qquad B = X^3 - 1$$
$$A = 3X^5 + 4X^2 + 1 \qquad B = X^2 + 2X + 3$$
$$A = 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1 \qquad B = X^3 + X + 2$$
$$A = X^4 - X^3 + X - 2 \qquad B = X^2 - 2X + 4.$$

Exercice 7.

a) Montrer que $X^3 + 2X^2 - 5X - 6$ est divisible par $X + 1$ et par $X - 2$ dans $\mathbb{R}[X]$.

b) On considère $P = X^3 - 3X^2 + 4$. Calculer $P(1)$. Est-ce que P est divisible par $X - 1$? Montrer que P est divisible par $(X - 2)^2$ dans $\mathbb{R}[X]$.

c) Quels sont les diviseurs de $X^3 + 9X$ dans $\mathbb{C}[X]$?

Exercice 8. Soient a et b deux nombres réels et $P = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$. Pour quelles valeurs de a et b le polynôme P est-il le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 9. A quelles conditions sur les réels a, b, c, le polynôme $X^4 + aX^2 + bX + c$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

4 Factorisation des polynômes à coefficients réels ou complexes

Comme dans le chapitre précédent, la notation $\mathbb{K}$ désigne soit l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, soit l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

4.1 Notion de polynôme irréductible

Quel est le problème ? Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. On se pose la question de savoir s'il a des diviseurs, au sens de la définition introduite en 3.7. Une première observation est que toute constante non-nulle $\lambda \in \mathbb{K}^*$ est un diviseur de P puisque l'on peut écrire $P = \lambda.\frac{1}{\lambda}P$, avec λ polynôme de degré nul et $\frac{1}{\lambda}P$ polynôme de même degré que P. Une seconde observation est que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, le polynôme λP est un diviseur de P puisque que l'on a de même $P = \frac{1}{\lambda}.\lambda P$. La notion de polynôme irréductible correspond aux situations où ces deux cas triviaux, qui sont toujours vérifiés, correspondent aux seuls diviseurs de P.

a) Définition. Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit *irréductible* si $\deg(P) \geq 1$ et si ses seuls diviseurs sont les constantes λ et les polynômes de la forme λP avec $\lambda \in \mathbb{K}^\star$.

Exemples

1. Un polynôme de degré 1 est toujours irréductible (car s'il s'écrit comme un produit de deux polynômes, l'un des deux est de degré 0, donc est une constante).

2. $P = X^3 + 2X^2 - X - 2$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ car on a $P = (X-1)(X^2+3X+2)$. Mais X^2+3X+2 n'est pas non plus irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ car $X^2+3X+2 = (X+2)(X+1)$. Finalement $P = (X-1)(X+2)(X+1)$, avec chacun des trois facteurs qui est irréductible.

3. $Q = X^4-1$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ car $Q = (X^2-1)(X^2+1) = (X-1)(X+1)(X^2+1)$. Dans $\mathbb{R}[X]$, on montre que X^2+1 est irréductible, et on ne peut pas décomposer davantage Q. Mais dans $\mathbb{C}[X]$, on a $X^2+1 = (X-i)(X+i)$, d'où $Q = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i)$.

Le principe mis en œuvre dans ces exemples est général et aboutit au résultat suivant.

b) Théorème de factorisation. Soit A un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ avec $\deg A \geq 1$.
Il existe un entier $r \geq 1$, des polynômes irréductibles unitaires $P_1, P_2, \dots, P_r$ distincts, des entiers strictement positifs $k_1, k_2, \dots, k_r$ et une constante $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, tels que

$$A = \lambda\, P_1^{k_1}\ P_2^{k_2}\ \cdots\ P_r^{k_r}.$$

Cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

4.2 Racines d'un polynôme

a) Notion de racine. Soit P un polynôme dans $\mathbb{K}[X]$. On appelle *racine de P dans* $\mathbb{K}$ tout nombre $c \in \mathbb{K}$ tel que $P(c) = 0$.

► *Caractérisation d'une racine en termes de divisibilité.* Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $c \in \mathbb{K}$.

$$\boxed{\big(c \text{ est une racine dans } \mathbb{K} \text{ de } P\big) \iff \big(X - c \ \text{ divise } P \text{ dans } \mathbb{K}[X]\big)}$$

En particulier, un polynôme non nul $P \in \mathbb{K}[X]$ admet au plus $\deg P$ racines dans $\mathbb{K}$.

b) Notion de multiplicité d'une racine. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq 0$, $c \in \mathbb{K}$ une racine de P et $m \in \mathbb{N}^\star$. On dit que c est racine de P *avec multiplicité m* lorsque

$$P(c) = P'(c) = P''(c) = \cdots = P^{(m-1)}(c) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(c) \neq 0.$$

Si $m = 1$ on parle de racine simple, si $m = 2$ on parle de racine double.

► *Caractérisation d'une racine multiple en termes de divisibilité.* Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq 0$, $c \in \mathbb{K}$ une racine de P et $m \in \mathbb{N}^\star$.

$$\big(c \text{ racine de } P \text{ dans } \mathbb{K} \text{ de multiplicité } m\big) \iff \begin{cases} (X-c)^m \quad \text{divise } P \text{ dans } \mathbb{K}[X], \\ (X-c)^{m+1} \text{ ne divise pas } P \text{ dans } \mathbb{K}[X]. \end{cases}$$

Au plan pratique, cela se traduit pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ non-nul, tout $c \in \mathbb{K}$ et tout $m \in \mathbb{N}^\star$, par :

$$\big(c \text{ racine de } P \text{ de multiplicité } m\big) \iff \text{il existe } Q \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } \begin{cases} P = (X-c)^m Q \\ Q(c) \neq 0 \end{cases}.$$

Exemples

1. Soit $P = X^4 - 3X^3 + 3X^2 - X = X(X-1)^3$. On a $P(0) = 0$, donc 0 est une racine réelle de P, donc X divise P. On calcule $P(X) = X(X^3 - 3X^2 + 3X - 1) = X(X-1)^3$. On conclut que 0 est racine simple et 1 est racine triple de P dans $\mathbb{R}$.

2. Soit $P = X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + X - 1$. On a $P(1) = 0$, donc 1 est une racine réelle de P, donc $X-1$ divise P. On calcule $P = (X-1)(X^4+2X^2+1) = (X-1)(X^2+1)^2$. Le polynôme P n'a qu'une seule racine réelle, qui est 1, qui est une racine simple. Si l'on considère P comme élément de $\mathbb{C}[X]$, on a $P = (X-1)(X-i)^2(X+i)^2$. Donc dans $\mathbb{C}$, P admet 1 comme racine simple, et i et $-i$ comme racines doubles.

4.3 Cas des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$

Tout repose sur un théorème profond, non-trivial à démontrer, dit théorème de d'Alembert-Gauss, qui établit que :

(a) *Tout polynôme non constant à coefficients dans $\mathbb{C}$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.*

On peut reformuler ce résultat sous la forme plus précise suivante.

(a') *Tout polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$, de degré $N \geq 1$, a exactement N racines dans $\mathbb{C}$ (en tenant compte de la multiplicité).*

Il en résulte que l'on connaît les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.

(b) *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1, c'est-à-dire de la forme $\lambda(X-b)$ où λ et b sont deux nombres complexes avec $\lambda \neq 0$.*

Ceci permet de formuler de façon effective et simple un théorème de factorisation dans $\mathbb{C}[X]$.

(c) *Pour tout polynôme P non constant à coefficients dans $\mathbb{C}$, il existe un entier $r \geq 1$, des nombres complexes $b_1, b_2, \ldots, b_r$ distincts, des entiers strictement positifs $k_1, k_2, \ldots, k_r$ et un nombre complexe λ non nul tels que*

$$P = \lambda(X-b_1)^{k_1}(X-b_2)^{k_2}\cdots(X-b_r)^{k_r}.$$

Cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs. Les nombres complexes b_i correspondent exactement aux racines de P dans $\mathbb{C}$. La multiplicité de b_i est donnée par l'entier k_i.

4.4 Cas des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$

La passage de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$ repose sur l'observation facile suivante.

(a) *Si $c \in \mathbb{C}$ est racine d'un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{R}$ alors $\overline{c}$ est aussi racine de P.*

Il suffit pour justifier cette observation de remarquer que $P(c) = 0$ implique $\overline{P(c)} = P(\overline{c}) = 0$.
Il en résulte que l'on connaît les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

(b) *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont :*

1. *d'une part, tous les polynômes de degré 1, c'est-à-dire de la forme $\lambda(X - b)$ où λ et b sont deux nombres réels avec $\lambda \neq 0$,*
2. *d'autre part tous les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif, c'est-à-dire de la forme $\lambda(X^2 + pX + q)$ où λ, p et q sont des réels tels que $\lambda \neq 0$ et $p^2 - 4q < 0$.*

On obtient ainsi un théorème de factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ sous la forme suivante.

(c) *Tout polynôme P non constant à coefficients dans $\mathbb{R}$ s'écrit sous la forme*

$$P = \lambda(X - b_1)^{k_1} \cdots (X - b_r)^{k_r} (X^2 + p_1 X + q_1)^{\ell_1} \cdots (X^2 + p_s X + q_s)^{\ell_s}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}^\star$, $b_1, \ldots, b_r$ sont des réels, $p_1, \ldots, p_s, q_1, \ldots, q_s$ sont des réels avec $p_i^2 - 4q_i < 0$ pour tout $1 \leq i \leq s$, et les k_i et les ℓ_i sont des entiers positifs.

Cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs. Les nombres complexes b_i correspondent exactement aux racines de P dans $\mathbb{R}$. La multiplicité de b_i est donnée par l'entier k_i.

4.5 Remarques sur les liens entre irréductibilité et racines dans $\mathbb{R}[X]$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non nul.

1. Il est faux de penser que si P n'a pas de racine, alors il est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

   Par exemple, $P = X^4 + 5X^2 + 4 = (X^2 + 1)(X^2 + 4)$ n'a pas de racine réelle mais n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Il est faux de penser que, si P est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, alors P n'a pas de racine réelle.

   Par exemple, $P = 3X - 6 = 3(X - 2)$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ car c'est un polynôme de degré 1 de $\mathbb{R}[X]$, et 2 est racine réelle de P.
3. En revanche, si $\deg P = 2$, alors P est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si P n'a pas de racine réelle.

   Ce résultat découle du fait que les seuls polynômes de degré 2 irréductibles sur $\mathbb{R}$ sont ceux de discriminant strictement négatif.
4. Notons aussi que, si P est de degré impair, alors P admet nécessairement une racine réelle.

