



UFR MATHÉMATIQUES
Université Clermont Auvergne

Licence de mathématiques
troisième année

Géométrie affine

version du 12 avril 2024

Ces notes correspondent au programme d'une unité d'enseignement de second semestre de la troisième année de la licence de mathématiques. Elles ne constituent pas un cours de géométrie autonome et complet sur les notions présentées, mais s'insèrent entre le contenu d'enseignements préalables de licence et d'enseignements ultérieurs pour les masters. Les prérequis sont le contenu des unités d'enseignement d'algèbre linéaire du L1 et L2, certaines notions de théorie des groupes étudiées au premier semestre de L3, ainsi que l'approche de la géométrie élémentaire pratiquée au lycée.

Le mode de rédaction n'est pas celui d'un traité, mais de simples notes destinées à servir de support au travail personnel des étudiantes et étudiants, à compléter évidemment par des exercices, des problèmes et des dessins.

Les notions principales sont regroupées dans les quatre premiers chapitres. Les deux suivants proposent deux développements prévus par le programme : le premier dans le contexte affine avec la notion de barycentre, le second dans le contexte affine euclidien avec la notion d'action d'un groupe d'isométries sur une configuration du plan ou de l'espace.

Je remercie Richard Griffon pour sa relecture attentive de ces notes. Il subsiste probablement des coquilles ou des erreurs. Merci de m'en faire part.

Francois.Dumas@uca.fr

0 – Table des matières

1	Espaces affines, sous-espaces affines	1
1.1	Notion d'espace affine	1
1.2	Sous-espace affine	3
1.3	Parallélisme	5
1.4	Cas particulier des espaces affines euclidiens, distance, orthogonalité	6
2	Repères et coordonnées	9
2.1	Sous espace affine engendré par une partie	9
2.2	Base affine.	9
2.3	Coordonnées d'un point dans un repère cartésien	11
2.4	Exemples en géométrie élémentaire : droites du plan	13
2.5	Exemples en géométrie élémentaire : droites et plans de l'espace	15
2.6	Cas particulier des espaces euclidiens, repères orthogonaux	17
3	Applications affines, groupe affine	21
3.1	Notion d'application affine.	21
3.2	Groupe affine	23
3.3	Sous-groupe des translations	24
3.4	Sous-groupe des homothéties translations	25
3.5	Projections et symétries	27
3.6	Exemples classiques en géométrie plane	29
4	Isométries affines	33
4.1	Groupe des isométries affines, déplacements et antidéplacements	33
4.2	Isométries affines du plan.	38
4.3	Isométries affines en dimension 3	42
5	Barycentres	49
5.1	Notion de barycentre.	49
5.2	Exemples d'applications en géométrie plane élémentaire	52
5.3	Applications à la convexité	54
6	Sous-groupes d'isométries laissant invariante une partie du plan ou de l'espace	57
6.1	Quelques principes généraux	57
6.2	Exemples dans le plan : groupes diédraux	59
6.3	Exemples dans l'espace : groupe du tétraèdre, groupe du cube	61

1 – Espaces affines, sous-espaces affines

1.1 Notion d'espace affine

1.1.1 Définition. Un *espace affine* sur \mathbb{R} est la donnée d'un triplet $(E, \mathcal{E}, \vartheta)$ formé par :

- (i) un \mathbb{R} -espace vectoriel E : ses éléments sont appelés des *vecteurs* ; on les notera par des lettres minuscules surmontés d'une flèche $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \dots$ en particulier le vecteur nul sera noté $\vec{0}$;
- (ii) un ensemble non-vide \mathcal{E} : ses éléments sont appelés des *points* ; on les notera par des lettres majuscules $A, B, C, M, N, P, \Omega \dots$
- (iii) une application $\vartheta : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow E, (A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}$ satisfaisant les deux axiomes suivants :
 - (A1) pour tout $A \in \mathcal{E}$ et tout $\vec{u} \in E$, il existe un unique point $M \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$,
 - (A2) pour tous $A, B, C \in \mathcal{E}$, on a dans E la relation $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (*relation de Chasles*).

► On dit plus brièvement que \mathcal{E} est un espace affine sur \mathbb{R} , d'*espace vectoriel directeur* E (l'application ϑ étant alors sous-entendue)¹.

► L'espace affine \mathcal{E} est dit *de dimension finie* n lorsque E est de dimension finie n (en tant qu'espace vectoriel). La géométrie élémentaire étudiée au lycée ou les applications usuelles en physique se situent dans un espace affine de dimension 2 ou 3.

1.1.2 Conséquences pratiques immédiates.

a) Nullité d'un vecteur. Pour tous points $A, B \in \mathcal{E}$, on a $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ si et seulement si $A = B$.

En effet : d'après (A2), $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA}$, donc $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$. Réciproquement, si $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA}$, ce qui implique $B = A$ par unicité dans l'axiome (A1). \square

b) Vecteurs opposés. Pour tous points $A, B \in \mathcal{E}$, on a $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

En effet : Il en résulte du a) et de (A2) que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$. \square

c) Milieu. Pour tous $A, B \in \mathcal{E}$, il existe un unique point $I \in \mathcal{E}$, appelé le milieu du couple de points (A, B) , qui vérifie les conditions équivalentes suivantes :

$$\boxed{[I \text{ est le milieu de } (A, B)] \Leftrightarrow [\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}] \Leftrightarrow [\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}]}.$$

En effet : l'existence et l'unicité du point I vérifiant la première condition est une application immédiate de l'axiome (A1), et l'équivalence des deux conditions résulte de la relation de Chasles. \square

1. Commentaire – Le point de vue retenu dans ce document définit un espace affine à partir de la notion supposée connue d'espace vectoriel. On peut envisager une autre présentation consistant à partir intuitivement d'un ensemble de points \mathcal{E} , et à considérer dans $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ la relation dite d'*équipollence*, définie par : $(A, B) \sim (C, D)$ lorsque $ABDC$ est un parallélogramme. On vérifie que c'est une relation d'équivalence, et un vecteur est alors défini comme une classe d'équivalence pour cette relation [ie. \overrightarrow{AB} est l'ensemble des couples de points (C, D) équipollents à (A, B) , de sorte que l'on retrouve bien la règle du parallélogramme]. Il s'agit ensuite de retrouver géométriquement les diverses opérations sur les vecteurs correspondant à la structure d'espace vectoriel

1.1.3 Diverses traduction de l'axiome (A1).

a) Pour tout vecteur $\vec{u} \in E$ et tout point $A \in \mathcal{E}$, l'unique point $M \in \mathcal{E}$ défini par $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$ est parfois noté $M = A + \vec{u}$. C'est une notation commode mais qu'il faut manipuler avec précaution pour éviter certaines confusions dans les calculs.

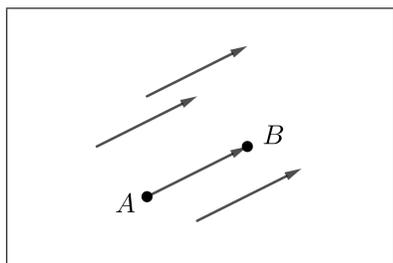
b) Pour $\vec{u} \in E$ fixé, l'application $\tau_{\vec{u}} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ qui à tout point $A \in \mathcal{E}$, associe le point $A + \vec{u}$ est une bijection de \mathcal{E} sur \mathcal{E} , appelée la translation de vecteur \vec{u} .

c) Pour $A \in \mathcal{E}$ fixé, l'application $\varphi_A : \mathcal{E} \rightarrow E$ qui à tout point $M \in \mathcal{E}$ associe le vecteur \overrightarrow{AM} est une bijection de \mathcal{E} sur E . Sa bijection réciproque est l'application $\psi_A : E \rightarrow \mathcal{E}$ définie par $\psi_A(\vec{u}) = A + \vec{u}$ pour tout $\vec{u} \in E$.

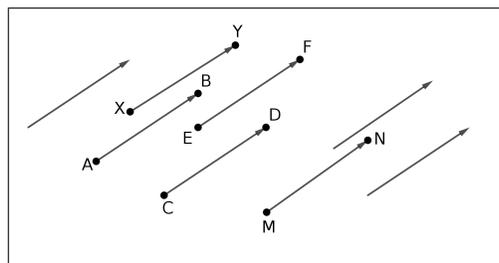
1.1.4 Terminologie. Lorsque $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, on dit que le couple de points (A, B) est un *représentant* du vecteur \vec{u} , dans lequel A est l'*origine* et B l'*extrémité*.

► Tout autre couple de points (C, D) tel que $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$ est un autre représentant de \vec{u} .

► La translation de vecteur \vec{u} est l'application qui, à tout point A , associe le point $B = A + \vec{u}$ qui est l'extrémité de \vec{u} lorsque son origine est A .



$\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, donc $B = A + \vec{u}$.



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{XY}$

Ces couples de points **représentent** le même vecteur.

1.1.5 Un exercice classique : configuration du parallélogramme. Soient A, B, C, D quatre points de \mathcal{E} . Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

$$[\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}] \Leftrightarrow [\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}] \Leftrightarrow [\text{le milieu de } (A, D) \text{ est égal au milieu de } (B, C)]$$

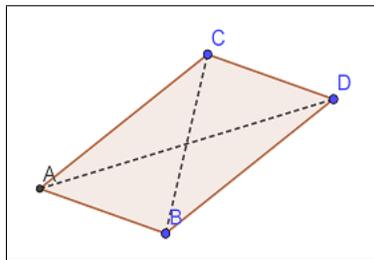
Le quadruplet (A, B, D, C) est alors appelé un *parallélogramme*.

En effet : d'après la relation de Chasles, on a $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} - (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$, d'où la première équivalence voulue lorsque cette différence est nulle.

Notons I le milieu de (A, D) et J le milieu de (B, C) . On calcule avec la relation de Chasles :

$$2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BJ}.$$

Mais on a $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{CJ} = -\overrightarrow{BJ}$ par définition des points I et J , donc l'égalité ci-dessus se réduit à $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$, et donc : $(I = J) \Leftrightarrow (\overrightarrow{IJ} = \vec{0}) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{DB}) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD})$ □



1.2 Sous-espace affine

Dans tout ce paragraphe, \mathcal{E} est un espace affine sur \mathbb{R} , d'espace vectoriel directeur E .

1.2.1 Définition. Une partie \mathcal{F} de \mathcal{E} est un *sous-espace affine* de \mathcal{E} lorsqu'il existe un point A dans \mathcal{F} tel que l'ensemble des vecteurs \overrightarrow{AM} pour M décrivant \mathcal{F} est un sous-espace vectoriel de E .

► Il en résulte en particulier qu'un sous-espace affine n'est jamais vide, et que \mathcal{E} lui-même est un sous-espace affine de \mathcal{E} .

► Il en résulte aussi que, pour tout point $A \in \mathcal{E}$, le singleton $\{A\}$ est un sous-espace affine de \mathcal{E}

Le point fondamental est que le sous-espace vectoriel dans la définition ci-dessus ne dépend en fait pas du point A , comme le montre la proposition suivante.

1.2.2 Proposition et définition. Soit \mathcal{F} un sous-espace affine de \mathcal{E} . Il existe un sous-espace vectoriel F de E tel que, pour tout $A \in \mathcal{F}$, on ait $F = \{\overrightarrow{AM} ; M \in \mathcal{F}\}$.

On dit que F est le sous-espace vectoriel directeur de \mathcal{F} , ou encore que \mathcal{F} est dirigé par F .

Preuve. Par hypothèse, il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $\varphi_A(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de E . Fixons $B \in \mathcal{F}$ quelconque et montrons que $\varphi_A(\mathcal{F}) = \varphi_B(\mathcal{F})$. On a $\overrightarrow{AB} = \varphi_A(B) \in \varphi_A(\mathcal{F})$. Quel que soit $M \in \mathcal{F}$, les vecteurs \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{AB} appartiennent au sous-espace vectoriel $\varphi_A(\mathcal{F})$, donc $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} \in \varphi_A(\mathcal{F})$. Ceci prouve que $\varphi_B(\mathcal{F}) \subseteq \varphi_A(\mathcal{F})$. Pour la réciproque, notons que l'on a aussi $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} \in \varphi_A(\mathcal{F})$; il existe donc $N \in \mathcal{F}$ tel que $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN}$ donc $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BN} \in \varphi_B(\mathcal{F})$. On conclut $\varphi_A(\mathcal{F}) \subseteq \varphi_B(\mathcal{F})$, d'où l'égalité voulue. \square

Réciproquement, la donnée d'un sous-espace vectoriel de E et d'un point de \mathcal{E} détermine un unique sous-espace affine de \mathcal{E} , comme le montre le théorème suivant.

1.2.3 Théorème fondamental et définition. Soient F un sous-espace vectoriel de E et A un point de \mathcal{E} . Il existe un unique sous-espace affine \mathcal{F} de \mathcal{E} tel que A appartienne à \mathcal{F} et tel que F soit le sous-espace vectoriel directeur de \mathcal{F} .

On dit que \mathcal{F} est le sous-espace affine de \mathcal{E} passant par A et dirigé par F .

Preuve. Posons $\mathcal{F} = \varphi_A^{-1}(F) = \{M \in \mathcal{E} ; \overrightarrow{AM} \in F\}$. On a $A \in \mathcal{F}$ puisque $\overrightarrow{AA} = \vec{0} \in F$; de plus, par construction, $\varphi_A(\mathcal{F}) = F$, donc \mathcal{F} est un sous-espace affine dirigé par F . Pour l'unicité, soit \mathcal{F}' un sous-espace affine de \mathcal{E} passant par A et dirigé par F . D'après la proposition précédente, cela signifie que $\varphi_A(\mathcal{F}') = F$. Mais alors $\varphi_A(\mathcal{F}) = \varphi_A(\mathcal{F}')$ implique $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ par bijectivité de φ_A . \square

EN PRATIQUE.

• Si l'on sait que \mathcal{F} est un sous-espace affine de \mathcal{E} de sous-espace directeur F , alors on peut utiliser les trois propriétés suivantes :

- a) pour tous $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$, on a $\overrightarrow{AB} \in F$;
- b) pour tous $A \in \mathcal{F}$ et $\vec{u} \in F$, il existe un unique point $M \in \mathcal{F}$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$;
- c) pour tout $A \in \mathcal{F}$ on a : $\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{E} ; \overrightarrow{AM} \in F\}$ et $F = \{\overrightarrow{AM} ; M \in \mathcal{F}\}$.

- Si l'on veut montrer qu'une partie donnée \mathcal{F} de \mathcal{E} est un sous-espace affine, il suffit de montrer que l'ensemble des vecteurs \overrightarrow{AB} tels que $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$ forme un sous-espace vectoriel de E .
- Si l'on veut montrer qu'une partie donnée \mathcal{F} de \mathcal{E} dont on connaît un point A est un sous-espace affine, il suffit de montrer que l'ensemble des vecteurs \overrightarrow{AM} pour M décrivant \mathcal{F} est un sous-espace vectoriel de E .

1.2.4 Dimension d'un sous-espace affine. On a une notion naturelle et évidente de dimension d'un sous-espace affine : la dimension de \mathcal{F} est définie comme la dimension du sous-espace vectoriel F de E directeur de \mathcal{F} . Il résulte aisément des propositions précédentes que :

a) Si E est de dimension finie n (ie. $\dim \mathcal{E} = \dim E = n$), alors :

$$\dim \mathcal{F} = \dim F \leq n \text{ pour tout sous-espace affine } \mathcal{F} \text{ de } \mathcal{E}.$$

b) Si \mathcal{F} et \mathcal{F}' sont deux sous-espaces affines, on a :

$$(\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}) \Rightarrow (\dim \mathcal{F}' \leq \dim \mathcal{F}), \text{ ainsi que } (\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F} \text{ et } \dim \mathcal{F}' = \dim \mathcal{F}) \Rightarrow (\mathcal{F}' = \mathcal{F}).$$

c) Un sous-espace affine de dimension 0 est un singleton $\{A\}$ formé d'un seul point de \mathcal{E} .

Un sous-espace affine de dimension 1 s'appelle une *droite affine*.

Un sous-espace affine de dimension 2 s'appelle un *plan affine*.

d) On appelle *hyperplan* de \mathcal{E} tout sous-espace affine de \mathcal{E} qui est de dimension $n - 1$, où n est la dimension de \mathcal{E} . Dans le cadre de la géométrie élémentaire, les hyperplans de l'espace affine de dimension 3 sont les plans, et les hyperplans du plan de dimension 2 sont les droites.

EN PRATIQUE

- Si \mathcal{E} est de dimension 2, ses sous-espaces affines sont : les singletons, les droites affines contenues dans \mathcal{E} , et le plan \mathcal{E} lui-même.
- Si \mathcal{E} de dimension 3, ses sous-espaces affines sont : les singletons, les droites affines contenues dans \mathcal{E} , les plans affines contenus dans \mathcal{E} , et l'espace \mathcal{E} lui-même.

1.2.5 Proposition. Une intersection de sous-espaces affines, si elle est non vide, est un sous-espace affine, dirigé par l'intersection des sous-espaces vectoriels directeurs.

Preuve. Soit $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces affines de \mathcal{E} . Pour tout $i \in I$, notons F_i le sous-espace vectoriel directeur de \mathcal{F}_i . On sait que $F = \cap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E . Posons $\mathcal{F} = \cap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ et supposons que $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Prenons $A \in \mathcal{F}$ quelconque. Parce que φ_A est injective (car bijective), on a $\varphi_A(\cap_{i \in I} \mathcal{F}_i) = \cap_{i \in I} \varphi_A(\mathcal{F}_i)$, c'est-à-dire $\varphi_A(\mathcal{F}) = F$. Comme F est un sous-espace vectoriel de E , ceci prouve que \mathcal{F} est un ss-e.a. de \mathcal{E} dirigé par F . \square

D'après 1.2.4, il est clair dans ce résultat que le sous-espace affine \mathcal{F} est de dimension inférieure ou égal à la dimension de chacun des sous-espaces \mathcal{F}_i .

EN PRATIQUE

On retrouve les faits bien connus en géométrie élémentaire que l'intersection d'une famille finie de droites ou de plans peut être vide, un point, une droite ou un plan.

Savoir caractériser le fait que deux sous-espaces affines sont disjoints ou non (ie. que leur intersection est vide ou non) est une question importante, à laquelle répond la proposition suivante.

1.2.6 Proposition. Soient \mathcal{F} et \mathcal{F}' sont sous-espaces affines, de sous-espaces vectoriels directeurs respectifs F et F' .

- (i) Soit A un point de \mathcal{F} et B un point de \mathcal{F}' . L'intersection $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}'$ est non-vide si et seulement si le vecteur \overrightarrow{AB} appartient au sous-espace somme $F + F'$.
- (ii) En particulier, si F et F' sont supplémentaires dans E , alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}'$ est un singleton.

Preuve. Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}'$ contient un point I , on a $\overrightarrow{AI} \in F$ puisque A et I appartiennent à \mathcal{F} , et $\overrightarrow{IB} \in F'$ puisque B et I appartiennent à \mathcal{F}' . Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}$ appartient à $F + F'$.

Supposons réciproquement que $\overrightarrow{AB} \in F + F'$. Il existe donc $\vec{u} \in F$ et $\vec{v} \in F'$ tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$. Puisque $\vec{u} \in F$ et $A \in \mathcal{F}$, il existe un unique point $I \in \mathcal{F}$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AI}$. On calcule alors :

$$\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AB} = \vec{u} - (\vec{u} + \vec{v}) = -\vec{v}.$$

Il en résulte que $\overrightarrow{BI} \in F'$. Puisque $B \in \mathcal{F}'$, ceci implique $I \in \mathcal{F}'$. On conclut que I appartient à $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}'$.

Le point (i) étant ainsi démontré, on en déduit que si $F \oplus F' = E$, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \neq \emptyset$. Donc d'après la proposition 1.2.5, le sous espace affine $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}'$ est dirigé par $F \cap F' = \{\vec{0}\}$, donc est de dimension 0, c'est-à-dire réduit à un singleton. \square

1.3 Parallélisme

Dans tout ce paragraphe, \mathcal{E} est un espace affine sur \mathbb{R} , d'espace vectoriel directeur E .

1.3.1 Définition Soient \mathcal{F} et \mathcal{F}' deux sous-espaces affines de \mathcal{E} , de sous-espaces vectoriels directeurs respectifs F et F' . On dit que \mathcal{F} et \mathcal{F}' sont *parallèles* lorsque $F = F'$. On note $\mathcal{F} \parallel \mathcal{F}'$.

En particulier, deux sous-espaces affines parallèles sont nécessairement de même dimension. Il est clair que le parallélisme est une relation d'équivalence dans l'ensemble des sous-espaces affines.

1.3.2 Proposition Deux sous-espaces affines parallèles sont nécessairement égaux ou disjoints.

Preuve. Considérons comme ci-dessus $\mathcal{F} \parallel \mathcal{F}'$, avec $F = F'$. Si \mathcal{F} et \mathcal{F}' ne sont pas disjoints, considérons $A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{F}'$. Alors \mathcal{F} et \mathcal{F}' passent tous les deux par A en étant dirigés par le même sous-espace vectoriel $F = F'$. On déduit de l'unicité dans le théorème 1.2.3 que $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$. \square

Attention, la réciproque est trivialement fautive en général! Dans un espace affine de dimension 3, deux droites qui ne sont pas incluses dans un même plan sont forcément disjointes sans être parallèles. Il y a cependant des arguments de dimensions qui permettent des résultats partiels. Par exemple, on vérifie à partir des propositions 1.2.5 et 1.2.6 que :

EN PRATIQUE

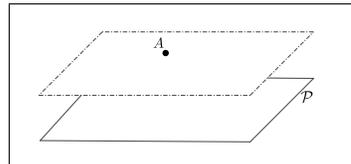
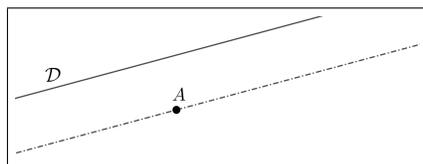
- Si \mathcal{E} est un plan affine, deux droites affines \mathcal{D} et \mathcal{D}' de \mathcal{E} sont parallèles si et seulement si elles sont égales ou disjointes.
- Si \mathcal{E} est un espace affine de dimension 3, deux plans affines \mathcal{P} et \mathcal{P}' de \mathcal{E} sont parallèles si et seulement s'ils sont égaux ou disjointes.

1.3.3 Commentaire. Une propriété essentielle dans la formulation axiomatique de la géométrie classique est l'axiome (ou postulat) d'Euclide :

si \mathcal{D} est une droite et A un point n'appartenant pas à \mathcal{D} , alors il passe par A une droite et une seule parallèle à \mathcal{D} .

Dans la mesure où être parallèle signifie avoir le même sous-espace vectoriel directeur, cet énoncé "traditionnel" est une formulation du théorème 1.2.3. Et elle est de ce fait valable pour tout sous-espace affine. Par exemple :

Si \mathcal{P} est un plan et A un point n'appartenant pas à \mathcal{P} , alors il passe par A un plan et un seul parallèle à \mathcal{P} .



1.4 Cas particulier des espaces affines euclidiens, distance, orthogonalité

1.4.1 Définition. On appelle espace affine euclidien tout espace affine \mathcal{E} sur \mathbb{R} tel que l'espace vectoriel directeur E est un espace vectoriel euclidien.

► **RAPPEL D'ALGÈBRE LINÉAIRE.** Dire que l'espace vectoriel E est euclidien signifie que E est de dimension finie sur \mathbb{R} et qu'il est muni d'un produit scalaire.

On notera $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le produit scalaire de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de E .

La norme euclidienne associée est alors définie par $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$ pour tout $\vec{u} \in E$.

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de E sont dits orthogonaux lorsque $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. On note $\vec{u} \perp \vec{v}$.

1.4.2 Distance. Pour tous points A, B dans \mathcal{E} , on appelle *distance* de A à B le réel positif :

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|, \text{ que l'on note aussi plus simplement } AB.$$

On déduit immédiatement des propriétés de la norme que, pour tous points $A, B, C \in \mathcal{E}$:

$$\boxed{d(A, B) = d(B, A)}, \quad \boxed{[d(A, B) = 0] \Leftrightarrow [A = B]}, \quad \boxed{d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)}.$$

1.4.3 Proposition (propriété de Pythagore). Soient A, B, C trois points de \mathcal{E} . On a :

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \text{ si et seulement si } BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

On dit alors que le triangle (ABC) est rectangle en A . Le côté $[BC]$ est appelé l'hypothénuse.

Preuve. Avec la relation de Chasles : $BC^2 = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = BA^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + AC^2$.
Donc $BC^2 = BA^2 + AC^2$ si et seulement si $2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, d'où le résultat. \square

1.4.4 Définition (sphère). Soient Ω un point de \mathcal{E} . Pour tout réel $r \geq 0$, on appelle *sphère* de centre Ω et de rayon r l'ensemble des points M de \mathcal{E} tel que la distance entre Ω et M est égal à r .

$$\text{On note } S(\Omega, r) = \{M \in \mathcal{E}; d(\Omega, M) = r\}.$$

► On définit de même la *boule fermée* $B(\Omega, r) = \{M \in \mathcal{E}; d(\Omega, M) \leq r\}$ de centre Ω et de rayon r (la boule ouverte correspondant de même à la condition $d(\Omega, M) < r$).

► Dans le cas où $\dim \mathcal{E} = 2$, $S(\Omega, r)$ est appelée *cercle* et $B(\Omega, r)$ est appelée *disque* fermé de centre Ω et de rayon r .

1.4.5 Proposition (sphère et orthogonalité). Soient I et J deux points distincts d'une sphère $S(\Omega, r)$ de rayon $r > 0$ tels que Ω soit le milieu de (I, J) (on dit dans ce cas que I et J sont diamétralement opposés). Alors, un point quelconque $M \in \mathcal{E}$ appartient à la sphère $S(\Omega, r)$ si et seulement si les points (I, J, M) forment un triangle rectangle.

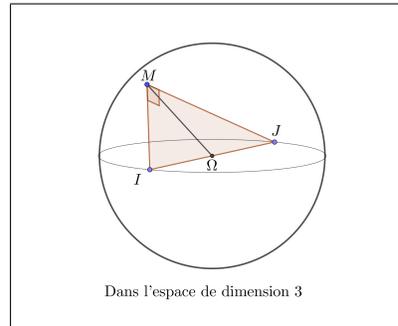
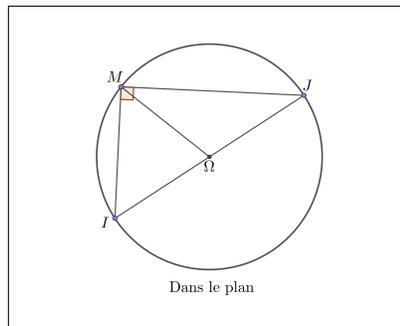
Preuve. On calcule à l'aide de la relation de Chasles le produit scalaire :

$$\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = (\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega I}) \cdot (\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega J}) = \overrightarrow{M\Omega} \cdot \overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega I} \cdot \overrightarrow{\Omega J} + \overrightarrow{\Omega I} \cdot \overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{M\Omega} \cdot \overrightarrow{\Omega J}.$$

Comme Ω est le milieu de (I, J) , on a $\overrightarrow{\Omega I} = -\overrightarrow{\Omega J}$; il en résulte que d'une part $\overrightarrow{\Omega I} \cdot \overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{M\Omega} \cdot \overrightarrow{\Omega J} = (\overrightarrow{\Omega I} + \overrightarrow{\Omega J}) \cdot \overrightarrow{M\Omega} = \vec{0} \cdot \overrightarrow{M\Omega} = 0$, et que d'autre part $\overrightarrow{\Omega I} \cdot \overrightarrow{\Omega J} = -\overrightarrow{\Omega I} \cdot \overrightarrow{\Omega I} = -\Omega I^2 = -r^2$. En observant que $\overrightarrow{M\Omega} \cdot \overrightarrow{M\Omega} = \Omega M^2$, l'égalité précédente devient donc :

$$\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = \Omega M^2 - r^2.$$

Il est clair alors que $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$ équivaut à $\Omega M = r$, c'est-à-dire que (I, J, M) forment un triangle rectangle si et seulement si $M \in S(\Omega, r)$. \square



1.4.6 Sous-espaces affines orthogonaux. Soient \mathcal{F} et \mathcal{H} deux ss-e.a. de \mathcal{E} . On dit que \mathcal{F} et \mathcal{H} sont orthogonaux lorsque leurs sous-espaces vectoriels respectifs F et H sont orthogonaux.

► **RAPPEL D'ALGÈBRE LINÉAIRE.** Deux sous-espaces vectoriels de F et H de E sont dits orthogonaux si tout vecteur de l'un est orthogonal à tout vecteur de l'autre.

Si F est un sous-espace vectoriel de E , on appelle orthogonal de F l'ensemble F^\perp formé des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de F .

$$F^\perp = \{\vec{u} \in E; \vec{u} \perp \vec{v} \text{ pour tout } \vec{v} \in F\}.$$

On montre que F^\perp est un sous-espace vectoriel de E , supplémentaire de F dans E .

$$E = F \oplus F^\perp, \text{ et donc } \dim F^\perp = n - \dim F, \text{ où } n = \dim E.$$

1.4.7 Proposition et définition (hyperplan médiateur). Soient A, B deux points distincts de \mathcal{E} . Alors :

- (i) L'ensemble $\mathcal{H} = \{M \in \mathcal{E} ; d(A, M) = d(B, M)\}$ des points équidistants de A et B est un hyperplan affine de \mathcal{E} , appelé l'hyperplan médiateur du bipoint (A, B) .
- (ii) \mathcal{H} est l'hyperplan affine passant par le milieu I de (A, B) et dirigé par l'hyperplan vectoriel $H = \Delta^\perp$ de E , où Δ est la droite vectorielle de E dirigée par \overrightarrow{AB} .

Preuve. Par définition de \mathcal{H} , on a $M \in \mathcal{H}$ si et seulement si $AM = BM$, ce qui équivaut à $AM^2 = BM^2$ puisque les distances AM et BM sont des réels positifs. On calcule :

$$AM^2 - BM^2 = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM} - (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}) = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}.$$

Ainsi $M \in \mathcal{H}$ si et seulement si $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} - AB^2 = 0$; on retient que :

$$M \in \mathcal{H} \text{ si et seulement si } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = d, \text{ où l'on a posé } d = \frac{1}{2}AB^2.$$

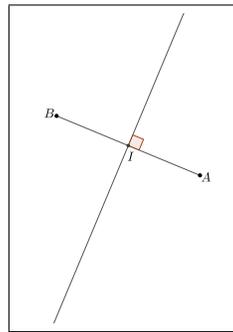
Remarquons d'abord que le milieu I de (A, B) appartient à \mathcal{H} puisque $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Le vecteur \overrightarrow{AB} est non-nul par hypothèse : introduisons la droite vectorielle Δ de E dirigée par le vecteur \overrightarrow{AB} . Notons H son supplémentaire orthogonal Δ^\perp . On sait que $\dim H = \dim E - \dim \Delta = n - 1$, de sorte que H est un hyperplan vectoriel de E .

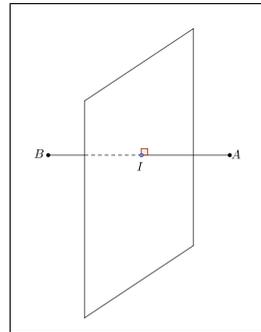
Pour tout $M \in \mathcal{E}$, on décompose : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM} = d + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM}$ en utilisant que $I \in \mathcal{H}$.

Il en résulte que $M \in \mathcal{H}$ si et seulement si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM} = 0$, ce qui équivaut à $\overrightarrow{IM} \in H$.

Ceci montre que \mathcal{H} est le sous-espace affine passant par I et dirigé par H . □



Lorsque $\dim \mathcal{E} = 2$,
droite **médiatrice** de (A, B)



Lorsque $\dim \mathcal{E} = 3$,
plan médiateur de (A, B)

2 – Repères et coordonnées

Dans ce chapitre, \mathcal{E} est un espace affine de dimension finie n sur \mathbb{R} , d'espace vectoriel directeur E .

2.1 Sous espace affine engendré par une partie

On a vu en 1.2.5 que l'intersection d'une famille de sous-espaces affines, lorsqu'elle est non vide, est un sous-espace affine, dirigé par l'intersection des sous-espaces vectoriels directeurs. C'est ce qui permet la définition suivante.

2.1.1 Définition. Pour toute partie non-vide \mathcal{X} de \mathcal{E} , on appelle sous-espace affine de \mathcal{E} engendré par \mathcal{X} , noté $\langle \mathcal{X} \rangle$, l'intersection de tous les sous-espaces affines de \mathcal{E} contenant \mathcal{X} .

2.1.2 Proposition Pour toute partie non-vide \mathcal{X} de \mathcal{E} , $\langle \mathcal{X} \rangle$ est le plus petit sous-espace affine de \mathcal{E} contenant \mathcal{X} .

Preuve. Soit \mathcal{F} un sous-espace affine de \mathcal{E} qui contient \mathcal{X} . Par définition, les éléments de $\langle \mathcal{X} \rangle$ appartiennent à tous les sous-espaces affines qui contiennent \mathcal{X} , donc à \mathcal{F} ; ceci prouve que $\langle \mathcal{X} \rangle \subset \mathcal{F}$. \square

Le théorème ci-dessous décrit le sous-espace affine engendré par un nombre fini de points.

