ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS **195** (2013), 565–591
DOI: 10.1007/s11856-012-0109-x

MINIMA, PENTES ET ALGÈBRE TENSORIELLE

PAR

Éric Gaudron et Gaël Rémond

Université Grenoble I, Institut Fourier, UMR 5582, BP 74
38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex, France
courriel: Eric.Gaudron@ujf-grenoble.fr et Gael.Remond@ujf-grenoble.fr

ABSTRACT

Slopes of an adelic vector bundle exhibit a behaviour akin to successive minima. Comparisons between the two amount to a Siegel lemma. Here we use Zhang's version for absolute minima over the algebraic numbers. We prove a Minkowski–Hlawka theorem in this context. We also study the tensor product of two hermitian bundles bounding both its absolute minimum and maximal slope, thus improving an estimate of Chen. We further include similar inequalities for exterior and symmetric powers, in terms of some lcm of multinomial coefficients.

1. Introduction

Cet article étudie deux quantités associées à un fibré adélique hermitien : son minimum absolu et sa pente maximale. Nous donnons plusieurs inégalités faisant intervenir ces deux nombres, en particulier pour estimer leur comportement relativement au produit tensoriel des fibrés et, subséquemment, aux puissances symétriques et extérieures.

La notion de fibré adélique hermitien généralise à un corps de nombres celle de réseau euclidien avec laquelle elle coïncide sur $\mathbf{Q}$. Alors qu'un réseau euclidien est constitué d'un $\mathbf{Z}$-module libre de rang fini Ω et d'une norme euclidienne sur l'espace vectoriel réel $\Omega \otimes \mathbf{R}$, nous voyons plutôt un fibré adélique hermitien sur un corps de nombres k comme un couple formé d'un espace vectoriel E sur k et d'une collection de normes $\|\cdot\|_v$ sur E pour toute place v de k (la définition

Received September 13, 2011 and in a revised form December 7, 2011

précise est rappelée dans la partie suivante) : dans le cas d'un réseau euclidien $E = \Omega \otimes \mathbf{Q}$, la norme $\|\cdot\|_\infty$ est celle donnée sur $\Omega \otimes \mathbf{R}$ tandis que les normes aux places finies définissent Ω dans E.

On associe classiquement à un réseau euclidien son (premier) minimum : la plus petite norme d'un élément non nul de Ω. Traduite dans le langage des fibrés adéliques hermitiens, cette définition devient la plus petite hauteur d'un élément non nul de E (la hauteur s'obtient en faisant le produit des normes, voir § 2.2) mais nous souhaitons considérer ici le minimum *absolu* de E c'est-à-dire l'infimum des hauteurs des éléments non nuls de $E \otimes \overline{\mathbf{Q}}$: nous le notons $\Lambda(\overline{E}, \overline{\mathbf{Q}})$.

Nous utilisons ensuite la pente d'un fibré adélique hermitien. Dans le cas d'un réseau euclidien, celle-ci est un avatar du covolume : si $\overline{E} = (\Omega \otimes \mathbf{Q}, \|\cdot\|)$ est déduit de $\Omega, \|\cdot\|$ alors

$$\widehat{\mu}(\overline{E}) = -\frac{1}{\dim E} \log \mathrm{vol}(\Omega \otimes \mathbf{R}/\Omega)$$

où le volume désigne la mesure de Haar sur $\Omega \otimes \mathbf{R}$ associée à la norme $\|\cdot\|$ (c'est-à-dire la mesure de Lebesgue si l'on identifie $\Omega \otimes \mathbf{R}$ à $\mathbf{R}^n$ *via* une base orthonormée pour $\|\cdot\|$). Cette définition s'étend à un corps de nombres et nous nous concentrons sur la pente maximale $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})$ de $\overline{E}$, c'est-à-dire le maximum des pentes des sous-fibrés non nuls de $\overline{E}$.