   Cela découle du point (a) de 4.4. On peut aussi le déduire du fait que la fonction polynomiale associée $\widetilde{P}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\lim_{-\infty} \widetilde{P} = \pm\infty$ et $\lim_{+\infty} \widetilde{P} = \mp\infty$, ce qui implique d'après le théorème des valeurs intermédiaires que $\widetilde{P}$ s'annule pour au moins une valeur $c \in \mathbb{R}$.

4.6 Relations entre coefficients et racines (cas des polynômes de degré 2)

Soit $P = aX^2 + bX + c$ un polynôme de degré 2 à coefficients complexes. Si u et v sont deux racines distinctes de P alors on a

$$u + v = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad uv = \frac{c}{a}.$$

Il suffit pour le vérifier d'identifier les coefficients dans $a(X - u)(X - v) = aX^2 + bX + c$.

4.7 Quelques exercices

Exercice 1. Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine 1 du polynôme

$$A = X^5 - 5X^4 + 14X^3 - 22X^2 + 17X - 5.$$

Exercice 2.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$ le polynôme $M = X^3 - 3X + \lambda$ a-t-il une racine double ? Quelle est alors l'autre racine ?
2. Pour quelle(s) valeur(s) de a le polynôme $(X+1)^7 - X^7 - a$ admet-il une racine multiple réelle ?

Exercice 3. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants :

$$Q_0 = X^2 + 1, \qquad Q_1 = X^2 - 3X - 4, \qquad Q_2 = X^2 - 2X + 2, \qquad Q_3 = X^3 - 8.$$

Exercice 4.

1. Montrer que le polynôme $S = 2X^3 - 3X^2 + 1$ admet une racine double. En déduire la décomposition de S en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Mêmes questions avec le polynôme $T = X^4 + 2X^2 - 8X + 5$.

Exercice 5. Décomposer le polynôme $Q = X^4 - 5X^3 + 13X^2 - 19X + 10$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, après avoir calculé $Q(1)$ et $Q(2)$.

Exercice 6. Décomposer le polynôme $P = X^5 + X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 4X + 4$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$, après avoir calculé $P(-1)$.

Exercice 7. Montrer que la propriété 4.6 du cours se généralise en degré 3 sous la forme suivante : si $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ est un polynôme de degré 3 à coefficients complexes et si u, v et w sont trois racines distinctes de P alors on a

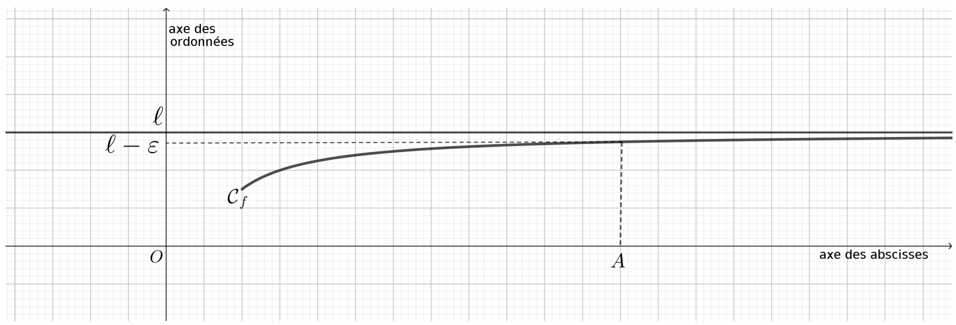
$$u + v + w = -\frac{b}{a}, \quad uv + vw + wu = \frac{c}{a} \quad \text{et} \quad uvw = -\frac{d}{a}.$$

5 Limite d'une fonction réelle d'une variable réelle

5.1 Première exemple de situation : limite finie en l'infini

a) Considérons une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Supposons qu'elle est définie au voisinage de $+\infty$, c'est-à-dire au moins sur un intervalle de la forme $]A, +\infty[$, où A est un réel. Soit ℓ un réel fixé.
On dit que f admet ℓ pour limite en $+\infty$, ou encore que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$, lorsque l'on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on veut de ℓ, à condition de prendre x suffisamment grand. On note alors :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell}$$



Dire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ signifie donc que :

> la distance entre $f(x)$ et ℓ peut être rendue aussi petite que l'on veut à condition de prendre x suffisamment grand,

ou encore que :

> pour tout réel $\varepsilon > 0$, on a $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ dès lors que x est plus grand qu'un certain réel $A > 0$ (qui dépend bien sûr du ε choisi),

ou encore que :

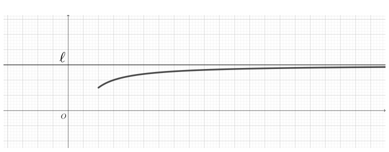
> quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que, si $x \in \,]A, +\infty[$, alors $f(x) \in \,]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$,

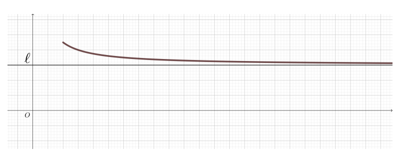
ce que l'on traduit en disant que :

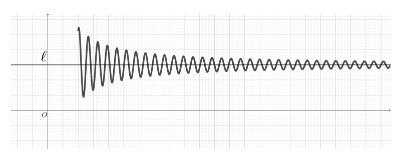
> pour tout voisinage J de ℓ, il existe un voisinage I de $+\infty$ tel que : $x \in I \Rightarrow f(x) \in J$.

b) Si l'on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan, on a une interprétation graphique immédiate de cette proriété :

$$\boxed{[\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell\ ] \ \Leftrightarrow\ [\text{ la droite d'équation } y = \ell \text{ est asymptote (horizontale) à } \mathcal{C}_f \text{ en } +\infty\ ]}$$

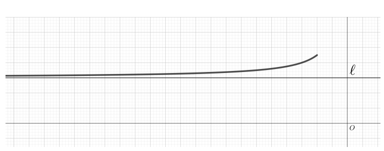


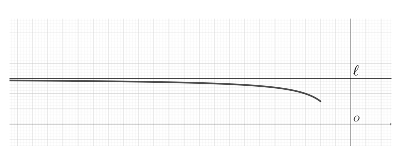




c) On a une notion analogue de limite finie en $-\infty$. On note alors :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell}$$





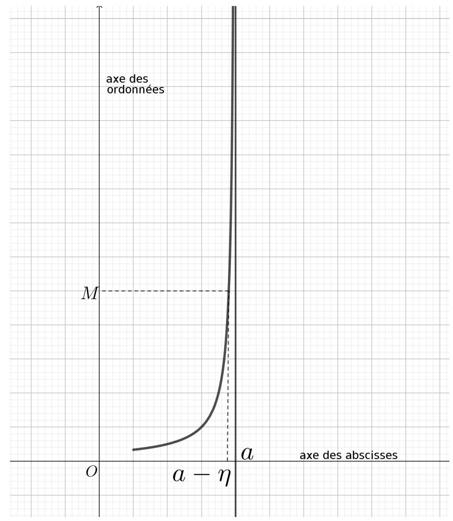
5.2 Deuxième exemple de situation : limite infinie en une valeur finie

a) Considérons une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Soit a un réel tel que f est définie dans un voisinage à gauche de a, c'est-à-dire au moins sur un intervalle de la forme $]a-\eta, a[$, où $\eta > 0$.

On dit que f admet $+\infty$ pour limite à gauche en a, ou encore que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a à gauche, lorsque l'on peut rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut, à condition de prendre x suffisamment proche de a à gauche.

On note alors $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = +\infty}$.



Dire que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = +\infty$ signifie donc que :

> $f(x)$ peut être rendu aussi grand que l'on veut à condition de prendre x suffisamment proche (à gauche) de a,

ou encore que :

> pour tout réel $M > 0$, on a $f(x) > M$ dès lors que la distance entre x et a est plus petite qu'un certain réel $\eta > 0$ (qui dépend bien sûr du M choisi),

ou encore que :

> quel que soit $M > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, si $x \in]a-\eta, a[$, alors $f(x) \in]M, +\infty[$,

ce que l'on traduit en disant que :

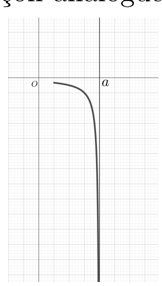
> pour tout voisinage J de $+\infty$, il existe un voisinage (à gauche) I de a tel que : $x \in I \Rightarrow f(x) \in J$.

b) Si l'on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan, on a une interprétation graphique immédiate de cette proriété :

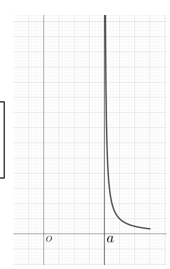
$$\boxed{\left[\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = +\infty\right] \Leftrightarrow \left[\text{la droite d'équation } x = a \text{ est asymptote (verticale) à } \mathcal{C}_f \text{ à gauche de } a\right]}$$

c) On définit de façon analogue les propriétés :

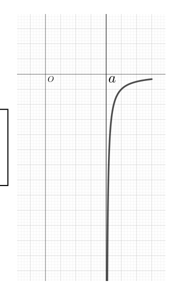
$\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = -\infty}$



$\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = +\infty}$



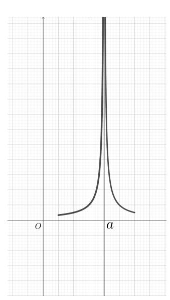
$\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = -\infty}$



Bien sûr ces différentes notions peuvent se combiner entre elles, et se combiner aussi avec des asymptotes horizontales, comme sur les exemples suivants :

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = +\infty$

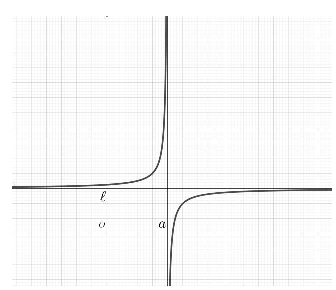


$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = +\infty$

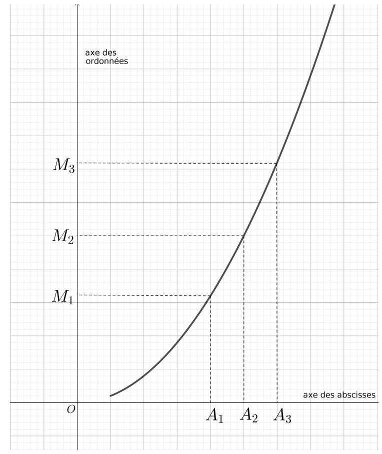
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$



5.3 Troisième exemple de situation : limite infinie en l'infini

a) Considérons une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



Supposons qu'elle est définie au voisinage de $+\infty$, c'est-à-dire au moins sur un intervalle de la forme $]A, +\infty[$, où A est un réel.