2.1.3 Théorème. Soient A_0, A_1, \dots, A_p des points distincts de \mathcal{E} . Soit \mathcal{F} le sous-espace affine engendré par $\{A_0, A_1, \dots, A_p\}$. Alors \mathcal{F} est égal au sous-espace affine de \mathcal{E} passant par A_0 et dirigé par le sous-espace vectoriel F de E engendré par $\{\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0A_p}\}$.

Preuve. Posons $\mathcal{X} = \{A_0, A_1, \dots, A_p\}$. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par les p vecteurs $\{\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0A_p}\}$. Notons \mathcal{F} le sous-espace affine de \mathcal{E} passant par A_0 et dirigé par F . On a $\mathcal{F} = \varphi_{A_0}^{-1}(F)$. En particulier $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{F}$. Soit maintenant \mathcal{H} un sous-espace affine de \mathcal{E} contenant \mathcal{X} . Son sous-espace vectoriel directeur $H = \varphi_{A_0}(\mathcal{H})$ contient les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0A_p}$, donc le sous-espace vectoriel qu'ils engendrent. Ainsi F est un sous-espace vectoriel de H . On en déduit que $\varphi_{A_0}^{-1}(F) \subseteq \varphi_{A_0}^{-1}(H)$, c'est-à-dire $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$. On a ainsi montré que le sous-espace affine \mathcal{F} contient \mathcal{X} et qu'il est inclus dans tout sous-espace affine de \mathcal{E} contenant \mathcal{X} . On conclut $\mathcal{F} = \langle \mathcal{X} \rangle$. \square

EN PRATIQUE

Un point M de \mathcal{E} appartient au sous-espace affine engendré par A_0, A_1, \dots, A_p si et seulement s'il existe un p -uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^p \alpha_i \overrightarrow{A_0A_i}$.

2.2 Base affine.

Il est clair dans 2.1.3 que $\dim \mathcal{F} \leq p$ puisque la famille de vecteurs $X_0 = \{\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0A_p}\}$ est une famille génératrice de F . La question se pose alors de savoir si X_0 est libre ou non, car :

$$[X_0 \text{ est libre}] \Leftrightarrow [X_0 \text{ est une base de } F] \Leftrightarrow [\dim F = p] \Leftrightarrow [\dim \mathcal{F} = p].$$

Là encore, c'est une propriété qui ne dépend pas du choix de A_0 , comme le montre le lemme suivant.

2.2.1 Lemme. Soient A_0, A_1, \dots, A_p des points de \mathcal{E} deux à deux distincts. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) la famille $X_0 = \{\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0A_p}\}$ est libre dans E ;
- (ii) pour tout $0 \leq j \leq p$, la famille $X_j = \{\overrightarrow{A_jA_0}, \dots, \overrightarrow{A_jA_{j-1}}, \overrightarrow{A_jA_{j+1}}, \dots, \overrightarrow{A_jA_p}\}$ est libre ;
- (iii) aucun des points A_i n'appartient au sous-espace affine engendré par les p autres points.

Preuve. Supposons que X_0 est libre, et fixons $0 < j \leq p$. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i \neq j} \lambda_i \overrightarrow{A_jA_i} = \vec{0}$. En décomposant $\overrightarrow{A_jA_i} = \overrightarrow{A_jA_0} + \overrightarrow{A_0A_i}$, il vient :

$$\left(\sum_{i \neq j} \lambda_i\right) \overrightarrow{A_jA_0} + \sum_{i \neq j} \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i} = \vec{0}.$$

Parce que X_0 est libre, on déduit que $\sum_{i \neq j} \lambda_i = 0$ et $\lambda_i = 0$ pour tout $1 \leq i \leq p$ distinct de j . D'où finalement $\lambda_i = 0$ pour tout $0 \leq i \leq p$ distinct de j . Ceci prouve que (i) \Rightarrow (ii), et donc (i) \Leftrightarrow (ii).

Supposons maintenant qu'il existe $0 \leq i \leq p$ tel que A_i appartienne au sous-espace affine engendré par $A_0, A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_p$. Alors, pour tout $0 \leq j \neq i \leq p$, il existe des coefficients $\alpha_k \in \mathbb{R}$ pour $0 \leq k \neq i, k \neq j \leq p$ tel que $\overrightarrow{A_jA_i} = \sum_k \alpha_k \overrightarrow{A_jA_k}$, ou encore $\sum_k \alpha_k \overrightarrow{A_jA_k} - \overrightarrow{A_jA_i} = \vec{0}$, ce qui prouve que la famille X_j est liée. Par contraposée, ceci montre que (ii) \Rightarrow (iii). La réciproque s'obtient par des calculs analogues. \square

2.2.2 Définitions. Une famille \mathcal{X} de $p + 1$ points deux à deux distincts de \mathcal{E} est dite *affinement libre* si elle satisfait les conditions équivalentes de la proposition précédente. Lorsque \mathcal{X} est affinement libre, on dit que \mathcal{X} est une *base affine* du sous-espace affine $\mathcal{F} = \langle \mathcal{X} \rangle$ engendré par \mathcal{X} .

EN PRATIQUE

$\{A_0, A_1, \dots, A_p\}$ est une base affine d'un sous-espace affine \mathcal{F} de \mathcal{E} si et seulement si, pour tout $M \in \mathcal{F}$ il existe un unique p -uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^p \alpha_i \overrightarrow{A_0A_i},$$

et on alors $\dim \mathcal{F} = p$.

2.2.3 Cas particulier de deux points, alignement.

► Prenons deux points distincts A et B dans \mathcal{E} .

Alors $X = \{\overrightarrow{AB}\}$ est libre, donc le sous-espace affine engendré par $\mathcal{X} = \{A, B\}$ est de dimension 1 ; on l'appelle *la droite affine passant par A et B*, noté (AB) . La droite affine (AB) est dirigée par la droite vectorielle Δ de base $\{\overrightarrow{AB}\}$.

► Par définition, des points de \mathcal{E} sont dits *alignés* lorsqu'ils appartiennent à une même droite affine.

En particulier, deux points sont toujours alignés, et on a pour tout $M \in \mathcal{E}$:

EN PRATIQUE

$$[A, B, M \text{ alignés}] \Leftrightarrow [M \in (AB)] \Leftrightarrow [\overrightarrow{AM} \in \Delta] \Leftrightarrow [\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\} \text{ liée}]$$

$$\Leftrightarrow [\text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}].$$

$$[A, B, M \text{ non alignés}] \Leftrightarrow [\{A, B, M\} \text{ affinement libre}].$$

2.2.4 Cas particulier de trois points, coplanarité.

► Prenons trois points A, B, C non alignés dans \mathcal{E} . Alors $X = \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ est libre, donc le sous-espace affine engendré par $\mathcal{X} = \{A, B, C\}$ est de dimension 2 ; on l'appelle *le plan affine passant par A, B et C* , noté (ABC) . Le plan affine (ABC) est dirigé par le plan vectoriel Π de base $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$.

► Des points de \mathcal{E} sont dits *coplanaires* lorsqu'ils appartiennent à un même plan affine.

En particulier trois points sont toujours coplanaires, et on a pour tout $M \in \mathcal{E}$:

EN PRATIQUE

$$\begin{aligned} [A, B, C, M \text{ coplanaires}] &\Leftrightarrow [M \in (ABC)] \Leftrightarrow [\overrightarrow{AM} \in \Pi] \Leftrightarrow [\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}\} \text{ liée}] \\ &\Leftrightarrow [\text{il existe } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ tels que } \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}]. \\ [A, B, C, M \text{ non coplanaires}] &\Leftrightarrow [\{A, B, C, M\} \text{ affinement libre}]. \end{aligned}$$

L'exercice suivant complète les résultats de 1.1.5 sur les caractérisations d'un parallélogramme.

2.2.5 Un exercice classique : configuration du parallélogramme (bis). Soient A, B, A', B' quatre points deux à deux distincts. On suppose qu'ils ne sont pas alignés. Alors on a :

$$[(AB) \parallel (A'B') \text{ et } (AA') \parallel (BB')] \text{ si et seulement si } [\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}].$$

Preuve. Supposons que $(AB) \parallel (A'B')$ et $(AA') \parallel (BB')$. Il résulte de la première observation de 2.2.3 qu'il existe deux réels non-nuls λ et μ tels que $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{AA'} = \mu \overrightarrow{BB'}$. On transforme la première égalité en $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B} = \lambda \overrightarrow{A'B} + \lambda \overrightarrow{BB'}$, d'où : $(1 - \lambda) \overrightarrow{A'B} = \lambda \overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{AA'} = (\lambda - \mu) \overrightarrow{BB'}$.

Si les vecteurs $\overrightarrow{A'B}$ et $\overrightarrow{BB'}$ étaient colinéaires, alors les trois points B, A', B' seraient alignés. Comme $\overrightarrow{BB'}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AA'}$, les quatre points seraient alignés, ce qui est exclu par hypothèse. Donc $\overrightarrow{A'B}$ et $\overrightarrow{BB'}$ sont non colinéaires, donc il résulte de l'égalité vectorielle obtenue ci-dessus que $\lambda = \mu = 1$, ce qui montre le résultat voulu. La réciproque est claire puisque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ équivaut à $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$. \square

2.3 Coordonnées d'un point dans un repère cartésien

2.3.1 Définitions. Un repère cartésien de \mathcal{E} est un couple $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ formé par un point fixé quelconque $O \in \mathcal{E}$, appelé l'origine du repère, et une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de E .

Pour tout point $M \in \mathcal{E}$, les composantes du vecteurs \overrightarrow{OM} dans la base \mathcal{B} sont appelées les coordonnées cartésiennes du point M dans le repère \mathcal{R} . On note : $M(x_1, \dots, x_n)$.

EN PRATIQUE

$$[M(x_1, \dots, x_n) \text{ dans le repère } (O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)] \iff [\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i].$$

Pour tout $1 \leq i \leq n$, soit A_i le point de \mathcal{E} tel que $\overrightarrow{OA_i} = \vec{e}_i$. Comme $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \dots, \overrightarrow{OA_n}\}$ est libre, la famille de $n + 1$ points $\mathcal{X} = \{O, A_1, A_2, \dots, A_n\}$ est affinement libre. Comme de plus \mathcal{B} engendre l'espace vectoriel E , le sous-espace affine de \mathcal{E} engendré par \mathcal{X} n'est autre que \mathcal{E} lui-même. En d'autres termes, \mathcal{X} est une base affine de \mathcal{E} .

EN PRATIQUE

si $M(x_1, \dots, x_n)$ et $N(y_1, \dots, y_n)$ dans le repère $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$, alors les composantes du vecteur \overrightarrow{MN} dans la base \mathcal{B} sont $(y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n)$, ie. $\overrightarrow{MN} = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i) \vec{e}_i$.

2.3.2 Proposition et définition (représentation paramétrique d'un sous-espace affine).

Soit $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ un repère de \mathcal{E} , avec $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. Soit \mathcal{F} un sous-espace affine de \mathcal{E} passant par un point $A(a_1, \dots, a_n)$. Notons p la dimension de \mathcal{F} et considérons une base $\mathcal{C} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ du sous-espace vectoriel F directeur de \mathcal{F} . Pour tout $1 \leq i \leq p$, notons $(\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \dots, \alpha_{i,n})$ les coordonnées de \vec{v}_i dans la base \mathcal{B} .

Alors, un point $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ quelconque de \mathcal{E} appartient à \mathcal{F} si et seulement s'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que :

$$x_j = a_j + \sum_{i=1}^p \lambda_i \alpha_{i,j} \quad \text{pour tout } 1 \leq j \leq n \quad (\star)$$

On dit que les relations (\star) constituent une représentation paramétrique du sous-espace affine \mathcal{F} dans le repère \mathcal{R}

Chaque \vec{v}_i se décompose dans \mathcal{B} en $\vec{v}_i = \alpha_{i,1} \vec{e}_1 + \alpha_{i,2} \vec{e}_2 + \dots + \alpha_{i,n} \vec{e}_n$, avec $\alpha_{i,j} \in \mathbb{R}$ pour tout $1 \leq j \leq n$ et tout $1 \leq i \leq p$.

Soit $M(x_1, \dots, x_n)$ un point quelconque de \mathcal{E} . Le point M appartient à \mathcal{F} si et seulement si $\overrightarrow{AM} \in F$, c'est-à-dire si et seulement s'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^p \lambda_i \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} \vec{e}_j \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \alpha_{i,j} \right) \vec{e}_j.$$

Or $\overrightarrow{AM} = \sum_{j=1}^n (x_j - a_j) \vec{e}_j$, d'où le résultat. □

EN PRATIQUE

► Dans un plan affine rapporté à un repère, une représentation paramétrique de la droite passant par $A(a_1, a_2)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(\alpha_1, \alpha_2)$ est :

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda \alpha_1 \\ x_2 = a_2 + \lambda \alpha_2 \end{cases}, \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

► Dans un espace affine \mathcal{E} de dimension 3 rapporté à un repère, une représentation paramétrique de la droite passant par $A(a_1, a_2, a_3)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est :

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda \alpha_1 \\ x_2 = a_2 + \lambda \alpha_2 \\ x_3 = a_3 + \lambda \alpha_3 \end{cases}, \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

► Dans un espace affine \mathcal{E} de dimension 3 rapporté à un repère, une représentation paramétrique du plan passant par $A(a_1, a_2, a_3)$ et dirigé par le plan vectoriel de base $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ avec $\vec{v}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et $\vec{w}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ est :

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda \alpha_1 + \mu \beta_1 \\ x_2 = a_2 + \lambda \alpha_2 + \mu \beta_2 \\ x_3 = a_3 + \lambda \alpha_3 + \mu \beta_3 \end{cases}, \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2.3.3 Théorème et définition (équation cartésienne d'un hyperplan affine). On fixe un repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ de \mathcal{E} .

- (i) Pour tout hyperplan affine \mathcal{H} de \mathcal{E} , il existe $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$, tel que \mathcal{H} soit l'ensemble des points $M(x_1, \dots, x_n)$ de \mathcal{E} vérifiant :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + a_{n+1} = 0. \quad (\star\star)$$

- (ii) Réciproquement, si $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$, l'ensemble des points $M(x_1, \dots, x_n)$ de \mathcal{E} vérifiant $(\star\star)$ est un hyperplan de \mathcal{E} .

La relation $(\star\star)$ est appelée une *équation cartésienne* de l'hyperplan \mathcal{H} dans le repère \mathcal{R} .

Preuve. Soit \mathcal{H} un hyperplan affine de \mathcal{E} . Son espace vectoriel directeur H est un hyperplan vectoriel de E . Comme on l'a vu en algèbre linéaire, il existe alors des réels a_1, a_2, \dots, a_n non tous nuls tels que H est l'hyperplan vectoriel de E d'équation $a_1y_1 + \dots + a_ny_n = 0$ dans \mathcal{B} .

Soit $B(b_1, \dots, b_n)$ un point quelconque de \mathcal{H} . On a :

$$[M(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{H}] \Leftrightarrow [\overrightarrow{BM} \in H] \Leftrightarrow [a_1(x_1 - b_1) + \dots + a_n(x_n - b_n) = 0],$$

ce qui montre (i) en posant $a_{n+1} = -(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)$.

Pour (ii), supposons donné $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$ et notons \mathcal{H} l'ensemble des points $M(x_1, \dots, x_n)$ vérifiant $(\star\star)$. Il est non-vidé car l'un au moins des a_i est non-nul. Soit $B(b_1, \dots, b_n) \in \mathcal{H}$, de sorte que $a_1b_1 + \dots + a_nb_n + a_{n+1} = 0$. On a alors pour tout $M(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{E}$:

$$[M \in \mathcal{H}] \Leftrightarrow [a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_{n+1} = a_1b_1 + \dots + a_nb_n + a_{n+1}] \Leftrightarrow [a_1(x_1 - b_1) + \dots + a_n(x_n - b_n) = 0].$$

Ceci signifie que $M \in \mathcal{H}$ si et seulement si \overrightarrow{BM} appartient à l'hyperplan vectoriel H de E d'équation $a_1y_1 + \dots + a_ny_n = 0$ dans la base \mathcal{B} . Ceci prouve que \mathcal{H} est le sous-espace affine passant par B et dirigé par H , donc que \mathcal{H} est un hyperplan affine. \square

2.3.4 Corollaire Soient \mathcal{H} et \mathcal{H}' deux hyperplans de \mathcal{E} d'équations $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_{n+1} = 0$ et $a'_1x_1 + \dots + a'_nx_n + a'_{n+1} = 0$ respectivement. Alors :

- $\mathcal{H} \parallel \mathcal{H}'$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$, tel que $a'_i = \lambda a_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.
- $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$, tel que $a'_i = \lambda a_i$ pour tout $1 \leq i \leq n + 1$.

Preuve. Cela découle directement du fait que \mathcal{H} est dirigé par l'hyperplan vectoriel H de E d'équation $a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_ny_n = 0$ dans la base \mathcal{B} , et de la définition 1.3.1. \square

2.4 Exemples en géométrie élémentaire : droites du plan

2.4.1 Proposition On suppose \mathcal{E} de dimension 2, rapporté à un repère cartésien. Une équation cartésienne d'une droite affine \mathcal{D} de \mathcal{E} est de la forme

$$ax + by + c = 0 \quad \text{avec } (a, b) \neq (0, 0).$$

Une base de la droite vectorielle Δ dirigeant \mathcal{D} est alors $\{\vec{u}\}$ avec $\vec{u}(-b, a)$.

Preuve. On applique le théorème 2.3.3.a) avec $n = 2$. \square

EN PRATIQUE

On résume ci-dessous quelques questions concrètes qu'il est important de savoir traiter.

CONDITION D'ALIGNEMENT. Soient $A(\alpha, \beta)$ et $B(\alpha', \beta')$. Pour tout $M(x, y)$, on a :

$$(M, A, B) \text{ alignés} \Leftrightarrow \{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\} \text{ liée} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-\alpha & \alpha'-\alpha \\ y-\beta & \beta'-\beta \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\beta' - \beta)x + (\alpha - \alpha')y + (\alpha'\beta - \alpha\beta') = 0,$$

ce qui, pour $A \neq B$, donne une équation de la droite (AB) .

POSITION RELATIVE DE DEUX DROITES. Soient deux droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$.

Notons (S) le système $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$, et $\delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ son déterminant.

- $(\mathcal{D}$ parallèle à \mathcal{D}') \Leftrightarrow (il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$) \Leftrightarrow ($\delta = 0$).
 - Si l'on a aussi $c' = \lambda c$, les deux équations sont équivalentes, donc $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$.
 - Sinon, (S) n'est pas compatible, donc $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \emptyset$.
- $(\mathcal{D}$ non parallèle à \mathcal{D}') \Leftrightarrow ($\delta \neq 0$) \Leftrightarrow ($\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \{\Omega\}$) avec $\Omega \left(\frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}, \frac{a'c - ac'}{ab' - a'b} \right)$.

On dit dans ce cas que les deux droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont sécantes en Ω .

CONDITION DE CONCOURS DE TROIS DROITES. Soient trois droites \mathcal{D} , \mathcal{D}' et \mathcal{D}'' d'équations respectives $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$ et $a''x + b''y + c'' = 0$.

On dit qu'elles sont concourantes lorsqu'elles se coupent en un même point.

Ceci équivaut à dire que les coordonnées du point d'intersection Ω de \mathcal{D} et \mathcal{D}' (voir ci-dessus) sont solutions de l'équation $a''x + b''y + c'' = 0$. Il vient après calcul :

$$(\mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{D}'' \text{ concourantes}) \Leftrightarrow \left(\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0 \right).$$

2.4.2 Proposition (concourance des médianes d'un triangle) Soient A, B, C trois points non alignés du plan \mathcal{E} . Notons I, J, K les milieux respectifs de (A, B) , (B, C) et (C, A) . Alors les trois droites (CI) , (AJ) et (BK) sont concourantes. Leur point d'intersection G est appelé le centre de gravité du triangle (ABC) .

Preuve. Les points A, B, C n'étant pas alignés, les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont linéairement indépendants ; on peut donc considérer le repère $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ du plan \mathcal{E} . Les coordonnées dans \mathcal{R} des points considérés sont :

$$A(0, 0), \quad B(1, 0), \quad C(0, 1), \quad I\left(\frac{1}{2}, 0\right), \quad J\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad K\left(0, \frac{1}{2}\right).$$

On en déduit les composantes dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ des vecteurs :

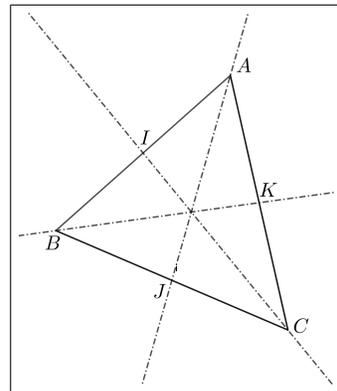
$$\overrightarrow{CI}\left(\frac{1}{2}, -1\right), \quad \overrightarrow{AJ}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \overrightarrow{BK}\left(-1, \frac{1}{2}\right)$$

Il en résulte que les trois droites (CI) , (AJ) et (BK) , appelées les médianes du triangle (ABC) , admettent comme équations respectives :

$$2x + y - 1 = 0, \quad x - y = 0, \quad x + 2y - 1 = 0,$$

qui admettent comme unique solution commune le couple $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Le point $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ est donc le point d'intersection des trois médianes. \square



2.5 Exemples en géométrie élémentaire : droites et plans de l'espace

2.5.1 Proposition (cas des plans). On suppose \mathcal{E} de dimension 3, rapporté à un repère cartésien. Une équation cartésienne d'un plan affine \mathcal{P} de \mathcal{E} est de la forme

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{avec } (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

Une base du plan vectoriel Π dirigeant \mathcal{P} s'obtient en choisissant deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} non colinéaires dont les composantes vérifient $ax + by + cz = 0$, par exemple $\vec{u}(-b, a, 0)$ et $\vec{v}(-c, 0, a)$ lorsque $a \neq 0$.

Preuve. On applique le théorème 2.3.3.a) avec $n = 3$. □

EN PRATIQUE

On résume ci-dessous quelques questions concrètes qu'il est important de savoir traiter.

CONDITION DE COPLANARITÉ. Soient $A(\alpha, \beta, \gamma)$, $B(\alpha', \beta', \gamma')$, $C(\alpha'', \beta'', \gamma'')$. Pour tout $M(x, y, z)$, on a :

$$(M, A, B, C) \text{ coplanaires} \Leftrightarrow \{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\} \text{ lié} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-\alpha & \alpha'-\alpha & \alpha''-\alpha \\ y-\beta & \beta'-\beta & \beta''-\beta \\ z-\gamma & \gamma'-\gamma & \gamma''-\gamma \end{vmatrix} = 0$$

ce qui, quand $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ est libre, donne en développant une équation du plan passant par A, B, C .

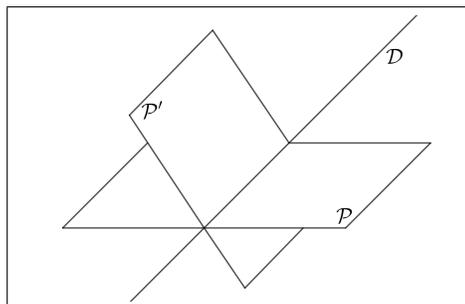
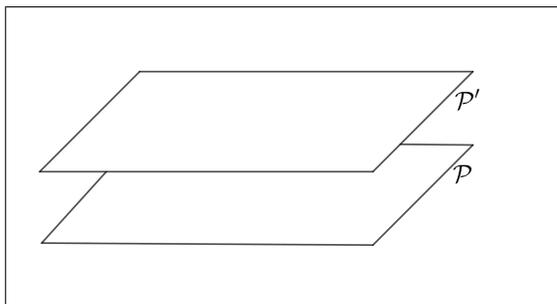
POSITION RELATIVE DE DEUX PLANS. Soient deux plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' d'équations respectives $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$.

Notons (S) le système $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$, et $\mu = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$ sa matrice.

- $(\mathcal{P} // \mathcal{P}')$ \Leftrightarrow (il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$, $c' = \lambda c$) $\Leftrightarrow (\text{rg } \mu = 1)$.
 - Si l'on a aussi $d' = \lambda d$, les deux équations sont équivalentes, donc $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$.
 - Sinon, (S) n'est pas compatible, donc $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \emptyset$.
- Supposons que $\text{rg } \mu \neq 1$. On a alors $\text{rg } \mu = 2$. Il en résulte que $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ est un sous-espace affine dirigé par le sous-espace vectoriel des solutions du système homogène associé à (S) , qui est de dimension $3 - \text{rg } \mu = 1$. Donc $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ est une droite affine.

On retiendra que :

l'intersection de deux plans affines non parallèles est une droite affine.



2.5.2 Proposition (cas des droites). On suppose \mathcal{E} de dimension 3, rapporté à un repère cartésien. Une partie \mathcal{D} de \mathcal{E} est une droite affine de \mathcal{E} si et seulement s'il existe (a, b, c) et (a', b', c') deux triplets linéairement indépendants dans \mathbb{R}^3 , et deux scalaires $d, d' \in \mathbb{R}$ tels que \mathcal{D} est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ dont les coordonnées sont solutions du système (S) suivant :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}, \text{ avec } (a', b', c') \neq \lambda(a, b, c) \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R}, (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

On dit que (S) est un système d'équations cartésiennes de \mathcal{D} dans le repère.

Preuve. Un sens résulte de ce que l'on vient de voir à la fin du paragraphe précédent. Réciproquement, soient \mathcal{D} une droite affine, A un point de \mathcal{D} et \vec{u} un vecteur non-nul de la droite vectorielle Δ dirigeant \mathcal{D} . On peut compléter \vec{u} en une base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ de E . On introduit le plan \mathcal{P} passant par A et de sous-espace vectoriel directeur le plan vectoriel Π de base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$. De même, soit \mathcal{P}' passant par A et de sous-espace vectoriel directeur le plan vectoriel Π' de base $\{\vec{u}, \vec{w}\}$. On a $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ libre, donc $\Pi \neq \Pi'$, donc \mathcal{P} non parallèle à \mathcal{P}' . D'après ce que l'on a vu précédemment, $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ est alors une droite affine, dirigée par la droite vectorielle $\Pi \cap \Pi'$. Comme $A \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ et $\vec{u} \in \Pi \cap \Pi'$, on conclut $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \mathcal{D}$. On introduit des équations cartésiennes de \mathcal{P} et de \mathcal{P}' pour achever la preuve. \square

Cette proposition exprime que :

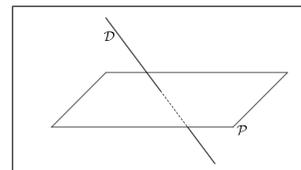
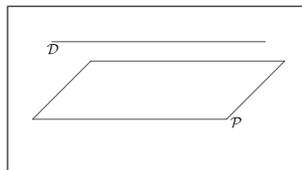
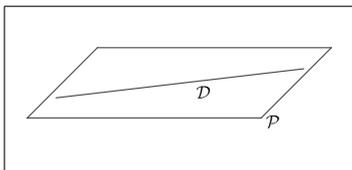
toute droite affine de \mathcal{E} est (d'une infinité de façons) l'intersection de deux plans de \mathcal{E} .

EN PRATIQUE

On résume ci-dessous quelques questions concrètes qu'il est important de savoir traiter.

POSITION RELATIVE D'UNE DROITE ET D'UN PLAN. Soient \mathcal{D} une droite affine de \mathcal{E} et Δ sa droite vectorielle directrice. Soient \mathcal{P} un plan affine de \mathcal{E} et Π son plan vectoriel directeur. En utilisant des équations cartésiennes, on montre que les seuls cas possibles sont :

- Δ est un sous-espace vectoriel de Π dans E ;
dans ce cas : ou bien $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$, alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \mathcal{D}$,
ou bien $\mathcal{D} \not\subset \mathcal{P}$, alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \emptyset$,
on dit alors parfois que \mathcal{D} et \mathcal{P} sont faiblement parallèles.
- Δ n'est pas un sous-espace vectoriel de Π ; dans ce cas $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}$ est un singleton.



POSITION RELATIVE DE DEUX DROITES. Soient \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux droites dans \mathcal{E} . En utilisant des équations cartésiennes, montrer que les seuls cas possibles sont :

- les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont confondues, alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \mathcal{D}$;
- les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont parallèles mais non confondues, alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \emptyset$;
- les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' ne sont pas parallèles,
alors : $(\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \emptyset)$ ou $(\mathcal{D} \cap \mathcal{D}')$ est un singleton.

2.6 Cas particulier des espaces euclidiens, repères orthogonaux

On suppose de plus dans cette section que l'espace affine \mathcal{E} de dimension n est euclidien.

2.6.1 Définitions. Soit $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ un repère cartésien de \mathcal{E} , avec $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.

On dit que \mathcal{R} est un *repère orthogonal* de \mathcal{E} lorsque la base \mathcal{B} est une *base orthogonale* de E (ce qui signifie que les vecteurs \vec{e}_i sont deux à deux orthogonaux).

On dit que \mathcal{R} est un *repère orthonormé* de \mathcal{E} lorsque \mathcal{B} est une *base orthonormée* de E (ce qui signifie que c'est une base orthogonale et que de plus $\|\vec{e}_i\| = 1$ pour tout $1 \leq i \leq n$).

Rappelons que, si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs de E de composantes respectives (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) dans une base orthonormée, alors le produit scalaire et la norme se calculent par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{et} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

► *La question de l'orientation.* Par définition, un espace affine euclidien \mathcal{E} est dit *orienté* lorsque son espace vectoriel directeur E est orienté (voir cours d'algèbre linéaire). Dans ce cas, un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ est dit *direct* (respectivement *indirect*) lorsque \mathcal{B} est une base orthonormée directe (respectivement indirecte) de l'espace vectoriel euclidien orienté E .

2.6.2 Vecteur normal à un hyperplan affine.

a) Définition. On appelle *vecteur normal* à un hyperplan affine \mathcal{H} de \mathcal{E} tout vecteur directeur de la droite vectorielle $\Delta = H^\perp$, où H désigne l'hyperplan vectoriel de E directeur de \mathcal{H} .

Par définition, un vecteur normal à \mathcal{H} est non-nul, et il est orthogonal à tout vecteur de H .

b) Proposition. Soit $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ un repère orthonormé de \mathcal{E} . Soit \mathcal{H} un hyperplan de \mathcal{E} , d'équation

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + a_{n+1} = 0, \quad \text{avec } (a_1, \dots, a_n) \text{ non-nul dans } \mathbb{R}^n \text{ et } a_{n+1} \in \mathbb{R}$$

par rapport à \mathcal{R} . Alors le vecteur non-nul \vec{n} de composantes (a_1, \dots, a_n) dans la base \mathcal{B} est un vecteur normal à \mathcal{H} .

Preuve. Soit H l'hyperplan vectoriel de E directeur de \mathcal{H} . On a vu dans la preuve du théorème 2.3.3 qu'une équation de H par rapport à \mathcal{B} est alors $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$. Le vecteur \vec{n} de composantes (a_1, \dots, a_n) dans la base \mathcal{B} est non-nul. Notons Δ la droite de vecteur directeur \vec{n} . Quel que soit $\vec{u} \in E$, de composantes (x_1, \dots, x_n) dans la base \mathcal{B} , on a :

$$(\vec{u} \in \Delta^\perp) \Leftrightarrow (\vec{u} \perp \vec{n}) \Leftrightarrow (\vec{u} \cdot \vec{n} = 0) \Leftrightarrow (a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0) \Leftrightarrow (\vec{u} \in H).$$

Ainsi, $\Delta^\perp = H$, ou encore $H^\perp = \Delta$, ce qui signifie que \vec{n} est un vecteur normal à \mathcal{H} . □

EN PRATIQUE

- Si $\dim \mathcal{E} = 2$ et $\vec{n}(a, b)$ est un vecteur non-nul de \mathcal{E} , alors toute droite affine de \mathcal{E} dont \vec{n} est un vecteur normal a une équation de la forme $ax + by + c = 0$ pour un certain réel c .
- Si $\dim \mathcal{E} = 3$ et $\vec{n}(a, b, c)$ est un vecteur non-nul de \mathcal{E} , alors tout plan affine de \mathcal{E} dont \vec{n} est un vecteur normal a une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ pour un certain réel d .

2.6.3 Distance entre un point et un hyperplan affine

a) Définition. Soit \mathcal{F} un ss-e.a. de \mathcal{E} et soit A un point de \mathcal{E} . On appelle distance de A à \mathcal{F} le réel positif $d(A, \mathcal{F}) = \inf_{M \in \mathcal{F}} d(A, M)$.

En particulier, un point M de \mathcal{E} appartient à \mathcal{F} si et seulement si $d(M, \mathcal{F}) = 0$.