Tandis qu'une comparaison entre le minimum et le covolume d'un réseau euclidien fait l'objet du premier théorème de Minkowski (appelé aussi lemme de Siegel dans certains contextes), une comparaison analogue pour le minimum absolu résulte d'un théorème profond de Zhang, qui joue un rôle crucial dans ce texte. Nous citons ici une forme légèrement simplifiée (voir la partie 3 pour une discussion plus complète).

Théorème 1.1: *Pour tout fibré adélique hermitien $\overline{E}$ de dimension $n \geq 1$ sur un corps de nombres nous avons*

$$1 \leq \Lambda(\overline{E}, \overline{\mathbf{Q}}) e^{\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})} \leq \sqrt{n}.$$

Ici la minoration résulte facilement des définitions, le contenu du théorème réside dans la majoration qui mérite le nom de théorème de Minkowski absolu ou de lemme de Siegel absolu (suivant la terminologie de Roy–Thunder [RT]).

Nous montrons dans un premier temps que l'ordre de grandeur de cette majoration ne peut pas être amélioré. Un résultat analogue sur $\mathbf{Q}$ portant classiquement le nom de théorème de Minkowski–Hlawka, notre premier résultat correspond donc à un théorème de Minkowski–Hlawka absolu.

Théorème 1.2: *Pour tout $n \geq 1$ il existe un fibré adélique hermitien $\overline{E}$ de dimension n sur un corps de nombres avec*

$$\Lambda(\overline{E}, \overline{\mathbf{Q}}) e^{\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})} \geq \sqrt{\frac{n}{e}}.$$

Il s'agit ici encore d'une forme simplifiée (voir théorème 3.3) et nous donnerons un procédé explicite pour trouver un tel $\overline{E}$.

Tournons-nous à présent vers le comportement vis-à-vis du produit tensoriel. En utilisant le théorème 1.1 (de manière indirecte) nous démontrons l'inégalité centrale suivante.

Théorème 1.3: *Pour deux fibrés adéliques hermitiens $\overline{E}$ et $\overline{F}$ sur un corps de nombres, on a*

$$\Lambda(\overline{E}, \overline{\mathbf{Q}}) e^{-\widehat{\mu}_{\max}(\overline{F})} \leq \Lambda(\overline{E} \otimes \overline{F}, \overline{\mathbf{Q}}).$$

Cet énoncé s'étend immédiatement par récurrence à N fibrés puis en le combinant (de manière directe cette fois) avec le théorème 1.1 nous aboutissons aux estimations suivantes.

Corollaire 1.4: *Soient $N \geq 1$ un entier naturel et $\overline{E}_1, \ldots, \overline{E}_N$ des fibrés adéliques hermitiens sur un corps de nombres. Nous avons*

$$1 \leq \Lambda\left(\bigotimes_{i=1}^{N} \overline{E}_i, \overline{\mathbf{Q}}\right)^{-1} \prod_{i=1}^{N} \Lambda(\overline{E}_i, \overline{\mathbf{Q}}) \leq \left(\prod_{i=2}^{N} \dim E_i\right)^{1/2} \tag{1}$$

et

$$0 \leq \widehat{\mu}_{\max}\left(\bigotimes_{i=1}^{N} \overline{E}_i\right) - \sum_{i=1}^{N} \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_i) \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \log \dim E_i. \tag{2}$$

L'inégalité (2) a déjà fait l'objet de plusieurs travaux. Dans le seul publié à ce jour, Chen [Ch] obtient comme majorant $\sum_{i=1}^{N} \log \dim E_i$. Avec le coefficient $1/2$, notre majoration était connue dans le cas $N = 2$, établie indépendamment par Bost[1] et André [An]. En outre, dans un travail en cours, Bost et Chen [BC] donnent une version plus forte de (2) où le majorant devient $(1/2)\sum_{i=2}^{N}\log\dim E_i$ et prouvent donc l'exact analogue de (1).