On dit que f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$, ou encore que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, lorsque l'on peut rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut, à condition de prendre x suffisamment grand.

On note alors $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$.

Dire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ signifie donc que :

> $f(x)$ peut être rendu aussi grand que l'on veut à condition de prendre x suffisamment grand

ou encore que :

> pour tout réel $M > 0$, on a $f(x) > M$ dès lors que x est plus grand qu'un certain réel $A > 0$ (qui dépend bien sûr du M choisi),

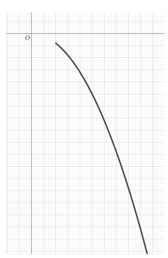
ou encore que :

> quel que soit $M > 0$, il existe $A > 0$ tel que, si $x \in]A, +\infty[$, alors $f(x) \in]M, +\infty[$,

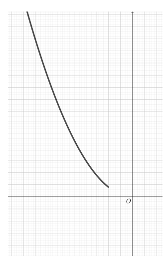
ce que l'on traduit en disant que :

> pour tout voisinage J de $+\infty$, il existe un voisinage I de $+\infty$ tel que : $x \in I \Rightarrow f(x) \in J$.

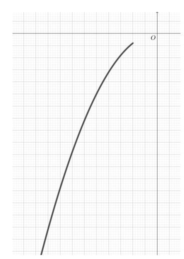
b) On définit de façon analogue les propriétés :



$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$

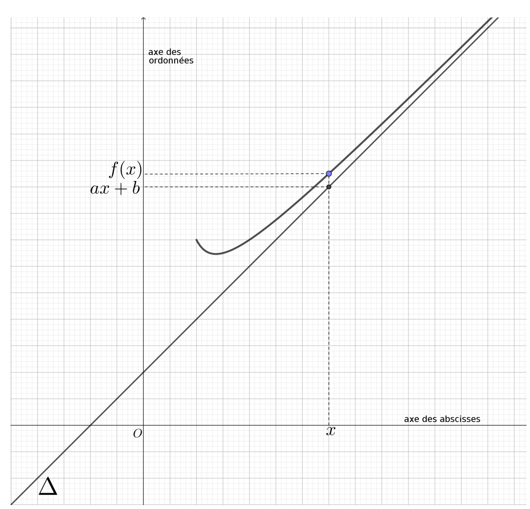


$\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$



$\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$

c) Attention : dans la situation où $f(x)$ tend vers ∞ lorque x tend vers ∞, on n'a pas forcément d'asymptote. Lorsque cela se produit, c'est une configuration particulière, dans laquelle on parle d'asymptote oblique.



Plus précisément, si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$,
et si Δ désigne une droite d'équation $y = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$,
on dit que Δ est une asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$ lorsque

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - (ax + b)\big) = 0.$$

5.4 Notion générale de limite

a) D'une façon générale, dire $\boxed{\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\omega}$ signifie que :

$$\boxed{\text{pour tout voisinage } J \text{ de } \omega, \text{ il existe un voisinage } I \text{ de } \alpha \text{ tel que } f(x)\in J \text{ pour tout } x\in I.}$$

Dans cette écriture, α peut désigner un réel a, ou $+\infty$, ou $-\infty$. De même ω peut désigner un réel ℓ, ou $+\infty$, ou $-\infty$.

b) Dans le cas où α est un réel, on peut être amené à distinguer un voisinage à droite ou un voisinage à gauche, et donc une limite à droite (on dit aussi par valeurs supérieures) et une limite à gauche (on dit aussi par valeurs inférieures).

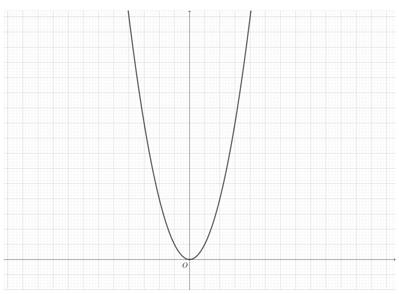
En particulier, si a et ℓ sont des réels,

$$\lim_{x\to a} f(x)=\ell \text{ signifie que : } \lim_{\substack{x\to a\\ >}} f(x) \text{ et } \lim_{\substack{x\to a\\ <}} f(x) \text{ existent et sont toutes les deux égales à } \ell.$$

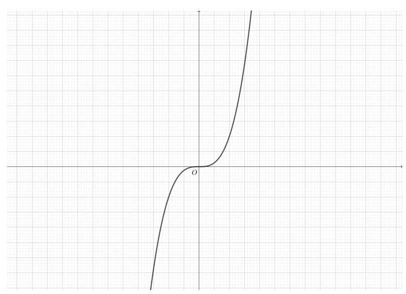
c) On peut pour les limite à gauche et à droite utiliser une autre notation que celle introduite ci-dessus, plus légère mais nécessitant d'être soigneux dans les écritures :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to a\\ >}} f(x) \text{ se note aussi } \lim_{x\to a^+} f(x)} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{\substack{x\to a\\ <}} f(x) \text{ se note aussi } \lim_{x\to a^-} f(x)}.$$

5.5 Limites de quelques fonctions classiques



$$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty \end{array}}$$



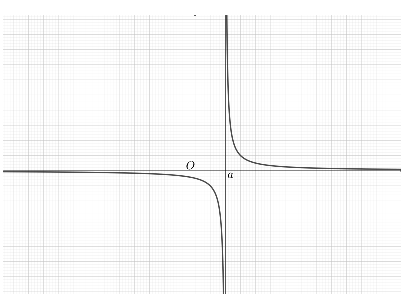
$$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty \end{array}}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

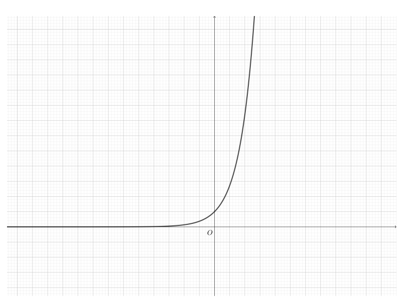
$$\lim_{x\to+\infty} x^n=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^n=+\infty \text{ si } n \text{ pair}$$

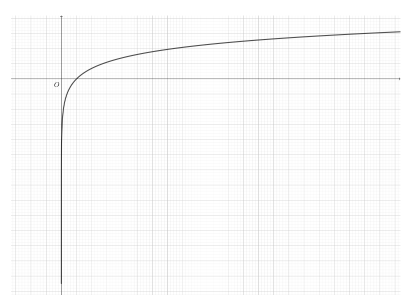
$$\lim_{x\to-\infty} x^n=-\infty \text{ si } n \text{ impair}$$



$$\boxed{\begin{array}{l|l} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x-a}=0 & \lim\limits_{x\to a^+} \frac{1}{x-a}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x-a}=0 & \lim\limits_{x\to a^-} \frac{1}{x-a}=-\infty \end{array}}$$



$$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x=+\infty \end{array}}$$



$$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to0^+} \ln x=-\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty \end{array}}$$

On peut calculer les limites de très nombreuses fonctions en combinant la connaissance de ces limites usuelles avec les règles opératoires sur les limites que l'on va voir maintenant.

5.6 Limites et opérations

a) Règles de calcul. Soient f et g deux fonctions admettant une limite dans un voisinage d'un même α (éventuellement à droite ou à gauche) pouvant désigner un réel a, ou $-\infty$, ou $+\infty$. Notons

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \omega \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\alpha} g(x) = \omega',$$

avec ω et ω' pouvant désigner des réels ℓ et ℓ', ou $-\infty$, ou $+\infty$. On a alors :

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha}(f+g)(x) = \omega+\omega', \qquad \lim_{x\to\alpha}(fg)(x) = \omega\times\omega' \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\omega}{\omega'}},$$

avec, dans le cas où au moins l'une des deux limites ω ou ω' est $\pm\infty$, les règles suivantes :

Si $\ell \in \mathbb{R}$,	$\ell+\infty = \ell+(+\infty) = +\infty+\ell = +\infty$.
Si $\ell \in \mathbb{R}$,	$\ell-\infty = \ell+(-\infty) = \ell-(+\infty) = -\infty+\ell = -\infty$.
Si $\ell > 0$,	$\ell\times(\pm\infty) = (\pm\infty)\times\ell = \pm\infty$ et $\frac{\pm\infty}{\ell} = \pm\infty$.
Si $\ell < 0$,	$\ell\times(\pm\infty) = (\pm\infty)\times\ell = \mp\infty$ et $\frac{\pm\infty}{\ell} = \mp\infty$.
Si $\ell \in \mathbb{R}$,	$\frac{\ell}{\pm\infty} = 0$.

b) Forme indéterminées usuelles. Dans les cas qui échappent à ces règles, il faut faire une étude spécifique plus approfondie.

$$\boxed{+\infty-\infty, \quad -\infty+\infty, \quad 0\times\infty, \quad \infty\times 0, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0} \quad \text{sont des formes indéterminées.}}$$

c) Des limites à connaître. Les trois formules suivantes seront justifées plus loin, mais sont précieuses pour lever certaines indéterminations.

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x} = 1.}$$

d) Cas des quotients où le dénominateur tend vers zéro. Un autre type de situations nécessite une étude détaillée, celle des quotients de la forme $\frac{\ell}{0}$ ou $\frac{\infty}{0}$.

D'une façon générale. Supposons que $\omega' = 0$, c'est-à-dire que g tend vers 0 pour x tendant vers α. On s'intéresse au quotient $\frac{f}{g}$, que l'on peut voir comme le produit $f\times\frac{1}{g}$. Il s'agit donc de déterminer la limite de $\frac{1}{g}$ pour x tendant vers α.

1. S'il existe un voisinage de α sur lequel $g(x)$ est strictement positive, on dit que g tend vers 0 par valeurs supérieures, et l'on note $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 0^+$.
   Alors, $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{1}{g(x)} = +\infty$, et l'on peut appliquer les règles usuelles pour calculer $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}$.
2. S'il existe un voisinage de α sur lequel $g(x)$ est strictement négative, on dit que g tend vers 0 par valeurs inférieures, et l'on note $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 0^-$.
   Alors, $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{1}{g(x)} = -\infty$, et l'on peut conclure de même.
3. Sinon, on a une indétermination, qu'il faut lever par une étude plus approfondie.