On peut explicitement calculer cette distance dans le cas où \mathcal{F} est un hyperplan.

b) Proposition. Soit $\mathcal{R} = (0, \mathcal{B})$ un repère orthonormé de \mathcal{E} . Soit \mathcal{H} un hyperplan de \mathcal{E} , d'équation

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_{n+1} = 0, \quad \text{avec } (a_1, \dots, a_n) \text{ non-nul dans } \mathbb{R}^n \text{ et } a_{n+1} \in \mathbb{R}$$

par rapport à \mathcal{R} . Soit A un point quelconque de \mathcal{E} , de coordonnées $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ par rapport à \mathcal{R} . Alors la distance entre A et \mathcal{H} est donnée par :

$$d(A, \mathcal{H}) = \frac{|a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n + a_{n+1}|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}.$$

Preuve. Reprenons toutes les notations de la proposition 2.6.2.b). Soit \mathcal{D} la droite affine de \mathcal{E} passant par A et dirigée par $\vec{\Delta}$. Comme $H \cap \Delta = \{\vec{0}\}$, il résulte de la proposition 1.2.5 que $\mathcal{H} \cap \mathcal{D}$ est un singleton ; notons-le $\{A'\}$. On a donc $\mathcal{D} = (AA')$.

• *Première étape :* on montre que $d(A, \mathcal{H}) = AA'$.

Pour tout $M \in \mathcal{H}$, $\overrightarrow{A'M} \in H$ donc $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{A'M} = 0$.

Dès lors, avec la propriété de Pythagore :

$$(AM)^2 = (AA')^2 + (A'M)^2 \geq (AA')^2$$

et

$$AM = AA' \Leftrightarrow A'M = 0 \Leftrightarrow M = A'.$$

Ceci prouve que $AA' = \inf\{AM ; M \in \mathcal{H}\}$.

• *Seconde étape :* On calcule AA' .

Notons $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ les coordonnées de A' .

D'après 2.6.2, $\vec{n}(a_1, \dots, a_n)$ est normal à \mathcal{H} .

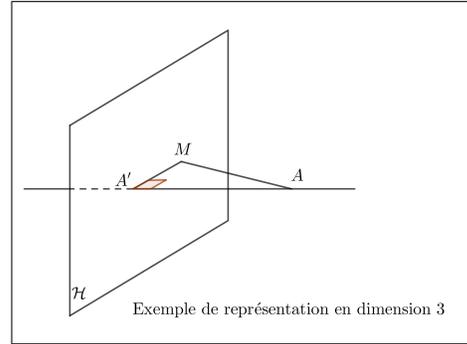
Par construction de A' , le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ est colinéaire à \vec{n} . Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AA'} = \lambda \vec{n}$. Donc $AA' = |\lambda| \times \|\vec{n}\|$, avec $\|\vec{n}\| = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$.

D'une part $A' \in \mathcal{H}$, donc : $a_1\beta_1 + \cdots + a_n\beta_n + a_{n+1} = 0$.

D'autre part $\overrightarrow{AA'} = \lambda \vec{n}$, donc : $(\beta_1 - \alpha_1, \dots, \beta_n - \alpha_n) = \lambda(a_1, \dots, a_n)$.

D'où $a_1(\alpha_1 + \lambda a_1) + \cdots + a_n(\alpha_n + \lambda a_n) + a_{n+1} = 0$, donc $a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n + \lambda(a_1^2 + \cdots + a_n^2) + a_{n+1} = 0$.

On conclut que $|\lambda| \times \|\vec{n}\|^2 = |a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n + a_{n+1}|$, ce qui achève la preuve puisque $\|\vec{n}\| \neq \vec{0}$. \square



c) Application en géométrie élémentaire.

(i) On se place dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé. Soit \mathcal{D} une droite de \mathcal{E} d'équation $ax + by + c = 0$. Un vecteur normal à \mathcal{D} est $\vec{n}(a, b)$.

Pour tout point A de \mathcal{E} de coordonnées (α, β) , on a :

$$d(A, \mathcal{D}) = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

(ii) On se place dans un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé. Soit \mathcal{P} un plan de \mathcal{E} d'équation $ax + by + cz + d = 0$. Un vecteur normal à \mathcal{P} est $\vec{n}(a, b, c)$.

Pour tout point A de \mathcal{E} de coordonnées (α, β, γ) , on a :

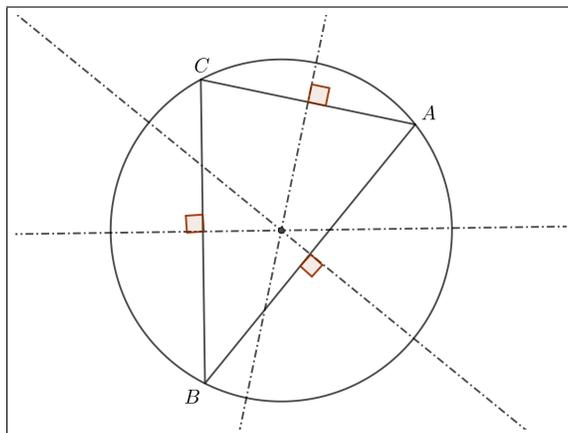
$$d(A, \mathcal{P}) = \frac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

2.6.4 Cocyclicité, cosphéricité.

a) Proposition et définition (cercle circonscrit à un triangle dans un plan affine).

Soient A, B, C trois points non alignés d'un plan affine \mathcal{E} .

- (i) Les médiatrices de (A, B) , (B, C) et (C, A) sont concourantes en un point Ω .
- (ii) Il existe un unique cercle passant par A, B, C . On l'appelle le cercle circonscrit au triangle (ABC) ; son centre est Ω .



Preuve. Soient $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ les médiatrices de (A, B) , (A, C) et (B, C) respectivement. Les deux droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 ne sont pas parallèles (car sinon, les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} , qui sont des vecteurs normaux à \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 respectivement, seraient colinéaires, ce qui contredirait l'hypothèse de non-alignement des points). Appelons Ω le point d'intersection de \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 . Puisque $\Omega \in \mathcal{D}_1$, on a $\Omega A = \Omega B$. Puisque $\Omega \in \mathcal{D}_2$, on a aussi $\Omega A = \Omega C$. Il en résulte que $\Omega B = \Omega C$, donc Ω appartient aussi à \mathcal{D}_3 , ce qui prouve le point (i). Notons \mathcal{C} le cercle de centre Ω et de rayon la valeur commune $r = \Omega A = \Omega B = \Omega C$. Par construction, il passe par les points A, B et C . Soit \mathcal{C}' un autre cercle passant par A, B, C ; notons Ω' son centre et r' son rayon. On a $\Omega' A = \Omega' B$, ce qui implique que $\Omega' \in \mathcal{D}_1$. De même $\Omega' A = \Omega' C$ implique $\Omega' \in \mathcal{D}_2$. Ainsi $\Omega' \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$, d'où $\Omega = \Omega'$ d'après le point (i). Il est clair alors que $r = r'$ puisque $\Omega' A = \Omega A$. \square

Définition. Des points d'un plan sont dits *cocycliques* s'il appartiennent à un même cercle.

L'énoncé précédent conduit donc à l'observation importante suivante :

Trois points non-alignés sont toujours cocycliques.

Exercice. Soient A et B deux points du plan affine euclidien \mathcal{E} . Montrer qu'il existe une infinité de cercles passant par A et B , dont les centres appartiennent tous à la médiatrice de (A, B) .

La proposition a) ci-dessus peut être généralisée en dimension quelconque, comme le montre le théorème suivant.

b) Théorème (résultat général en dimension quelconque). Soit (A_0, A_1, \dots, A_n) une famille de $(n+1)$ points affinement libre dans \mathcal{E} . Il existe une unique sphère de \mathcal{E} passant par A_0, A_1, \dots, A_n . Son centre est le point d'intersection des hyperplans médiateurs des bipoints (A_i, A_j) , $1 \leq i \neq j \leq n$.

Preuve. Rappelons que n est ici la dimension de \mathcal{E} . Pour tout $1 \leq i \leq n$, notons :

- $\mathcal{H}_i = \{M \in \mathcal{E}; d(A_0, M) = d(A_i, M)\}$ l'hyperplan médiateur de (A_0, A_i) ,
- H_i l'hyperplan vectoriel de E directeur de \mathcal{H}_i ,
- $\vec{n}_i = \overrightarrow{A_0 A_i}$ qui est normal à \mathcal{H}_i d'après 1.4.7

Par hypothèse, la famille $\mathcal{N} = \{\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_n\}$ est libre dans E (donc base de E). Fixons un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ de \mathcal{E} , et notons $(a_{i,1}, \dots, a_{i,n}) \in \mathbb{R}^n$ les composantes de \vec{n}_i dans \mathcal{B} .

Pour tout $1 \leq i \leq n$, il existe d'après 2.3.3.a) et 2.6.2.b) un réel $a_{i,n+1}$ telle qu'une équation de \mathcal{H}_i soit :

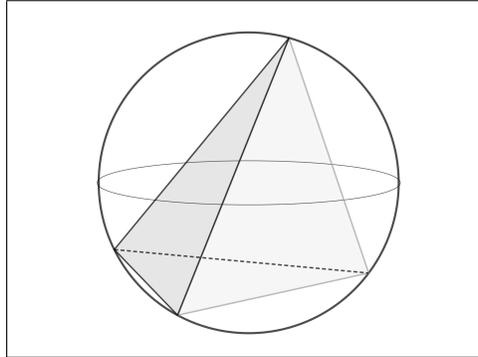
$$a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,n}x_n + a_{i,n+1} = 0, \quad (h_i)$$

Notons $\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{E}; d(A_0, M) = d(A_1, M) = \dots = d(A_n, M)\} = \bigcap_{1 \leq i \leq n} \mathcal{H}_i$ l'intersection des hyperplans médiateurs de tous les bipoints (A_i, A_j) , $1 \leq i \neq j \leq n$. Un point $M \in \mathcal{E}$ de coordonnées (x_1, \dots, x_n) appartient à \mathcal{F} si et seulement si (x_1, \dots, x_n) est solution du système linéaire (Σ) formé par les n équations à n inconnues $(h_1), \dots, (h_n)$. D'après ce qui précède, la matrice de (Σ) n'est autre que la transposée de la matrice de la base \mathcal{N} dans la base \mathcal{B} . Elle est donc inversible, de sorte que le système (Σ) admet une unique solution $(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$. Ceci prouve que \mathcal{F} est un singleton réduit au point Ω de coordonnées $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ dans le repère \mathcal{R} . Ainsi $d(A_0, \Omega) = d(A_1, \Omega) = \dots = d(A_n, \Omega)$, et en notant r cette valeur commune et \mathcal{S} la sphère de centre Ω et de rayon r , on a bien $A_i \in \mathcal{S}$ pour tout $0 \leq i \leq n$.

Montrons maintenant l'unicité. Soit \mathcal{S}' une sphère de centre Ω' et de rayon r' passant par A_0, A_1, \dots, A_n . En particulier, $d(A_0, \Omega') = d(A_i, \Omega') = r'$ pour tout $1 \leq i \leq n$, ce qui prouve que $\Omega' \in \mathcal{H}_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$, c'est-à-dire $\Omega' \in \mathcal{F}$. D'après l'étape précédente, \mathcal{F} est un singleton donc $\Omega' = \Omega$. Dès lors, $r' = d(A_0, \Omega') = d(A_0, \Omega) = r$, d'où finalement $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$. \square

c) Corollaire (cosphéricité en dimension 3). Soit \mathcal{E} un espace affine de dimension 3.

Par quatre points non coplanaires de \mathcal{E} , il passe une unique sphère, dont le centre est l'intersection des plans médiateurs des côtés du tétraèdre formé par ces quatre points.



3 – Applications affines, groupe affine

Bien que le contenu de cette section puisse être dans sa presque totalité rédigé pour des applications affines d'un espace affine \mathcal{E} vers un espace affine \mathcal{F} , on se limite ici au cas où $\mathcal{F} = \mathcal{E}$.

On se fixe pour tout le chapitre un espace affine \mathcal{E} sur \mathbb{R} , de dimension finie n , d'espace vectoriel directeur E .

3.1 Notion d'application affine.

3.1.1 Définition. Une application $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ est une *application affine* (ou *endomorphisme affine*) lorsqu'il existe une application linéaire $f : E \rightarrow E$, dite *associée* à φ , telle que :

$$\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = f(\overrightarrow{AB}) \quad \text{pour tous } A, B \in \mathcal{E}.$$

Le théorème fondamental suivant, très utile dans la pratique, exprime qu'une application affine est entièrement déterminée par son application linéaire associée et par l'image d'un point.

3.1.2 Théorème. Soient A et B deux points de \mathcal{E} , et f une application linéaire $E \rightarrow E$. Alors il existe une unique application affine $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ telle que f est l'application linéaire associée à φ et $\varphi(A) = B$.

Preuve. Montrons d'abord l'unicité. Pour cela, soit $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ affine d'application linéaire associée f et telle que $\varphi(A) = B$. Pour tout $M \in \mathcal{E}$, on a : $\overrightarrow{B\varphi(M)} = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(M)} = f(\overrightarrow{AM})$, ce qui définit de façon unique $\varphi(M) = B + f(\overrightarrow{AM})$ pour tout $M \in \mathcal{E}$. D'où l'unicité de φ .

Réciproquement, définissons $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ en posant $\varphi(M) = B + f(\overrightarrow{AM})$ pour tout $M \in \mathcal{E}$. On a en particulier $\overrightarrow{B\varphi(A)} = f(\overrightarrow{AA}) = f(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$, ce qui implique $\varphi(A) = B$. D'autre part, pour tous $M, N \in \mathcal{E}$, on a :

$$\overrightarrow{\varphi(M)\varphi(N)} = \overrightarrow{B\varphi(N)} - \overrightarrow{B\varphi(M)} = f(\overrightarrow{AN}) - f(\overrightarrow{AM}) = f(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}) = f(\overrightarrow{MN}),$$

Ceci prouve que φ est affine, d'application linéaire associée f . □

3.1.3 Exemples usuels d'applications affines. Les translations, les homothéties, les projections, les symétries, sont des endomorphismes affines que l'on détaillera plus loin en 3.3, 3.4 et 3.5. Si de plus l'espace affine \mathcal{E} est supposé euclidien, on voit apparaître parmi les endomorphismes affines tous les types d'isométries (dont les rotations que l'on étudiera au chapitre 4 ou les similitudes).

Avant de développer géométriquement certains de ces exemples, on donne une série de propriétés générales des applications affines, qui ne découlent que de la définition.

3.1.4 Proposition (conservation des sous-espaces affines). Soit $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ une application affine d'application linéaire associée $f : E \rightarrow E$.

- (i) Si \mathcal{H} un sous-espace affine de \mathcal{E} dirigé par un sous-espace vectoriel H de E , alors $\varphi(\mathcal{H})$ est un sous-espace affine de \mathcal{E} , dirigé par le sous-espace vectoriel $f(H)$ de E .
- (ii) Soit \mathcal{H}' un sous-espace affine de \mathcal{E} dirigé par un sous-espace vectoriel H' de E . Si $\varphi^{-1}(\mathcal{H}') \neq \emptyset$, alors $\varphi^{-1}(\mathcal{H}')$ est un sous-espace affine de \mathcal{E} , dirigé par le sous-espace vectoriel $f^{-1}(H')$ de E .

Preuve. Soient $A \in \mathcal{H} \subset \mathcal{E}$, et $B = \varphi(A) \in \varphi(\mathcal{H})$. Dire qu'un point $M \in \mathcal{E}$ appartient à $\varphi(\mathcal{H})$ signifie qu'il existe un point $N \in \mathcal{H}$ tel que $M = \varphi(N)$. Or $M = \varphi(N)$ équivaut à $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(N)}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{BM} = f(\overrightarrow{AN})$. En d'autres termes, $M \in \varphi(\mathcal{H})$ si et seulement si il existe $N \in \mathcal{H}$ tel que $\overrightarrow{BM} = f(\overrightarrow{AN})$. Comme $A \in \mathcal{H}$ et \mathcal{H} est dirigé par H , ceci équivaut à l'existence de $\vec{u} \in H$ tel que $\overrightarrow{BM} = f(\vec{u})$.

On a ainsi établi que l'ensemble $\{\overrightarrow{BM}; M \in \varphi(\mathcal{H})\}$ est égal à $f(H)$, qui est un sous-espace vectoriel de E (car image directe d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire). Le point (i) est démontré.

Pour (ii), supposons qu'il existe $A \in \varphi^{-1}(\mathcal{H}')$. Donc $\varphi(A) \in \mathcal{H}'$. Pour tout $M \in \mathcal{E}$, on a : $M \in \varphi^{-1}(\mathcal{H}')$ si et seulement si $\varphi(M) \in \mathcal{H}'$, ce qui équivaut à $\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(M)} \in H'$ car $\varphi(A) \in \mathcal{H}'$ et \mathcal{H}' dirigé par H' . En résumé, $M \in \varphi^{-1}(\mathcal{H}')$ si et seulement si $f(\overrightarrow{AM}) \in H'$. On déduit que l'ensemble $\{\overrightarrow{AM}; M \in \varphi^{-1}(\mathcal{H}')$ est égal à $f^{-1}(H')$, qui est un sous-espace vectoriel de E comme image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire. Ceci démontre le point (ii). \square

3.1.5 Corollaire (conservation du parallélisme). Soit $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ une application affine. Si \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 sont deux sous-espaces affines parallèles, alors $\varphi(\mathcal{H}_1)$ et $\varphi(\mathcal{H}_2)$ sont parallèles.

Preuve. Si \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 sont parallèles, on a $H_1 = H_2$ dans E . Donc $f(H_1) = f(H_2)$. Or $f(H_1)$ est le sous-espace vectoriel directeur de $\varphi(\mathcal{H}_1)$, et $f(H_2)$ celui de $\varphi(\mathcal{H}_2)$. D'où $\varphi(\mathcal{H}_1)$ et $\varphi(\mathcal{H}_2)$ parallèles. \square

3.1.6 Corollaire (conservation de l'alignement). Soit $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ une application affine. Quels que soient A, B, C trois points distincts alignés dans \mathcal{E} , les points $\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C)$ sont alignés ou confondus dans \mathcal{E} .

Preuve. Si $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0, \lambda \neq 1$, alors $f(\overrightarrow{AC}) = \lambda f(\overrightarrow{AB})$, et donc $\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(C)} = \lambda \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}$, ce qui prouve le résultat voulu. \square

3.1.7 Définition et proposition (points fixes). Soit $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ une application affine, d'application linéaire associée f .

On appelle ensemble des points fixes de φ l'ensemble $\text{Fix } \varphi = \{M \in \mathcal{E}; \varphi(M) = M\}$. Alors :

- ou bien $\text{Fix } \varphi$ est vide (c'est-à-dire que φ n'admet aucun point fixe),
- ou bien $\text{Fix } \varphi$ est un sous-espace affine de \mathcal{E} , dont le sous-espace vectoriel directeur est $\text{Ker}(f - \text{id}_E)$.

Preuve. Notons $\text{Fix } f = \{\vec{u} \in E; f(\vec{u}) = \vec{u}\} = \text{Ker}(f - \text{id}_E)$. C'est un sous-espace vectoriel de E (s'il n'est pas réduit à $\{\vec{0}\}$, c'est le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 de f). Supposons que $\text{Fix } \varphi$ n'est pas vide. Considérons un point $A \in \mathcal{E}$ tel que $\varphi(A) = A$. Pour tout $M \in \mathcal{E}$, on a :

$$[M = \varphi(M)] \Leftrightarrow [\overrightarrow{A\varphi(M)} = \overrightarrow{AM}] \Leftrightarrow [\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(M)} = \overrightarrow{AM}] \Leftrightarrow [f(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AM}].$$

En d'autres termes, $M \in \text{Fix } \varphi$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \in \text{Fix } f$, ce qui prouve que $\text{Fix } \varphi$ est le sous-espace affine de \mathcal{E} passant par A et dirigé par $\text{Fix } f$. \square

3.1.8 Proposition (image d'une base affine). Une application affine φ de \mathcal{E} dans \mathcal{E} est déterminée (entièrement et de façon unique) par l'image d'un repère de \mathcal{E} , c'est-à-dire par les images des points d'une base affine de \mathcal{E} .

Preuve. Soit $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ un repère de \mathcal{E} , avec $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ base de E . Pour tout $1 \leq i \leq n$, notons A_i l'unique point de \mathcal{E} tel que $\overrightarrow{OA_i} = \vec{e}_i$. La famille de points $\mathcal{X} = \{O, A_1, \dots, A_n\}$ est une base affine de \mathcal{E} . Pour tout point M quelconque dans \mathcal{E} , de coordonnées (x_1, \dots, x_n) dans le repère \mathcal{R} , on a :

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{OA_i}, \text{ donc } \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)} = f(\overrightarrow{OM}) = \sum_{i=1}^n x_i f(\overrightarrow{OA_i}) = \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(A_i)}.$$

Donc, dès lors que l'on connaît les images par φ des $n+1$ points de \mathcal{X} , l'image de M par φ est déterminée par $\varphi(M) = \varphi(O) + \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(A_i)}$. \square

Pour connaître une application affine de \mathcal{E} , il suffit de connaître les images d'un nombre fini de points formant une base affine de \mathcal{E} . Par exemple :

- (i) Si l'on connaît les images par φ de deux points distincts A et B , on connaît les images par φ de tous les points de la droite (AB) .
- (i) Si l'on connaît les images par φ de trois points non alignés A, B, C , on connaît les images par φ de tous les points du plan (ABC) .

On utilise souvent cet argument sous les formes suivantes :

- (1) Deux applications affines qui coïncident en deux points distincts A et B coïncident en tout point de la droite (AB) .
- (2) Deux applications affines qui coïncident en trois points non alignés A, B, C coïncident en tout point du plan (ABC) .
- (3) Si \mathcal{E} est de dimension 2, une application affine de \mathcal{E} dans \mathcal{E} qui fixe trois points non alignés est égale à $\text{id}_{\mathcal{E}}$.
- (4) Si \mathcal{E} est de dimension 3, une application affine de \mathcal{E} dans \mathcal{E} qui fixe quatre points non coplanaires est égale à $\text{id}_{\mathcal{E}}$.

3.2 Groupe affine

3.2.1 Lemme (composée de deux applications affines). Soient $\varphi, \psi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ deux applications affines d'applications linéaires associées respectives $f, g : E \rightarrow E$. Alors $\psi \circ \varphi$ est affine d'application linéaire associée $g \circ f$.

Preuve. Pour tous $A, B \in \mathcal{E}$, on a : $\overrightarrow{\psi(\varphi(A))\psi(\varphi(B))} = g(\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}) = g(f(\overrightarrow{AB}))$. □

3.2.2 Lemme (bijectivité d'une application affine). Soit $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ affine d'application linéaire associée $f : E \rightarrow E$. Alors :

$(\varphi \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ injective}), \quad (\varphi \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ surjective}), \quad (\varphi \text{ bijective} \Leftrightarrow f \text{ bijective}).$

Preuve. Supposons f injective. Soient $A, B \in \mathcal{E}$ tels que $\varphi(A) = \varphi(B)$. Alors $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(A)} = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = f(\overrightarrow{AB})$. D'où $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$ c'est-à-dire $A = B$. Supposons réciproquement que φ est injective. Soient $\vec{u} \in \text{Ker } f$. Soit $A \in \mathcal{E}$ et $M = A + \vec{u}$. On a $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$ donc $\overrightarrow{0} = f(\vec{u}) = f(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(M)}$. D'où $\varphi(A) = \varphi(M)$, et donc $A = M$ et $\vec{u} = \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{0}$. Le reste est clair et laissé en exercice. □

3.2.3 Corollaire. Soit $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ affine, d'application linéaire associée $f : E \rightarrow E$. Alors :

- (i) φ est bijective si et seulement si elle transforme une base affine de \mathcal{E} en une base affine de \mathcal{E} .
- (ii) Si φ est bijective, alors sa réciproque φ^{-1} est affine d'application linéaire associée f^{-1} .

Preuve. Le point (i) découle du lemme 3.2.2 ci-dessus et de la proposition 3.1.8.a).

Pour (ii), considérons $M, N \in \mathcal{E}$ quelconques. Par bijectivité de φ , il existe $A, B \in \mathcal{E}$ uniques tels que $\varphi(A) = M$ et $\varphi(B) = N$. Donc $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = \overrightarrow{f(\overrightarrow{AB})}$ puisque φ est affine. Donc $\overrightarrow{AB} = f^{-1}(\overrightarrow{MN})$ puisque f est bijective d'après le lemme 3.2.2. On déduit $\overrightarrow{\varphi^{-1}(M)\varphi^{-1}(N)} = \overrightarrow{f^{-1}(\overrightarrow{MN})}$. On conclut que φ^{-1} est affine d'application linéaire associée f^{-1} . \square

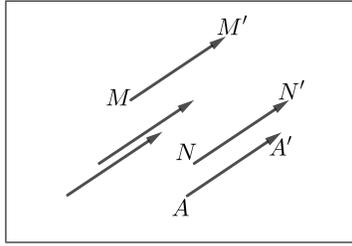
3.2.4 Définitions et proposition. Une application affine $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ qui est bijective est appelée un automorphisme affine de \mathcal{E} . L'ensemble des automorphismes affines de \mathcal{E} est un groupe pour la composition, appelé *groupe affine de \mathcal{E}* , et noté $\text{GA}(\mathcal{E})$.

Preuve. $\text{GA}(\mathcal{E})$ est un sous-ensemble du groupe des bijections de \mathcal{E} sur \mathcal{E} , non vide (il contient $\text{id}_{\mathcal{E}}$), stable pour la loi \circ d'après le lemme 3.2.1, et stable par passage à l'inverse d'après le point (ii) du corollaire 3.2.3. C'est donc un sous-groupe. \square

3.3 Sous-groupe des translations

3.3.1 Définition. Soit \vec{u} un vecteur de E . On appelle *translation* de vecteur \vec{u} l'application $\tau_{\vec{u}} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ qui, à tout point M de \mathcal{E} , associe le point $M' = M + \vec{u}$. En d'autres termes :

$$[M' = \tau_{\vec{u}}(M)] \Leftrightarrow [\overrightarrow{MM'} = \vec{u}].$$



► Il résulte de cette définition que : $\tau_{\vec{0}} = \text{id}_{\mathcal{E}}$ et si $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors $\tau_{\vec{u}}$ n'admet aucun point fixe.

3.3.2 Proposition.

- (i) Toute translation de \mathcal{E} est une application affine $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, et son application linéaire associée est id_E .
- (ii) Réciproquement, toute application affine $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ dont l'application linéaire associée est id_E est une translation de \mathcal{E} .

Preuve. Soit $\tau = \tau_{\vec{u}}$ où $\vec{u} \in E$. Pour tous $A, B \in \mathcal{E}$, on a : $\overrightarrow{\tau(A)\tau(B)} = \overrightarrow{\tau(A)A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\tau(B)} = -\vec{u} + \overrightarrow{AB} + \vec{u} = \overrightarrow{AB}$, ce qui prouve le point (i). Pour (ii), considérons une application affine $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ dont l'application linéaire associée est $f = \text{id}_E$. Soit $A \in \mathcal{E}$ arbitrairement choisi ; posons $\vec{u} = \overrightarrow{A\varphi(A)}$. Pour tout $M \in \mathcal{E}$, on a alors $\overrightarrow{M\varphi(M)} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{A\varphi(A)} + \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(M)}$. Or par hypothèse, $\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(M)} = \overrightarrow{f(\overrightarrow{AM})} = \overrightarrow{AM}$. On obtient donc $\overrightarrow{M\varphi(M)} = \overrightarrow{MA} + \vec{u} + \overrightarrow{AM} = \vec{u}$. On conclut que $\varphi = \tau_{\vec{u}}$. \square

3.3.3 Proposition. L'ensemble des translations de \mathcal{E} forme un sous-groupe abélien du groupe affine, noté $T(\mathcal{E})$ et isomorphe au groupe additif de l'espace vectoriel E .

Plus précisément, pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E$, on a :

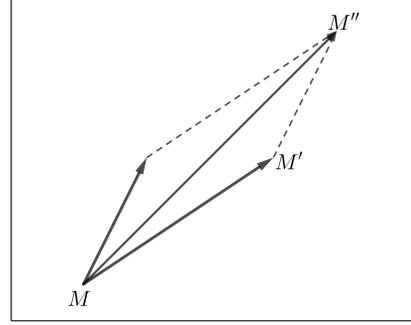
$$\tau_{\vec{u}} \circ \tau_{\vec{v}} = \tau_{\vec{v}} \circ \tau_{\vec{u}} = \tau_{\vec{u} + \vec{v}} \quad \text{et} \quad \tau_{\vec{u}}^{-1} = \tau_{-\vec{u}}.$$

Preuve. D'après le lemme 3.2.2, il résulte de 3.3.2 que toute translation est une bijection de \mathcal{E} sur \mathcal{E} . Donc l'ensemble $T(\mathcal{E})$ de toutes les translations de \mathcal{E} est inclus dans $GA(\mathcal{E})$. Prenons $M \in \mathcal{E}$ quelconque, et posons :

$$M' = \tau_{\vec{u}}(M) \text{ et } M'' = \tau_{\vec{v}}(M') = \tau_{\vec{v}}(\tau_{\vec{u}}(M)).$$

On a $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = \vec{u} + \vec{v}$. Ceci prouve que $\tau_{\vec{v}} \circ \tau_{\vec{u}} = \tau_{\vec{u} + \vec{v}}$. Puisque $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, il en résulte que $\tau_{\vec{v}} \circ \tau_{\vec{u}} = \tau_{\vec{u}} \circ \tau_{\vec{v}}$.

De plus : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ si et seulement si $\overrightarrow{M'M} = -\vec{u}$, donc $M' = \tau_{\vec{u}}(M)$ si et seulement si $M = \tau_{-\vec{u}}(M')$. \square



3.3.4 Un commentaire algébrique. On a vu en 3.2.4 que les applications $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ affines et bijectives forment un groupe $GA(\mathcal{E})$. D'après le lemme 3.2.2, la bijectivité de φ équivaut à celle de l'endomorphisme vectoriel associé f , de sorte que $\varphi \in GA(\mathcal{E})$ si et seulement si $f \in GL(E)$. On peut donc considérer l'application $\ell : GA(\mathcal{E}) \rightarrow GL(E)$ qui, à tout automorphisme affine de \mathcal{E} , associe son application linéaire associée.

D'après le lemme 3.2.1, ℓ est un morphisme de groupes ; c'est-à-dire que, si $\ell(\varphi) = f$ et $\ell(\psi) = g$, alors $\ell(\psi \circ \varphi) = g \circ f$. Le théorème 3.1.2 montre que ℓ est surjective. Enfin, la proposition 3.3.2 montre que $\text{Ker } \ell = \{\varphi \in GA(\mathcal{E}) ; f = \text{id}_E\}$ n'est autre que le groupe $T(\mathcal{E})$ des translations de \mathcal{E} .

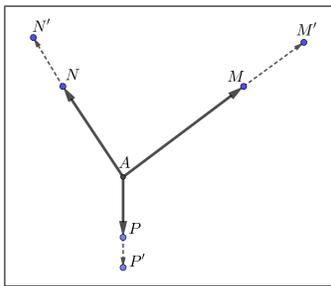
En appliquant le premier théorème d'isomorphisme $GA(\mathcal{E}) / \text{Ker } \ell \simeq \text{Im } \ell$, on en déduit que l'on a l'isomorphisme de groupes :

$$\boxed{GA(\mathcal{E}) / T(\mathcal{E}) \simeq GL(E)}.$$

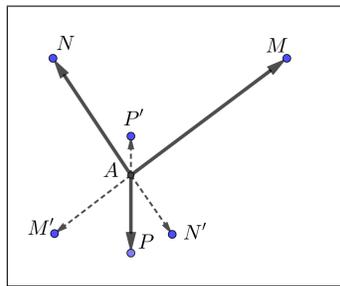
3.4 Sous-groupe des homothéties translations

3.4.1 Définition. Soient A un point de \mathcal{E} et λ un réel non-nul. On appelle *homothétie affine* de centre A et de rapport λ l'application $\vartheta_{A,\lambda} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ qui, à tout $M \in \mathcal{E}$, associe le point $\vartheta_{A,\lambda}(M) = A + \lambda \overrightarrow{AM}$. En d'autres termes :

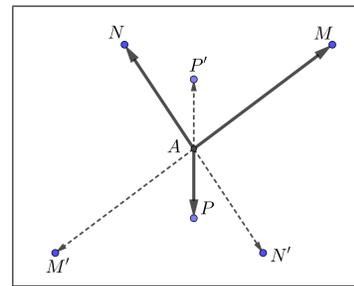
$$[M' = \vartheta_{A,\lambda}(M)] \Leftrightarrow [\overrightarrow{AM'} = \lambda \overrightarrow{AM}]$$



$\lambda > 0$



$\lambda < 0$



$\lambda = -1$

- Lorsque $\lambda = 1$, on a $\vartheta_{A,1} = \text{id}_{\mathcal{E}}$.
- Lorsque $\lambda = -1$, l'homothétie $\vartheta_{A,-1}$ est appelée la symétrie centrale de centre A ; elle associe à tout point M le point M' tel que A est le milieu de (M, M') .

3.4.2 Proposition.

- (i) Toute homothétie $\vartheta_{A,\lambda}$ est une application affine, d'application linéaire associée λid_E .
- (ii) Toute homothétie est une bijection, donc appartient au groupe affine $\text{GA}(\mathcal{E})$.
- (iii) L'ensemble des points fixes d'une homothétie $\vartheta_{A,\lambda}$ distincte de l'identité (ie. de rapport différent de 1) est réduit au singleton $\{A\}$ formé par le centre.