Dans le corollaire, les minorations suivent facilement des définitions mais l'on peut se demander si elles peuvent être strictes. Dans le cas (2) une conjecture de Bost prédit qu'il y a toujours égalité : $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}\otimes\overline{F}) = \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) + \widehat{\mu}_{\max}(\overline{F})$ pour tous fibrés adéliques hermitiens $\overline{E}$ et $\overline{F}$. Ceci reste un problème ouvert : voir [BC] pour des résultats partiels ; plus bas nous donnons seulement un exemple de situation où il y a égalité (en présence d'une action de groupe).

En revanche dans le cadre de (1) nous montrons que la conjecture analogue se trouve être *fausse*.

Théorème 1.5: *Pour tous entiers naturels $n, m \geq 2$ il existe deux fibrés adéliques hermitiens sur un corps de nombres $\overline{E}$ et $\overline{F}$ de dimensions respectives n et m avec*

$$\Lambda(\overline{E}\otimes\overline{F},\overline{\mathbf{Q}}) < \Lambda(\overline{E},\overline{\mathbf{Q}})\Lambda(\overline{F},\overline{\mathbf{Q}}).$$

Dans le langage de l'article d'André [An], ceci signifie que la propriété d'être numériquement effectif ne se conserve pas par produit tensoriel.

Dans la fin du texte, nous utilisons le théorème 1.3 pour estimer minimum et pente maximale des puissances symétriques ou extérieures d'un fibré adélique hermitien. Par exemple nous améliorons la borne

$$\widehat{\mu}_{\max}\left(\overline{S^{\ell}(E)}\right) \leq \ell\left(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) + 2n\log n\right)$$

due à Bost où $n = \dim E$ (voir [G1, théorème 7.1]) en remplaçant $2n\log n$ par $2\log n$. Nous montrons aussi par un exemple que ceci est le bon ordre de grandeur et ne peut pas être remplacé par $c\log n$ si $c < 1/2$.

Remerciements. Nous remercions Jean-Benoît Bost et Huayi Chen ainsi qu'Yves André de nous avoir communiqué leurs textes [BC] et [An] avant publication.

[1] *Stability of Hermitian vector bundles over arithmetic curves and geometric invariant theory*, Exposé au Chern Institute, Université Nankai, Tianjin. Avril 2007.

2. Rappels de théorie des pentes

Soit k un corps de nombres. Notons $V(k)$ l'ensemble des places de k et $k_{\mathbf{A}}$ les adèles de k. Pour $v \in V(k)$, le corps $\mathbf{C}_v$ désigne la complétion d'une clôture algébrique du complété k_v de k. Nous le munissons de la valeur absolue $|\cdot|_v$ qui étend la valeur absolue usuelle de $\mathbf{Q}_v$, adhérence de $\mathbf{Q}$ dans k_v. La *formule du produit* s'écrit

$$\forall\, x \in k \setminus \{0\}, \qquad \prod_{v \in V(k)} |x|_v^{[k_v:\mathbf{Q}_v]} = 1.$$

2.1. Fibrés adéliques hermitiens. Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit $(k^n, |\cdot|_2)$ le couple — dit *fibré hermitien standard* — constitué de l'espace vectoriel k^n et d'une collection de normes $|\cdot|_2 = (|\cdot|_{2,v} \colon \mathbf{C}_v^n \to \mathbf{R}_+)_{v \in V(k)}$ définies de la manière suivante : pour tout vecteur $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbf{C}_v^n$ on a

$$|(x_1, \ldots, x_n)|_{2,v} := \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|_v^2\right)^{1/2} & \text{si } v \text{ est archimédienne,} \\ \max\{|x_1|_v, \ldots, |x_n|_v\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition 2.1: Un *fibré adélique hermitien* $\overline{E} = (E, (\|\cdot\|_{\overline{E},v})_v)$ sur k, de dimension n, est la donnée d'un k-espace vectoriel E de dimension n et d'une famille de normes $\|\cdot\|_{\overline{E},v}$ sur $E \otimes_k \mathbf{C}_v$, indexées par les places v de k, qui satisfont à la condition suivante : il existe une k-base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E et une matrice adélique $a = (a_v)_{v \in V(k)} \in \mathrm{GL}_n(k_{\mathbf{A}})$ telles que, pour toute place $v \in V(k)$, la norme sur $E \otimes_k \mathbf{C}_v$ est donnée par

$$\forall\, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{C}_v^n, \qquad \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\|_{\overline{E},v} = |a_v(x)|_{2,v}.$$