5.7 Limites et composition

Soient f et g deux fonctions ; les symboles α et ω pouvant désigner un réel, ou $-\infty$, ou $+\infty$, on a

$$\boxed{\text{si } \lim_{x\to\alpha} f(x) = \omega, \quad \text{et si } \lim_{x\to\omega} g(x) \text{ existe,} \quad \text{alors } \lim_{x\to\alpha} g(f(x)) \text{ existe et vaut } \lim_{x\to\omega} g(x)}$$

Exemples. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x^2+x+1) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+x+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$.
De même, $\lim\limits_{x\to 0}\exp(\frac{\sin x}{x}) = \mathrm{e}$ car $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}$.

5.8 Quelques exercices

Exercice 1 (calculs directs de limites, opérations et composition).

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\mathrm{e}^x+x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^x+x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x}+\ln(3x))$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\ln(3x)\right)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x+2}+3\,\mathrm{e}^x\right)$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{4}{(x-3)^2}-1\right)$, $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\ln(x^3)}{(x-2)^2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x(1-x^2)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$.

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{3x}-1}{2x}$.

d) $\lim\limits_{\substack{x\to5\\>}}\dfrac{x^2-11x+28}{x^2-25}$, $\lim\limits_{\substack{x\to5\\<}}\dfrac{x^2-11x+28}{x^2-25}$, $\lim\limits_{\substack{x\to-5\\>}}\dfrac{x^2-11x+28}{x^2-25}$, $\lim\limits_{\substack{x\to-5\\<}}\dfrac{x^2-11x+28}{x^2-25}$.

Exercice 2 (limites en $\pm\infty$ des fonctions polynomiales).

a) Calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions suivantes :

$$f(x)=x^2-3\,;\quad g(x)=x^3+4x\,;\quad h(x)=2x^2+6x-4\,;\quad k(x)=-3x^2+5x-1.$$

b) Montrer que, si $f(x)=\sum_{i=0}^n a_i x^i$ est une fonction polynomiale de degré n ($a_i\in\mathbb{R}$, $a_n\neq0$), alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(a_nx^n)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(a_nx^n)$.

Exercice 3 (limites en $\pm\infty$ des fonctions fractions rationnelles).

a) Calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions suivantes :

$$f(x)=\frac{4x^2-3x}{2x+3}\,;\quad g(x)=\frac{5x^3+2x^2-x+7}{3x-1}\,;\quad h(x)=\frac{x^2-1}{2x^3+3}\,;\quad k(x)=\frac{x^2-x-1}{3x^2+4x-5}.$$

b) Montrer que, si $f(x)=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0}$ est une fonction fraction rationnelle avec $a_n\neq0$ et $b_m\neq0$, alors

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a_nx^n}{b_mx^m}\right)\text{ et }\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}.$$

Exercice 4 (limites des fonctions puissances). On rapppelle que, pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$ et tout réel $x>0$, on a $x^\alpha=\mathrm{e}^{\alpha\ln x}$. Démontrer que :

$$\lim_{x\to0^+}x^\alpha=\begin{cases}+\infty & \text{si } \alpha<0\\ 1 & \text{si } \alpha=0\\ 0 & \text{si } \alpha>0\end{cases}\qquad\text{et}\qquad\lim_{x\to+\infty}x^\alpha=\begin{cases}0 & \text{si } \alpha<0\\ 1 & \text{si } \alpha=0\\ +\infty & \text{si } \alpha>0\end{cases},$$

Exercice 5 (asymptote oblique). On considère $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$.

1. Déterminer les limites de $f(x)$ lorsque $x\to1^+$ et lorsque $x\to1^-$.
2. Déterminer les limites de $f(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Montrer l'existence de $a,b,c\in\mathbb{R}$ tels que pour tout $x\neq1$, $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$.
   En déduire que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique, dont on donnera une équation, en $+\infty$ et en $-\infty$.

6 Méthodes et outils pour le calcul de limites

6.1 Méthodes de factorisation

a) Limite en ∞ des fonctions polynomiales et fractions rationnelles. On a déjè vu et démontré dans les exercices précédents que :

— La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction polynomiale est égale à la limite de son monôme de plus haut degré.

— La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction fraction rationnelle est égale à la limite du quotient du monôme de plus haut degré de son numérateur sur le monôme de plus haut degré de son dénominateur.

b) Multiplication par une quantité conjuguée. Il s'agit de lever certaines indéterminations liées à la présence de sommes ou de différences, en utilisant la troisième identité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

— *Premier exemple.* On veut calculer la limite en 0 de $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$. On a une forme indéterminée car le numérateur et le dénominateur tendent vers 0. On multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du numérateur :

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{(x+1)-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}.$$

On déduit $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{x+1}+1) = 2$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$.

— *Second exemple.* On veut calculer la limite en $+\infty$ de $g(x) = \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2}$. On a une forme indéterminée de la forme $+\infty - (+\infty)$. On multiplie par la quantité conjuguée :

$$g(x) = \frac{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2})(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2})}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2}} = \frac{(x^2+x)-x^2}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2}}.$$

Mais pour $x > 0$, on a :

$$g(x) = \frac{x}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1)} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}, \quad \text{d'où } \lim_{x\to 0} g(x) = \frac{1}{2}.$$

c) Factorisations visant à faire apparaître des limites connues.

— *Premier exemple.* On veut calculer la limite en 0 de $f(x) = \frac{x^2+\sin x}{x^2+x}$. On a une forme indéterminée car le numérateur et le dénominateur tendent vers 0. On factorise par x :

$$f(x) = \frac{x(x+\frac{\sin x}{x})}{x(x+1)} = \frac{x+\frac{\sin x}{x}}{x+1}.$$

Comme on sait que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ on conclut que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{1} = 1$.

— *Second exemple.* On veut calculer la limite en $+\infty$ de $g(x) = \ln x - x$. On a une forme indéterminée de la forme $+\infty - (+\infty)$. On factorise par x :

$$g(x) = x\left(\frac{\ln x}{x} - 1\right).$$

Mais, comme on le verra un peu plus loin, on sait que $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. On conclut que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = (+\infty)\times(-1) = -\infty$.

6.2 Méthodes de majoration et d'encadrement

a) Comparaison de limites. Désignons par α un réel a, ou $+\infty$, ou $-\infty$. La propriété suivante découle directement de la définition des différents types de limites.

$$\boxed{\left.\begin{array}{c}\text{si } f(x) \leq g(x) \text{ au voisinage de } \alpha \\ \text{et} \\ \text{si } \lim\limits_{x\to\alpha} f(x) \text{ et } \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) \text{ existent}\end{array}\right\} \text{ alors } \lim_{x\to\alpha} f(x) \leq \lim_{x\to\alpha} g(x).}$$

Dans le cas où α est un réel a, la propriété reste vraie si l'on considère seulement des limite à gauche ou à droite en a.

Attention à l'énoncé précis de cette propriété, et en particulier aux deux points suivants :

1. L'hypothèse les limites de f et g existent est essentielle : l'hypothèse $f \leq g$ et l'existence de $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$ n'entraîne pas l'existence d'une limite pour f.

   Par exemple, pour $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \frac{x+2}{x+1}$, on a $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de $+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$, mais cependant f n'a pas de limite en $+\infty$.

2. Même si $f(x) < g(x)$ au voisinage de α, les autres hypothèses étant conservées, la conclusion reste la même : la limite de f est inférieure ou égale à celle de g.

   Exemple, pour $f(x) = \frac{1}{x^2}$ et $g(x) = \frac{1}{x}$ on a $f(x) < g(x)$ au voisinage de $+\infty$ mais cependant $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

b) Encadrement de limites finies (*parfois appelé théorème des gendarmes*). Désignons par α un réel a, ou $+\infty$, ou $-\infty$. Considérons trois fonctions f, g, h définies au voisinage de α. Soit ℓ un réel. La propriété suivante découle directement de la définition des différents types de limites.

$$\boxed{\left.\begin{array}{c}g(x) \leq f(x) \leq h(x) \text{ au voisinage de } \alpha \\ \text{et} \\ \text{si } \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} h(x) = \ell\end{array}\right\} \text{ alors } \lim_{x\to\alpha} f(x) \text{ existe, et l'on a } \lim_{x\to\alpha} f(x) = \ell.}$$

Exemple. Considérons la fonction $f(x) = \frac{x-\cos(x^2+1)}{3x+1}$ sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$. Pour tout $x \in I$, on a $-1 \leq \cos(x^2+1) \leq 1$, donc le numérateur de f vérifie

$$x - 1 \leq x - \cos(x^2+1) \leq x + 1.$$

En multipliant chaque membre de l'inégalité par l'inverse de $3x+1 > 0$. On obtient :

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x), \text{ en notant } g(x) = \tfrac{x-1}{3x+1} \text{ et } h(x) = \tfrac{x+1}{3x+1}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 1/3$, on trouve que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe et vaut $1/3$.

c) Majoration et minoration pour des limites infinies. Désignons par α un réel a, ou $+\infty$, ou $-\infty$. Considérons une fonction f définie au voisinage de α.

$$\boxed{\text{S'il existe } g \text{ telle que } \begin{cases} g(x) \leq f(x) \text{ au voisinage de } \alpha \\ \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = +\infty \end{cases}, \text{ alors } \lim_{x\to\alpha} f(x) = +\infty.}$$

$$\boxed{\text{S'il existe } h \text{ telle que } \begin{cases} f(x) \leq h(x) \text{ au voisinage de } \alpha \\ \lim\limits_{x\to\alpha} h(x) = -\infty \end{cases}, \text{ alors } \lim_{x\to\alpha} f(x) = -\infty.}$$

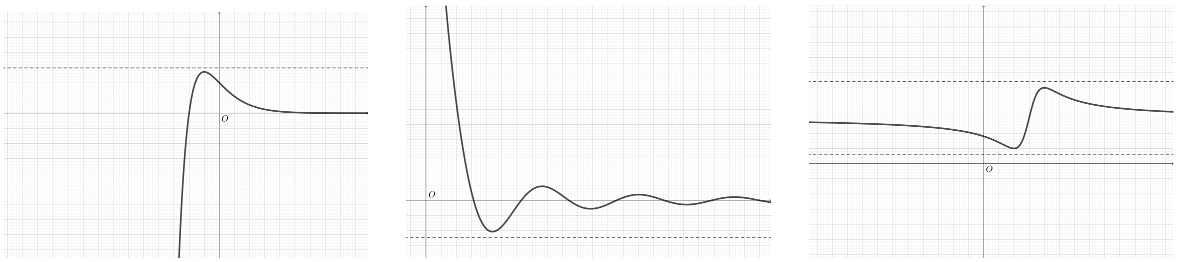
Exemple. Considérons la fonction $f(x) = \ln(1 + x^2 - \sqrt{x}\sin(x))$ sur l'intervalle $]1, +\infty[$. Pour tout $x \in I$, on a $-1 \leq \sin x$. En multipliant par $\sqrt{x} > 0$, il vient $-\sqrt{x} \leq \sqrt{x}\sin x$. Donc :

$$0 < x^2 - \sqrt{x} \leq x^2 - \sqrt{x}\sin x \leq 1 + x^2 - \sqrt{x}\sin x.$$

La fonction logarithme étant croissante, on obtient $g(x) \leq f(x)$ pour tout $x \in I$, avec $g(x) = \ln(x^2 - \sqrt{x})$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2 - \sqrt{x}) = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

d) Cas des fonctions majorées, minorées, bornées. Rappelons d'abord quelques définitions. Soit f une fonction, I une partie de $\mathbb{R}$ et M un nombre réel.