Preuve. Fixons $A \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, et notons plus simplement $\vartheta = \vartheta_{A,\lambda}$. Pour tous $M, N \in \mathcal{E}$, on a :

$$\overrightarrow{\vartheta(M)\vartheta(N)} = \overrightarrow{A\vartheta(N)} - \overrightarrow{A\vartheta(M)} = \lambda \overrightarrow{AN} - \lambda \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MN},$$

ce qui montre (i). Le point (ii) s'en déduit avec 3.2.2 puisque λid_E est une bijection de E sur E . Enfin, $\vartheta(M) = M$ équivaut à $\lambda \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM}$, donc $(\lambda - 1)\overrightarrow{AM} = \vec{0}$, d'où $A = M$ dès lors que $\lambda \neq 1$. \square

3.4.3 Définition. On appelle *homothétie-translation* toute application affine $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ dont l'application linéaire associée f est de la forme $f = \lambda \text{id}_E$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Le réel non-nul λ s'appelle le *rapport* de l'homothétie-translation.

Le théorème suivant formalise le fait qu'une homothétie translation est soit une homothétie, soit une translation.

3.4.4 Théorème.

- (i) Une homothétie-translation de rapport 1 est une translation. Une homothétie-translation de rapport $\lambda \neq 1$ est une homothétie de rapport λ , dont le centre est uniquement déterminé.
- (ii) L'ensemble $\text{H}(\mathcal{E})$ des homothéties-translations est un sous-groupe de $\text{GA}(\mathcal{E})$, égal à la réunion du sous-ensemble des homothéties et du sous-groupe $\text{T}(\mathcal{E})$ des translations de \mathcal{E} .

Preuve. Soit $\varphi \in \text{GA}(\mathcal{E})$ d'application linéaire associée $f = \lambda \text{id}_E$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On a déjà montré 3.3.2 que, si $\lambda = 1$, alors φ est une translation.

Supposons donc maintenant $\lambda \neq 1$. Soit $B \in \mathcal{E}$ fixé, et $B' = \varphi(B)$. Pour tout $M \in \mathcal{E}$, on a $\overrightarrow{B'\varphi(M)} = \overrightarrow{\varphi(B)\varphi(M)} = f(\overrightarrow{BM}) = \lambda \overrightarrow{BM}$. En particulier $\varphi(M) = M$ si et seulement si $\overrightarrow{B'M} = \lambda \overrightarrow{BM}$, c'est-à-dire avec la relation de Chasles si et seulement si $(1 - \lambda)\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BB'}$. Ceci montre que φ admet un unique point fixe A , qui est défini par $\overrightarrow{BA} = (1 - \lambda)^{-1}\overrightarrow{BB'}$.

Pour tout $M \in \mathcal{E}$, on a alors : $\overrightarrow{A\varphi(M)} = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(M)} = f(\overrightarrow{AM}) = \lambda \overrightarrow{AM}$, ce qui prouve que φ est l'homothétie de centre A et de rapport λ . Le point (i) est démontré.

Il est clair que $\{\lambda \text{id}_E ; \lambda \in \mathbb{R}^*\}$ est un sous-groupe de $\text{GL}(E)$. Le fait que $\text{H}(\mathcal{E})$ soit un sous-groupe de $\text{GA}(\mathcal{E})$ résulte alors du lemme 3.2.1. Le point (ii) se traduit par le fait que $\text{H}(\mathcal{E})$ est la réunion du sous-groupe $\text{T}(\mathcal{E})$ des translations et du sous-ensemble des homothéties. \square

EN PRATIQUE

Le point (i) du théorème se traduit sur le plan pratique par le fait que :

1. une application affine φ vérifiant $\overrightarrow{\varphi(M)\varphi(N)} = \overrightarrow{MN}$ pour tous $M, N \in \mathcal{E}$ est une translation ; on trouve son vecteur en prenant un point quelconque A et en considérant le vecteur $\overrightarrow{A\varphi(A)}$,
2. une application affine φ pour laquelle il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lambda \neq 1$, vérifiant $\overrightarrow{\varphi(M)\varphi(N)} = \lambda \overrightarrow{MN}$ pour tous $M, N \in \mathcal{E}$ est une homothétie de rapport λ ; on trouve son centre en déterminant son unique point fixe.

Dans le point (ii) du théorème, il reste à préciser comment se composent entre eux les différents éléments de $H(\mathcal{E})$. C'est ce qu'explicitent les assertions suivantes, dont les preuves (et les dessins qui les accompagnent) sont laissés au lecteur à titre d'exercice.

composée de deux translations : $\tau_{\vec{u}} \circ \tau_{\vec{v}} = \tau_{\vec{u} + \vec{v}}$
composée d'une translation et d'une homothétie : Si $\lambda = 1$, $\tau_{\vec{u}} \circ \vartheta_{A,\lambda} = \tau_{\vec{u}}$ Si $\lambda \neq 1$, $\tau_{\vec{u}} \circ \vartheta_{A,\lambda} = \vartheta_{B,\lambda}$ où $B = A + (1 - \lambda)^{-1}\vec{u}$
composée de deux homothéties de même centre : $\vartheta_{A,\lambda} \circ \vartheta_{A,\lambda'} = \vartheta_{A,\lambda\lambda'}$
composée de deux homothéties non nécessairement de même centre : Si $\lambda\lambda' = 1$, $\vartheta_{A',\lambda'} \circ \vartheta_{A,\lambda} = \tau_{(1-\lambda')\overrightarrow{AA'}}$ Si $\lambda\lambda' \neq 1$, $\vartheta_{A',\lambda'} \circ \vartheta_{A,\lambda} = \vartheta_{B,\lambda\lambda'}$ où $B = A + \frac{(1-\lambda')}{(1-\lambda\lambda')} \overrightarrow{AA'}$

On prendra garde en particulier au fait que la composée de deux homothéties n'est pas forcément une homothétie (les homothéties ne forment pas un sous-groupe).

3.5 Projections et symétries

3.5.1 Un rappel d'algèbre linéaire. Soient F et H deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans l'espace vectoriel E , c'est-à-dire tels que $E = F \oplus H$. Cela signifie que tout vecteur $\vec{u} \in E$ se décompose de façon unique en une somme :

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{w} \quad \text{avec } \vec{v} \in F \text{ et } \vec{w} \in H.$$

L'application $p : E \rightarrow E$ qui, à tout $\vec{u} \in E$ ainsi décomposé, associe sa composante \vec{v} sur F s'appelle la *projection* (vectorielle) de E sur F parallèlement à H .

L'application $s : E \rightarrow E$ qui, à tout $\vec{u} \in E$ ainsi décomposé, associe le vecteur $\vec{v} - \vec{w}$ s'appelle la *symétrie* (vectorielle) par rapport à F parallèlement à H .

Il est facile de vérifier que p et s sont des applications linéaires, et que l'on a :

$$\begin{aligned} \text{Ker } p &= H, & \text{Im } p &= F, & \text{Ker}(p - \text{id}_E) &= F, & p \circ p &= p, \\ \text{Ker } s &= \{\vec{0}\}, & \text{Im } s &= E, & \text{Ker}(s - \text{id}_E) &= F, & s \circ s &= \text{id}_E. \end{aligned}$$

3.5.2 Théorème et définition (projection affine). Soient \mathcal{F} et \mathcal{H} deux sous-espaces affines de \mathcal{E} tels que leurs sous-espaces vectoriels directeurs F et H sont supplémentaires dans E . Alors

- (i) Pour tout point M de \mathcal{E} , il existe un unique point $M' \in \mathcal{F}$ tels que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ appartienne à H . Ce point M' est l'unique point d'intersection de \mathcal{F} avec le sous-espace affine passant par M et parallèle à \mathcal{H} . Le point M' est appelé le *projeté* de M sur \mathcal{F} parallèlement à \mathcal{H} .
- (ii) L'application $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ qui, à tout point M associe son projeté M' défini ci-dessus s'appelle la *projection affine* sur \mathcal{F} parallèlement à \mathcal{H} ; c'est une application affine dont l'application linéaire associée est la projection vectorielle $p : E \rightarrow E$ sur F parallèlement à H .
- (iii) On a : $\boxed{\pi \circ \pi = \pi}$.
- (iv) L'ensemble des points fixes de π est $\boxed{\text{Fix } \pi = \mathcal{F}}$.

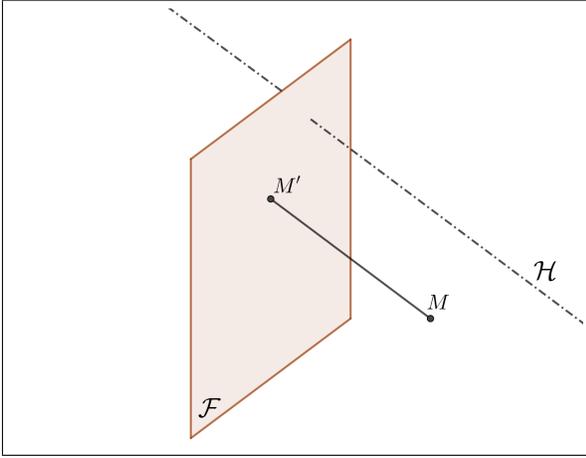
Preuve. Soit M un point de \mathcal{E} . Notons \mathcal{H}' le sous-espace affine de \mathcal{E} passant par M et parallèle à \mathcal{H} , c'est-à-dire dirigé par H . On a $E = F \oplus H$ par hypothèse, donc le point (i) du lemme 1.2.6 implique que $\mathcal{F} \cap \mathcal{H}'$ est un singleton; notons $\mathcal{F} \cap \mathcal{H}' = \{M'\}$. On a $M \in \mathcal{H}'$ et $M' \in \mathcal{H}'$, donc $\overrightarrow{MM'} \in H$.

Réciproquement, si N est un point de \mathcal{F} vérifiant $\overrightarrow{MN} \in H$, on a $N \in \mathcal{H}'$ (puisque \mathcal{H}' passe par M et est dirigé par H), d'où $N \in \mathcal{F} \cap \mathcal{H}'$, et donc $N = M'$. Ceci prouve le point (i).

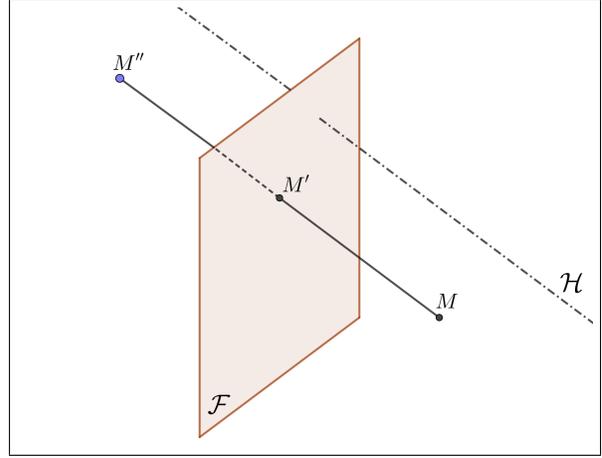
Les points (iii) et (iv) en découlent immédiatement.

Pour montrer (ii), considérons $A \in \mathcal{F}$, qui vérifie donc $\pi(A) = A$. Soient $M \in \mathcal{E}$ quelconque, et $M' = \pi(M)$. D'une part $M' \in \mathcal{F}$ donc $\overrightarrow{AM'} \in F$. D'autre part $\overrightarrow{MM'} \in H$. Ainsi $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{M'M}$ avec $\overrightarrow{AM'} \in F$ et $\overrightarrow{M'M} \in H$, ce qui prouve que $\overrightarrow{AM} = p(\overrightarrow{AM})$, c'est-à-dire $A\pi(M) = p(\overrightarrow{AM})$.

Dès lors, $\overrightarrow{\pi(M)\pi(N)} = \overrightarrow{A\pi(N)} - \overrightarrow{A\pi(M)} = p(\overrightarrow{AN}) - p(\overrightarrow{AM}) = p(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}) = p(\overrightarrow{MN})$ pour tous $M, N \in \mathcal{E}$, ce qui montre (ii) et achève la preuve. \square



projection affine sur \mathcal{F} parallèlement à \mathcal{H}



symétrie affine par rapport à \mathcal{F} parallèlement à \mathcal{H}

3.5.3 Théorème et définition (symétrie affine). Soient \mathcal{F} et \mathcal{H} deux sous-espaces affines de \mathcal{E} . On suppose que leurs sous-espaces vectoriels directeurs F et H sont supplémentaires dans E . Alors

- (i) Pour tout point M de \mathcal{E} , il existe un unique point $M'' \in \mathcal{E}$ tels que le projeté $M' = \pi(M)$ défini précédemment soit le milieu de (M, M'') . Ce point M'' est l'unique point vérifiant $\overrightarrow{M\pi(M)} = \overrightarrow{\pi(M)M''}$. Le point M'' est appelé le *symétrique* de M par rapport à \mathcal{F} parallèlement à \mathcal{H} .
- (ii) L'application $\sigma : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ qui, à tout point M associe son symétrique M'' défini ci-dessus s'appelle la *symétrie affine* par rapport à \mathcal{F} parallèlement à \mathcal{H} ; c'est une application affine dont l'application linéaire associée est la symétrie vectorielle $s : E \rightarrow E$ par rapport à F parallèlement à H .
- (iii) On a : $\boxed{\sigma \circ \sigma = \text{id}_{\mathcal{E}}}$, d'où il résulte que σ est bijective avec $\boxed{\sigma^{-1} = \sigma}$.
- (iv) L'ensemble des points fixes de σ est $\boxed{\text{Fix } \sigma = \mathcal{F}}$.

Preuve. Analogue à celle du théorème précédent; laissée au lecteur en exercice. \square

3.5.4 Quelques remarques sur les projections et symétries affines

1. Dans le cas particulier où \mathcal{F} est un singleton $\{A\}$, alors $F = \{\vec{0}\}$ et $H = E$, donc π est l'application constante qui envoie tout point M de \mathcal{E} sur A , et σ est la symétrie centrale de centre A qui envoie tout point M de \mathcal{E} sur le point M'' tel que A soit le milieu de (M, M'') .
2. Dans le cas particulier où \mathcal{F} est l'espace \mathcal{E} tout entier, alors $F = E$ et $H = \{\vec{0}\}$, donc π et σ sont égales à l'application identité de \mathcal{E} (qui envoie tout point de M sur lui-même).
3. Hormis ces cas extrêmes, les situations non triviales que l'on rencontrera feront intervenir :
 - en dimension 2 des symétries par rapport à une droite \mathcal{D} parallèlement à une autre droite \mathcal{D}' non parallèle à \mathcal{D} ;
 - en dimension 3, des symétries par rapport à un plan \mathcal{P} parallèlement à une droite \mathcal{D} , ou des symétries par rapport à une droite \mathcal{D} parallèlement à un plan \mathcal{P} , avec dans les deux cas la droite vectorielle dirigeant \mathcal{D} non incluse dans le plan vectoriel dirigeant \mathcal{P} .

De même bien sûr pour les projections.

4. On peut vérifier aisément (la preuve est laissée en exercice) que :
 - une application affine $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ est une projection si et seulement si $\varphi \circ \varphi = \varphi$;
 - une application affine $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ est une symétrie si et seulement si $\varphi \circ \varphi = \text{id}_{\mathcal{E}}$.

3.6 Exemples classiques en géométrie plane

On se place dans cette section dans un espace affine \mathcal{E} de dimension 2.

On utilise la notation suivante, basée sur la notion de mesure algébrique d'un couple de points. Si A, B, C, D sont quatre points alignés de \mathcal{E} tels que $C \neq D$, les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont colinéaires non-nuls. On note $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ le coefficient de colinéarité correspondant. En d'autres termes :

Si A, B, C, D sont quatre points alignés tels que $C \neq D$, $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ est le réel défini par

$$\overrightarrow{AB} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} \overrightarrow{CD}.$$

Le classique théorème de Thalès exprime alors simplement le fait que les projections affines sont des applications affines.

3.6.1 Théorème de Thalès Soient d_1, d_2, d_3 trois droites parallèles distinctes dans \mathcal{E} . Soient \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux autres droites, telles qu'aucune des deux ne soit parallèle à d_1, d_2, d_3 .

On note A, B, C les points d'intersection de \mathcal{D} avec d_1, d_2, d_3 respectivement, et A', B', C' les points d'intersection de \mathcal{D}' avec d_1, d_2, d_3 respectivement. Alors :

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}, \quad \text{et } C \text{ est le seul point } M \text{ de } \mathcal{E} \text{ vérifiant } \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}$$

Preuve. Notons $\lambda = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ le coefficient de colinéarité défini par $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$. Soit π la projection affine sur \mathcal{D}' parallèlement à d_1, d_2, d_3 . Donc $\pi(A) = A', \pi(B) = B', \pi(C) = C'$. Soit p la projection vectorielle associée à π . Traduisons simplement la linéarité de p :

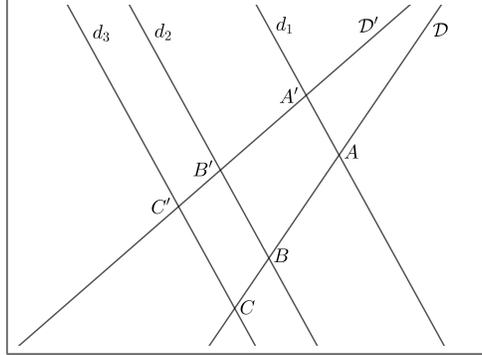
$$\overrightarrow{A'C'} = \overline{\pi(A)\pi(C)} = p(\overrightarrow{AC}) = p(\lambda \overrightarrow{AB}) = \lambda p(\overrightarrow{AB}) = \lambda \overline{\pi(A)\pi(B)} = \lambda \overrightarrow{A'B'}.$$

On conclut que $\lambda = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}$.

Si maintenant M est un point de \mathcal{D} qui vérifie $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}$, alors $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ d'après ce qui précède de sorte que :

$$\overline{AM} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} \overline{AB} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \overline{AB} = \overline{AC},$$

ce qui prouve que $M = C$ et achève la preuve. \square



3.6.2 Corollaire (autre configuration de Thalès). Soient \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux droites sécantes en un point C . Soient $A, B \in \mathcal{D}$ et $A', B' \in \mathcal{D}'$, tous distincts de C . Alors :

$$(AA') \parallel (BB') \iff \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CB'}}{\overline{CA'}}.$$

Preuve. On a $A \neq A'$ et $B \neq B'$ puisque $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \{C\}$. On peut donc considérer les droites (AA') et (BB') .

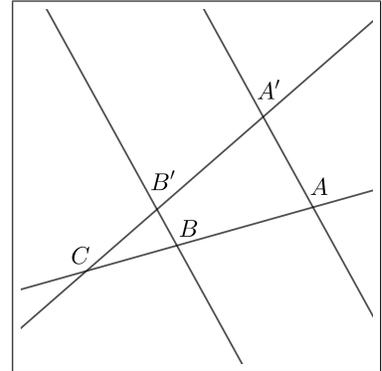
• Supposons $(AA') \parallel (BB')$. Si $A = B$, la propriété d'Euclide implique $(AA') = (BB')$, donc $A' = B'$. Dans ce cas, l'égalité voulue est claire. De même si l'on suppose $A' = B'$. On prend donc $A \neq B$ et $A' \neq B'$. On applique le théorème précédent en choisissant $d_1 = (AA')$, $d_2 = (BB')$ et d_3 la droite passant par C et parallèle à d_1 et d_2 .

On a alors $C = C'$ et $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B'}}$ donc :

$$\overline{AC}(\overline{A'C} + \overline{CB'}) = \overline{A'C}(\overline{AC} + \overline{CB}),$$

d'où $\overline{AC} \cdot \overline{CB'} = \overline{A'C} \cdot \overline{CB}$ et le résultat voulu.

• Réciproquement, supposons $\frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CB'}}{\overline{CA'}} = \lambda$. Donc $\overline{CB} = \lambda \overline{CA}$ et $\overline{CB'} = \lambda \overline{CA'}$. D'où : $\overline{BB'} = \overline{CB'} - \overline{CB} = \lambda \overline{CA'} - \lambda \overline{CA} = \lambda \overline{AA'}$ et donc $(AA') \parallel (BB')$. \square



► Remarquons que, dans l'énoncé ci-dessus, l'égalité des deux rapports traduit simplement le fait que l'homothétie de centre C qui envoie A sur B envoie aussi A' sur B' .

3.6.3 Théorème de Pappus. Soient \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux droites distinctes du plan \mathcal{E} . Soient A, B, C trois points de \mathcal{D} et A', B', C' trois points de \mathcal{D}' .

Si $(AB') \parallel (BA')$ et $(BC') \parallel (CB')$, alors $(AC') \parallel (CA')$.

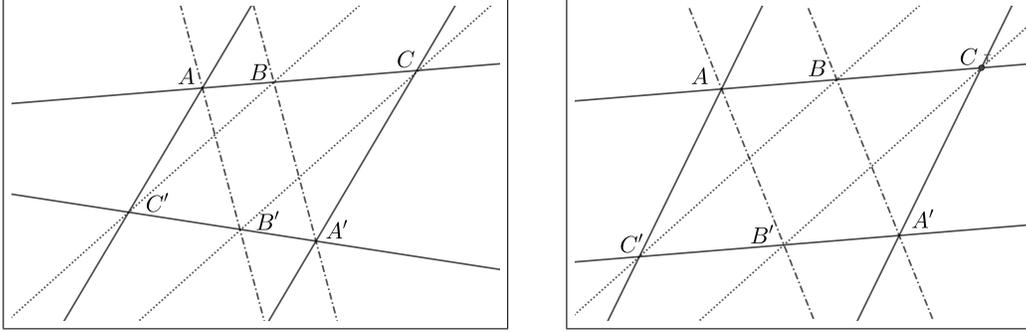
Preuve. On raisonne en distinguant deux cas.

• Supposons \mathcal{D} et \mathcal{D}' sécantes en un point O . Appliquons le théorème de Thalès sous la forme du corollaire ci-dessus : d'une part $(AB') \parallel (BA')$ donc $\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB'}}$, d'autre part $(BC') \parallel (CB')$ donc $\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OB'}}$.

On en déduit que $\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OA'}}$, ce qui, toujours avec le corollaire précédent, implique $(AC') \parallel (CA')$.

- Supposons maintenant \mathcal{D} et \mathcal{D}' parallèles. On a $\mathcal{D} = (AB)$ et $\mathcal{D}' = (A'B')$, donc $(AB) \parallel (A'B')$.

Dès lors, d'après 2.2.5, l'hypothèse $(AB) \parallel (A'B')$ implique que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B'A'}$. De même $(BC) \parallel (B'C')$ implique $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{C'B'}$. On en déduit par la relation de Chasles que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C'A'}$; donc $(AC) \parallel (A'C')$ d'après 1.1.2.d). On conclut que $(AC) \parallel (A'C')$. \square



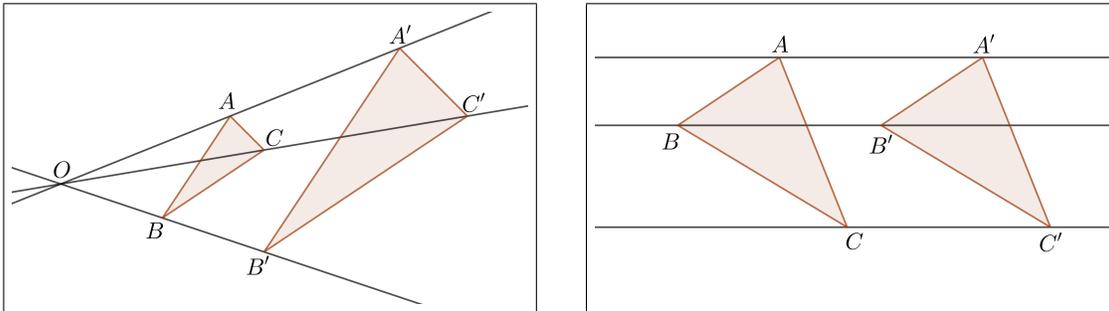
3.6.4 Théorème de Desargues. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles sans sommets communs. On suppose que les côtés sont deux à deux parallèles, c'est-à-dire : $(AB) \parallel (A'B')$, $(BC) \parallel (B'C')$ et $(CA) \parallel (C'A')$. Alors les trois droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles.

Preuve. On raisonne en distinguant deux cas.

- Supposons que (AA') et (BB') se coupent en un point O . D'après le corollaire 3.6.2, le fait que $(AB) \parallel (A'B')$ implique que l'homothétie η de centre O telle que $\eta(A) = A'$ vérifie aussi $\eta(B) = B'$. Son rapport est $\lambda = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$.

Introduisons le point $C'' = \eta(C)$. On a donc $\overrightarrow{OC''} = \lambda \overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OA'} = \lambda \overrightarrow{OA}$ ce qui, d'après 3.6.2, implique que $(A'C'') \parallel (AC)$. Ainsi, C'' est sur la parallèle à (AC) passant par A' . Mais par hypothèse, cette parallèle n'est autre que $(A'C')$. On conclut que $C'' \in (A'C')$.

On prouve de même que $C'' \in (B'C')$. Finalement, $C'' \in (A'C') \cap (B'C')$ donc $C'' = C'$. Or par définition de C'' , les points O, C, C'' sont alignés. En d'autres termes, (CC') passe par O .

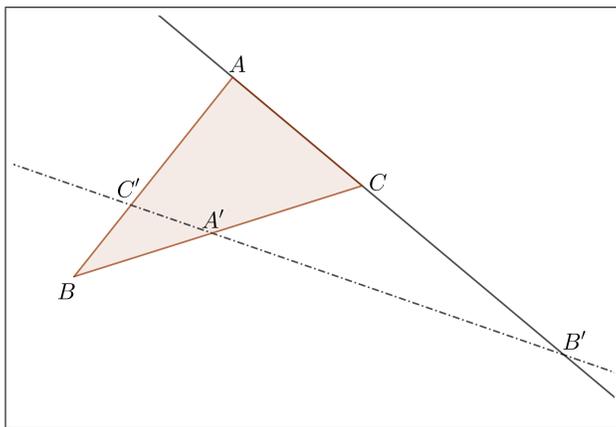


- Supposons que $(AA') \parallel (BB')$. On reprend le même raisonnement que ci-dessus avec des translations au lieu d'homothéties. D'après 2.2.5, $(AB) \parallel (A'B')$ implique que $(AA'B'B)$ parallélogramme, donc $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$.

Introduisons le point C'' tel que $\overrightarrow{CC''} = \overrightarrow{AA'}$. On a $(A'C'') \parallel (AC)$. Ainsi, C'' est sur la parallèle à (AC) passant par A' . Par hypothèse, cette parallèle n'est autre que $(A'C')$. On conclut que $C'' \in (A'C')$. On prouve de même que $C'' \in (B'C')$. Finalement, $C'' \in (A'C') \cap (B'C')$ donc $C'' = C'$. Mais par définition de C'' , on a $\overrightarrow{CC''} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$, donc (CC') est parallèle à (AA') et (BB') . \square

3.6.5 Théorème de Ménélaüs Soit ABC un triangle. Soient A', B', C' trois points tels que $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$. Alors :

$$A', B', C' \text{ alignés si et seulement si } \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$$



Preuve. Notons : $\alpha = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$, $\beta = \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}$, $\gamma = \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$. Ces trois réels sont différents de 0 et 1, et par définition de α, β, γ , on a :

$$\overrightarrow{A'B} = \alpha \overrightarrow{A'C}, \quad \overrightarrow{B'C} = \beta \overrightarrow{B'A}, \quad \overrightarrow{C'A} = \gamma \overrightarrow{C'B}.$$

Considérons les homothéties $\eta_1 = \eta_{A', \alpha}$, $\eta_2 = \eta_{B', \beta}$, $\eta_3 = \eta_{C', \gamma}$, qui par construction vérifient :

$$B = \eta_1(C), \quad C = \eta_2(A), \quad A = \eta_3(B).$$

On introduit $\varphi = \eta_1 \circ \eta_2 \circ \eta_3$. C'est une application affine comme composée de trois applications affines, et l'application linéaire associée est $f = (\alpha \text{id}_E) \circ (\beta \text{id}_E) \circ (\gamma \text{id}_E) = (\alpha\beta\gamma) \text{id}_E$.

Remarquons d'abord que $\varphi(B) = \eta_1(\eta_2(\eta_3(B))) = \eta_1(\eta_2(A)) = \eta_1(C) = B$. Il en résulte que le point $A'' = \varphi(A')$ vérifie : $\overrightarrow{A''B} = \overrightarrow{\varphi(A')\varphi(B)} = f(\overrightarrow{A'B}) = (\alpha\beta\gamma)\overrightarrow{A'B}$. On déduit que $\varphi(A') \in (A'B)$.

• Supposons que A', B', C' sont alignés. Notons \mathcal{D} la droite passant par A', B', C' et Δ la droite vectorielle qui dirige \mathcal{D} .

On sait que $\eta_1(\mathcal{D})$ est un sous-espace affine dirigé par $\alpha \text{id}_E(\Delta) = \Delta$, donc $\eta_1(\mathcal{D})$, est une droite parallèle à \mathcal{D} . Elle passe par exemple par $\eta_1(A') = A'$. Donc $\eta_1(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$. De même $\eta_2(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ et $\eta_3(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$, et finalement $\varphi(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$. Il en résulte en particulier que $\varphi(A') \in \mathcal{D}$. Or on a vu plus haut que $\varphi(A') \in (A'B)$, donc $\varphi(A')$ est le point d'intersection des droites $(A'B)$ et \mathcal{D} , c'est-à-dire $\varphi(A') = A'$.

On déduit que $\overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{\varphi(A')\varphi(B)} = f(\overrightarrow{A'B}) = (\alpha\beta\gamma)\overrightarrow{A'B}$, on conclut que $\alpha\beta\gamma = 1$.

• Supposons que $\alpha\beta\gamma = 1$. Donc $\eta_1 \circ \eta_2 \circ \eta_3 = \text{id}_E$. Ou encore $\eta_1^{-1} = \eta_2 \circ \eta_3$.

Comme $\beta\gamma = \alpha^{-1} \neq 1$, on sait comme on l'a vu à la fin de 3.4 que $\eta_2 \circ \eta_3$ est une homothétie de rapport $\beta\gamma \neq 1$, et dont le centre O est sur la droite $(B'C')$. Comme par ailleurs η_1^{-1} est l'homothétie de centre A' et de rapport $\alpha^{-1} \neq 1$, on déduit de l'égalité $\eta_1^{-1} = \eta_2 \circ \eta_3$ que $A' \in (B'C')$. \square

4 – Isométries affines

Dans tout ce chapitre, \mathcal{E} est un espace affine euclidien, de \mathbb{R} -espace vectoriel directeur E . On note $n = \dim E = \dim \mathcal{E}$. On note $O(E)$ le groupe orthogonal de E (c'est-à-dire le groupe des isométries vectorielles de E).

4.1 Groupe des isométries affines, déplacements et antidéplacements

4.1.1 Notion d'isométrie affine.

a) Définition. On appelle isométrie affine de \mathcal{E} toute application affine φ de \mathcal{E} dans \mathcal{E} qui conserve la distance, ce qui signifie que :

$$\text{pour tous points } M \text{ et } N \text{ de } \mathcal{E}, \text{ on a } d(\varphi(M), \varphi(N)) = d(M, N).$$

► En fait, une application $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ qui conserve les distances est nécessairement affine (et donc est une isométrie affine), de sorte que l'hypothèse “ φ affine” peut être enlevée de la définition a). On donne à titre d'exercice une preuve de cette assertion à la fin de ce chapitre.

b) Théorème. Une application affine φ de \mathcal{E} dans \mathcal{E} est une isométrie affine si et seulement si son application linéaire associée f est une isométrie vectorielle de E .

Preuve. Soit f une isométrie vectorielle de E . Cela signifie que f conserve la norme, c'est-à-dire que :
pour tout vecteur \vec{u} de E , on a $\|f(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$.

Il en résulte que, pour tous points $M, N \in \mathcal{E}$, on a :

$$d(\varphi(M), \varphi(N)) = \|\overrightarrow{\varphi(M)\varphi(N)}\| = \|f(\overrightarrow{MN})\| = \|\overrightarrow{MN}\| = d(M, N),$$

ce qui prouve que φ est une isométrie affine. La réciproque découle du même calcul, en écrivant un vecteur $\vec{u} \in E$ quelconque sous la forme \overrightarrow{MN} avec $M, N \in \mathcal{E}$. □

c) Corollaire et définition. Toute isométrie affine est une bijection de \mathcal{E} sur \mathcal{E} , et les isométries affines de \mathcal{E} forment un sous-groupe du groupe affine $GA(\mathcal{E})$, noté $Is(\mathcal{E})$.

Preuve. Les deux propriétés résultent des lemmes 3.2.1 et 3.2.2 puisque les isométries vectorielles de E sont bijectives et forment un groupe, noté $O(E)$ et appelé groupe orthogonal de E , qui est donc un sous-groupe de $GL(E)$. □

EN PRATIQUE

Les isométries affines étant des bijections affines, toutes les propriétés de ces dernières étudiées au chapitre précédent s'appliquent en particulier aux isométries affines : conservation de l'alignement, conservation du parallélisme, points fixes, etc.