Cette définition est équivalente à celle de *fibré vectoriel hermitien sur* $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_k$. Si $k = \mathbf{Q}$, cette notion correspond à celle de *réseau euclidien* au sens de la géométrie des nombres classique. Ces fibrés adéliques hermitiens sont en particulier *purs* au sens de [G2, p. 162]. Les résultats de [G1] s'appliquent donc, comme cela est expliqué au paragraphe 2.1.3 de [G2]. Nous renvoyons le lecteur à [Bo, G1] pour les propriétés de ces objets mentionnées ci-après (rappelons qu'une base $e_1, \ldots, e_n$ de $E \otimes \mathbf{C}_v$ est dite orthonormée si $\|\sum_{i=1}^n x_i e_i\|_{\overline{E},v} = |x|_{2,v}$ pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{C}_v^n$).

2.2. Hauteurs. Soit $\overline{E}$ un fibré adélique hermitien sur un corps de nombres k. Soient K une extension algébrique de k et x un élément de $E \otimes_k K$. Soit

$K' \subset K$ une extension finie de k telle que $x \in E \otimes_k K'$. Le K'-espace vectoriel $E \otimes_k K'$ a une structure de fibré adélique hermitien induite par celle de $\overline{E}$ (pour $w \in V(K')$ au-dessus de $v \in V(k)$ on identifie $E \otimes K' \otimes \mathbf{C}_w$ à $E \otimes \mathbf{C}_v$). Nous noterons $\|.\|_{\overline{E},w}$ plutôt que $\|.\|_{\overline{E \otimes_k K'},w}$ la norme de $E \otimes_k K'$ relative à $w \in V(K')$. Avec ces conventions, la *hauteur normalisée* de x est le nombre réel :

$$H_{\overline{E}}(x) = \prod_{v \in V(K')} \|x\|_{\overline{E},v}^{[K'_v:\mathbf{Q}_v]/[K':\mathbf{Q}]}.$$

Cette définition ne dépend pas de l'extension finie K' choisie. Le (premier) *minimum* de E sur K, noté $\Lambda(\overline{E}, K)$, est le nombre réel :

$$\Lambda(\overline{E}, K) := \min\{H_{\overline{E}}(x)\,;\ x \in E \otimes_k K \setminus \{0\}\}.$$

On remarque que $\Lambda(\overline{E}, K) = \inf_{K'|k} \Lambda(\overline{E}, K')$ où K' parcourt les extensions finies de k incluses dans K. Dans la suite nous voyons toujours k comme un sous-corps de $\overline{\mathbf{Q}}$ et nous intéressons principalement à $\Lambda(\overline{E}, \overline{\mathbf{Q}})$ (noté $\exp(-\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}^{(1)}(\overline{E}))$ dans [BC]). Par ailleurs, si $\varphi\colon E \to F$ est une application linéaire entre deux espaces munis de structures adéliques hermitiennes alors, en chaque place v de k, l'on dispose de la norme d'opérateur $\|\varphi\|_v$ de l'application

$$(E \otimes \mathbf{C}_v, \|\cdot\|_{\overline{E},v}) \to (F \otimes \mathbf{C}_v, \|\cdot\|_{\overline{F},v})$$

induite par φ. La définition de cette norme implique immédiatement que si φ est *injective* alors

$$\Lambda(\overline{F}, K) \leq H(\varphi)\Lambda(\overline{E}, K) \quad \text{où} \quad H(\varphi) := \prod_{v \in V(k)} \|\varphi\|_v^{[k_v:\mathbf{Q}_v]/[k:\mathbf{Q}]}. \tag{3}$$