1. M est un *majorant* de f sur I si $f(x) \leq M$ pour tout $x \in I$.
2. M est un *minorant* de f sur I si $f(x) \geq M$ pour tout $x \in I$.
3. f est *majorée* (resp. *minorée*) sur I si elle possède un majorant (resp. minorant).
4. Une fonction à la fois majorée et minorée sur I est dite *bornée* sur I.



L'existence de majorant ou de minorant permet parfois de déterminer des limites, comme le résume le tableau ci-dessous, dans lequel c et d sont des réels, f et g des fonctions, et le symbole α désigne un réel a, ou $+\infty$, ou $-\infty$.

Hypothèses		Conclusion
$f \geq c$ au voisinage de α	$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to\alpha} (f(x)+g(x)) = +\infty$
$f \geq c > 0$ au voisinage de α	$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)g(x) = +\infty$
$c \leq f(x) \leq d$ au voisinage de α	$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \pm\infty$	$\lim\limits_{x\to\alpha} (f(x)+g(x)) = \pm\infty$
$c \leq f(x) \leq d$ au voisinage de α	$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)g(x) = 0$

6.3 Croissance comparée

Les formules suivantes permettent de lever les indéterminantions dans de très nombreux calculs, et sont à très bien connaître.

$\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$	$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

D'où proviennent ces propriétés ? En étudiant les variations de la fonction $\sqrt{x} - \ln x$, on voit facilement que $0 < \ln x < \sqrt{x}$ pour tout $x > 0$. Il en résulte que $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$. En passant à la limite pour $x \to +\infty$, on obtient par encadrement la deuxième des formules ci-dessus. La première s'en déduit par le changement de variable $y = \frac{1}{x}$. Puis le changement de variable $z = \ln x$ permet d'obtenir la troisième à partir de la première, et la quatrième à partir de la deuxième.

On montre plus généralement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

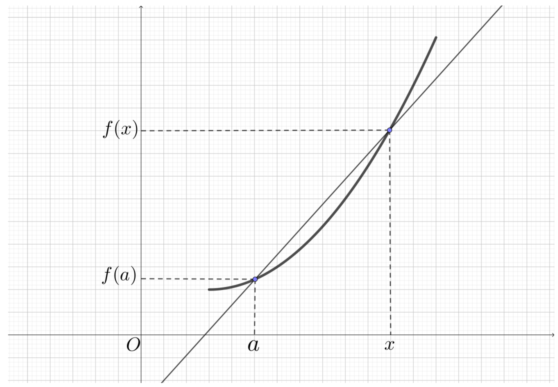
$$\lim_{x\to0+} x\,[\ln(x)]^n = 0\ ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{[\ln(x)]^n}{x} = 0\ ; \quad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 \ \text{ et } \ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

On mémorise parfois ces formules en disant de façon familière que *« x l'emporte sur le logarithme, et l'exponentielle l'emporte sur x ».*

6.4 Utilisation du nombre dérivé

Rappelons d'abord qu'une fonction f définie au voisinage d'un réel a est *dérivable* en a si le taux de variation de f en a, c'est-à-dire le rapport $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, tend vers une limite finie quand x tend vers a. Cette limite s'appelle alors le *nombre dérivé* de f en a, noté $f'(a)$. En d'autres termes, lorsque cette limite existe :

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}} \qquad (\star)$$



La fonction f' qui à un nombre réel a associe le nombre $f'(a)$ s'appelle la *fonction dérivée* de f. Elle est définie sur l'ensemble des réels où f est dérivable. Les fonctions polynomiales, rationnelles, puissance, exponentielle, logarithme, trigonométriques, sont dérivables sur leur domaine de définition, et leurs fonctions dérivées sont à connaître.

L'égalité $(\star)$ peut être utilisée pour lever certaines formes indéterminées dans les calculs de limite, par exemple les trois résultats suivants classiques énoncés précémment en 5.6.c.

1. *Premier exemple.* La fonction $f(x) = \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est $f'(x) = \cos x$. En appliquant la formule $(\star)$ en $a = 0$, on obtient $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \cos 0 = 1$.
2. *Deuxième exemple.* La fonction $f(x) = \ln(1 + x)$ est dérivable sur $]-1, +\infty[$, et sa dérivée est $f'(x) = \frac{1}{1+x}$. En appliquant $(\star)$ en $a = 0$, on obtient $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x - 0} = \frac{1}{1+0} = 1$.
3. *Troisième exemple.* La fonction $f(x) = \mathrm{e}^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est $f'(x) = \mathrm{e}^x$. En appliquant la formule $(\star)$ en $a = 0$, on obtient $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0}{x - 0} = \mathrm{e}^0 = 1$.

6.5 Quelques exercices

Exercice 1. Calculer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(5 - \frac{4}{(x-3)^2}\right)$,
2. $\lim\limits_{x \to 0^-} 4x^{-1} \ln(x + \frac{1}{2})$,
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^2 - x + 3)$,
4. $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x+1}{x-2}$,
5. $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1-x}{2-x}$,
6. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3+5x^2-1}{6x-1}$,
7. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5x^2+3}{x^3-x}$,
8. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^3+1}{-3x^2+x}$,
9. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{6x^4+2x^2-1}{3x^4+x+3}$.

Exercice 2. Calculer les limites suivantes, en utilisant le produit par une quantité conjuguée.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{5x+4}-2}{3x}$.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^3 - 2x + 1} - \sqrt{x^3 + 5}\right)$.

Exercice 3. Déterminer les limites suivantes si elles existent, en utilisant des majorations ou minorations.

1. $\lim\limits_{x \to 0} x \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^3 + 1}\, \mathrm{e}^{\sin(x^2)}$.
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3+\cos(x^3)}{6x^3-1}$.

Exercice 4. Déterminer les limites suivantes si elles existent, en utilisant les croissances comparées.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(\ln(x) - e^x\big)$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(e^x - x\big)$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x+1}}{x^2}$.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2+1)e^x$.
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^{\sqrt{x}}}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(2e^x)}{\sqrt{x}}$.

Exercice 5. Calculer les limites suivantes en utilisant le nombre dérivé.

1. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(2-x)}{x-1}$;
2. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}$;
3. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos x}-1}{x-\frac{\pi}{2}}$.

Les exercices suivants sont destinés à l'entraînement personnel,
et ne seront pas forcément corrigés en TD

Exercice 6. Calculer les limites suivantes si elles existent.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2-2x^3}{4+x-x^2}$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x \left(3 + \frac{2}{x+1}\right)$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - x)$.
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin(3x)\cos(2x)}{x^2}$.
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$.
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2x^2-2}{x^2+4}$.
7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$.
8. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{3}{2x} - e^x - e^{-x}\right)$.
9. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{5x^2+3}{x^3-x}$.
10. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{2}{3x+5}\right)\frac{1}{x-1}$.
11. $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^4-5x^2+4}{x^2-2x+1}$.
12. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin(5x)}{5x}$.
13. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(2x^4+1)}{x^4}$.
14. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2-1)}{\sqrt{x}}$.
15. $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3-1)e^{3x+5}$.
16. $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln(x^7)$.
17. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{2x}$.
18. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{5x}}{2x^5}$.

7 Continuité et dérivabilité

7.1 Notion de continuité

a) Définition (continuité en un point). Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$. Soit a un élément de D. On dit que f est continue en a (ou que f est continue au point a) si et seulement si f admet une limite en a et que cette limite vaut $f(a)$.

$$\boxed{(f \text{ est continue en } a) \;\Leftrightarrow\; \left(\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\right)}$$

b) Définition (continuité sur un ensemble). Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$. On dit que f est continue sur D si et seulement si f est continue en tout point a de D.

> *Traduction graphique.* La fonction f est continue sur D si et seulement si on peut tracer la représentation graphique de f dans un repère du plan « sans lever le crayon ».

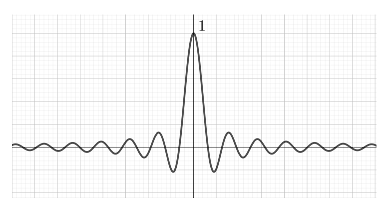
c) Des résultats généraux.

— Les fonctions polynomiales, fractions rationnelles, exponentielle, logarithme, puissances, trigonométriques, sont continues sur leur ensemble de définition.

— La somme, le produit, le quotient, la composée de deux fonctions continues sont des fonctions continues sur l'ensemble où elles sont définies.

d) Une situation typique à savoir traiter. Dans « beaucoup » de situations, on considère une fonction f qui est continue d'après les résultats généraux précédents, sauf éventuellement en un, deux, ou quelques points isolés où il y a un problème particulier de continuité, que l'on étudie alors en revenant à la définition.

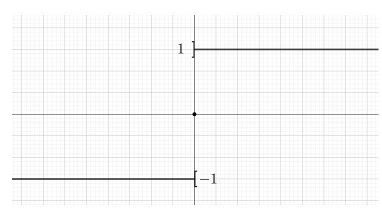
• *Premier exemple.* Considérons la fonction $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.
Elle est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
Si l'on prolonge f à $\mathbb{R}$ en posant $f(0) = 1$, on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, donc f est continue en 0, et donc finalement f est continue sur $\mathbb{R}$.