Le fait que de plus elles conservent la distance entraîne des propriétés supplémentaires dont la conservation des sous-espaces orthogonaux, la conservation des aires et des volumes en dimension 2 ou 3, la conservation des angles dans le plan comme on le verra plus loin.

4.1.2 Déplacements et antidéplacements.

a) Définitions. Une isométrie affine de \mathcal{E} est dite directe (respectivement *indirecte*) lorsque son application linéaire associée est une isométrie vectorielle directe (respectivement indirecte) de E . Une isométrie affine directe est aussi appelée un *déplacement*; une isométrie affine indirecte est aussi appelée un *antidéplacement*.

Rappel important d'algèbre linéaire. Un endomorphisme f de E est une isométrie vectorielle (on dit encore un endomorphisme orthogonal) lorsqu'il conserve la norme, ou de façon équivalent lorsqu'il conserve le produit scalaire. Les isométries vectorielles de E forment un sous-groupe de $GL(E)$ appelé le groupe orthogonal de E et noté $O(E)$ (voir ci-dessus en 4.1.1).

Un endomorphisme f de E est une isométrie vectorielle si et seulement si sa matrice M dans une base orthonormée \mathcal{B} quelconque de E est une matrice orthogonale (ce qui signifie que ${}^t M.M = M.{}^t M = \text{id}_E$). Il en résulte que toute isométrie vectorielle f de E vérifie $\det f = 1$ ou $\det f = -1$. Les isométries vectorielles de déterminant 1 sont dites directes; elles forment un sous-groupe de $O(E)$ noté $O^+(E)$ ou encore $SO(E)$. Celles de déterminant -1 sont dites indirectes; leur ensemble noté $O^-(E)$ n'est pas un sous-groupe.

b) Proposition. Les déplacements forment un sous-groupe de $\text{Is}(\mathcal{E})$, noté $\text{Is}^+(\mathcal{E})$. Les antidéplacements forment un sous-ensemble de $\text{Is}(\mathcal{E})$ qui n'est pas un groupe, noté $\text{Is}^-(\mathcal{E})$.

Preuve. Evident d'après le théorème 4.1.1.b) et le lemme 3.2.1. □

En résumé : $\varphi \in \text{Is}^+(\mathcal{E})$ si et seulement si $f \in O^+(E)$ et $\varphi \in \text{Is}^-(\mathcal{E})$ si et seulement si $f \in O^-(E)$.

4.1.3 Premiers exemples d'isométries affines.

a) Cas des translations. Comme l'application linéaire associée à une translation est id_E (voir 3.3.2) et que id_E appartient à $O^+(E)$, il est clair que :

toute translation est un déplacement.

b) Cas des symétries centrales. Une homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est toujours bijective, mais c'est une isométrie affine si et seulement si $\lambda = \pm 1$. En effet, l'application linéaire associée est λid_E comme on l'a vu en 3.4.2, qui appartient à $O(E)$ si et seulement si $\lambda = \pm 1$. Donc les seules homothéties qui sont des isométries affines sont id_E et les symétries centrales. De plus, puisque $\det(-\text{id}_E) = (-1)^n$, on a :

une symétrie centrale est un déplacement si n est pair et un antidéplacement si n est impair.

c) Cas des symétries orthogonales. Pour tout sous-espace affine \mathcal{F} , on appelle symétrie affine orthogonale par rapport à \mathcal{F} la symétrie affine $\sigma_{\mathcal{F}}$ par rapport à \mathcal{F} parallèlement à la direction orthogonale à \mathcal{F} .

On peut donc reprendre dans ce cas particulier où $H = F^\perp$ la construction et les propriétés vues plus généralement en 3.5.3. L'application linéaire associée à $\sigma_{\mathcal{F}}$ est la symétrie vectorielle orthogonale $s_F : E \rightarrow E$ par rapport au sous-espace vectoriel F directeur de \mathcal{F} . On sait d'après le cours d'algèbre linéaire qu'une telle symétrie orthogonale s_F est une isométrie vectorielle. On en déduit que :

les symétries affines orthogonales $\sigma_{\mathcal{F}}$ sont des isométries affines.

De plus, il résulte aussi du cours d'algèbre linéaire que $F = \text{Ker}(s_F - \text{id}_E)$ et $F^\perp = \text{Ker}(s_F + \text{id}_E)$, d'où l'on déduit par la choix d'une base adaptée à la somme directe $E = F \oplus F^\perp$ que $\det s_F = (-1)^{n - \dim F}$. Donc $s_F \in \text{O}^+(E)$ si et seulement si $n - \dim F$ est pair. On conclut que :

une symétrie affine orthogonale $\sigma_{\mathcal{F}}$ est un déplacement si et seulement si $n - \dim \mathcal{F}$ est pair.

Un cas particulier important est celui où \mathcal{F} est un hyperplan de \mathcal{E} . Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan est appelée une *symétrie hyperplane* ou une *réflexion*. Comme $\dim \mathcal{F} = n - 1$, il résulte de l'observation précédente que :

toute symétrie orthogonale hyperplane (réflexion) est un antidéplacement

d) Contre-exemples. Les projections affines ne sont pas des isométries affines puisque qu'elles ne sont pas bijectives. C'est le cas aussi des homothéties de rapport $\lambda \neq \pm 1$ comme on l'a vu ci-dessus.

4.1.4 Détermination d'une isométrie par l'image d'une base.

a) Théorème. Soit (A_0, A_1, \dots, A_n) une base affine de \mathcal{E} . Soit (B_0, B_1, \dots, B_n) une famille de $(n + 1)$ points. On suppose que :

$$d(A_i, A_j) = d(B_i, B_j) \text{ pour tous } 0 \leq i, j \leq n. \quad (*)$$

Alors il existe une unique isométrie $\varphi \in \text{Is}(\mathcal{E})$ telle que $\varphi(A_i) = B_i$ pour tout $0 \leq i \leq n$. De plus (B_0, B_1, \dots, B_n) est une base affine de \mathcal{E} .

Preuve D'après la proposition 3.1.8, il existe une unique application affine φ de \mathcal{E} dans \mathcal{E} telle que $\varphi(A_i) = B_i$ pour tout $0 \leq i \leq n$. Son application linéaire associée est déterminée par l'image des vecteurs de la base $\mathcal{A} = (\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ de E , à savoir les vecteurs $f(\overrightarrow{A_0A_i}) = \overrightarrow{B_0B_i}$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Tout ceci est purement affine, et n'utilise pas l'hypothèse (*). La question est de montrer que (*) implique que φ est une isométrie.

Pour tout $0 \leq i, j, k \leq n$, on calcule :

$$\overrightarrow{A_jA_k} \cdot \overrightarrow{A_jA_k} = (\overrightarrow{A_iA_k} - \overrightarrow{A_iA_j}) \cdot (\overrightarrow{A_iA_k} - \overrightarrow{A_iA_j}) = \overrightarrow{A_iA_k}^2 + \overrightarrow{A_iA_j}^2 - 2\overrightarrow{A_iA_j} \cdot \overrightarrow{A_iA_k},$$

donc $\overrightarrow{A_iA_j} \cdot \overrightarrow{A_iA_k} = \frac{1}{2}(A_iA_j^2 + A_iA_k^2 - A_jA_k^2)$. De même $\overrightarrow{B_iB_j} \cdot \overrightarrow{B_iB_k} = \frac{1}{2}(B_iB_j^2 + B_iB_k^2 - B_jB_k^2)$. Or d'après (*), on a : $A_iA_j = B_iB_j$, $A_iA_k = B_iB_k$, $A_jA_k = B_jB_k$. Il en résulte que :

$$\overrightarrow{A_iA_j} \cdot \overrightarrow{A_iA_k} = \overrightarrow{B_iB_j} \cdot \overrightarrow{B_iB_k} \text{ pour tous } 0 \leq i, j, k \leq n. \quad (**).$$

Dès lors, soient $M, N \in \mathcal{E}$ quelconques. Le vecteur \overrightarrow{MN} se décompose dans la base \mathcal{A} de E en $\overrightarrow{MN} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{A_0A_i}$ avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$. On calcule :

$$\overrightarrow{\varphi(M)\varphi(N)} = f(\overrightarrow{MN}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(\overrightarrow{A_0A_i}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{\varphi(A_0)\varphi(A_i)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{B_0B_i}.$$

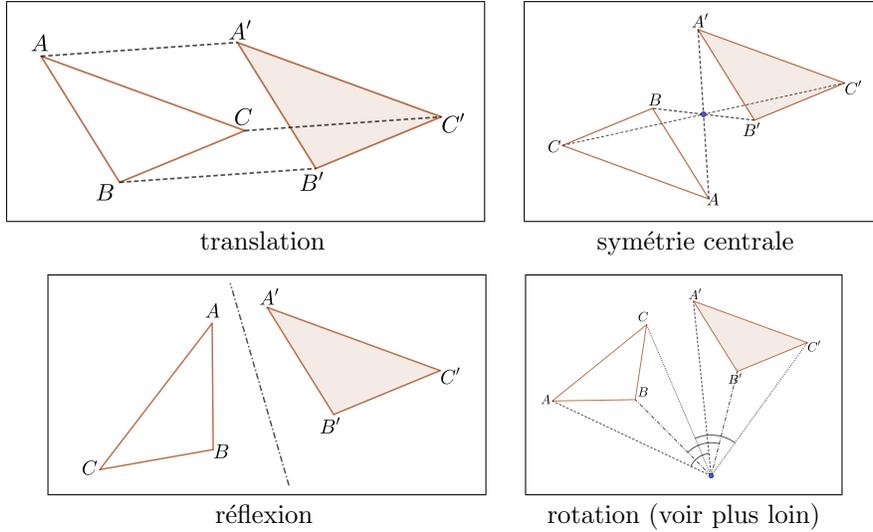
De plus $\|\overrightarrow{MN}\|^2 = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{A_0A_i}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{A_0A_i}\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \overrightarrow{A_0A_i} \cdot \overrightarrow{A_0A_j}$. En utilisant (**), on en déduit :

$$\|\overrightarrow{MN}\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \overrightarrow{B_0B_i} \cdot \overrightarrow{B_0B_j} = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{B_0B_i}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{B_0B_i}\right) = \|\overrightarrow{\varphi(M)\varphi(N)}\|^2.$$

En résumé $\|\overrightarrow{\varphi(M)\varphi(N)}\| = \|\overrightarrow{MN}\|$, et donc $\varphi \in \text{Is}(\mathcal{E})$.

Il en résulte en particulier que φ est bijective. Donc (B_0, B_1, \dots, B_n) est une base affine de \mathcal{E} , comme image d'une base affine par une bijection affine. \square

b) Exemple d'application en géométrie plane élémentaire. On suppose $\dim \mathcal{E} = 2$. Soient (ABC) et $(A'B'C')$ deux triangles tels que $A'B' = AB$, $B'C' = BC$, $C'A' = CA$. Alors il existe une unique isométrie φ de \mathcal{E} telle que $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$, $\varphi(C) = C'$. Cette propriété est connue sous le nom de troisième cas d'égalité des triangles.



Le théorème qui suit, très important car très général, a pour objet de ramener l'étude des isométries affines à celles des isométries vectorielles.

4.1.5 Théorème et définitions (forme réduite d'une isométrie) Soient $\varphi \in \text{Is}(\mathcal{E})$ une isométrie affine, et $f \in \text{O}(E)$ l'isométrie vectorielle associée.

- (i) Il existe une unique translation $\tau \in T(\mathcal{E})$ et une unique isométrie $\varphi_0 \in \text{Is}(\mathcal{E})$ admettant (au moins) un point fixe, telles que : $\varphi = \tau \circ \varphi_0 = \varphi_0 \circ \tau$.
- (ii) Dans cette décomposition, le sous-espace affine \mathcal{V} des points fixes de φ_0 est dirigé par le sous-espace vectoriel $V = \text{Ker}(f - \text{id}_E)$, et le vecteur \vec{u} de la translation τ appartient à V .

La décomposition unique $\varphi = \tau \circ \varphi_0 = \varphi_0 \circ \tau$ s'appelle la *forme réduite* ou la *décomposition canonique* de φ ;

on dit que τ est la *composante translation* de φ et que φ_0 est la *composante à points fixes* de φ .

Preuve. Observons d'abord que les sous-espaces vectoriels $V = \text{Ker}(f - \text{id}_E)$ et $W = \text{Im}(f - \text{id}_E)$ sont supplémentaires et orthogonaux dans E . Soient $x \in V$ et $y \in W$. Donc $f(x) = x$ et $y = f(z) - z$ pour un $z \in E$. D'où $x \cdot y = x \cdot f(z) - x \cdot z = f(x) \cdot f(z) - x \cdot z$. Mais $f(x) \cdot f(z) = x \cdot z$ car $f \in \text{O}(E)$, et donc $x \cdot y = 0$. Ceci prouve que $V \subset W^\perp$ et $W \subset V^\perp$. Or $\dim V + \dim W = \dim \text{Ker}(f - \text{id}_E) + \dim \text{Im}(f - \text{id}_E) = \dim E = n$ implique que $\dim V = n - \dim W = \dim W^\perp$, et de même $\dim W = \dim V^\perp$; les deux inclusions ci-dessus sont donc des égalités.

- Ceci étant, fixons $A \in \mathcal{E}$ quelconque; $\overrightarrow{A\varphi(A)}$ se décompose de façon unique en :

$$\overrightarrow{A\varphi(A)} = \vec{u} + \vec{w} \quad \text{avec } \vec{u} \in V \text{ et } \vec{w} \in W. \quad (*)$$

Pour le vecteur \vec{u} ainsi déterminé, notons $\tau = \tau_{\vec{u}}$. Introduisons $\varphi_0 = \tau^{-1} \circ \varphi = \tau_{-\vec{u}} \circ \varphi$. Il est clair que $\varphi_0 \in \text{Is}(\mathcal{E})$ comme composée de deux isométries affines, et que son application linéaire associée est l'isométrie vectorielle $f_0 = \text{id}_E \circ f = f$.

Parce que $\vec{u} \in V$, on a $\tau \circ \varphi_0 = \varphi_0 \circ \tau$.

En effet : pour $M \in \mathcal{E}$, notons $M_1 = \tau(M)$ et $M_2 = \varphi_0(M_1) = (\varphi_0 \circ \tau)(M)$, puis $M'_1 = \varphi_0(M)$ et $M'_2 = \tau(M'_1) = (\tau \circ \varphi_0)(M)$. On calcule $\overrightarrow{M_2 M'_2} = \overrightarrow{M_2 M'_1} + \overrightarrow{M'_1 M'_2} = \overrightarrow{\varphi_0(M_1) \varphi_0(M)} + \overrightarrow{u} = f(\overrightarrow{M_1 M}) + \overrightarrow{u} = f(-\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{u}$. Mais $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ car $\overrightarrow{u} \in V$. Donc $M_2 = M'_2$.

Par ailleurs, $\varphi_0(A) = \tau_{-\overrightarrow{u}} \circ \varphi(A)$ donc $\overrightarrow{\varphi(A) \varphi_0(A)} = -\overrightarrow{u}$, de sorte que d'après (*) :

$$\overrightarrow{A \varphi_0(A)} = \overrightarrow{A \varphi(A)} + \overrightarrow{\varphi(A) \varphi_0(A)} = \overrightarrow{A \varphi(A)} - \overrightarrow{u} = \overrightarrow{w}.$$

Comme $\overrightarrow{w} \in \text{Im}(f - \text{id}_E)$, il existe $\overrightarrow{s} \in E$ tel que $\overrightarrow{A \varphi_0(A)} = \overrightarrow{w} = f(\overrightarrow{s}) - \overrightarrow{s}$. Introduisons le point $B \in \mathcal{E}$ tel que $-\overrightarrow{s} = \overrightarrow{AB}$. On obtient :

$$\overrightarrow{B \varphi_0(B)} = \overrightarrow{B A} + \overrightarrow{A \varphi_0(A)} + \overrightarrow{\varphi_0(A) \varphi_0(B)} = \overrightarrow{B A} + \overrightarrow{A \varphi_0(A)} + f(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{s} + f(\overrightarrow{s}) - \overrightarrow{s} + f(-\overrightarrow{s}) = \overrightarrow{0_E}.$$

Donc B est un point fixe de φ_0 .

• Montrons enfin l'unicité de la décomposition. Supposons $\varphi = \tau \circ \varphi_0 = \varphi_0 \circ \tau$ avec $\tau = \tau_{\overrightarrow{u}} \in T(\mathcal{E})$ et φ_0 qui admet des points fixes. Fixons $A \in \mathcal{E}$ quelconque. Notons $A_1 = \tau(A)$ et $A_2 = \varphi_0(A_1)$, et $A'_1 = \varphi_0(A)$ et $A'_2 = \tau(A'_1)$. L'hypothèse de commutation de τ et φ_0 impliquant à $A_2 = A'_2$, on a, en reprenant les mêmes calculs que ci-dessus :

$$\overrightarrow{0_E} = \overrightarrow{A_2 A'_2} = \overrightarrow{A_2 A'_1} + \overrightarrow{A'_1 A'_2} = \overrightarrow{\varphi_0(A_1) \varphi_0(A)} + \overrightarrow{u} = f(\overrightarrow{A_1 A}) + \overrightarrow{u} = f(-\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{u}.$$

Donc $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{u} \in V$. Par ailleurs, introduisons un point fixe B de φ_0 . On a :

$$\overrightarrow{A \varphi_0(A)} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B \varphi_0(A)} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\varphi_0(B) \varphi_0(A)} = \overrightarrow{AB} + f(\overrightarrow{BA}),$$

ce qui prouve que : $\overrightarrow{A \varphi_0(A)} \in \text{Im}(f - \text{id}_E) = W$.

Or on peut décomposer : $\overrightarrow{A \varphi(A)} = \overrightarrow{A \varphi_0(A)} + \overrightarrow{\varphi_0(A) \varphi(A)} = \overrightarrow{A \varphi_0(A)} + \overrightarrow{\varphi_0(A) \tau(\varphi_0(A))} = \overrightarrow{A \varphi_0(A)} + \overrightarrow{u}$.

Ainsi, pour tout $A \in \mathcal{E}$, on a : $\overrightarrow{A \varphi(A)} = \overrightarrow{A \varphi_0(A)} + \overrightarrow{u}$ avec $\overrightarrow{A \varphi_0(A)} \in W$ et $\overrightarrow{u} \in V$.

Si on a une autre décomposition $\varphi = \tau_{\overrightarrow{v}} \circ \varphi_1 = \varphi_1 \circ \tau_{\overrightarrow{v}}$, il vient de même : $\overrightarrow{A \varphi(A)} = \overrightarrow{A \varphi_1(A)} + \overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{A \varphi_1(A)} \in W$ et $\overrightarrow{v} \in V$. Mais $E = V \oplus W$, donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$, d'où $\varphi_0 = \varphi_1$. \square

Exemple d'application : description des isométries affines en dimension 1. Dans le cas (trivial) où \mathcal{E} est de dimension 1, les déplacements de \mathcal{E} sont les translations, et les antidéplacements de \mathcal{E} sont les composées d'une translation par une symétrie centrale.

En effet. On suppose que $\dim \mathcal{E} = \dim E = 1$. Il est clair que $\text{End } E = \{\lambda \text{id}_E; \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $\text{GL}(E) = \{\lambda \text{id}_E; \lambda \in \mathbb{R}^*\}$. On en déduit que $\text{O}(E) = \{\text{id}_E, -\text{id}_E\}$, avec $\text{O}^+(E) = \{\text{id}_E\}$ et $\text{O}^-(E) = \{-\text{id}_E\}$. Soient alors $\varphi \in \text{Is}(\mathcal{E})$, et $f \in \text{O}(E)$ son application linéaire associée.

• Ou bien $\varphi \in \text{Is}^+(\mathcal{E})$; alors $f = \text{id}_E$ donc φ est une translation (dans la décomposition canonique de φ , on a $\varphi_0 = \text{id}_E$ et $\varphi = \tau$).

• Ou bien $\varphi \in \text{Is}^-(\mathcal{E})$; alors $f = -\text{id}_E$. Dans la décomposition canonique $\varphi = \tau \circ \varphi_0$, on a aussi $\varphi_0 \in \text{Is}^-(\mathcal{E})$, avec le même f associé, et $\mathcal{V} = \{M \in \mathcal{E}; \varphi_0(M) = M\} \neq \emptyset$. Comme \mathcal{V} est un sous-espace affine de la droite \mathcal{E} , deux cas seulement sont possibles :

– $\mathcal{V} = \mathcal{E}$, mais alors $\varphi_0 = \text{id}_E$, ce qui contredit $\varphi_0 \in \text{Is}^-(\mathcal{E})$.

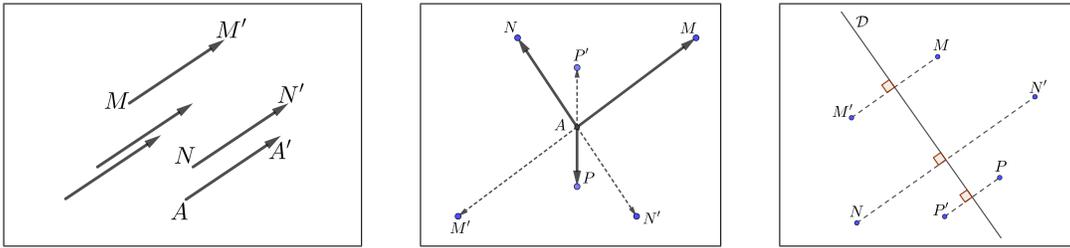
– \mathcal{V} est un singleton $\{B\}$; alors pour tout $M \in \mathcal{E}$ on a $\overrightarrow{B \varphi_0(M)} = \overrightarrow{\varphi_0(B) \varphi_0(M)} = f(\overrightarrow{BM}) = -\overrightarrow{BM}$, donc φ_0 est la symétrie centrale de centre B .

4.2 Isométries affines du plan.

On suppose dans cette section que l'espace affine euclidien \mathcal{E} est de dimension 2. On suppose de plus que E est orienté.

4.2.1 Exemples déjà rencontrés. En appliquant les résultats généraux de 4.1.3, dans le plan affine euclidien \mathcal{E} , on connaît déjà comme exemples d'isométries affines :

1. les *translations*, qui sont des déplacements ; l'application linéaire associée à une telle translation $\tau_{\vec{u}}$ est id_E . L'ensemble des points fixes de $\tau_{\vec{u}}$ est vide dès lors que $\vec{u} \neq \vec{0}$.
2. les *symétries centrales*, qui sont des déplacements ; l'application linéaire associée à une symétrie centrale σ_A est $-\text{id}_E$. L'ensemble des points fixes de σ_A est le singleton $\{A\}$.
3. les *réflexions* (symétries orthogonales par rapport à une droite affine), qui sont des antidéplacements ; l'application linéaire associée à une telle réflexion $\sigma_{\mathcal{D}}$ est la symétrie vectorielle orthogonale s_{Δ} par rapport à la droite vectorielle Δ dirigeant \mathcal{D} . L'ensemble des points fixes de $\sigma_{\mathcal{D}}$ est la droite \mathcal{D} . On appelle \mathcal{D} l'axe de la réflexion $\sigma_{\mathcal{D}}$.



4.2.2 Symétries glissées

a) Définition et proposition. Soient \mathcal{D} une droite du plan affine \mathcal{E} et \vec{u} un vecteur appartenant à la droite vectorielle Δ de E dirigeant \mathcal{D} . On appelle *symétrie glissée* d'axe \mathcal{D} et de vecteur \vec{u} la composée de la réflexion d'axe \mathcal{D} et de la translation de vecteur \vec{u} ;

- (i) elle vérifie $\sigma_{\mathcal{D}} \circ \tau_{\vec{u}} = \tau_{\vec{u}} \circ \sigma_{\mathcal{D}}$,
- (ii) son ensemble de points fixes est vide dès lors que $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Preuve. Notons pour simplifier $\tau = \tau_{\vec{u}}$ et $\sigma = \sigma_{\mathcal{D}}$. Soit M un point quelconque de \mathcal{E} .

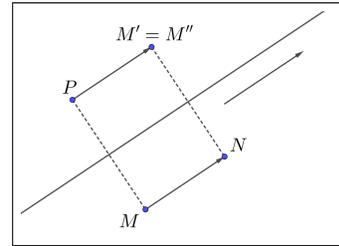
Posons $N = \tau(M)$, puis $M' = \sigma(N)$.

Posons par ailleurs $P = \sigma(M)$, puis $M'' = \tau(P)$.

On a $\overrightarrow{MN} = \vec{u} = \overrightarrow{PM''}$ par définition de τ et $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NM'}$ par définition de σ . D'où :

$$\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PM''} = \overrightarrow{NM'} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MM'}, \text{ donc } M' = M'',$$

ce qui montre que $\tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau$. Le point (ii) est clair. \square



Il est clair qu'une réflexion est un cas particulier de symétrie glissée, celui où le vecteur de translation dans la symétrie glissée est le vecteur nul.

b) Proposition. Toute symétrie glissée du plan est une isométrie affine, et plus spécifiquement un antidéplacement.

Preuve. Evident puisqu'il s'agit de la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement. \square

4.2.3 Rotations affines

a) **Rappels d'algèbre linéaire.** Les éléments du groupe orthogonal $O(E)$ lorsque E est de dimension 2 sont connus et peuvent être explicitement décrits.

- Les éléments de $O^+(E)$ sont appelés les rotations vectorielles. Pour toute $f \in O^+(E)$, il existe un réel θ (défini modulo 2π) tel que la matrice de f dans toute base orthonormée directe de E est :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

On note alors $f = r_\theta$ et on appelle r_θ la rotation vectorielle d'angle θ . Un calcul immédiat montre que $R_\theta \times R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$, d'où il résulte que :

$$r_\theta \circ r_{\theta'} = r_{\theta+\theta'} \quad \text{pour tous } \theta, \theta' \in \mathbb{R}.$$

Remarque. Une propriété importante découlant de cette définition est que, pour tous vecteurs non-nuls de même norme \vec{u} et \vec{v} dans E , il existe une unique rotation r_θ telle que $r_\theta(\vec{u}) = \vec{v}$.

Cela permet de définir l'angle de vecteurs (\vec{u}, \vec{v}) , que l'on identifie à θ par abus de notation (il serait plus correct de dire que θ est une mesure de cet angle). La relation de composition ci-dessus conduit alors à une forme de relation de Chasles pour les angles sous la forme :

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w}) \quad \text{pour tous } \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E.$$

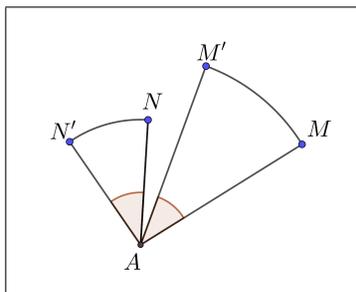
- Les éléments de $O^-(E)$ sont les symétries vectorielles orthogonales par rapport aux droites vectorielles. Pour une telle symétrie s_Δ , la matrice de s_Δ dans une base orthonormée de E est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 = 1$.

En particulier, comme les vecteurs de Δ sont fixés par s_Δ et que les vecteurs de Δ^\perp sont transformés en leur opposé, on peut choisir une base orthonormée \mathcal{B} de E formée d'un vecteur directeur de Δ et d'un vecteur directeur de Δ^\perp , de sorte que la matrice de s_Δ dans \mathcal{B} est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b) **Proposition et définition.** Soient A un point du plan orienté \mathcal{E} et θ un réel.

- Il existe une unique application affine de \mathcal{E} dans \mathcal{E} qui fixe A et dont l'application linéaire associée est la rotation vectorielle r_θ de E d'angle θ . On l'appelle *rotation affine de centre A et d'angle θ* , notée $\rho_{A,\theta}$.
- L'ensemble des points fixes de $\rho_{A,\theta}$ est réduit à $\{A\}$ dès lors que θ est non-nul (modulo 2π).

Preuve. Le point (i) est la simple application du théorème 3.1.2. Le point (ii) résulte de la proposition 3.1.7 puisque $\text{Ker}(r_\theta - \text{id}_E) = \{\vec{0}\}$ si θ est non-nul (modulo 2π). \square



► **Construction :** soit M un point de \mathcal{E} distinct de A . Le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$ de E est non-nul. Soit \vec{v} l'image de \vec{u} par la rotation vectorielle r_θ de E . Il existe un unique point M' de \mathcal{E} tel que $\vec{v} = \overrightarrow{AM'}$. On a ainsi par construction :

$$\overrightarrow{AM'} = r_\theta(\overrightarrow{AM}), \quad d(A, M) = d(A, M'), \quad \text{et} \quad \theta \text{ est l'angle } (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}).$$

c) Proposition. Toute rotation affine $\rho_{A,\theta}$ est une isométrie, et plus spécifiquement un déplacement.

Preuve. Evident d'après 4.1.1.b et 4.1.2 puisque les rotations vectorielles sont des éléments de $O^+(E)$. \square

► Il est clair qu'une symétrie centrale est un cas particulier de rotation, celui où $\theta = \pi$ modulo 2π . Lorsque $\theta = 0$ modulo 2π , alors $\rho_{A,\theta} = \text{id}_{\mathcal{E}}$ pour tout $A \in \mathcal{E}$.

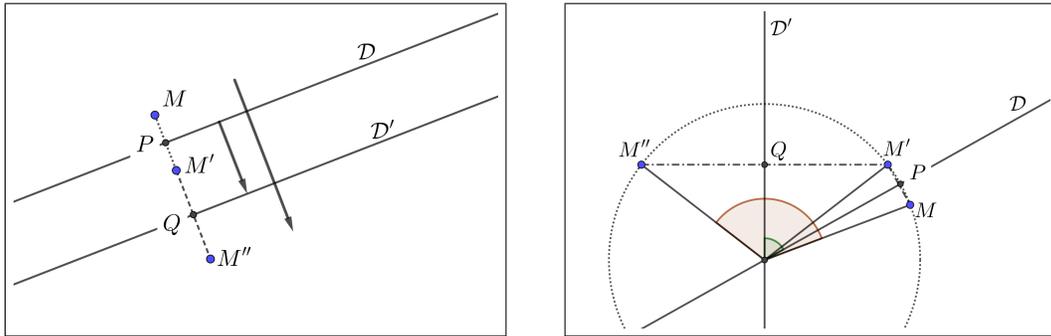
► D'après les résultats d'algèbre linéaire rappelés en 4.2.3a), on vérifie immédiatement que la composée de deux rotations de même centre A et d'angles respectifs θ et θ' est la rotation de centre A et d'angle $\theta + \theta'$. De même, la bijection réciproque de la rotation de centre A et d'angle θ est la rotation de centre A et d'angle $-\theta$.

4.2.4 Proposition (composée de deux réflexions)

- (i) La composée de deux réflexions d'axes strictement parallèles est une translation dont le vecteur est dans la direction orthogonale aux axes.
- (ii) La composée de deux réflexions d'axes sécants est une rotation dont le centre est le point d'intersection des axes.

Plus précisément, pour \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux droites affines distinctes de \mathcal{E} de droites vectorielles directrices Δ et Δ' , on a :

- Si \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont parallèles, alors $\sigma_{\mathcal{D}'} \circ \sigma_{\mathcal{D}}$ est la translation $\tau_{2\vec{u}}$, où \vec{u} est le vecteur orthogonal à Δ dont la norme est égal à la distance entre les deux droites et dont le sens est de \mathcal{D} vers \mathcal{D}' .
- Si \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont sécantes en un point A , $\sigma_{\mathcal{D}'} \circ \sigma_{\mathcal{D}}$ est la rotation $\rho_{A,2\theta}$ de centre A et d'angle 2θ , où θ est l'angle entre les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' , qui est défini modulo π .



Preuve. Soit M un point quelconque de \mathcal{E} . Notons $M' = \sigma_{\mathcal{D}}(M)$ et P le milieu de (M, M') , qui appartient à \mathcal{D} . Notons $M'' = \sigma_{\mathcal{D}'}(M')$ et Q le milieu de (M', M'') , qui appartient à \mathcal{D}' .

On a $\vec{MP} = \vec{PM}'$ et $\vec{M'Q} = \vec{QM}''$, d'où : $\vec{MM}'' = \vec{MP} + \vec{PQ} + \vec{QM}'' = \vec{PM}' + \vec{PQ} + \vec{M'Q} = 2\vec{PQ}$.

Dans la première configuration, le vecteur \vec{PQ} est indépendant du point M ; en posant $\vec{u} = \vec{PQ}$, on obtient le résultat voulu.

Dans la seconde configuration, on a : $(\widehat{AM}, \widehat{AP}) = (\widehat{AP}, \widehat{AM}')$ et $(\widehat{AM}', \widehat{AQ}) = (\widehat{AQ}, \widehat{AM}'')$, d'où :

$$(\widehat{AM}, \widehat{AM}'') = (\widehat{AM}, \widehat{AP}) + (\widehat{AP}, \widehat{AQ}) + (\widehat{AQ}, \widehat{AM}'') = (\widehat{AP}, \widehat{AM}') + (\widehat{AP}, \widehat{AQ}) + (\widehat{AM}', \widehat{AQ}),$$

c'est-à-dire $(\widehat{AM}, \widehat{AM}'') = 2(\widehat{AP}, \widehat{AQ})$, ce qui achève la preuve. \square

► Remarquons que les mêmes calculs permettent de vérifier réciproquement que :

1. Toute translation de \mathcal{E} distincte de $\text{id}_{\mathcal{E}}$ est la composée de deux réflexions dont les axes sont parallèles et de direction orthogonale à la direction du vecteur de la translation, et dont l'un peut être choisi arbitrairement.
2. Toute rotation de \mathcal{E} distincte de $\text{id}_{\mathcal{E}}$ est la composée de deux réflexions dont les axes sont sécants en le centre de la rotation, et dont l'un peut être choisi arbitrairement.