2.3. Pentes. Étant donné un fibré hermitien $\overline{E}$ sur k donné par une matrice adélique $a = (a_v)_{v \in V(k)}$, la *pente (normalisée)* $\widehat{\mu}(\overline{E})$ de $\overline{E}$ est le nombre réel

$$\widehat{\mu}(\overline{E}) := -\frac{1}{\dim E} \sum_{v \in V(k)} \frac{[k_v : \mathbf{Q}_v]}{[k : \mathbf{Q}]} \log|\det a_v|_v.$$

La *pente maximale* $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})$ de $\overline{E}$ est le maximum des pentes $\widehat{\mu}(\overline{F})$ lorsque F parcourt les sous-espaces vectoriels non nuls de E (le fibré $\overline{F}$ est F muni des métriques induites par celles de $\overline{E}$). Le fibré $\overline{E}$ est dit *semi-stable* si $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) = \widehat{\mu}(\overline{E})$. La pente maximale est atteinte en un unique sous-espace de dimension maximale et elle est invariante par extension de corps (nous rappelons l'argument au paragraphe 5.1).

2.4. Dual et somme directe. Soit $\overline{E}$ un fibré adélique hermitien sur k. Le *dual* de $\overline{E}$, noté $\overline{E}^{\vee}$, est le fibré adélique hermitien d'espace sous-jacent $E^{\vee} = \mathrm{Hom}_k(E, k)$ muni des normes (d'opérateurs) duales de celles sur E. On a $\widehat{\mu}(\overline{E}^{\vee}) = -\widehat{\mu}(\overline{E})$ (voir [G1, proposition 4.21]). Soit $\overline{F}$ un autre fibré adélique hermitien sur k. La *somme directe (hermitienne)* $\overline{E} \oplus \overline{F}$ de $\overline{E}$ et $\overline{F}$ est le fibré adélique hermitien d'espace sous-jacent $E \oplus F$ de normes

$$\|(x,y)\|_{\overline{E}\oplus\overline{F},v} = \begin{cases} (\|x\|^2_{\overline{E},v} + \|y\|^2_{\overline{F},v})^{1/2} & \text{si } v \mid \infty, \\ \max\{\|x\|_{\overline{E},v}, \|y\|_{\overline{F},v}\} & \text{si } v \nmid \infty, \end{cases}$$

pour tous $x \in E \otimes_k \mathbf{C}_v$ et $y \in F \otimes_k \mathbf{C}_v$. On a

$$\widehat{\mu}(\overline{E} \oplus \overline{F}) = ((\dim E)\widehat{\mu}(\overline{E}) + (\dim F)\widehat{\mu}(\overline{F}))/(\dim E \oplus F).$$

2.5. Produit tensoriel. Soient $\overline{E}$ et $\overline{F}$ deux fibrés adéliques hermitiens sur k. Le *produit tensoriel* $\overline{E} \otimes \overline{F}$ est le fibré adélique hermitien d'espace sous-jacent $E \otimes_k F$ et dont la norme sur $E \otimes F \otimes \mathbf{C}_v$ $(v \in V(k))$ est telle que des bases orthonormées $(e_1, \dots, e_n)$ de $(E \otimes_k \mathbf{C}_v, \|\cdot\|_{\overline{E},v})$ et $(f_1, \dots, f_m)$ de $(F \otimes_k \mathbf{C}_v, \|\cdot\|_{\overline{F},v})$ donnent une base orthonormée $\{e_i \otimes f_j\,;\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m\}$ de $(E \otimes F \otimes \mathbf{C}_v, \|\cdot\|_{\overline{E}\otimes\overline{F},v})$. On a la formule $\widehat{\mu}(\overline{E} \otimes \overline{F}) = \widehat{\mu}(\overline{E}) + \widehat{\mu}(\overline{F})$ (voir [G1, proposition 5.2]).