• *Second exemple.* Considérons la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{|x|}{x} \text{ si } x \in \mathbb{R}^*, \text{ et } f(0) = 0.$$

Elle est constante égale à 1 sur $]0, +\infty[$, et constante égale à -1 sur $]-\infty, 0[$. Elle est donc continue sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.
Mais $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$, et donc f n'est pas continue en 0.



• *Troisième exemple.* Soient $a \in \mathbb{R}$ et f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x & \text{si } x \leq 3 \\ a\,\mathrm{e}^{x-3} - 1 & \text{si } x > 3. \end{cases}$

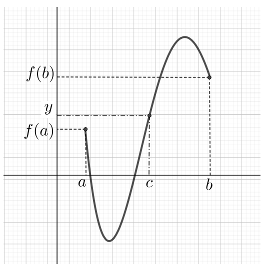
Pour quelles valeurs de a la fonction f_a est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

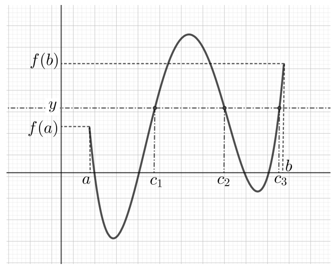
Il est clair que f_a est continue sur $]3, +\infty[$ ainsi que sur $]-\infty, 3]$. Le problème est la continuité en 3. La question est de savoir si $\lim\limits_{x\to 3} f_a(x) = f_a(3)$. Sachant que $f_a(3) = -3^2 + 3 \times 3 = 0$, il s'agit donc de déterminer pour quelles valeurs de a on a $\lim\limits_{x\to 3^-} (a\,\mathrm{e}^{x-3} - 1) = 0$. Puisque $\lim\limits_{x\to 3^-} (a\,\mathrm{e}^{x-3} - 1) = a - 1$, la seule valeur qui convient est $a = 1$. En conclusion :

$$(f_a \text{ est continue sur } \mathbb{R}) \;\Leftrightarrow\; (f_a \text{ est continue en } a) \;\Leftrightarrow\; (a = 1).$$

7.2 Théorème des valeurs intermédiaires

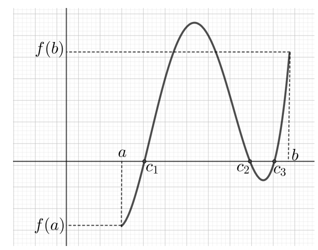
a) Théorème. *Soit f une fonction* <u>*continue*</u> *sur un intervalle I.*
Quels que soient a et b dans I, si y est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = y$.





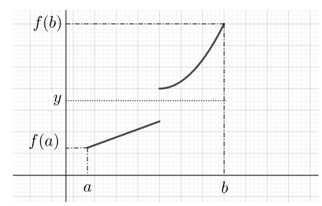
Remarquons qu'il n'y a aucune raison en général pour qu'un tel réel c soit unique (cette question d'unicité sera abordée plus loin dans le cours).

b) Corollaire (une application fréquente).
Soit f une fonction <u>*continue*</u> *sur un intervalle I.*
Si a et b sont deux éléments de I tels que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, alors f s'annule (au moins une fois) entre a et b.



C'est-à-dire que la représentation graphique de f coupe (au moins une fois) l'axe des abscisses entre a et b.
Les réels c tels que $f(c) = 0$ sont parfois appelés les <u>zéros</u> de f.

c) Attention : l'hypothèse de continuité est absolument indispensable.



Sur le schéma ci-contre, la fonction f représentée présente une discontinuité en un réel compris entre a et b, et il existe des réels y entre $f(a)$ et $f(b)$ qui ne sont l'image d'aucun réel c entre a et b.

d) Une application classique du TVI : principe de dichotomie. Il s'agit d'un processus algorithmique permettant de localiser par encadrements successifs les zéros c d'une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe opposé. Pour cela :

1. On pose $a_1 = \frac{a+b}{2}$ et détermine le signe de $f(a_1)$. Il se présente trois cas :
   (a) $f(a_1) = 0$, et alors on peut prendre $c = a_1$.
   (b) $f(a)$ et $f(a_1)$ sont de signe opposé. On sait alors qu'un zéro de f se trouve dans $[a, a_1]$.
   (c) $f(a_1)$ et $f(b)$ sont de signe opposé. On sait alors qu'un zéro de f se trouve dans $[a_1, b]$.
2. Dans le cas (a), on a trouvé le zéro cherché.
   Dans le cas (b), on recommence en posant $a_2 = \frac{a+a_1}{2}$ et on compare le signe de $f(a_2)$ avec le signe de $f(a_1)$ et le signe de $f(a)$.
   Dans le cas (c), on recommence en posant $a_2 = \frac{b+a_1}{2}$ et on compare le signe de $f(a_2)$ avec le signe de $f(a_1)$ et le signe de $f(b)$.
3. On réitère et on trouve un encadrement de c de plus en plus précis : à l'étape n, l'intervalle dans lequel se trouve un zéro c de f est de longueur $\frac{b-a}{2^n}$.

► *Exemple d'application.* Considérons la fonction polynomiale $f(x) = (x-7)^3 + 2x - 21$. Calculer $f(2)$ et $f(10)$ et en déduire un réel a tel que l'intervalle $]a, a+1[$ contienne un zéro de f.

Solution. On calcule $f(2) = -142 < 0$ et $f(10) = 26 > 0$. Comme f est continue, on déduit du TVI qu'il existe $c \in]2, 10[$ tel que $f(c) = 0$. On pose $a_1 = \frac{1}{2}(2+10) = 6$ et on calcule $f(6) = -10 < 0$. On cherche donc c dans $]6, 10[$. On pose $a_2 = \frac{1}{2}(6+10) = 8$ et on calcule $f(8) = -4 < 0$. On cherche donc c dans $]8, 10[$. On pose $a_3 = \frac{1}{2}(10+8) = 9$ et on calcule $f(9) = 5 > 0$. Le TVI implique finalement que $c \in]8, 9[$. La valeur de a cherchée est donc $a = 8$.

7.3 Image d'un intervalle par une fonction continue

a) Une notation importante. Si I est un intervalle et si f est une fonction à valeurs réelles définie au moins sur I, on appelle image (directe) de I par f, notée $f(I)$ l'ensemble des images par f des éléments de I, c'est-à-dire l'ensemble des réels y pour lesquels il existe un réel x appartenant à I tel que $y = f(x)$.

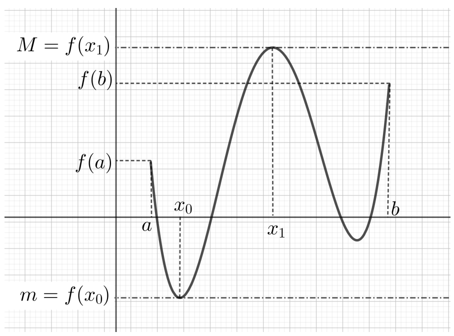
$$\boxed{f(I) = \{f(x)\,;\, x \in I\} = \{y \in \mathbb{R}\,;\, \text{il existe } x \in I \text{ tel que } y = f(x)\}}$$

b) Théorème. Rappelons qu'un intervalle de $\mathbb{R}$ est par définition une partie I de $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété : *si x et y sont deux éléments de I, alors tout réel compris entre x et y est encore un élément de I.* On déduit alors du théorème des valeurs intermédiaires la propriété suivante.

$$\boxed{\text{si } f \text{ est } \underline{\text{continue}} \text{ sur un intervalle } I, \text{ alors } f(I) \text{ est un intervalle de } \mathbb{R}.}$$

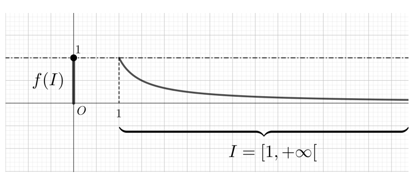
c) Cas particulier d'un segment. On appelle segment de $\mathbb{R}$ un intervalle fermé $[a, b]$, où a et b sont deux réels tels que $a \leq b$. On peut dans ce cas préciser le résultat précédent.

$$\boxed{\text{si } f \text{ est } \underline{\text{continue}} \text{ sur un segment } I = [a, b], \text{ alors } f(I) \text{ est un segment } [m, M] \text{ de } \mathbb{R}.}$$

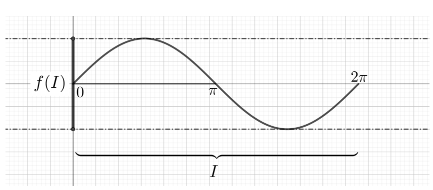


Cet énoncé repose sur le fait que la continuité de f implique que f admet sur $[a, b]$ un maximum $M = \max f(I)$ et un minimum $m = \min f(I)$.

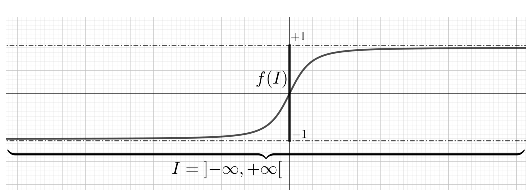
d) Des configurations diverses. Dès lors que I n'est plus un segment (c'est-à-dire que I est ouvert ou semi-ouvert, ou infini), l'intervalle $f(I)$ peut lui-même être de diverses formes, comme l'illustrent les quelques exemples suivants :



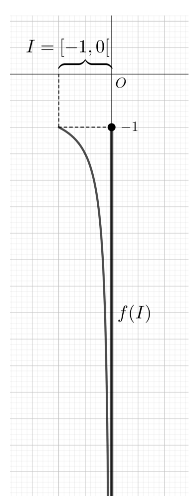
$f(x) = \frac{1}{x}$, $\quad I = [1, +\infty[$, $\quad f(I) =]0, 1]$



$f(x) = \sin x$, $\quad I = [0, 2\pi[$, $\quad f(I) = [-1, 1]$



$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $\quad I = \mathbb{R}$, $\quad f(I) =]-1, 1[$



$f(x) = \frac{1}{x}$,

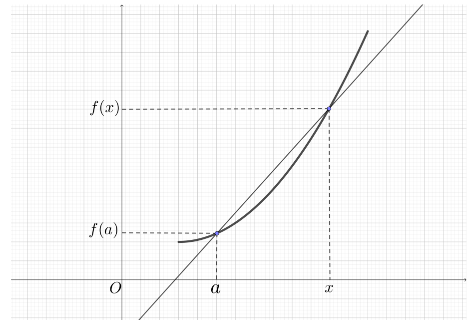
$I = [-1, 0[$,

$f(I) =]-\infty, -1]$

7.4 Rappels et compléments sur la dérivabilité

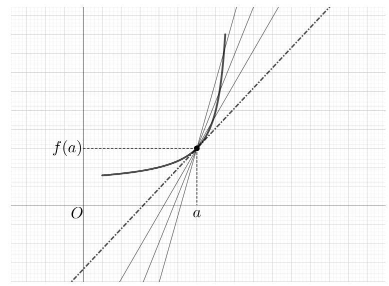
a) Dérivabilité d'une fonction en un point. On a déjà rappelé plus haut qu'une fonction f définie au voisinage d'un réel a est *dérivable* en a lorsque le taux de variation $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tend vers une limite finie quand x tend vers a. Cette limite s'appelle alors le *nombre dérivé* de f en a, noté $f'(a)$.