4.2.5 Classification des isométries du plan Le but est de donner une description explicite de toutes les isométries du plan affine euclidien \mathcal{E} . La méthode directe retenue ici repose sur l'utilisation de la forme réduite d'une isométrie affine vue en 4.1.5, qui ramène l'étude des isométries affines du plan \mathcal{E} à celle des isométries vectorielles de E , dont la description algébrique est connue en dimension 2 comme on l'a rappelé ci-dessus.

a) Théorème de classification.

- (i) Les déplacements du plan affine euclidien \mathcal{E} sont les rotations et les translations.
- (ii) Les antidéplacements sont les réflexions et les symétries glissées.

Preuve.

(i) Soit $\varphi \in \text{Is}^+(\mathcal{E})$, d'application linéaire associés $f \in O^+(E)$. Comme on l'a rappelé en 4.2.3.a), il existe $\theta \in \mathbb{R}$ (défini modulo 2π) tel que $f = r_{\theta}$.

Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors $f = r_{\theta} = \text{id}_E$; d'après la proposition 3.3.2, on conclut que $\varphi \in T(\mathcal{E})$.

Supposons maintenant $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Soit $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ un repère orthonormé direct de \mathcal{E} . Soient (α, β) les coordonnées du point $\varphi(O)$. Pour tout $M \in \mathcal{E}$ de coordonnées (x, y) , en notant (x', y') les coordonnées de $\varphi(M)$, on a : $\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)} = f(\overrightarrow{OM}) = r_{\theta}(\overrightarrow{OM})$, donc : $\begin{pmatrix} x' - \alpha \\ y' - \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Dès lors M est un point fixe de φ si et seulement si $\begin{cases} x(1 - \cos \theta) + y \sin \theta = \alpha \\ -x \sin \theta + y(1 - \cos \theta) = \beta \end{cases}$.

Le déterminant de ce système est $(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta$ qui est non-nul puisque $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Le système admet donc une unique solution (x, y) , donc φ a un unique point fixe A . En résumé, φ est une application affine qui fixe un point A et dont l'application linéaire associée est r_{θ} . On conclut que $\varphi = \rho_{A, \theta}$.

(ii) Soit $\varphi \in \text{Is}^-(\mathcal{E})$. D'après le théorème 4.1.5.a), il existe $\tau \in T(\mathcal{E})$ et $\varphi_0 \in \text{Is}(\mathcal{E})$ uniques telles que $\varphi = \tau \circ \varphi_0 = \varphi_0 \circ \tau$ et telles que φ_0 admette des points fixes. Si l'on note \vec{u} le vecteur de τ et V le sous-espace vectoriel de E directeur du sous-espace affine \mathcal{V} des points fixes de φ_0 , on sait d'après 4.1.5.a) que l'on a : $\vec{u} \in V$. Comme $\varphi_0 = \tau^{-1} \circ \varphi$ avec $\varphi \in \text{Is}^-(\mathcal{E})$ et $\tau \in \text{Is}^+(\mathcal{E})$, on a : $\varphi_0 \in \text{Is}^-(\mathcal{E})$.

L'application linéaire associée vérifie donc $f_0 \in O^-(E)$. Comme on l'a rappelé en 4.2.3.a), f_0 est une symétrie orthogonale s_{Δ} par rapport à une droite vectorielle Δ de E . Donc $V = \text{Ker}(f_0 - \text{id}_E) = \Delta$, ce qui prouve que \mathcal{V} est une droite affine \mathcal{D} de \mathcal{E} . En résumé, \mathcal{D} est le sous-espace affine des points fixes de φ_0 et $f_0 = s_{\Delta}$, donc φ_0 est la symétrie affine orthogonale $\sigma_{\mathcal{D}}$ par rapport à \mathcal{D} . \square

b) Corollaire. La classification des isométries du plan affine euclidien \mathcal{E} suivant leurs ensembles de points fixes est donnée par le tableau suivant :

ensemble des points fixes	déplacements	antidéplacements
\mathcal{E}	$\text{id}_{\mathcal{E}}$	—
droite \mathcal{D}	—	réflexion d'axe \mathcal{D}
singleton $\{A\}$	rotation de centre A	—
\emptyset	translation de vecteur non-nul	symétrie glissée de vecteur non-nul

Une conséquence de cette description est que toute isométrie affine du plan peut être obtenue en composant des réflexions affines, ce que formule le corollaire suivant.

c) Corollaire. Les réflexions engendrent le groupe $\text{Is}(\mathcal{E})$ du plan affine euclidien \mathcal{E} .

Plus précisément, tout déplacement de \mathcal{E} est le produit de deux réflexions, et tout antidéplacement de \mathcal{E} est une réflexion ou un produit de trois réflexions.

Preuve. Découle directement du théorème ci-dessus et de la proposition 4.2.4, □

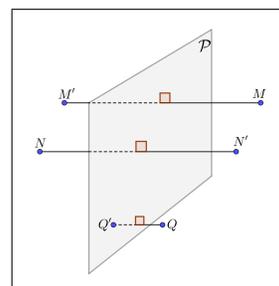
4.3 Isométries affines en dimension 3

On suppose dans cette section que l'espace affine euclidien \mathcal{E} est de dimension 3. On suppose de plus que E est orienté.

4.3.1 Exemples déjà rencontrés.

En appliquant en dimension 3 les résultats généraux de 4.1.3, on connaît déjà comme exemples d'isométries affines :

1. les translations, qui sont des déplacements,
2. les symétries centrales, qui sont des antidéplacements,
3. les réflexions (symétries orthogonales par rapport à un plan affine), qui sont des antidéplacements.



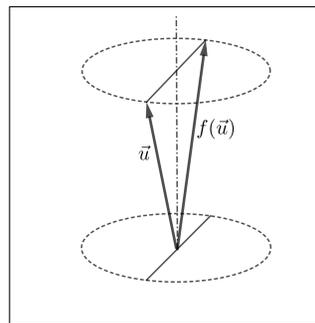
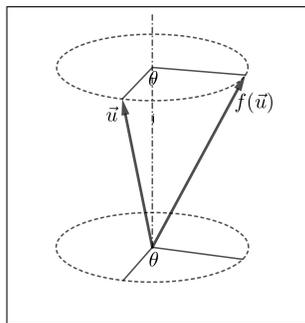
4.3.2 Rotations affines en dimension 3.

a) Rappels d'algèbre linéaire. Les éléments du groupe orthogonal $O(E)$ lorsque E est de dimension 3 sont connus et peuvent être explicitement décrits. On rappelle d'abord ici la forme des éléments du sous-groupe $O^+(E)$.

Pour tout vecteur non-nul $\vec{v} \in E$ et tout réel θ , il existe une isométrie directe f de E telle que la matrice de f dans toute base orthonormale directe \mathcal{B} de E admettant $\vec{v}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v}$ comme premier vecteur est :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Cette isométrie est appelé la *rotation vectorielle d'axe Δ dirigé et orienté par \vec{u} , et d'angle θ* . On la notera $r_{\Delta, \theta}$.



Si l'on considère \vec{v}_2, \vec{v}_3 deux vecteurs tels que $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ constitue une base orthonormale directe \mathcal{B} de E , et si l'on note Δ la droite de base \vec{v}_1 et $H = \Delta^\perp$ le plan de base (\vec{v}_2, \vec{v}_3) , la restriction de $r_{\Delta, \theta}$ à la droite Δ est id_Δ , et la restriction de $r_{\Delta, \theta}$ au plan H est la rotation vectorielle plane d'angle θ .

1. Si $\theta = 0$ modulo 2π , alors $r_{\Delta, \theta}$ est égale à id_E .
2. Si $\theta \neq 0$ modulo 2π , alors Δ est le sous-espace propre associé à la valeur propre 1, c'est-à-dire que les vecteurs fixés par $r_{\Delta, \theta}$ sont exactement les vecteurs de Δ .
3. Dans le cas particulier où $\theta = \pi$ modulo 2π , la rotation $r_{\Delta, \theta}$ n'est autre que la symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ . On dit alors que $r_{\Delta, \pi}$ est le retournement d'axe Δ , ou le demi-tour d'axe Δ .

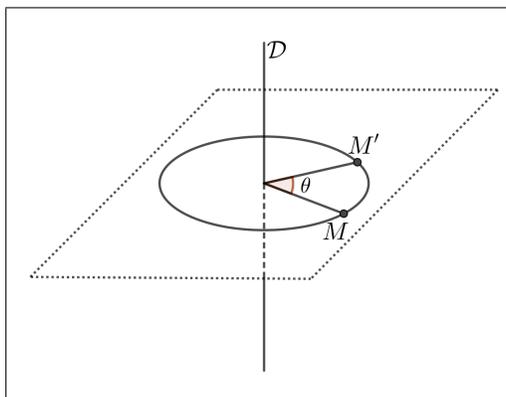
Un résultat fondamental démontré en algèbre linéaire est alors que :

En dimension 3, les éléments de $O^+(E)$ sont les rotations vectorielles.

b) Proposition et définition. Soient \mathcal{D} une droite affine orientée de \mathcal{E} , Δ la droite vectorielle orientée de E directrice de \mathcal{D} , et θ un réel.

- (i) Il existe une unique application affine de \mathcal{E} dans \mathcal{E} qui fixe tous les points de \mathcal{D} et dont l'application linéaire associée est la rotation vectorielle $r_{\Delta, \theta}$ de E . On l'appelle *rotation affine d'axe \mathcal{D} et d'angle θ* , notée $\rho_{\mathcal{D}, \theta}$.
- (ii) L'ensemble des points fixes de $\rho_{\mathcal{D}, \theta}$ est \mathcal{D} dès lors que θ est non-nul (modulo 2π).

Preuve. Le point (i) est la simple application du théorème 3.1.2. Le point (ii) résulte de la proposition 3.1.7 puisque $\text{Ker}(r_{\Delta, \theta} - \text{id}_E) = \Delta$ si θ est non-nul (modulo 2π). □



c) Proposition. Toute rotation affine $\rho_{\mathcal{D}, \theta}$ est une isométrie, et plus spécifiquement un déplacement de \mathcal{E} .

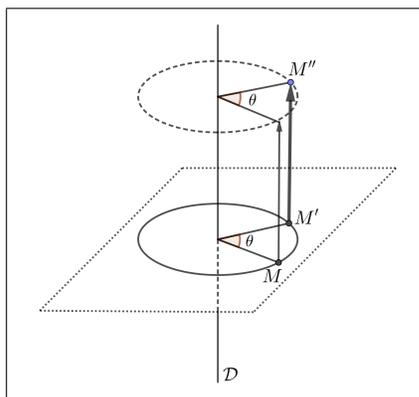
Preuve. Evident d'après 4.1.1.b et 4.1.2 puisque les rotations vectorielles sont des éléments de $O^+(E)$. □

► Dans le cas particulier où $\theta = \pi$ modulo 2π , la rotation $\rho_{\mathcal{D}, \theta}$ est égale à la symétrie orthogonale par rapport à \mathcal{D} .

Dans le cas particulier où $\theta = 0$ modulo 2π , la rotation $\rho_{\mathcal{D}, \theta}$ est égale à $\text{id}_\mathcal{E}$ pour toute droite affine \mathcal{D} de \mathcal{E} .

4.3.3 Groupe des déplacements en dimension 3.

a) Définition (notion de vissage). Pour toute droite affine orientée \mathcal{D} de \mathcal{E} et tout $\theta \in \mathbb{R}$, on appelle *vissage* de \mathcal{E} tout produit d'une rotation $\rho_{\mathcal{D},\theta}$ au sens précédent par une translation $\tau_{\vec{u}}$ telle que le vecteur \vec{u} de translation appartienne à la direction Δ de l'axe \mathcal{D} .



Il est clair que :

1. une rotation est un vissage dont le vecteur est nul,
2. une translation est un vissage dont l'angle est nul (modulo 2π),

et l'on vérifie aisément que :

1. un vissage est un déplacement de \mathcal{E} ,
2. un vissage qui n'est pas une rotation n'admet aucun point fixe.

b) Théorème. Le groupe $\text{Is}^+(\mathcal{E})$ des déplacements de l'espace affine euclidien \mathcal{E} de dimension 3 est formé par les vissages.

Preuve. Tout vissage étant produit de $\tau_{\vec{u}} \in \text{Is}^+(\mathcal{E})$ par $\rho_{\mathcal{D},\theta} \in \text{Is}^+(\mathcal{E})$, il est clair que les vissages sont des déplacements.

Réciproquement soit $\varphi \in \text{Is}^+(\mathcal{E})$. D'après le théorème 4.1.5.a), il existe $\tau \in T(\mathcal{E})$ et $\varphi_0 \in \text{Is}(\mathcal{E})$ uniques telles que $\varphi = \tau \circ \varphi_0 = \varphi_0 \circ \tau$ et telles que φ_0 admette des points fixes.

Comme $\varphi \in \text{Is}^+(\mathcal{E})$ et $\tau \in \text{Is}^+(\mathcal{E})$, on a $\varphi_0 \in \text{Is}^+(\mathcal{E})$, et donc l'application linéaire associée vérifie $f_0 \in O^+(E)$. D'après 4.3.2.a), f_0 est une rotation de E ; notons $f_0 = r_{\Delta,\theta}$.

• Dans le cas particulier où $f_0 = \text{id}_E$, il résulte de la proposition 3.3.2 que φ_0 est une translation de \mathcal{E} ; comme φ_0 admet des points fixes, on a nécessairement $\varphi_0 = \text{id}_{\mathcal{E}}$. Dans ce cas $\varphi = \tau$ est une translation, donc un vissage.

• Si $f_0 \neq \text{id}_E$, il existe une droite vectorielle orientée Δ et un réel $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ tels que $f_0 = r_{\Delta,\theta}$. Comme l'ensemble \mathcal{V}_0 des points fixes de φ_0 est supposé non-vidé, il résulte de la proposition 3.1.7 que \mathcal{V}_0 est un sous-espace affine de \mathcal{E} dirigé par $\text{Ker}(f_0 - \text{id}_E) = \Delta$. Donc \mathcal{V}_0 est une droite affine \mathcal{D} dirigée par Δ . On conclut avec la définition 4.3.2.b) que φ_0 est la rotation affine d'axe \mathcal{D} et d'angle θ .

Enfin, le fait que $\tau \circ \varphi_0 = \varphi_0 \circ \tau$ implique (toujours d'après le théorème 4.1.5 que le vecteur \vec{u} de τ appartient à Δ , de sorte que φ est bien un vissage. \square

4.3.4 Ensemble des antidéplacements en dimension 3.

a) Théorème (description des antidéplacements). L'ensemble $\text{Is}^-(\mathcal{E})$ des antidéplacements de l'espace affine euclidien \mathcal{E} de dimension 3 est formé par :

1. les réflexions (symétries orthogonales par rapport à un plan affine),
2. les composées d'une réflexion avec une rotation dont l'axe est une droite perpendiculaire au plan de la réflexion,
3. les composées d'une réflexion avec une translation dont le vecteur appartient au plan vectoriel directeur du plan de la réflexion (symétrie glissée).

b) Proposition (composée de deux réflexions). Soient σ et σ' deux réflexions par rapport à des plans affines \mathcal{P} et \mathcal{P}' respectivement.

- (i) Si \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont parallèles, on a : $\sigma' \circ \sigma = \tau_{2\vec{u}}$, où \vec{u} est le vecteur orthogonal à la direction commune de \mathcal{P} et \mathcal{P}' tel que $\mathcal{P}' = \tau_{\vec{u}}(\mathcal{P})$.
- (ii) Si \mathcal{P} et \mathcal{P}' ne sont pas parallèles, on a : $\sigma' \circ \sigma = \rho_{\mathcal{D}, 2\theta}$, où \mathcal{D} est la droite $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ et où θ est défini (modulo π) comme l'angle des deux plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' .

c) Corollaire (engendrement par les réflexions). Les réflexions engendrent le groupe $\text{Is}(\mathcal{E})$ de l'espace affine euclidien \mathcal{E} de dimension 3.

Plus précisément, tout déplacement de \mathcal{E} est le produit de deux ou quatre réflexions, et tout antidéplacement de \mathcal{E} est une réflexion ou un produit de trois réflexions.

Les preuves de ces résultats (qui sont des analogues en dimension 3 de ceux qui ont été établis en dimension 2 dans la partie 4.2) ne sont pas démontrés dans ces notes de cours, mais pourront faire l'objet d'exercice en travaux dirigés.

COMPLEMENT 1 : une précision intéressante sur la notion d'isométrie affine

On montre ici que, comme on l'a annoncé en remarque après la définition 4.1.1.a), une application $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ qui conserve les distances est nécessairement affine, et donc est une isométrie affine. En d'autres termes l'hypothèse " φ affine" peut être enlevée de la définition a).

On se donne donc une application $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ qui conserve la distance.

Cela se traduit par le fait que $\|\overrightarrow{\varphi(M)\varphi(N)}\| = \|\overrightarrow{MN}\|$ pour tous points $M, N \in \mathcal{E}$.

Fixons un point O de \mathcal{E} et considérons l'application $f : E \rightarrow E$ qui, à tout vecteur \vec{u} , associe le vecteur $\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)}$ où M est l'unique point de \mathcal{E} tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$.

• *Première étape* : on montre que f conserve le produit scalaire dans E .

Pour cela, soient \vec{u}, \vec{v} quelconques de E . Les points $M = O + \vec{u}$ et $N = O + \vec{v}$ vérifient $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$. En utilisant une des identités de polarisation classiques, on calcule :

$$\begin{aligned} 2f(\vec{u}).f(\vec{v}) &= \|f(\vec{u})\|^2 + \|f(\vec{v})\|^2 - \|f(\vec{u}) - f(\vec{v})\|^2 \\ &= \|\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)}\|^2 + \|\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(N)}\|^2 - \|\overrightarrow{\varphi(N)\varphi(M)}\|^2 \\ &= \|\overrightarrow{OM}\|^2 + \|\overrightarrow{ON}\|^2 - \|\overrightarrow{NM}\|^2 \quad \text{parce que } \varphi \text{ est une isométrie affine de } \mathcal{E} \\ &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\vec{u}.\vec{v}. \end{aligned}$$

• *Deuxième étape* : on montre que f est linéaire.

Pour cela, soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs quelconques de E et $\lambda \in \mathbb{R}$. En utilisant les propriétés du produit scalaire, ainsi que le fait que f conserve le produit scalaire (et donc la norme), on calcule :

$$\begin{aligned} \|f(\vec{u} + \lambda\vec{v}) - f(\vec{u}) - \lambda f(\vec{v})\|^2 &= \|f(\vec{u} + \lambda\vec{v})\|^2 + \|f(\vec{u})\|^2 + \lambda^2\|f(\vec{v})\|^2 \\ &\quad - 2f(\vec{u} + \lambda\vec{v}).f(\vec{u}) - 2\lambda f(\vec{u} + \lambda\vec{v}).f(\vec{v}) + 2\lambda f(\vec{u}).f(\vec{v}) \\ &= \|\vec{u} + \lambda\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 + \lambda^2\|\vec{v}\|^2 \\ &\quad - 2(\vec{u} + \lambda\vec{v}).\vec{u} - 2\lambda(\vec{u} + \lambda\vec{v}).\vec{v} + 2\lambda\vec{u}.\vec{v} \\ &= \|(\vec{u} + \lambda\vec{v}) - \lambda\vec{u} - \lambda\vec{v}\|^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ceci prouve que $f(\vec{u} + \lambda\vec{v}) = f(\vec{u}) + \lambda f(\vec{v})$ pour tous \vec{u}, \vec{v} dans E et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, et donc que f est une application linéaire.

• *Troisième étape* : on montre que f est bijective.

Soit $\vec{u} \in \text{Ker } f$, on a $f(\vec{u}) = \vec{0}$, donc $\|f(\vec{u})\| = 0$, d'où $\|\vec{u}\| = 0$ puisque f conserve la norme, et finalement $\vec{u} = \vec{0}$. Ceci prouve que f est injective. Parce que f est un endomorphisme de E qui est de dimension finie, on conclut que f est bijective. En résumé, f est une application linéaire bijective de E sur E qui conserve le produit scalaire, c'est-à-dire une isométrie vectorielle de E .

• *Conclusion*. On a ainsi construit une application linéaire $f : E \rightarrow E$ qui est une isométrie vectorielle et qui par définition vérifie $f(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)}$ pour tout $M \in \mathcal{E}$. Donc pour tous $M, N \in \mathcal{E}$, on a :

$$f(\overrightarrow{MN}) = f(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}) = f(\overrightarrow{ON}) - f(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(N)} - \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)} = \overrightarrow{\varphi(M)\varphi(N)}$$

ce qui prouve que φ est une application affine d'application linéaire associée f . □

COMPLEMENT 2 : une autre preuve de la classification des isométries du plan

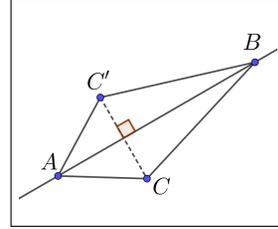
On donne ici une autre méthode pour prouver le théorème 4.2.5, plus élémentaire, fondée sur la détermination effective des points fixes.

a) Lemme. Si φ est une isométrie affine de \mathcal{E} qui fixe trois points non alignés, alors $\varphi = \text{id}_{\mathcal{E}}$.

Preuve. C'est vrai pour toute application affine de \mathcal{E} dans \mathcal{E} comme on l'a vu en 3.1.8.b.(2). □

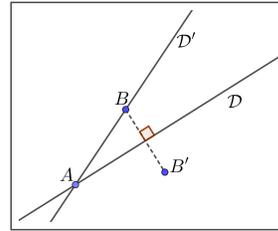
b) Lemme. Si φ est une isométrie affine de \mathcal{E} distincte de $\text{id}_{\mathcal{E}}$ qui fixe au moins deux points distincts A et B , alors φ est la réflexion d'axe (AB) .

Preuve. Soit C un point de \mathcal{E} n'appartenant pas à la droite (AB) . Notons $C' = \varphi(C)$. Comme φ est une isométrie, on a $d(A, C) = d(\varphi(A), \varphi(C)) = d(A, C')$ et de même $d(B, C) = d(B, C')$. Donc la droite (AB) est la médiatrice de (C, C') . Il en résulte que, si l'on note σ la réflexion d'axe (AB) , on a $\sigma(C) = C'$. Posons $\psi = \sigma \circ \varphi$, qui est une isométrie de \mathcal{E} comme composée de deux isométries. On a : $\psi(A) = \sigma(A) = A$, $\psi(B) = \sigma(B) = B$ et $\psi(C) = \sigma(C') = C$. On applique le lemme 1 pour conclure que $\psi = \text{id}_{\mathcal{E}}$, et donc $\varphi = \sigma$. □



c) Lemme. Si φ est une isométrie affine de \mathcal{E} qui fixe un unique point A , alors φ est une rotation de centre A .

Preuve. Soit B un point de \mathcal{E} distinct de A . Posons $B' = \varphi(B)$, qui est donc distinct de B et considérons la médiatrice \mathcal{D} de (B, B') . On a $d(A, B) = d(\varphi(A), \varphi(B)) = d(A, B')$, d'où $A \in \mathcal{D}$. Si l'on note σ la réflexion d'axe \mathcal{D} et $\psi = \sigma \circ \varphi$, on a donc $\psi(A) = \sigma(A) = A$ et $\psi(B) = \sigma(B') = B$. Ainsi, ψ fixe au moins deux points distincts. D'après les deux lemmes précédents, deux cas seulement peuvent se présenter : le cas $\psi = \text{id}_{\mathcal{E}}$ est impossible car on aurait alors $\varphi = \sigma$ ce qui contredit l'hypothèse que φ n'a qu'un seul point fixe ; on est donc forcément dans le cas où ψ est la réflexion σ' d'axe $\mathcal{D}' = (AB)$. On en déduit que $\varphi = \sigma \circ \sigma'$, et comme les axes \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont sécants en A , on conclut avec 4.2.4 que φ est une rotation de centre A . □

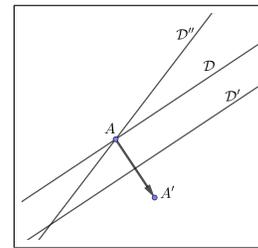


d) Lemme. Si φ est une isométrie affine de \mathcal{E} qui ne fixe aucun point de \mathcal{E} , alors φ est une translation ou une symétrie glissée de vecteur non-nul.

Preuve. Soit A un point quelconque de \mathcal{E} . On a $A' = \varphi(A) \neq A$, donc le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{A'A}$ est non-nul. La translation τ de vecteur \vec{u} vérifie $\tau(A') = A$ donc l'isométrie $\psi = \tau \circ \varphi$ vérifie $\psi(A) = A$. Elle satisfait donc aux hypothèses de l'un des trois lemmes précédent.

• Dans le cas où $\psi = \text{id}_{\mathcal{E}}$, on conclut que $\varphi = \tau^{-1}$ est une translation.

• Le cas où ψ est une rotation ρ de centre A conduit à $\varphi = \tau^{-1} \circ \rho$. Soit alors \mathcal{D} la droite affine passant par A et de direction orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AA'}$ de la translation τ^{-1} . D'après la première des remarques de la fin de 4.2.4, il existe d'une part une droite \mathcal{D}' parallèle à \mathcal{D} telle que $\tau^{-1} = \sigma_{\mathcal{D}'} \circ \sigma_{\mathcal{D}}$ et d'autre part une droite \mathcal{D}'' sécante à \mathcal{D} en A telle que $\rho = \sigma_{\mathcal{D}} \circ \sigma_{\mathcal{D}''}$. On conclut que $\varphi = \sigma_{\mathcal{D}'} \circ \sigma_{\mathcal{D}} \circ \sigma_{\mathcal{D}} \circ \sigma_{\mathcal{D}''} = \sigma_{\mathcal{D}'} \circ \sigma_{\mathcal{D}''}$ qui est une rotation puisque par construction \mathcal{D}' et \mathcal{D}'' sont sécantes. Ceci contredisant le fait que φ est sans point fixe, ce cas est impossible.



• Reste le cas où ψ est une réflexion σ d'axe \mathcal{D} passant par A . On a donc $\varphi = \tau^{-1} \circ \sigma_{\mathcal{D}}$. Décomposons le vecteur $-\vec{u}$ de la translation τ^{-1} sous la forme $-\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ avec $\vec{v} \in \Delta$ et $\vec{w} \in \Delta^{\perp}$, où Δ désigne la droite vectorielle de E dirigeant \mathcal{D} . Comme \vec{w} est orthogonal à Δ , il existe d'après la première des remarques de la fin de 4.2.4 une droite \mathcal{D}' parallèle à \mathcal{D} telle que $\tau_{\vec{w}} = \sigma_{\mathcal{D}'} \circ \sigma_{\mathcal{D}}$. Ainsi $\varphi = \tau_{-\vec{u}} \circ \sigma_{\mathcal{D}} = \tau_{\vec{v}} \circ \tau_{\vec{w}} \circ \sigma_{\mathcal{D}} = \tau_{\vec{v}} \circ \sigma_{\mathcal{D}'} \circ \sigma_{\mathcal{D}} \circ \sigma_{\mathcal{D}} = \tau_{\vec{v}} \circ \sigma_{\mathcal{D}'}$ ce qui, puisque \vec{v} appartient à la direction Δ de \mathcal{D}' (rappelons que les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont parallèles), montre que φ est une symétrie glissée. □

5 – Barycentres

Dans tout le chapitre, on fixe \mathcal{E} un espace affine sur \mathbb{R} , d'espace vectoriel directeur E .

5.1 Notion de barycentre.

La notion de barycentre d'une famille de points est un outil essentiel du travail dans les espaces affines, dont le rôle est comparable à celui de combinaison linéaire d'une famille de vecteurs dans le cadre des espaces vectoriels.

5.1.1 Théorème et définition. Soit $\mathcal{A} = (A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ famille finie de *points pondérés*, où chaque A_i est un point de \mathcal{E} et chaque α_i est un réel, appelé le *poids* ou la *masse* affecté à A_i .

On note $\sigma = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ la somme des poids, appelée la masse totale de la famille.

Si $\sigma \neq 0$, alors il existe un unique point G de \mathcal{E} vérifiant l'une des conditions suivantes équivalentes :

- (1) $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$;
- (2) il existe un point $M_0 \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{M_0G} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{M_0A_i}$;
- (3) pour tout point $M \in \mathcal{E}$, on a $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$.

Ce point G est appelé le *barycentre* de la famille de points pondérés $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$. On le note :

$$G = \text{Bar}(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \quad \text{ou} \quad G = \text{Bar} \begin{pmatrix} A_1, & \dots & A_i, & \dots & A_n \\ \alpha_1, & \dots & \alpha_i, & \dots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

Preuve. Soit f l'application $\mathcal{E} \rightarrow E$ définie par $f(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ pour tout $M \in \mathcal{E}$. Pour $M, N \in \mathcal{E}$, on a $f(M) - f(N) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i} - \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{NA_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{MA_i} + \overrightarrow{A_iN}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MN}$. On retient :

$$\text{pour tous } M, N \in \mathcal{E}, \quad f(M) - f(N) = \sigma \overrightarrow{MN}. \quad (*)$$

Il en résulte que f est injective (en effet $f(M) = f(N) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{\sigma}(f(M) - f(N)) = \vec{0} \Rightarrow M = N$).

• On montre que les 3 assertions sont équivalentes. Si G vérifie (i), on a $f(G) = \vec{0}$; d'après (*) on a alors $f(M) = f(G) + \sigma \overrightarrow{MG} = \sigma \overrightarrow{MG}$ pour tout $M \in \mathcal{E}$, donc (iii) est vérifié. Il est clair que (iii) \Rightarrow (ii). Enfin, si G vérifie (ii), on a d'après (*) : $f(G) = f(M_0) + \sigma \overrightarrow{GM_0} = \sigma \overrightarrow{M_0G} + \sigma \overrightarrow{GM_0} = \vec{0}$.

• On montre l'existence de G . Soit $A \in \mathcal{E}$ quelconque ; alors pour le vecteur $\frac{1}{\sigma} f(A) \in E$, il existe $G \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{\sigma} f(A)$. En utilisant (*), il vient : $f(G) = f(A) + \sigma \overrightarrow{GA} = \sigma \overrightarrow{AG} + \sigma \overrightarrow{GA} = \vec{0}$.

• On montre l'unicité de G . Si G' est un autre point de \mathcal{E} vérifiant (i), on a $f(G) = \vec{0} = f(G')$, d'où $G = G'$ par injectivité de f . \square

► Un cas particulier important est celui où les masses sont toutes égales à 1 : on appelle *isobarycentre* d'une famille de points A_1, \dots, A_n de \mathcal{E} le barycentre $G = \text{Bar}(A_i, 1)_{1 \leq i \leq n}$. Il est donc défini par :

$$\boxed{\sum_{i=1}^n \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{\overrightarrow{MG} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \overrightarrow{MA_i} \text{ pour tout } M \in \mathcal{E}.}$$

L'isobarycentre de 2 points A et B n'est autre que leur milieu, défini par $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

5.1.2 Proposition (homogénéité du barycentre) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\text{Bar}(A_i, \lambda\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} = \text{Bar}(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}.$$

Donc, quitte à multiplier chaque poids par $\frac{1}{\sigma}$, on peut toujours supposer que $\sigma = 1$.

Preuve. Découle directement de la caractérisation (1) dans le théorème 5.1.1. □

La propriété suivante, évidente mais précieuse sur le plan pratique, indique que l'on peut regrouper les points par paquets, et que le barycentre global est alors le barycentre des barycentres partiels, affectés des sommes partielles des masses correspondantes.

5.1.3 Proposition (associativité du barycentre). Soit $\mathcal{A} = (A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie de points pondérés de masse totale $\sum_{i=1}^n \alpha_i$ non-nulle. Notons G son barycentre.