2.6. Puissance symétrique. Soient $\overline{E}$ un fibré adélique hermitien sur k et $\ell \ge 1$ un entier. La puissance symétrique $\ell^{\text{ème}}$ de E, notée $S^{\ell}(E)$, est un quotient de la puissance tensorielle $E^{\otimes \ell}$. Cet espace vectoriel est de dimension $\binom{\ell+n-1}{n-1}$ où $n = \dim E$. Il possède une structure adélique hermitienne $\overline{S^{\ell}(E)}$ définie de la manière suivante : soient v une place de k et $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $E_v = E \otimes \mathbf{C}_v$; la norme $\|\cdot\|_{\overline{S^{\ell}(E)},v}$ est l'unique norme pour laquelle la base $e^i := e_1^{i_1} \cdots e_n^{i_n}$, pour $i = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^n$ de somme $|i| = \ell$, est orthonormée si v est ultramétrique et orthogonale avec

$$\|e^i\|_{\overline{S^{\ell}(E)},v} = \sqrt{i_1! \cdots i_n!/\ell!}$$

si v est archimédienne. Il revient au même de dire que $S^{\ell}(E)$ est muni de la structure quotient de celle de $\overline{E}^{\otimes \ell}$ (voir [G1, p. 45–46]).

2.7. Puissance extérieure. Soient $\overline{E}$ un fibré adélique hermitien sur k de dimension $n \geq 1$ et $\ell \in \{1, \ldots, n\}$. La puissance extérieure $\wedge^\ell E$ peut être munie de normes hermitiennes aux places v de k en décrétant qu'une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de $E \otimes_k \mathbf{C}_v$ fournit une base orthonormée

$$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_\ell}\,;\; 1 \leq i_1 < \cdots < i_\ell \leq n\}$$

de $\wedge^\ell E \otimes_k \mathbf{C}_v$. Ceci confère une structure de fibré hermitien $\overline{\wedge^\ell E}$ à la puissance extérieure, qui, contrairement au cas de la puissance symétrique, n'est pas exactement la structure quotient que l'on obtient par la projection canonique $E^{\otimes \ell} \to \wedge^\ell E$ (un facteur $\sqrt{\ell !}$ différencie les normes aux places archimédiennes). La pente de ce fibré vérifie l'égalité

$$\widehat{\mu}\left(\overline{\wedge^\ell E}\right) = \ell \widehat{\mu}(\overline{E})$$

(une démonstration de cette formule repose sur l'égalité $\det \wedge^\ell u = (\det u)^{\binom{n-1}{\ell-1}}$ où u est un endomorphisme d'espace vectoriel). Lorsque $\ell = n$, cette formule peut être utilisée comme définition de la pente de $\overline{E}$ en termes de hauteurs. En effet, dans ce cas, $\wedge^n E$ est une droite et l'on a $\widehat{\mu}(\overline{\wedge^n E}) = -\log \Lambda(\overline{\wedge^n E}, k) = -\log H_{\overline{\wedge^n E}}(x)$, pour un élément x quelconque de $(\wedge^n E) \setminus \{0\}$.

2.8. Inégalité de convexité pour les hauteurs.

Lemme 2.2: *Soient N un entier ≥ 1 et $\overline{E}_1, \ldots, \overline{E}_N$ des fibrés adéliques hermitiens sur k. Pour tout $(x_1, \ldots, x_N) \in E_1 \times \cdots \times E_N$, on a*

$$\left(\sum_{i=1}^{N} H_{\overline{E}_i}(x_i)^2\right)^{1/2} \leq H_{\overline{E}_1 \oplus \cdots \oplus \overline{E}_N}(x_1, \ldots, x_N).$$

Démonstration. Par convexité de l'application $x \mapsto \log(1 + e^x)$, on a, pour tout ensemble J de cardinal $D \geq 1$ et toute famille de nombres réels positifs $(\theta_j)_{j \in J}$,

$$1 + \left(\prod_{j \in J} \theta_j\right)^{1/D} \leq \prod_{j \in J} (1 + \theta_j)^{1/D}.$$

Par récurrence sur N, on en déduit que, pour tout $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq N,\, j \in J} \in (\mathbf{R}_+)^{ND}$, on a