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$



b) Equation de la tangente. Le passage à la limite ci-dessus correspond géométriquement à une position limite de la droite joignant les points $(x, f(x))$ et $(a, f(a))$, qui définit la droite tangente en a à la courbe de f. Cette tangente a pour pente (ou cœfficient directeur) le nombre dérivé $f'(a)$, et une équation de la tangente est :

$$\boxed{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$$



c) Lien entre dérivabilité et continuité. On peut en revenant aux définitions montrer que :

$$\boxed{(f \text{ dérivable en } a) \ \Rightarrow (f \text{ continue en } a)},$$ la réciproque pouvant être fausse.

► Par exemple la fonction $f(x) = |x|$ est continue en 0, mais non dérivable en 0, car le taux de variation $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x}$ tend vers 1 pour $x \to 0^+$, et vers -1 pour $x \to 0^-$.

d) Fonction dérivée. Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I telle que f est dérivable en tout point de I. On dit alors que f est dérivable sur I et on appelle *fonction dérivée* de f la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ qui, à tout réel $x \in I$, associe le nombre dérivé $f'(x)$ de f en x.

Le calcul pratique de la dérivée d'une fonction dérivable repose sur deux principes : connaître les dérivées de certaines fonctions usuelles, et combiner ces dérivées classiques en utilisant les formules donnant la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une composée... que nous rappelons ici pour mémoire, et qui s'appliquent sous les hypothèses assurant qu'elles ont un sens.

$(f+g)' = f' + g'$	$(fg)' = f'g + fg'$	$\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$	$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$

On ne détaille pas plus ici, ces méthodes de calcul ayant été vues dans le cadre d'un autre cours.

e) Dérivées d'ordre supérieur. Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. On dit que f est deux fois dérivable si f est dérivable et si f' est aussi dérivable. La dérivée de f' est notée f'' ou $f^{(2)}$, et est appelée la dérivée seconde de f.
2. On dit que f est trois fois dérivable si f est deux fois dérivable et si f'' est aussi dérivable. La dérivée de f'' est notée f''' ou $f^{(3)}$, et est appelée la dérivée troisième de f.
3. Par récurrence, on dit que f est n fois dérivable si f est $n-1$ fois dérivable et si la dérivée $(n-1)$-ième de f est dérivable. On note alors $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ la dérivée n-ième de f.

$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$	en particulier : $f^{(1)} = f'$, et par convention $f^{(0)} = f$

► *Exemple.* Prenons $f(x) = \sin x$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = \sin x, \ \ f'(x) = \cos x, \ \ f''(x) = -\sin x, \ \ f^{(3)}(x) = -\cos x, \ \ f^{(4)}(x) = \sin x, \text{ etc}$$

► *Exemple.* Prenons $f(x) = x^3$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = x^3, \ \ f'(x) = 3x^2, \ \ f''(x) = 6x, \ \ f^{(3)}(x) = 6, \ \ f^{(4)}(x) = 0, \ \ f^{(5)}(x) = 0, \text{ etc}$$

7.5 Quelques exercices

Exercice 1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} (ax)^2 & \text{si } x \leq 1, \\ a\sin(\frac{\pi}{2}x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$.
Pour quelles valeurs du paramètre a la fonction f est-elle continue ?

Exercice 2. Etudier en fonction des valeurs des constantes $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ la continuité de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0, \\ \alpha e^{-x} + \beta e^{x} + \gamma x(e^{x} - e^{-x}) & \text{si } 0 < x < 1, \\ e^{2-x} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x\cos x - 3$. Calculer $f(0)$ et $f(-\pi)$. En déduire que l'équation $x\cos x = 3$ admet au moins une solution réelle.

Exercice 4. Montrer que les équations suivantes admettent au moins une solution réelle :

$$\text{(a)} \quad \sin x = x - 1, \qquad \text{(b)} \quad x^6 + x - 1 = 0.$$

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x-1)^3 + 4x - 12$. Montrer qu'il existe un unique réel c tel que $f(c) = 0$ (on pourra étudier les variations de f). Utiliser la méthode de dichotomie pour encadrer c par deux entiers consécutifs.

Exercice 6. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note $M(a)$ le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a.

1. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet en tout point $M(a)$ une tangente, que l'on notera $\mathcal{T}(a)$.
2. Déterminer les points $M(a)$ en lesquels $\mathcal{T}(a)$ est parallèle à l'axe des abscisses.
3. Déterminer les points $M(a)$ en lesquels $\mathcal{T}(a)$ est parallèle à la droite Δ d'équation $y = 15x - 26$. Peut-on avoir $\mathcal{T}(a) = \Delta$?

Exercice 7. On considère les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = x^2 - 1 \quad \text{et} \quad g(x) = -x^2 + 2x - 3 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthonormé du plan.

1. Montrer qu'il existe deux droites Δ_1 et Δ_2 du plan qui sont tangentes à la fois à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ en des points que l'on déterminera.
2. Déterminer le point d'intersection de Δ_1 et Δ_2.

Exercice 8. Calculer les dérivées d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ des fonctions suivantes :

$$e^x, \quad x^n, \quad 2^x, \quad \sin(x), \quad \cos(x).$$

Exercice 9. Calculer les dérivées secondes des fonctions suivantes : $\tan x, \quad e^{\sin x}, \quad \sqrt{x^2+1}$.

Exercice 10. Soient deux fonctions f et g dérivables jusqu'à l'ordre 3 sur un même intervalle I.

1. Calculer les dérivées $(fg)'$, $(fg)''$, $(fg)'''$.
2. Etablir une formule générale donnant pour tout entier $n \geq 1$ la dérivée n-ième $(fg)^{(n)}$.

8 Bijectivité et fonction réciproque

8.1 Le problème des antécédents

a) Une précision terminologique préalable. Le terme de fonction est souvent utilisé de façon générique, et il est parfois nécessaire d'être plus précis en parlant d'*application*, ce qui consiste à expliciter l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée que l'on considère.

Plus précisément, se donner une application consiste à se donner une fonction f et deux parties I (ensemble de départ) et J (ensemble d'arrivée) de $\mathbb{R}$ telles que :

1. l'ensemble de départ I est inclus dans le domaine de définition de f : donc à tout $x \in I$ on peut associer un unique réel $f(x)$, que l'on appelle *l'image* de x par f ;
2. l'ensemble image $f(I)$ est inclus dans J (ie. pour tout $x \in I$, on a $f(x) \in J$).

On note alors $f : I \to J$.

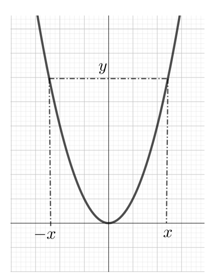
► *Exemple.* Prenons la fonction $f(x) = \sqrt{x}$. On peut considérer l'application $f_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, ou encore l'application $f_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ (puisque $\sqrt{x}$ est toujours positif).
En revanche, on ne peut pas définir à partir de f une application dont l'ensemble de départ serait $\mathbb{R}$ puisque $\sqrt{x}$ n'est pas défini pour x strictement négatif.
On peut par ailleurs restreindre l'ensemble de départ, et considérer par exemple l'application $f_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^+$, ou même $f_4 : [0,1] \to [0,1]$.
Dans la pratique, on continue souvent à noter f toutes ces applications, en étant simplement vigilant sur les ensembles de départ et d'arrivée que l'on considère.

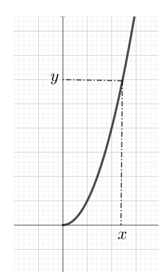
b) Notion d'antécédent. Soit $f : I \to J$ une application. Quel que soit $y \in J$, on dit que y admet un *antécédent* par f lorsqu'il existe un réel $x \in I$ tel que $y = f(x)$.
Attention :

1. par définition de l'application f, tout $x \in I$ admet une et une seule image par f, l'unique élément $f(x) \in J$,
2. mais réciproquement, un élément $y \in J$ n'admet pas forcément d'antécédent par f dans I, ou il peut en admettre plusieurs.

c) Un exemple pour comprendre le problème. A partir de la fonction $f(x) = x^2$, on peut considérer l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à tout réel x associe son unique image $f(x) = x^2$.

Dans ce cas, il est clair que les réels y de l'ensemble d'arrivée qui sont strictement négatifs n'admettent pas d'antécédent par f.





On pense donc à considérer plutôt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$. Alors, tout y dans l'ensemble d'arrivée admet bien un antécédent, mais il en admet en fait deux dès lors que $y > 0$.

On restreint alors en considérant l'application $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, et alors tout réel dans l'ensemble d'arrivée admet un unique antécédent dans l'ensemble de départ.

► *Un autre exemple.* A partir de la fonction $f(x) = \sin x$, on peut considérer l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à tout réel x associe son unique image $f(x) = \sin x$.

Dans ce cas, il est clair que les réels y de l'ensemble d'arrivée qui sont strictement supérieurs à 1 ou strictement inférieurs à -1 n'admettent pas d'antécédent par f.

On pense donc à considérer plutôt $f : \mathbb{R} \to [-1,1]$. Alors, tout y dans l'ensemble d'arrivée admet bien un antécédent, mais il en admet en fait une infinité.

On restreint alors en considérant l'application $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$, de sorte tout réel dans l'ensemble d'arrivée admet un unique antécédent dans l'ensemble de départ.

8.2 Bijectivité

a) Définition. Une application $f : I \to J$ est une *bijection* de I sur J lorsque tout élément y de J admet un unique antécédent x dans I.

$$\boxed{(\ f \text{ est bijective de } I \text{ sur } J\ ) \Leftrightarrow (\ \text{pour tout } y \in J\ , \text{ il existe un unique } x \in I \text{ tel que } y = f(x)\ )}$$

b) Bijectivité des fonctions continues strictement monotones. Rappelons qu'une application $f : I \to J$ est dite strictement monotone sur I lorsqu'elle est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I.