On suppose que, pour un entier $1 \leq p < n$, on ait $\sum_{i=1}^p \alpha_i \neq 0$, et on considère le barycentre partiel $G' = \text{Bar} \left(\begin{matrix} A_1, & A_2, & \dots & A_p \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \dots & \alpha_p \end{matrix} \right)$. Alors :

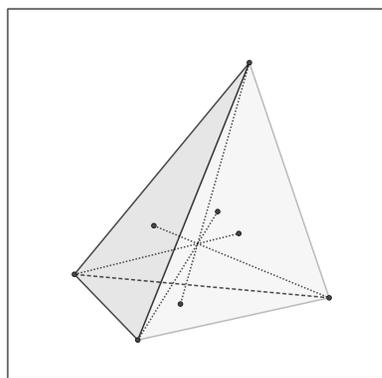
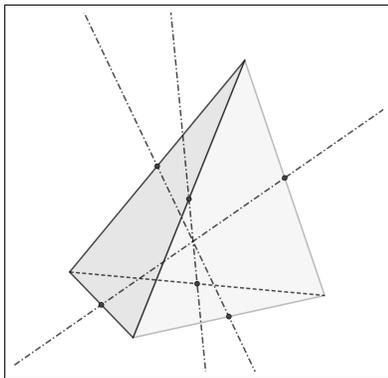
$$G = \text{Bar} \left(\begin{matrix} A_1, & \dots & A_p, & A_{p+1}, & \dots & A_n \\ \alpha_1, & \dots & \alpha_p, & \alpha_{p+1} & \dots & \alpha_n \end{matrix} \right) = \text{Bar} \left(\begin{matrix} G', & & A_{p+1}, & \dots & A_n \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_p, & & \alpha_{p+1} & \dots & \alpha_n \end{matrix} \right).$$

Preuve. On a : $\vec{0} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{GA}_i = \sum_{i=1}^p \alpha_i \vec{GA}_i + \sum_{i=p+1}^n \alpha_i \vec{GA}_i = \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i \right) \vec{GG'} + \sum_{i=p+1}^n \alpha_i \vec{GA}_i$ □

► **Exemple d'application en géométrie plane.** Dans \mathcal{E} supposé de dimension ≥ 2 , soient A, B, C trois points non alignés, et I, J, K les milieux respectifs de (A, B) , (B, C) et (C, A) . Par associativité, l'isobarycentre du triangle (A, B, C) est $G = \text{Bar} \left(\begin{matrix} A, B, C \\ 1, 1, 1 \end{matrix} \right) = \text{Bar} \left(\begin{matrix} I, C \\ 2, 1 \end{matrix} \right)$, de sorte que $\vec{CG} = 2\vec{GI}$, d'où $G \in (CI)$. De même $G \in (AJ)$ et $G \in (BK)$. On obtient ainsi une nouvelle preuve du résultat suivant déjà démontré en 2.4.b) :

les trois médianes d'un triangle se coupent en l'isobarycentre (ou centre de gravité) du triangle, situé au tiers de chacune d'elles à partir du côté.

► **Exercice.** De même montrer que, dans \mathcal{E} supposé de dimension ≥ 3 , pour A, B, C, D quatre points non coplanaires, les 3 droites passant par le milieu d'une des 6 arêtes du tétraèdre et le milieu de l'arête opposée se coupent en l'isobarycentre G du tétraèdre. Montrer que G est aussi le point de concurrence des quatre droites joignant chaque sommet au centre de gravité du triangle opposé.



5.1.4 Trois arguments généraux concernant les barycentres.

a) Proposition (applications affines et barycentres). Une application $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ est affine si et seulement si elle vérifie la propriété suivante : pour toute famille $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ de points pondérés de \mathcal{E} admettant un barycentre G , le point $\varphi(G)$ est le barycentre de la famille $(\varphi(A_i), \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Preuve. Supposons φ affine et notons $f : E \rightarrow E$ l'application linéaire associée à φ . Soit $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille de points pondérés de \mathcal{E} avec $\sigma = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \neq 0$, et soit G son barycentre.

Pour tout $M \in \mathcal{E}$, on a $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ donc $f(\overrightarrow{MG}) = f(\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}) = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \alpha_i f(\overrightarrow{MA_i})$, c'est-à-dire : $\overrightarrow{\varphi(M)\varphi(G)} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{\varphi(M)\varphi(A_i)}$. Donc $\varphi(G)$ est bien le barycentre de la famille image.

Réciproquement supposons que φ conserve les barycentres. Fixons A un point de \mathcal{E} . Pour tout $\vec{u} \in E$, il existe $M \in \mathcal{E}$ unique tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$. Posons alors $f(\vec{u}) = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(M)}$. On définit ainsi une application $f : E \rightarrow E$; il s'agit de montrer qu'elle est linéaire.

Soient donc $\vec{u}, \vec{v} \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Il existe $M, N \in \mathcal{E}$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AN}$. En appliquant l'hypothèse que φ conserve les barycentres, on peut considérer :

$$G = \text{Bar} \left(\begin{array}{c} A, M, N \\ 1-\lambda-\mu, \lambda, \mu \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \varphi(G) = \text{Bar} \left(\begin{array}{c} \varphi(A), \varphi(M), \varphi(N) \\ 1-\lambda-\mu, \lambda, \mu \end{array} \right)$$

D'une part $\overrightarrow{AG} = (1-\lambda-\mu)\overrightarrow{AA} + \lambda\overrightarrow{AM} + \mu\overrightarrow{AN} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, ce qui implique par définition de f que : $f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(G)}$.

D'autre part, $\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(G)} = (1-\lambda-\mu)\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(A)} + \lambda\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(M)} + \mu\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(N)} = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$.

On a ainsi vérifié que $f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$. \square

On obtient ainsi une caractérisation en terme de barycentre de la notion d'application affine, que l'on peut résumer en disant que :

une application $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ est affine si et seulement si elle conserve les barycentres.

b) Proposition (sous-espaces affines et barycentres). Soit \mathcal{F} une partie non-vide de \mathcal{E} . Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) \mathcal{F} est un sous-espace affine de \mathcal{E} ;
- (ii) le barycentre de toute famille finie de points pondérés de \mathcal{F} appartient encore à \mathcal{F} .

Preuve. Supposons (i). Notons F le sous-espace vectoriel directeur de \mathcal{F} . Soit $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie de points pondérés dans \mathcal{F} telle que $\sigma = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \neq 0$. Le barycentre G des (A_i, α_i) vérifie $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ pour tout $M \in \mathcal{E}$. Si $M \in \mathcal{F}$, on a $\overrightarrow{MA_i} \in F$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Donc \overrightarrow{MG} étant combinaison linéaire des $\overrightarrow{MA_i}$, on a $\overrightarrow{MG} \in F$. Comme $M \in \mathcal{F}$, ceci implique que $G \in \mathcal{F}$.

Supposons (ii). Choisissons $A \in \mathcal{F}$. Il s'agit de montrer que $F := \{\overrightarrow{AM}; M \in \mathcal{F}\}$ est un sous-espace vectoriel de E . Pour cela, considérons $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN} \in F$ quelconques, avec $M, N \in \mathcal{F}$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Soit G le barycentre de (A, M, N) affectés des coefficients $(1-\alpha-\beta, \alpha, \beta)$, dont la somme est non-nulle. D'après l'hypothèse (ii), $G \in \mathcal{F}$. Par définition du barycentre, $\overrightarrow{AG} = \alpha\overrightarrow{AM} + \beta\overrightarrow{AN}$. Mais $\overrightarrow{AG} \in F$ puisque $G \in \mathcal{F}$. On a ainsi vérifié que : $\alpha\overrightarrow{AM} + \beta\overrightarrow{AN} \in F$, ce qui prouve que F est un sous-espace vectoriel de E , et donc que \mathcal{F} est un sous-espace affine de \mathcal{E} . \square

On résume cette caractérisation des sous-espaces affines en disant que :

une partie de \mathcal{E} est sous-espace affine si et seulement si elle est stable par barycentres.

c) Proposition (base affine et barycentres). Soit $\mathcal{X} = (A_0, A_1, \dots, A_p)$ une famille affinement libre de points de \mathcal{E} . Soit \mathcal{F} le sous-espace affine de \mathcal{E} engendré par \mathcal{X} . Alors :

pour tout $M \in \mathcal{F}$, il existe $(\alpha_0, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ unique tels que $\sum_{i=0}^p \alpha_i = 1$ et $M = \text{Bar}(A_i, \alpha_i)_{0 \leq i \leq p}$.

Preuve. Comme on l'a vu au chapitre 4, \mathcal{X} est une base affine de \mathcal{F} , et $X = \{\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0A_p}\}$ est une base du sous-espace vectoriel F de E directeur de \mathcal{F} . Soit $M \in \mathcal{F}$. Donc $\overrightarrow{A_0M} \in F$. Soient $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ les composantes de $\overrightarrow{A_0M}$ dans la base X . Soit $\alpha_0 = 1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i$. On a $\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=0}^p \alpha_i \overrightarrow{A_0A_i}$ et $\sum_{i=0}^p \alpha_i = 1$. L'unicité des α_i résulte de la liberté de X . \square

La base affine \mathcal{X} de \mathcal{F} est parfois appelé un *repère barycentrique* de \mathcal{F} , et les réels $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p)$ sont appelés les *coordonnées barycentriques* du point M de \mathcal{F} relativement à \mathcal{X} .

Par exemple, l'isobarycentre G d'un triangle (A, B, C) a pour coordonnées barycentriques $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ dans la famille affinement libre (A, B, C) . De nombreux exercices de géométrie affine se résolvent d'autant plus simplement que l'on choisit un repère barycentrique bien adapté au problème.

5.2 Exemples d'applications en géométrie plane élémentaire

On a déjà vu certaines applications concernant les centres de gravité en 5.1.3.

5.2.1 Construction du barycentre de deux points à la règle et au compas. On se place dans un plan affine \mathcal{E} . On se donne deux points distincts A et B . On note $G = \text{Bar}\left(\begin{smallmatrix} A, B \\ 2, 5 \end{smallmatrix}\right)$. Comment construire G à la règle et au compas (ie. sans utiliser de règle graduée) ?

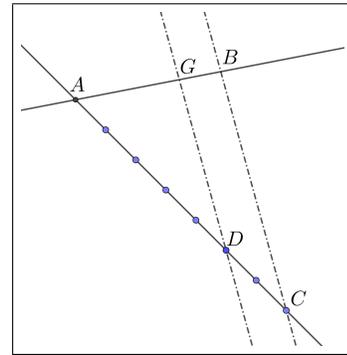
Une méthode est la suivante. On trace une droite quelconque \mathcal{D} passant par A . On prend un écartement quelconque du compas et on reporte la distance correspondante sur \mathcal{D} à partir de A . On note D le point obtenu après 5 reports et C le point obtenu après 7 reports.

On a donc $D = \text{Bar}\left(\begin{smallmatrix} A, C \\ 2, 5 \end{smallmatrix}\right)$.

On peut considérer la projection affine π de \mathcal{D} sur (AB) parallèlement à (BC) . On a $\pi(A) = A$ et $\pi(C) = B$.

Comme π est une application affine, elle conserve les barycentres (voir 5.1.4.c), donc $\text{Bar}\left(\begin{smallmatrix} A, B \\ 2, 5 \end{smallmatrix}\right) = \text{Bar}\left(\begin{smallmatrix} \pi(A), \pi(C) \\ 2, 5 \end{smallmatrix}\right)$, c'est-à-dire que $G = \pi(D)$.

Le point G cherché est donc le point d'intersection de la droite (AB) et de la droite parallèle à (BC) passant par D (construction qui est possible à la règle et au compas).



5.2.2 Exemple de problème de ligne de niveau. On fixe deux points distincts A et B dans le plan \mathcal{E} distincts. Pour tout réel k , on cherche à déterminer l'ensemble :

$$\mathcal{E}_k = \{M \in \mathcal{E}; M \neq B \text{ et } \frac{AM}{BM} = k\}.$$

a) Il est clair que si $k < 0$, alors $\mathcal{E}_k = \emptyset$, et que si $k = 0$, alors $\mathcal{E}_k = \{A\}$.

b) On a déjà vu en 1.4.7 que, si $k = 1$, alors \mathcal{E}_k est la médiatrice de $[A, B]$.

c) Enfin, si $k > 0$ et $k \neq 1$, alors \mathcal{E}_k est le cercle de diamètre $[I, J]$ où I et J sont les barycentres de A et B respectivement affectés des coefficients $(1, -k)$ et $(1, k)$.

En effet. Fixons $k \in \mathbb{R}_+$ distinct de 0 et 1. On a pour tout point M de \mathcal{E} :

$$[M \in \mathcal{E}_k] \Leftrightarrow [MA = kMB] \Leftrightarrow [MA^2 - k^2MB^2 = 0] \Leftrightarrow [(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) = 0]$$

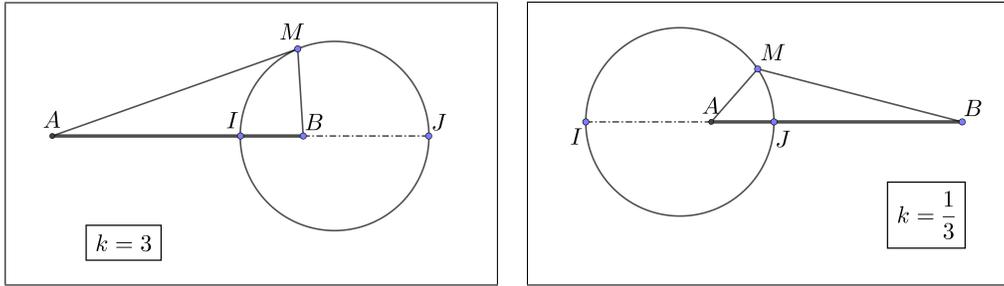
Or par définition de I et J (qui sont bien définis puisque $k + 1 \neq 0$ et $k - 1 \neq 0$) on a :

$$\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB} = (1 - k)\overrightarrow{MI} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} = (1 + k)\overrightarrow{MJ}.$$

D'où, en utilisant encore que $k \neq \pm 1$:

$$[M \in \mathcal{E}_k] \Leftrightarrow [(1 - k^2)\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0] \Leftrightarrow [\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0].$$

Or on a vu en 1.4.5 que l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$ est le cercle de diamètre $[I, J]$. \square



5.2.3 Une preuve du théorème de Ceva. Soit \mathcal{E} un plan affine. Soit ABC un triangle dans \mathcal{E} . Soit M un point de \mathcal{E} n'appartenant à aucun des côtés ni à aucune des droites passant par un sommet et parallèles au côté opposé. Les droites (AM) , (BM) et (CM) coupent les côtés (BC) , (CA) et (AB) en trois points A' , B' et C' respectivement. On a alors :

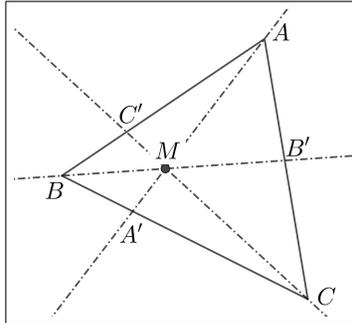
$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

Preuve. Puisque les trois points A, B, C sont non alignés, il existe des réels α, β, γ avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ tels que $M = \text{Bar} \left(\begin{smallmatrix} A, B, C \\ \alpha, \beta, \gamma \end{smallmatrix} \right)$, ou encore $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Parce que M n'appartient à aucun des trois côtés du triangle, les réels α, β, γ sont non-nuls. Parce que les droites (AM) et (BC) ne sont pas parallèles, on a $\beta + \gamma \neq 0$. On peut alors considérer le barycentre partiel $A_1 = \text{Bar} \left(\begin{smallmatrix} B, C \\ \beta, \gamma \end{smallmatrix} \right)$, qui appartient à (BC) . Par associativité du barycentre, on a : $M = \text{Bar} \left(\begin{smallmatrix} A, B, C \\ \alpha, \beta, \gamma \end{smallmatrix} \right) = \text{Bar} \left(\begin{smallmatrix} A, A_1 \\ \alpha, \beta + \gamma \end{smallmatrix} \right)$. Il en résulte que $M \in (AA_1)$, ou encore $A_1 \in (AM)$.

Ainsi $A_1 \in (BC) \cap (AM)$ d'où $A_1 = A'$. L'égalité $\beta\overrightarrow{A_1B} + \gamma\overrightarrow{A_1C} = \vec{0}$ devient alors $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\frac{\gamma}{\beta}$.

On obtient de même $\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -\frac{\alpha}{\gamma}$ et $\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -\frac{\beta}{\alpha}$. D'où le résultat. \square



5.3 Applications à la convexité

5.3.1 Définition (notion de segment). Soient $A, B \in \mathcal{E}$. On appelle *segment* d'extrémités A et B , noté $[A, B]$, la partie de \mathcal{E} formée des barycentres des deux points A, B pondérés par des masses positives dans \mathbb{R} .

On en déduit immédiatement que, pour tout $O \in \mathcal{E}$, on a :

$$(M \in [A, B]) \iff (\text{il existe } \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+ \text{ avec } \alpha + \beta > 0, \text{ tel que } (\alpha + \beta)\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}),$$

ce qui, en notant que les réels $t = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$ et $1 - t = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$ appartiennent à $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, se reformule en :

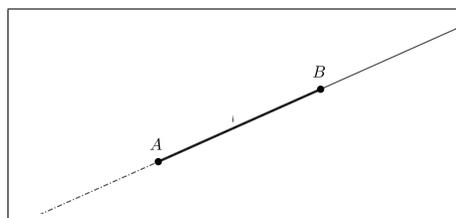
$$(M \in [A, B]) \iff (\text{il existe } t \in [0, 1] \text{ tel que } \overrightarrow{OM} = (1 - t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}),$$

et en choisissant $O = A$:

$$(M \in [A, B]) \iff (\text{il existe } t \in [0, 1] \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}).$$

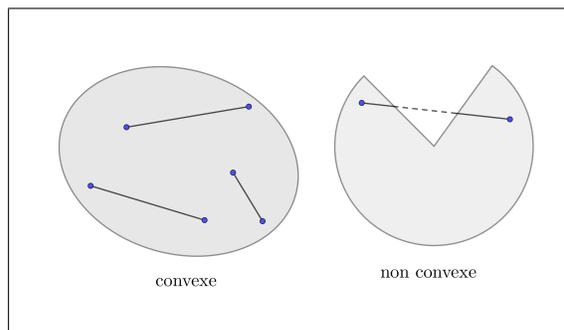
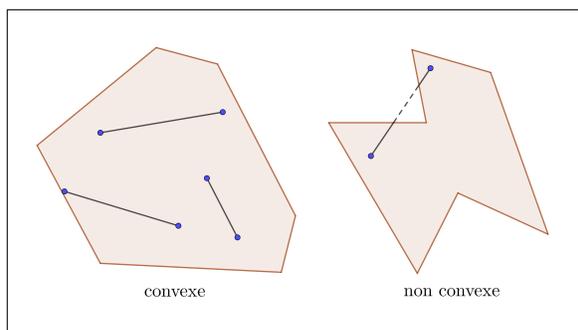
Il en résulte en particulier que $[A, B] = [B, A]$ et $[A, A] = \{A\}$.

Observation. Pour A et B deux points distincts de \mathcal{E} , on a : $(AB) = \{M \in \mathcal{E}; \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}\}$ et $[AB] = \{M \in \mathcal{E}; \exists t \in [0, 1], \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}\}$. Définissons par ailleurs la demi-droite fermée d'origine A passant par B par : $[AB) = \{M \in \mathcal{E}; \exists t \in \mathbb{R}^+, \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}\}$. Il est facile de vérifier alors (rédiger la preuve en exercice un dessin) que $[AB) \cap [BA) = [AB]$.



5.3.2 Partie convexe.

a) Définition. Une partie \mathcal{C} de \mathcal{E} est dite *convexe* lorsque, pour tous points A, B dans \mathcal{C} , le segment $[A, B]$ est inclus dans \mathcal{C} .



Il découle de cette définition que l'intersection d'une famille de parties convexes est convexe.

b) Théorème. Une partie \mathcal{C} de \mathcal{E} est convexe si et seulement si le barycentre de toute famille finie de points de \mathcal{C} pondérés par des masses positives dans \mathbb{R} appartient à \mathcal{C} .

Preuve. Pour tout $n \geq 1$, on dira que \mathcal{C} vérifie la propriété (P_n) lorsque : “le barycentre de toute famille de n points de \mathcal{C} pondérés par des masses positives appartient à \mathcal{C} ”. Par définition, \mathcal{C} est convexe si et seulement si elle vérifie (P_2) . Il est donc clair que, si \mathcal{C} vérifie (P_n) pour tout $n \geq 1$, alors \mathcal{C} est convexe. Réciproquement, supposons que \mathcal{C} est convexe. Donc \mathcal{C} vérifie (P_2) , et l’on raisonne par récurrence en supposant : (H.R.) il existe un entier $n \geq 3$ tel que \mathcal{C} vérifie (P_k) pour tout $1 \leq k \leq n-1$.

Considérons n points A_1, \dots, A_n dans \mathcal{C} et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ dans \mathbb{R}_+ tels que $\sigma = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \neq 0$. On peut définir le barycentre $G = \text{Bar}(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$. Si l’un des α_i est nul, G est le barycentre de k points, avec $k \leq n-1$ donc $G \in \mathcal{C}$ d’après l’hypothèse de récurrence. Sinon, $\alpha_i > 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. En particulier $\sigma' = \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} \neq 0$, et l’on peut définir $G' = \text{Bar}(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n-1}$, avec $G' \in \mathcal{C}$ d’après l’hypothèse de récurrence. Par associativité des barycentres, on a $G = \text{Bar}\left(\begin{smallmatrix} G' & A_n \\ \sigma' & \alpha_n \end{smallmatrix}\right)$. Comme $G' \in \mathcal{C}$, $A_n \in \mathcal{C}$ et \mathcal{C} convexe, on conclut que $G \in \mathcal{C}$. \square

c) Corollaire. Tout sous-espace affine de \mathcal{E} est une partie convexe.

Preuve. Un sous-espace affine étant stable par barycentre, il est à fortiori stable par barycentre à masses positives, d’où le résultat. \square

d) Proposition. Soit $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ une application affine. On a les propriétés suivantes :

- (i) $\varphi([A, B]) = [\varphi(A), \varphi(B)]$ pour tous $A, B \in \mathcal{E}$;
- (ii) si \mathcal{X} est une partie convexe de \mathcal{E} , alors $\varphi(\mathcal{X})$ est une partie convexe de \mathcal{E} ;
- (iii) si \mathcal{X}' est une partie convexe de \mathcal{E} , alors $\varphi^{-1}(\mathcal{X}')$ est une partie convexe de \mathcal{E} ;

Preuve. Résulte immédiatement du fait que les applications affines conservent les barycentres (proposition 5.1.4.a) ; écrire les détails à titre d’exercice. \square

On fait référence à ce résultat en disant que :

les applications affines conservent la convexité.

5.3.3 Enveloppe convexe d’une partie.

a) Proposition et définition. Soit \mathcal{X} une partie de \mathcal{E} . L’intersection de toutes les parties convexes de \mathcal{E} contenant \mathcal{X} est la plus petite partie convexe de \mathcal{E} contenant \mathcal{X} . On l’appelle l’enveloppe convexe de \mathcal{X} dans \mathcal{E} . On la note $\text{Conv } \mathcal{X}$.

Preuve. Evidente ; laissée en exercice. \square

Il est clair que : \mathcal{X} est convexe si et seulement si $\text{Conv } \mathcal{X} = \mathcal{X}$.

b) Proposition. L’enveloppe convexe d’une partie \mathcal{X} de \mathcal{E} est égale à l’ensemble des barycentres des familles finies de points de \mathcal{X} pondérés par des masses positives dans \mathbb{R} .

Preuve. Notons \mathcal{C} l’ensemble des barycentres des familles finies de points de \mathcal{X} pondérés par des masses positives. On a $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ car tout point $A \in \mathcal{X}$ peut être considéré comme le barycentre de $(A, 1)$. Par associativité des barycentres, tout barycentre d’une famille finie de points de \mathcal{C} pondérés par des masses positives est aussi barycentre d’une famille finie de points de \mathcal{X} pondérés par des masses positives, donc appartient à \mathcal{C} . Ceci prouve que \mathcal{C} est convexe. Ainsi $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ avec \mathcal{C} convexe, d’où $\text{Conv } \mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$.

Réciproquement, comme $\mathcal{X} \subseteq \text{Conv } \mathcal{X}$ et $\text{Conv } \mathcal{X}$ est convexe, il résulte du théorème ci-dessus que $\mathcal{C} \subseteq \text{Conv } \mathcal{X}$. D’où l’égalité. \square

Par exemple, pour tous $A, B \in \mathcal{E}$, on a $\text{Conv}\{A, B\} = [A, B]$.

COMPLÉMENT : THÉORÈME DE LUCAS.

On mentionne ici ce résultat à titre d'exercice, pour illustrer que des raisonnements géométriques utilisant des barycentres peuvent être utilisés dans des contextes autres, dans le cas présent pour certaines propriétés algébriques des polynômes.

Théorème. Soit P un polynôme de degré $n \geq 2$ dans $\mathbb{C}[X]$. L'ensemble des points du plan dont les affixes sont les zéros de P' est inclus dans l'enveloppe convexe de l'ensemble des points du plan dont les affixes sont les zéros de P .

Preuve. Notons $P(X) = a_n(X - r_1)^{\alpha_1}(X - r_2)^{\alpha_2} \cdots (X - r_m)^{\alpha_m}$ où les r_i sont les m zéros complexes distincts de P et α_i leur multiplicités. Les α_i sont donc non-nulles et telles que $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = n$.

On calcule $P'(X) = \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j P(X)}{X - r_j}$, d'où l'on déduit que :

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{z - r_j} \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C} \setminus \{r_1, r_2, \dots, r_m\}.$$

En appliquant cette identité à un nombre complexe r qui est un zéro de P' mais n'est pas un zéro de P , on déduit par des calculs simples dans \mathbb{C} que :

$$\sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{|r - r_j|^2} (r - r_j) = 0, \quad \text{d'où } r = \left[\sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{|r - r_j|^2} \right]^{-1} \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{|r - r_j|^2} r_j.$$

Pour tout $1 \leq j \leq m$, on pose $\lambda_j = \left[\sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{|r - r_j|^2} \right]^{-1} \frac{\alpha_j}{|r - r_j|^2}$. On a donc $r = \sum_{j=1}^m \lambda_j r_j$, où les λ_j sont des réels positifs vérifiant $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = 1$, ce qui montre que le point d'affixe r est barycentre à coefficients positifs des points A_1, A_2, \dots, A_r d'affixes respectives r_1, r_2, \dots, r_m .

On a ainsi montré que tout point du plan dont l'affixe est un zéro de P' mais pas de P est dans l'enveloppe convexe de l'ensemble des points A_1, A_2, \dots, A_r . C'est trivialement encore vrai pour un point dont l'affixe est un zéro de P' et de P (puisque c'est alors l'un des points A_j), ce qui achève la preuve. □

Corollaire. Sous les hypothèses du théorème, l'isobarycentre des points dont les affixes sont les zéros de P est égal à l'isobarycentre des points dont les affixes sont les zéros de P' .

Preuve. Notons $P(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ avec $a_i \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Si l'on désigne par z_1, \dots, z_n les n zéros de P (non nécessairement distincts), alors $z_1 + \cdots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$. De même, si l'on désigne par z'_1, \dots, z'_{n-1} les n zéros de $P'(X) = \sum_{i=1}^n i a_i X^{i-1}$ (non nécessairement distincts), on a $z'_1 + \cdots + z'_{n-1} = -\frac{(n-1)a_{n-1}}{na_n}$. On en déduit que $\frac{1}{n}(z_1 + \cdots + z_n) = \frac{1}{n-1}(z'_1 + \cdots + z'_{n-1})$, ce qui prouve le résultat voulu. □

6 – Sous-groupes d'isométries laissant invariante une partie du plan ou de l'espace

On fixe un \mathbb{R} -espace affine euclidien \mathcal{E} de dimension finie n ; on note E son espace vectoriel directeur. Le problème central étudié dans ce chapitre est de déterminer, pour un sous-ensemble \mathcal{X} de points de \mathcal{E} , l'ensemble $G_{\mathcal{X}}$ des isométries affines de \mathcal{E} qui laissent \mathcal{X} globalement invariant, c'est-à-dire telles que l'image globale $\varphi(\mathcal{X}) = \{\varphi(M) ; M \in \mathcal{X}\}$ est égal à l'ensemble \mathcal{X} lui-même. Dans les applications qui suivent, on aura toujours $n = 2$ ou $n = 3$.

6.1 Quelques principes généraux

6.1.1 Proposition et notations. Soit \mathcal{X} un ensemble de points de \mathcal{E} . On note $G_{\mathcal{X}}$ l'ensemble des isométries affines de \mathcal{E} qui laissent \mathcal{X} globalement invariant, c'est-à-dire des isométries $\varphi \in \text{Is}(\mathcal{E})$ telles que $\varphi(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$. On a les propriétés suivantes.

- (i) L'ensemble $G_{\mathcal{X}}$ est un sous-groupe de $\text{Is}(\mathcal{E})$.
- (ii) L'intersection $G_{\mathcal{X}}^+ = G_{\mathcal{X}} \cap \text{Is}^+(\mathcal{E})$ est sous-groupe de $\text{Is}^+(\mathcal{E})$.

Preuve. Evident. □

On note aussi :

$$\boxed{G_{\mathcal{X}}^- = G_{\mathcal{X}} \cap \text{Is}^-(\mathcal{E})} \quad \text{et on a donc la réunion disjointe } \boxed{G_{\mathcal{X}} = G_{\mathcal{X}}^+ \cup G_{\mathcal{X}}^-}.$$

- $G_{\mathcal{X}}^-$ n'est qu'un sous-ensemble, pas un sous-groupe (en particulier $G_{\mathcal{X}}^-$ peut être vide).
- Il est clair que, si $\varphi \in G_{\mathcal{X}}$, la restriction de φ à \mathcal{X} détermine une bijection de \mathcal{X} sur \mathcal{X} .

6.1.2 Lemme (très utile dans la pratique). Supposons que $G_{\mathcal{X}}^-$ n'est pas vide. Alors :

- (i) Pour tout $\sigma \in G_{\mathcal{X}}^-$, on a $G_{\mathcal{X}}^- = \sigma G_{\mathcal{X}}^+ = \{\sigma \circ \varphi ; \varphi \in G_{\mathcal{X}}^+\}$.
- (ii) Le sous-groupe $G_{\mathcal{X}}^+$ est d'indice 2 dans $G_{\mathcal{X}}$.
- (iii) Si $G_{\mathcal{X}}^-$ est fini, alors $G_{\mathcal{X}}^+$ est fini, et $|G_{\mathcal{X}}^+| = |G_{\mathcal{X}}^-| = \frac{1}{2} |G_{\mathcal{X}}|$.
- (iv) Si $G_{\mathcal{X}}^+$ est réduit à $\{\text{id}_{\mathcal{E}}\}$, alors $G_{\mathcal{X}} = \{\text{id}_{\mathcal{E}}, \sigma\}$ avec $\sigma \in G_{\mathcal{X}}^-$ d'ordre 2.

Preuve. Fixons $\sigma \in G_{\mathcal{X}}^-$. Il est clair que $\sigma \circ \varphi \in G_{\mathcal{X}}^-$ pour tout $\varphi \in G_{\mathcal{X}}^+$. Réciproquement, toute $\psi \in G_{\mathcal{X}}^-$ s'écrit $\psi = \sigma \circ (\sigma^{-1} \circ \psi)$, avec $(\sigma^{-1} \circ \psi)$ qui appartient à $G_{\mathcal{X}}^+$ en tant que produit de deux éléments de $G_{\mathcal{X}}^-$. En résumé, l'application $\varphi \mapsto \sigma \circ \varphi$ définit une bijection de $G_{\mathcal{X}}^+$ sur $G_{\mathcal{X}}^-$, de bijection réciproque $\psi \mapsto \sigma^{-1} \circ \psi$. Les différents points du lemme en découlent, en observant que $G_{\mathcal{X}}^-$ n'est autre que la classe à gauche de σ (et de tous les éléments de $G_{\mathcal{X}}^-$) modulo le sous-groupe $G_{\mathcal{X}}^+$. □

EN PRATIQUE

Pour déterminer le groupe $G_{\mathcal{X}}$, une méthode consiste à :

- déterminer d'abord le sous-groupe $G_{\mathcal{X}}^+$,
- déterminer un élément de $G_{\mathcal{X}}^-$ s'il en existe,
- utiliser le lemme ci-dessus pour obtenir $G_{\mathcal{X}}$ tout entier.

• **EXEMPLE 1.** Prenons $n = 2$ et $\mathcal{X} = \{A\}$ un singleton formé d'un unique point du plan. En utilisant le théorème 4.2.5, et en rappelant qu'une translation de vecteur non-nul n'admet pas de point fixe, il est clair que $G_{\mathcal{X}}^+$ est le groupe de toutes les rotations de centre A , et que $G_{\mathcal{X}}^-$ est l'ensemble des symétries orthogonales par rapport aux droites passant par A .

• **EXEMPLE 2.** Prenons $n = 2$ et $\mathcal{X} = \mathcal{D}$ une droite du plan \mathcal{E} . On sait que $\text{Is}^+(\mathcal{E})$ est formé des translations et des rotations. Une translation laisse \mathcal{D} globalement invariante lorsque son vecteur appartient à la direction Δ de \mathcal{D} . Une rotation laisse \mathcal{D} globalement invariante lorsque son centre est sur \mathcal{D} et que son angle est 0 modulo π (ie. lorsque c'est une symétrie centrale de centre sur \mathcal{D}). On conclut que :

$G_{\mathcal{D}}^+$ est formé des symétries centrales dont le centre appartient à \mathcal{D} et des translations dont le vecteur appartient à Δ .