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\prod_{j \in J} a_{i,j}\right)^{1/D} \leq \prod_{j \in J} (a_{1,j} + \cdots + a_{N,j})^{1/D}.$$

On applique alors cette inégalité à l'ensemble J des plongements complexes de k et $a_{i,j} = \|x_i\|^2_{\overline{E}_i,j}$ puis l'on multiplie par les contributions ultramétriques pour conclure. ∎

Avec les notations du lemme, nous déduisons en particulier que pour toute extension algébrique K de k on a

$$\Lambda(\overline{E}_1 \oplus \cdots \oplus \overline{E}_N, K) = \min_{1 \leq i \leq N} \Lambda(\overline{E}_i, K).$$

3. Autour du théorème de Zhang

3.1. Énoncé général. Soient $\overline{E}$ un fibré adélique hermitien de dimension $n \geq 1$ sur un corps de nombres et i un entier avec $1 \leq i \leq n$. On définit le i-ème minimum de Zhang $Z_i(\overline{E})$ comme la borne inférieure des nombres réels r tels que l'adhérence de Zariski de $\{x \in E \otimes \overline{\mathbf{Q}}\,;\ H_{\overline{E}}(x) \leq r\}$ soit de dimension au moins i. Nous avons $\Lambda(\overline{E}, \overline{\mathbf{Q}}) = Z_1(\overline{E}) \leq Z_2(\overline{E}) \leq \cdots \leq Z_n(\overline{E})$ et, si l'on note $H_n := 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$ le nombre harmonique, le théorème des minima successifs de Zhang dans le cas des fibrés adéliques hermitiens s'énonce comme suit.

Théorème 3.1: *Pour tout fibré adélique hermitien $\overline{E}$ de dimension $n \geq 1$, on a*

$$(Z_1(\overline{E}) \cdots Z_n(\overline{E}))^{1/n} \leq e^{(H_n - 1)/2 - \widehat{\mu}(\overline{E})} \leq Z_n(\overline{E}).$$

Ce résultat découle du théorème 5.2 de [Z1] avec $X = \mathbf{P}(E^\vee)$ et il faut évaluer la hauteur de X comme par exemple dans [Z2]. Mentionnons qu'en toute généralité Zhang traite le cas d'une variété arithmétique X avec des métriques adéliques non nécessairement hermitiennes. Dans ce cadre élargi, les inégalités du théorème sont optimales car il est possible d'avoir $(Z_1(\overline{E}) \cdots Z_n(\overline{E}))^{1/n} = Z_n(\overline{E})$ comme on le voit en prenant $E = k^n$ muni des métriques du supremum en toutes les places (on a $Z_i(\overline{E}) = 1$ pour tout i car les points à coordonnées dans les racines de l'unité forment un ensemble dense de points de hauteur minimale 1).

Lorsque l'on se limite au cadre hermitien comme ici, l'on peut tout de même voir que l'ordre de grandeur de l'encadrement du théorème ne peut pas être amélioré. En effet si $\overline{E}$ est le fibré standard $(k^n, |\cdot|_2)$ alors on a $Z_i(\overline{E}) = \sqrt{i}$ pour tout i. Pour le voir on utilise le lemme 2.2 de convexité des hauteurs pour montrer que $H_{\overline{E}}(x) \geq \sqrt{i}$ dès que x a i coordonnées non nulles, avec égalité lorsque toutes ces coordonnées sont des racines de l'unité. Dans ce cas, l'assertion du théorème s'écrit

$$\sqrt{n!}^{1/n} \leq \exp((H_n - 1)/2) \leq \sqrt{n}$$

où $\sqrt{n!}^{1/n} \geq \sqrt{n/e}$.