Le premier argument ci-dessous découle directement des définitions :

$$\boxed{(f : I \to J \text{ est strictement monotone sur } I\ ) \Rightarrow (\ f \text{ est une bijection de } I \text{ sur } f(I)\ )}$$

Dans le cas des fonctions continues sur un intervalle I, on peut combiner cet argument avec les résultats découlant du théorème des valeurs intermédiaires (voir précédemment en 7.3) pour préciser la forme de l'intervalle $f(I)$.

	f strictement croissante	f strictement décroissante
$I = [a, b]$	$f(I) = [f(a), f(b)]$	$f(I) = [f(b), f(a)]$
$I = [a, +\infty[$	$f(I) = [f(a), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[$	$f(I) =]\lim\limits_{x \to +\infty} f(x), f(a)]$
$I =]-\infty, b[$	$f(I) =]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x), f(b)]$	$f(I) = [f(b), \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)[$
$I =]-\infty, +\infty[$	$f(I) =]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[$	$f(I) =]\lim\limits_{x \to +\infty} f(x), \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)[$

On peut adapter le tableau ci-dessus au cas où I est ouvert en a ou b, en remplaçant alors $f(a)$ par la limite de f en a, et $f(b)$ par la limite de f en b.

▶ *Exemples :*

1. La fonction $f(x) = x^2$ définit une bijection de $I = [0, +\infty[$ sur $f(I) = [0, +\infty[$.
   La fonction $f(x) = x^3$ définit une bijection de $I =]-\infty, +\infty[$ sur $f(I) =]-\infty, +\infty[$.
2. La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ définit une bijection de $I =]0, +\infty[$ sur $f(I) =]0, +\infty[$.
3. La fonction $f(x) = \sin x$ définit une bijection de $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $f(I) = [-1, 1]$.
   La fonction $f(x) = \cos x$ définit une bijection de $I = [0, \pi]$ sur $f(I) = [-1, 1]$.

8.3 Bijection réciproque

a) Définition. Soit $f : I \to J$ une application. On suppose que f est bijective de I sur J. On peut associer à tout $y \in J$ l'unique élément $x \in I$ tel que $f(x) = y$. Ceci définit une nouvelle application $J \to I$, que l'on appelle la bijection réciproque de f, notée f^{-1}.

$\boxed{f : I \to J \text{ et } f^{-1} : J \to I}$, avec $\boxed{[\ x = f^{-1}(y)\ ] \Leftrightarrow [\ y = f(x)\ ] \text{ pour tous } x \in I \text{ et } y \in J}$

▶ Une première conséquence de cette définition est que :

$$\boxed{f^{-1}(f(x)) = x \text{ et } f(f^{-1}(y)) = y \text{ pour tous } x \in I \text{ et } y \in J}$$

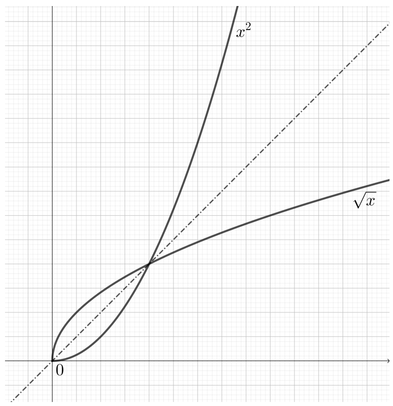
ce que l'on peut aussi formuler sous la forme $\boxed{f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_J \text{ et } f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_I.}$

► Une seconde conséquence de cette définition est que les représentations graphiques de f et f^{-1} sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la première bissectrice.

En effet, soit $M(x,y)$ un point de la courbe $\mathcal{C}_f$. Cela signifie que $y = f(x)$. On a alors $x = f^{-1}(y)$, de sorte que le point $M'(y,x)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_{f^{-1}}$. Les points $M(x,y)$ et $M'(y,x)$ sont images l'un de l'autre par la symétrie orthogonale s par rapport à la première bissectrice Δ.

b) Deux exemples de référence.

carré et racine carré



L'application $c : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ définie par $c(x) = x^2$ est continue et strictement croissante.

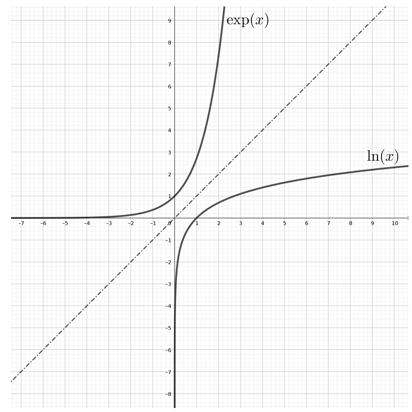
Elle est donc bijective de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$.

Sa bijection réciproque est l'application $r : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ définie par $r(x) = \sqrt{x}$, qui est aussi continue et strictement croissante.

$$\boxed{(y = x^2) \Leftrightarrow (x = \sqrt{y})}$$

pour tous $x, y \in [0,+\infty[$

exponentielle et logarithme néperien



L'application $\exp :]-\infty,+\infty[\to]0,+\infty[$ est continue et strictement croissante.

Elle est donc bijective de $]-\infty,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$.

Sa bijection réciproque est l'application $\ln :]0,+\infty[\to]-\infty,+\infty[$, qui est continue et strictement croissante.

$$\boxed{(y = \exp x) \Leftrightarrow (x = \ln y)}$$

pour tous $x \in]-\infty,+\infty[$ et $y \in]0,+\infty[$

8.4 Fonctions trigonométriques réciproques

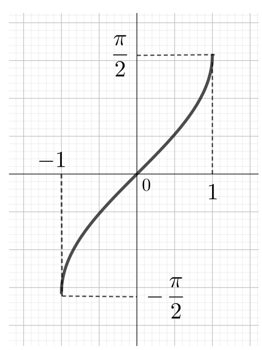
a) La fonction arc sinus

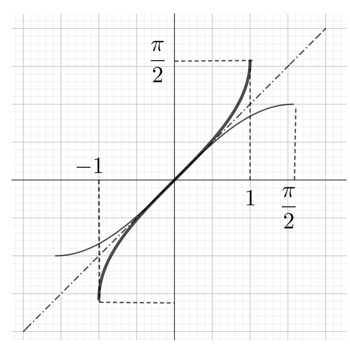
La fonction sinus définit une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1,1]$ (continue et strictement croissante). Sa bijection réciproque est appelée la fonction arc sinus, notée arcsin.

Donc arcsin bijective de $[-1,1]$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$\boxed{(y = \sin x) \Leftrightarrow (x = \arcsin y)}$$

pour tous $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $y \in [-1,1]$.





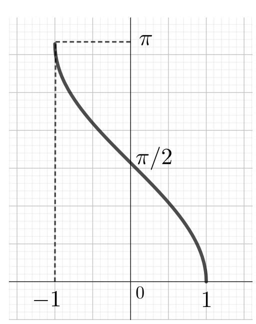
b) La fonction arc cosinus

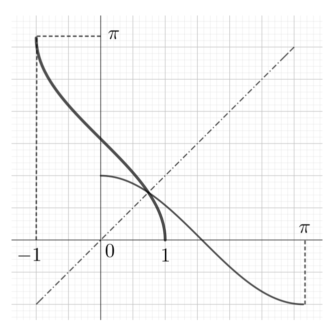
La fonction cosinus définit une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$ (continue et strictement décroissante). Sa bijection réciproque est appelée la fonction arc cosinus, notée arccos.

Donc arccos bijective de $[-1,1]$ sur $[0,\pi]$.

$$\boxed{(y = \cos x) \Leftrightarrow (x = \arccos y)}$$

pour tous $x \in [0,\pi]$ et $y \in [-1,1]$.





8.5 Dérivabilité d'une bijection réciproque

Soit $f : I \to J$ une application. On suppose que f est une bijection de I sur J, et que f est dérivable sur I. On peut démontrer qu'alors la bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est dérivable en tout point $x \in I$ où f' ne s'annule pas, et que l'on a ,

$$\text{soient } x \in I \text{ et } y = f(x) \in J\,; \text{ si } f'(x) \neq 0, \text{ alors : } (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

On résume cette propriété par la formule : $\boxed{(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}}$.

Ceci s'applique aux fonctions réciproques précédemment rencontrées (ainsi qu'à la fonction arctan qui sera étudiée en exercice), et permet d'obtenir les résultats suivants, qu'il est utile de connaître :

$f(x)$	$f^{-1}(x)$	f^{-1} est dérivable sur	$(f^{-1})'(x)$
x^2	$\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\exp x$	$\ln x$	$]0, +\infty[$	$\dfrac{1}{x}$
$\sin x$	$\arcsin x$	$]-1, 1[$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$\arccos x$	$]-1, 1[$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$\arctan x$	$]-\infty, +\infty[$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

8.6 Quelques exercices

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, et soit $A = [-1, 4]$. Déterminer l'ensemble $f(A)$. Déterminer l'ensemble B des valeurs de x telles que $f(x) \in A$. L'application $f : B \to A$ est-elle une bijection ?

Exercice 2. On considère la fonction sinus de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Quelle est l'image de $\mathbb{R}$? de $[0, 2\pi]$? de $[0, \frac{\pi}{2}]$? Décrire les intervalles I de $\mathbb{R}$ tels que $\sin : I \to [0, 1]$ est une bijection.

Exercice 3. Soient $a, b > 0$ et f l'application $x \mapsto \frac{ax+1}{x-b}$. Déterminer deux intervalles I et J tels que $f : I \to J$ soit bijective. Calculer la bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$.

Exercice 4. On considère la fonction $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $c(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x))$. Montrer que c détermine une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.

Exercice 5. On considère les deux fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $g : x \mapsto \dfrac{x-1}{x+1}$.

1. Donner le domaine de définition de $g \circ f$, et comparer avec celui de $-g$.
2. Trouver deux intervalles I et J tels que $f : I \to J$ soit une bijection, et donner la bijection réciproque.
3. Faire de même pour g et pour $g \circ f$.

Exercice 6. On rappelle que la fonction tangente est définie par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $\cos x \neq 0$,.

1. Montrer que tan réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.
2. On appelle arc tangente sa bijection réciproque, notée arctan. Donner l'allure de la représentation graphique de $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
3. Montrer que arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.