La réflexion $\sigma_{\mathcal{D}}$ d'axe \mathcal{D} appartient à $G_{\mathcal{D}}^-$. D'après le point (i) du lemme précédent, tout élément $\psi \in G_{\mathcal{D}}^-$ est de la forme $\psi = \sigma_{\mathcal{D}} \circ \varphi$ avec $\varphi \in G_{\mathcal{D}}^+$. Si φ est une symétrie centrale de centre A appartenant à \mathcal{D} , alors ψ est la réflexion d'axe la droite \mathcal{D}' perpendiculaire en A à \mathcal{D} . Si φ est une translation de vecteur \vec{u} appartenant à Δ , alors ψ est la symétrie glissée d'axe \mathcal{D} et de vecteur \vec{u} . On conclut que :

$G_{\mathcal{D}}^-$ est formé des réflexions par rapport aux droites perpendiculaires à \mathcal{D} et des symétries glissées d'axe \mathcal{D} et de vecteur appartenant à Δ .

L'argument général suivant, d'usage très fréquent, s'applique au cas où l'ensemble \mathcal{X} est fini.

6.1.3 Proposition. Soit $\mathcal{X} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ un ensemble fini non vide de m points de \mathcal{E} . Toute isométrie $\varphi \in G_{\mathcal{X}}$ fixe l'isobarycentre des points de \mathcal{X} .

Preuve. Notons G l'isobarycentre des points de \mathcal{X} et f l'application linéaire associée à φ . On a :

$$\sum_{i=1}^m \overrightarrow{\varphi(G)\varphi(A_i)} = \sum_{i=1}^m f(\overrightarrow{GA_i}) = f\left(\sum_{i=1}^m \overrightarrow{GA_i}\right) = f(\vec{0}) = \vec{0}.$$

Comme φ laisse \mathcal{X} invariant et qu'elle est bijective, elle permute entre eux les m points A_i , donc :

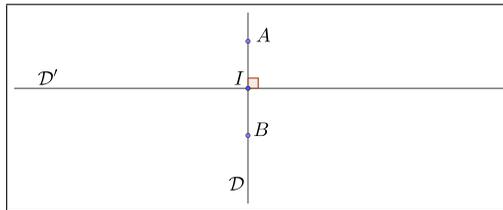
$$\sum_{i=1}^m \overrightarrow{\varphi(G)\varphi(A_i)} = \sum_{j=1}^m \overrightarrow{\varphi(G)A_j} = \vec{0}.$$

Par unicité du barycentre, cette dernière égalité prouve que $\varphi(G) = G$. □

• **EXEMPLE 3.** Prenons $n = 2$ et $\mathcal{X} = \{A, B\}$ une paire de points distincts de \mathcal{E} .

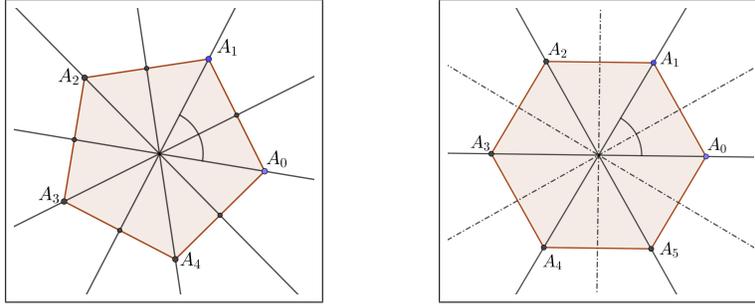
Soit $\varphi \in G_{\mathcal{X}}^+$. D'après la proposition ci-dessus, φ fixe le milieu I de $[A, B]$. En utilisant le corollaire 4.2.5.b), φ est soit l'identité, soit une rotation de centre I ; dans ce dernier cas, elle doit échanger A et B donc être d'angle π . On a donc $G_{\mathcal{X}}^+ = \{\text{id}_{\mathcal{E}}, \rho\}$ où ρ est la symétrie centrale de centre I .

Par ailleurs, en notant \mathcal{D} la droite (AB) , il est clair que $\sigma_{\mathcal{D}} \in G_{\mathcal{X}}^-$. En utilisant le point (i) du lemme 6.1.2, et on observant que $\sigma_{\mathcal{D}} \circ \rho = \sigma_{\mathcal{D}'}$ où \mathcal{D}' est la médiatrice de $[A, B]$, on obtient $G_{\mathcal{X}}^- = \{\sigma_{\mathcal{D}}, \sigma_{\mathcal{D}'}\}$. On conclut finalement : $G_{\mathcal{X}} = \{\text{id}_{\mathcal{E}}, \rho, \sigma_{\mathcal{D}}, \sigma_{\mathcal{D}'}\}$. Comme $\rho^2 = \sigma_{\mathcal{D}}^2 = \sigma_{\mathcal{D}'}^2 = \text{id}_{\mathcal{E}}$, on reconnaît que $G_{\mathcal{X}}$ est le groupe de Klein.



6.2 Exemples dans le plan : groupes diédraux

6.2.1 Données. Dans ce qui suit, on se place dans le plan affine euclidien orienté \mathcal{E} . On fixe un entier $n \geq 3$ et on considère l'ensemble \mathcal{X} des sommets d'un polygone régulier à n côtés.



On note $\mathcal{X} = \{A_0, A_1, \dots, A_{n-1}\}$ et O l'isobarycentre des points de \mathcal{X} qui est aussi le centre du cercle circonscrit à \mathcal{X} . On a pour tout $1 \leq k \leq n-1$:

$$A_{k-1}A_k = A_0A_1 = A_{n-1}A_0 \quad \text{et} \quad \widehat{A_{k-1}OA_k} = \widehat{A_0OA_1} = \widehat{A_{n-1}OA_0} = \frac{2\pi}{n}.$$

Dans un repère bien choisi du plan complexe (dont l'origine est l'isobarycentre O et tel que A_0 soit d'affixe 1), les sommets de \mathcal{X} sont les affixes des nombres complexes $e^{2ik\pi/n}$ pour $1 \leq k \leq n$.

6.2.2 Lemme. $G_{\mathcal{X}^+}$ est le groupe cyclique $\{\text{id}_{\mathcal{E}}, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{n-1}\}$ d'ordre n engendré par la rotation ρ de centre O et d'angle $2\pi/n$.

Preuve. Il est clair $\rho \in G_{\mathcal{X}^+}$ et que ρ est d'ordre n . Donc le sous-groupe cyclique $\langle \rho \rangle$ d'ordre n engendré par ρ est un sous-groupe de $G_{\mathcal{X}^+}$. Réciproquement, soit φ un élément de $G_{\mathcal{X}^+}$. D'après la proposition 6.1.3, le point O est fixé par φ . Donc d'après le corollaire 4.2.5.g), φ est une rotation de centre O et d'angle θ . Le fait que $\varphi(A_0)$ est l'un des points A_k implique que θ est un multiple de $\frac{2\pi}{n}$, et donc que φ est une puissance de composition de ρ . On conclut que $G_{\mathcal{X}^+} = \langle \rho \rangle$. \square

6.2.3 Lemme. $G_{\mathcal{X}^-}$ est l'ensemble $\{\sigma, \sigma \circ \rho, \sigma \circ \rho^2, \sigma \circ \rho^3, \dots, \sigma \circ \rho^{n-1}\}$, où σ est la réflexion par rapport à la droite (OA_0) . Il est formé de n réflexions par rapport à des droites.

- (i) Si n est impair, ces réflexions sont les n réflexions dont les axes sont les droites passant le centre O et chaque sommet A_i .
- (ii) Si $n = 2p$ est pair, ces réflexions sont :
 - d'une part les p réflexions dont les axes sont les droites (A_iA_{i+p}) pour $0 \leq i \leq p-1$ joignant les sommets opposés,
 - d'autre part les p réflexions dont les axes sont les droites joignant les milieux des côtés opposés $[A_iA_{i+1}]$ et $[A_{i+p}A_{i+p+1}]$ pour $0 \leq i \leq p-1$.

Preuve. Soit $\sigma \in \text{Is}^-(\mathcal{E})$ la réflexion par rapport à la droite (OA_0) . On désigne toujours par ρ la rotation de centre O et d'angle $2\pi/n$. Pour tout entier k , la composée $\sigma \circ \rho^k$ appartient à $\text{Is}^-(\mathcal{E})$. Comme elle admet un point fixe O , il résulte du corollaire 4.2.5 que c'est une réflexion par rapport à une droite. Donc $(\sigma \circ \rho^k) \circ (\sigma \circ \rho^k) = \text{id}_{\mathcal{E}}$, ou encore $\sigma \circ \rho^k = \rho^{n-k} \circ \sigma$.

Soit A_k un point quelconque de \mathcal{X} , avec $0 \leq k \leq n-1$. On a $\sigma(A_k) = \sigma(\rho^k(A_0)) = \rho^{n-k}(\sigma(A_0))$ d'après la relation ci-dessus. Mais $\sigma(A_0) = A_0$ par définition de σ , et $\rho^{n-k}(A_0) = A_{n-k} \in \mathcal{X}$ puisque $\rho \in G_{\mathcal{X}^+}$. On en déduit que $\sigma(A_k) = A_{n-k} \in \mathcal{X}$. Ceci prouve que \mathcal{X} est stable par σ . On conclut que $\sigma \in G_{\mathcal{X}^-}$.

On applique le lemme 6.1.2 pour déduire que $G_{\mathcal{X}}^- = \{\sigma, \sigma \circ \rho, \sigma \circ \rho^2, \sigma \circ \rho^3, \dots, \sigma \circ \rho^{n-1}\}$. Ces n isométries sont indirectes et fixent O , donc ce sont des réflexions par rapport à des droites passant par O . Le résultat s'en déduit aisément en distinguant suivant la parité de n , et en utilisant le fait que l'axe d'une telle réflexion σ est la médiatrice du segment $[A_k\sigma(A_k)]$ lorsque A_k n'est pas fixé par σ . \square

Remarquons que le groupe $G_{\mathcal{X}}$ de l'exemple 3 de 6.1.3 correspond au cas $n = 2$ du groupe étudié dans les deux lemmes ci-dessus. On conviendra donc dans ce qui suit d'englober le cas $n = 2$, en considérant une paire de points $\{A_1, A_2\}$ comme un polygone régulier à 2 sommets (et 2 côtés).

6.2.4 Théorème et définition. Pour tout entier $n \geq 2$, on appelle groupe diédral d'ordre $2n$, noté D_n , le sous-groupe des isométries affines du plan conservant un polygone régulier à n côtés.

(i) Le groupe D_n est engendré par deux éléments ρ et σ , et formé de $2n$ éléments distincts :

$$D_n = \{\text{id}_{\mathcal{E}}, \rho, \rho^2, \rho^3, \dots, \rho^{n-1}, \sigma, \sigma \circ \rho, \sigma \circ \rho^2, \sigma \circ \rho^3, \dots, \sigma \circ \rho^{n-1}\},$$

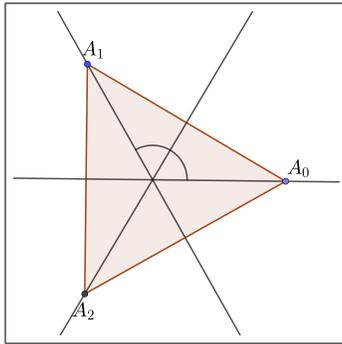
vérifiant les relations : $\rho^n = \text{id}_{\mathcal{E}}$, $\sigma^2 = \text{id}_{\mathcal{E}}$, $\sigma \circ \rho^k = \rho^{n-k} \circ \sigma$ pour tout $1 \leq k \leq n$.

(ii) Le sous-groupe $\langle \rho \rangle$ engendré par ρ est cyclique d'ordre n , d'indice 2 et normal dans D_n .

(iii) Le groupe D_n est non abélien pour $n \geq 3$; le groupe D_2 est isomorphe au groupe de Klein.

Preuve. Découle immédiatement des deux lemmes précédents, en observant que $\rho^n = \text{id}_{\mathcal{E}}$ et $\sigma\rho = \rho^{n-1}\sigma$ impliquent $\sigma\rho^k = \rho^{n-k}\sigma$ pour tout $1 \leq k \leq n$. \square

6.2.5 Exemple : groupe du triangle. D_3 est le groupe des isométries du plan affine euclidien conservant un triangle équilatéral (ABC) . Il est formé de l'identité $\text{id}_{\mathcal{E}} = e$, de la rotation ρ de centre l'isobarycentre O de (ABC) et d'angle $2\pi/3$, de la rotation ρ^2 de centre O et d'angle $4\pi/3$, et des réflexions $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ par rapport aux trois médianes (ou hauteurs) du triangle. Le groupe D_3 est d'ordre 6, non abélien, engendré par les deux éléments ρ et σ_1 (on a $\sigma_3 = \rho \circ \sigma_1$ et $\sigma_2 = \rho^2 \circ \sigma_1$), et sa table est donnée ci-dessous.

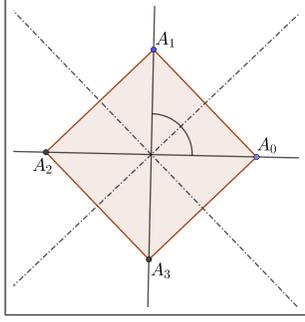


D_3	e	ρ	ρ^2	σ_1	σ_2	σ_3
e	e	ρ	ρ^2	σ_1	σ_2	σ_3
ρ	ρ	ρ^2	e	σ_3	σ_1	σ_2
ρ^2	ρ^2	e	ρ	σ_2	σ_3	σ_1
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	e	ρ	ρ^2
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	ρ^2	e	ρ
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	ρ	ρ^2	e

Cette table est identique à celle du groupe symétrique S_3 , un isomorphisme $D_3 \simeq S_3$ étant donné simplement d'une numérotation des 3 sommets.

6.2.6 Exemple : groupe du carré. D_4 est le groupe des isométries du plan affine euclidien conservant un carré $(ABCD)$. Il est formé de l'identité $e = \text{id}_{\mathcal{E}}$, de la rotation ρ de centre le centre O du carré $(ABCD)$ et d'angle $\pi/2$, de la symétrie centrale ρ^2 de centre O , de la rotation ρ^3 de centre O et d'angle $3\pi/2$, des réflexions σ_1, σ_2 par rapport aux deux médianes du carré, et des réflexions τ_1, τ_2 par rapport aux deux diagonales du carré.

Le groupe D_4 est d'ordre 8, non abélien, engendré par les deux éléments ρ et σ_1 (on a $\tau_1 = \rho \circ \sigma_1$, $\sigma_2 = \rho^2 \circ \sigma_1$ et $\tau_2 = \rho^3 \circ \sigma_1$), et sa table est donnée ci-dessous.



D_4	e	ρ	ρ^2	ρ^3	σ_1	σ_2	τ_1	τ_2
e	e	ρ	ρ^2	ρ^3	σ_1	σ_2	τ_1	τ_2
ρ	ρ	ρ^2	ρ^3	e	τ_1	τ_2	σ_2	σ_1
ρ^2	ρ^2	ρ^3	e	ρ	σ_2	σ_1	τ_2	τ_1
ρ^3	ρ^3	e	ρ	ρ^2	τ_2	τ_1	σ_1	σ_2
σ_1	σ_1	τ_2	σ_2	τ_1	e	ρ^2	ρ^3	ρ
σ_2	σ_2	τ_1	σ_1	τ_2	ρ^2	e	ρ	ρ^3
τ_1	τ_1	σ_1	τ_2	σ_2	ρ	ρ^3	e	ρ^2
τ_2	τ_2	σ_2	τ_1	σ_1	ρ^3	ρ	ρ^2	e

Toute isométrie de D_4 induisant une permutation des 4 sommets, on a l'inclusion $D_4 \subset S_4$, mais cette inclusion est stricte puisque D_4 est d'ordre 8 et S_4 d'ordre 24.

6.2.7 Proposition (application aux sous-groupes finis du groupe des isométries du plan). Soit \mathcal{E} le plan affine euclidien orienté. Tout sous-groupe fini de $\text{Is}(\mathcal{E})$ est cyclique ou diédral.

Plus explicitement, cela signifie que, pour tout groupe fini G de $\text{Is}(\mathcal{E})$, il existe un entier n tel que $G \simeq C_n$ (auquel cas $n = |G|$) ou $G \simeq D_n$ (auquel cas $|G|$ est pair et $n = |G|/2$).

Preuve. On introduit d'abord les notations suivantes :

- (1) pour tout point O de \mathcal{E} et tout entier $n \geq 1$, on note $G(O, n)$ le groupe des rotations de centre O et d'angle $2k\pi/n, 0 \leq k \leq n-1$. C'est un groupe cyclique d'ordre n , engendré par la rotation ρ de centre O et d'angle $2\pi/n$. D'après le lemme 6.2.2 c'est le groupe des déplacements de \mathcal{E} conservant un polygone régulier à n côtés centré en O . A noter que, par convention, $G(O, 1) = \{\text{id}_{\mathcal{E}}\}$.
- (2) pour tout point O de \mathcal{E} et toute droite \mathcal{D} de \mathcal{E} passant par O , et pour tout entier $n \geq 1$, on note $G(O, \mathcal{D}, n)$ le groupe engendré par $G(O, n)$ et la réflexion σ d'axe \mathcal{D} . D'après le théorème 6.2.4 c'est le groupe des isométries de \mathcal{E} conservant un polygone régulier à n côtés centré en O et dont un des sommets est sur \mathcal{D} . Il est donc isomorphe au groupe diédral D_n . A noter que, par convention, $G(O, \mathcal{D}, 1) = \{\text{id}_{\mathcal{E}}, \sigma\}$.

Fixons un sous-groupe fini G de $\text{Is}(\mathcal{E})$. Posons $G^+ = G \cap \text{Is}^+(\mathcal{E})$, qui est un sous-groupe de G .

Supposons d'abord que $G \subseteq \text{Is}^+(\mathcal{E})$, c'est-à-dire $G = G^+$. Choisissons $A \in \mathcal{E}$ quelconque, et considérons l'ensemble $\mathcal{X}_A = \{\varphi(A); \varphi \in G\}$. C'est un ensemble fini de points $\{A, A_1, \dots, A_m\}$ de \mathcal{E} , laissé globalement invariant par G . Tout élément φ de G est donc un déplacement de \mathcal{E} qui fixe l'isobarycentre O de \mathcal{X}_A (voir 6.1.3), et donc une rotation de centre O . Comme $\varphi^n = \text{id}_{\mathcal{E}}$ en notant $|G| = n$, on déduit que φ est d'angle $2k\pi/n, 0 \leq k \leq n-1$. On conclut que $G \subseteq G(O, n)$, et donc $G = G(O, n)$ puisque les deux groupes sont de même ordre n .

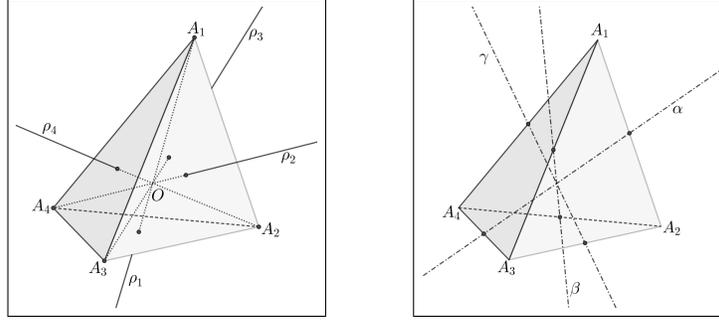
Supposons maintenant qu'il existe $\sigma \in \text{Is}^-(\mathcal{E}) \cap G$. Tout élément de G est alors soit un élément de G^+ , soit le produit de σ par un élément de G^+ . D'après la première étape de la preuve, il existe $O \in \mathcal{E}$ et $n = |G^+| \geq 1$ tel que $G^+ = G(O, n)$. Supposons que $n \geq 2$. En notant ρ la rotation de centre O et d'angle $2\pi/n$, on a $\rho \in G^+$ et $\sigma^{-1} \circ \rho \circ \sigma \in G^+$. Donc $\sigma^{-1}(\rho(\sigma(O))) = O$, donc $\rho(\sigma(O)) = \sigma(O)$, donc $\sigma(O) = O$ puisque O est le seul point fixe de ρ . Ainsi $\varphi \in \text{Is}^-(\mathcal{E})$ fixe O , donc σ est une réflexion par rapport à une droite \mathcal{D} de \mathcal{E} . On conclut que $G = G(O, \mathcal{D}, n)$. Enfin, dans le cas où $n = 1$, on a $G^+ = \{\text{id}_{\mathcal{E}}\}$ et $G = \{\text{id}_{\mathcal{E}}, \sigma\}$, donc $\sigma^2 \in G^+$ c'est-à-dire $\sigma^2 = \text{id}_{\mathcal{E}}$, donc σ est une réflexion par rapport à une droite \mathcal{D}' , et l'on a $G = G(O', \mathcal{D}', 1)$ pour tout point O' de \mathcal{D}' . \square

6.3 Exemples dans l'espace : groupe du tétraèdre, groupe du cube

6.3.1 Données et notations. Dans ce qui suit, on se place dans l'espace affine euclidien orienté \mathcal{E} de dimension 3. On considère l'ensemble $\mathcal{X} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ des sommets d'un tétraèdre régulier. On note O l'isobarycentre des points de \mathcal{X} . Les *six arêtes* de \mathcal{X} sont les segments $[A_1A_2]$,

$[A_1A_3]$, $[A_1A_4]$, $[A_2A_3]$, $[A_2A_4]$ et $[A_3A_4]$, de même longueur. Les quatre faces $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$ et $A_4A_1A_2$ sont des triangles équilatéraux.

Pour tout $1 \leq i \leq 4$, la droite (OA_i) coupe la face opposée au sommet A_i en son centre de gravité (associativité des barycentres). On note ρ_i la rotation d'axe (OA_i) et d'angle $2\pi/3$. Il est clair que ρ_i et ρ_i^2 sont des éléments de $G_{\mathcal{X}}^+$, ce qui donne déjà 8 éléments d'ordre 3 de $G_{\mathcal{X}}^+$.



Notons par ailleurs (en rappelant qu'un demi-tour est une rotation d'angle π) :

- α le demi-tour d'axe la droite passant par les milieux de $[A_1A_2]$ et $[A_3A_4]$,
- β le demi-tour d'axe la droite passant par les milieux de $[A_1A_3]$ et $[A_2A_4]$,
- γ le demi-tour d'axe la droite passant par les milieux de $[A_1A_4]$ et $[A_2A_3]$.

Il est clair que α , β et γ sont trois nouveaux éléments d'ordre 2 de $G_{\mathcal{X}}^+$.

6.3.2 Théorème. Le groupe $G_{\mathcal{X}}$ des isométries de l'espace conservant un tétraèdre régulier est d'ordre 24, isomorphe au groupe symétrique S_4 . Le sous-groupe $G_{\mathcal{X}}^+$ des isométries positives est isomorphe au groupe alterné A_4 et formé des 12 rotations suivantes :

$$G_{\mathcal{X}}^+ = \{\text{id}_{\mathcal{E}}, \alpha, \beta, \gamma, \rho_1, \rho_1^2, \rho_2, \rho_2^2, \rho_3, \rho_3^2, \rho_4, \rho_4^2\}.$$

Preuve. Toute isométrie $\varphi \in G_{\mathcal{X}}$ permute entre eux les 4 sommets A_1, A_2, A_3, A_4 et induit donc par restriction à l'ensemble de ces 4 sommets une permutation dans S_4 , que l'on notera $g(\varphi)$. On définit ainsi une application $g : G_{\mathcal{X}} \rightarrow S_4$, qui est de façon évidente un morphisme de groupes.

Par exemple, pour tout $1 \leq i \leq 4$, la permutation $g(\rho_i)$ est un des huit 3-cycles de S_4 et les rotations α, β, γ correspondent aux trois produits de deux transpositions dans S_4 . Remarquons que ce sont dans les deux cas des éléments du groupe alterné A_4 .

Déterminons le noyau de g . Soit $\varphi \in \text{Ker } g$. Cela signifie que $\varphi(A_i) = A_i$ pour tout $1 \leq i \leq 4$. L'application linéaire f associée à φ vérifie donc, pour tout $2 \leq j \leq 4$:

$$f(\overrightarrow{A_1A_j}) = \overrightarrow{\varphi(A_1)\varphi(A_j)} = \overrightarrow{A_1A_j}.$$

Or, les 4 sommets du tétraèdre n'étant pas coplanaires dans \mathcal{E} , les 3 vecteurs $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}$ sont linéairement indépendants dans l'espace vectoriel E , donc forment une base de E . Ainsi f fixe les vecteurs d'une base de E , d'où $f = \text{id}_E$. Il en résulte (voir 3.3.2) que φ est une translation de \mathcal{E} . Mais on sait (voir 6.1.3) que φ fixe O . On conclut que $\varphi = \text{id}_{\mathcal{E}}$.

On a ainsi prouvé que le morphisme $g : G_{\mathcal{X}} \rightarrow S_4$ est injectif. Il en résulte que $|G_{\mathcal{X}}| \leq 24$. On a déjà trouvé directement 12 éléments dans $G_{\mathcal{X}}^+$ (les 8 rotations ρ_i et ρ_i^2 , les 3 rotations α, β, γ , et l'identité de \mathcal{E}), d'où $|G_{\mathcal{X}}^+| \geq 12$. De plus $G_{\mathcal{X}}^- \neq \emptyset$, car il contient par exemple la réflexion par rapport au plan (OA_1A_2) . Il en résulte d'après le lemme 6.1.2 que $|G_{\mathcal{X}}| \geq 24$. Finalement, on a $|G_{\mathcal{X}}| = 24$, et g étant un morphisme injectif entre deux groupes finis de même ordre, il est nécessairement bijectif, c'est-à-dire que g est un isomorphisme entre $G_{\mathcal{X}}$ et S_4 .

On a déjà observé au début de la preuve que les images par g des différents éléments de $G_{\mathcal{X}}^+$ sont les éléments de A_4 , et donc la restriction de g à $G_{\mathcal{X}}^+$ réalise un isomorphisme entre $G_{\mathcal{X}}^+$ et A_4 . \square

6.3.3 Remarques. La table du groupe $G_{\mathcal{X}}^+$ s'obtient directement via l'isomorphisme g à partir de celle du groupe A_4 détaillée dans le cours de théorie des groupes.

Les 12 éléments de $G_{\mathcal{X}}^-$ (qui sont les produits de chacun des 12 déplacements de $G_{\mathcal{X}}^+$ par un antidéplacement choisi dans $G_{\mathcal{X}}^-$) sont les images réciproques par g^{-1} des permutations impaires dans S_4 . Il s'agit donc des images réciproques des six transpositions $[i, j]$ et des six 4-cycles $[i, j, k, \ell]$ de S_4 . On en donne pour être complet une description géométrique :

$\varphi \in G_{\mathcal{X}}^-$	$g(\varphi) \in S_4$	$\varphi \in G_{\mathcal{X}}^-$	$g(\varphi) \in S_4$
pour $1 \leq i, j, k, \ell \leq 4$ deux à deux distincts :	(6 éléments)	$\sigma_{(OA_1A_2)} \circ \gamma$	[1423]
$\sigma_{(OA_kA_\ell)} = \tau_{ij}$		$\sigma_{(OA_1A_2)} \circ \beta$	[1324]
= symétrie orthogonale p/r		$\sigma_{(OA_1A_3)} \circ \alpha$	[1234]
au plan médiateur de $[A_iA_j]$	$[ij]$	$\sigma_{(OA_1A_3)} \circ \gamma$	[1432]
ie. p/r au plan (OA_kA_ℓ)		$\sigma_{(OA_1A_4)} \circ \alpha$	[1342]
elle fixe A_k et A_ℓ en échangeant A_i et A_j		$\sigma_{(OA_1A_4)} \circ \beta$	[1243]

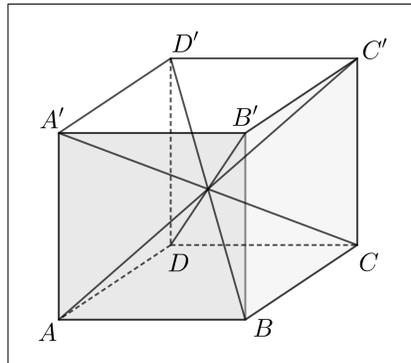
Observons que l'engendrement de S_4 par les transpositions (voir cours de théorie des groupes) correspond à l'engendrement de $G_{\mathcal{X}}$ par des réflexions par rapport à un plan ; voir 4.3.4.c).

On termine en donnant un autre exemple, un peu plus complexe, pour lequel on expose les principaux résultats sans développer les preuves, qui pourront éventuellement être étudiées en TD.

6.3.4 Groupe du cube. On se place toujours dans l'espace affine euclidien orienté \mathcal{E} de dimension 3. On considère l'ensemble $\mathcal{X} = \{A, B, C, D, A', B', C', D'\}$ des 8 sommets d'un cube.

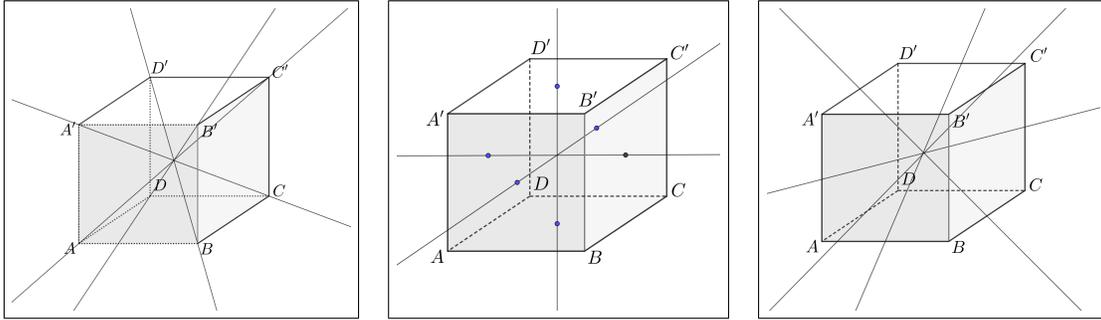
6 faces :	$ABCD, A'B'C'D', ABB'A', DCC'D', AA'D'D, BB'C'C$	
12 arêtes :	$[AA'], [BB'], [CC'], [DD'], [AD], [BC], [B'C'], [A'D'],$ $[AB], [A'B'], [D'C'], [DC]$	longueur a
12 petites diagonales :	$[AC], [BD], [A'C'], [B'D'], [A'B], [AB'], [D'C], [DC'],$ $[AD'], [A'D], [BC'], [B'C]$	longueur $\sqrt{2}a$
4 grandes diagonales :	$[AC'], [A'C], [DB'], [D'B]$	longueur $\sqrt{3}a$

On note O l'isobarycentre des points de \mathcal{X} ; O est le point de concours des 4 grandes diagonales.



On considère :

- les quatre droites $\mathcal{D}_1 = (AC')$, $\mathcal{D}_2 = (BD')$, $\mathcal{D}_3 = (CA')$ et $\mathcal{D}_4 = (DB')$ portant les grandes diagonales du cube,
- les trois droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ passant par les isobarycentres des trois paires de faces opposées du cube ($ABCD$ et $A'B'C'D'$, $ABB'A'$ et $DCC'D'$, $AA'D'D$ et $BB'C'C$),
- les six droites δ_i (pour $1 \leq i \leq 6$) joignant les milieux des six paires d'arêtes opposées ($[AB]$ et $[D'C']$, $[CD]$ et $[A'B']$, $[AA']$ et $[CC']$, $[BB']$ et $[DD']$, $[AD]$ et $[B'C']$, $[A'D']$ et $[BC]$).



On en déduit les rotations suivantes de $G_{\mathcal{X}}^+$:

- pour $1 \leq i \leq 4$, ρ_i la rotation d'axe \mathcal{D}_i et d'angle $2\pi/3$, ainsi que ρ_i^2 d'angle $4\pi/3$,
- pour $1 \leq i \leq 3$, φ_i la rotation d'axe Δ_i et d'angle $\pi/2$, ainsi que φ_i^2 d'angle π et φ_i^3 d'angle $3\pi/2$,
- pour $1 \leq i \leq 6$, ψ_i d'axe δ_i et d'angle π (demi-tours).

On obtient ainsi $8 + 9 + 6 = 23$ éléments de $G_{\mathcal{X}}^+$, auxquels il faut ajouter bien sûr $\text{id}_{\mathcal{E}}$. Donc $|G_{\mathcal{X}}^+| \geq 24$. Le théorème suivant montre que l'on a en fait ici tous les éléments de $G_{\mathcal{X}}^+$.

6.3.5 Théorème. Le groupe $G_{\mathcal{X}}$ des isométries de l'espace conservant un cube est d'ordre 48. Le sous-groupe $G_{\mathcal{X}}^+$ des isométries positives est isomorphe au groupe symétrique S_4 , et formé des 24 rotations décrites ci-dessus.

Preuve. Admise ; des parties pourront être étudiées en travaux dirigés. □

6.3.6 Remarques.

- (i) Conformément à 6.1.2, tout élément de $G_{\mathcal{X}}^-$ est le produit d'une des 24 rotations de $G_{\mathcal{X}}^+$ par un élément de $G_{\mathcal{X}}^-$, par exemple la symétrie centrale σ de centre O . On peut en déduire, géométriquement une description des 24 isométries indirectes de $G_{\mathcal{X}}^-$.
- (ii) On peut montrer que $G_{\mathcal{X}}^+ \simeq S_4$ est aussi le groupe des déplacements de \mathcal{E} laissant invariant l'octaèdre régulier dont les six sommets sont les centres des six faces du cube \mathcal{X} .