3.2. Lemme de Siegel absolu. Le théorème 3.1 implique le lemme suivant qui lui-même entraîne le théorème 1.1.

Lemme 3.2: *Pour tout fibré adélique hermitien de dimension $n \geq 1$, on a*

$$1 \leq \Lambda(\overline{E}, \overline{\mathbf{Q}}) e^{\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})} \leq e^{(H_n - 1)/2}.$$

Démonstration. L'inégalité $\Lambda(\overline{E}, \overline{\mathbf{Q}}) \leq (Z_1(\overline{E}) \cdots Z_n(\overline{E}))^{1/n}$ fournit

$$\Lambda(\overline{E}, \overline{\mathbf{Q}}) e^{\widehat{\mu}(\overline{E})} \leq \exp((H_n - 1)/2)$$

et nous appliquons cette estimation à un sous-espace F tel que $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) = \widehat{\mu}(\overline{F})$:

$$\Lambda(\overline{E}, \overline{\mathbf{Q}}) e^{\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})} \leq \Lambda(\overline{F}, \overline{\mathbf{Q}}) e^{\widehat{\mu}(\overline{F})} \leq \exp((H_{\dim F} - 1)/2) \leq \exp((H_n - 1)/2).$$

La première minoration $-\log \Lambda(\overline{E}, \overline{\mathbf{Q}}) \leq \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})$ traduit simplement l'inégalité tautologique

$$\sup\{\widehat{\mu}(\overline{F}) \mid F \subset E \otimes \overline{\mathbf{Q}},\ \dim F = 1\} \leq \sup\{\widehat{\mu}(\overline{F}) \mid F \subset E \otimes \overline{\mathbf{Q}},\ \dim F \geq 1\}$$

lorsque l'on sait que la pente maximale est invariante par extension des scalaires. ∎

Au lieu du théorème 1.1 nous aurions pu donner un énoncé intermédiaire avec des minima successifs plus classiques c'est-à-dire définis comme les Z_i en remplaçant l'adhérence de Zariski par l'espace vectoriel engendré. On obtient alors un lemme de Siegel absolu exactement de la forme de celui de Roy–Thunder (avec une meilleure constante). Ceci ne présente pas d'intérêt pour ce qui suit car l'on sait que la constante optimale est la même dans les deux formulations (voir [RT] et [Va]).

3.3. Théorème de Minkowski–Hlawka absolu. Étant donné un fibré adélique hermitien $\overline{E}$ sur k, notons $q(\overline{E})$ le nombre réel $\Lambda(\overline{E}, \overline{\mathbf{Q}}) e^{\widehat{\mu}(\overline{E})}$ (analogue de l'invariant d'Hermite d'un réseau euclidien). Le résultat que nous présentons dans ce paragraphe est une version plus précise du théorème 1.2.

Théorème 3.3: *Pour tout entier $n \geq 1$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un fibré adélique hermitien $\overline{E}$ de dimension n (sur un corps de nombres qui dépend de n) tel que $\sqrt{n!}^{1/n}(1-\varepsilon) \leq q(\overline{E})$. En particulier il existe $\overline{E}$ de dimension n tel que $\sqrt{n/e} \leq q(\overline{E})$.*

Le théorème de Minkowski-Hlawka classique affirme que, pour tout $n \geq 2$, il existe un réseau euclidien $\overline{E}$ sur $\mathbf{Q}$ de dimension n avec $\Lambda(\overline{E}, \mathbf{Q})e^{\widehat{\mu}(\overline{E})} \geq (2\zeta(n)/v_n)^{1/n}$ où v_n est le volume de la boule unité de $(\mathbf{R}^n, |\cdot|_2)$. Plus généralement Thunder [Th] a démontré une minoration analogue avec un fibré $\overline{E}$ sur un corps de nombres k fixé : $\Lambda(\overline{E}, k)e^{\widehat{\mu}(\overline{E})} \geq c_k\sqrt{n} + \mathrm{o}(1)$ pour un réel $c_k > 0$. Toutefois, contrairement à ces résultats où l'existence de l'exemple s'obtient par un argument de moyenne, nous donnons ici un exemple *explicite* de $\overline{E}$ satisfaisant la minoration.

Démonstration. Si $n = 1$ alors $q(\overline{E}) = 1$ pour tout $\overline{E}$ et le théorème est démontré. Supposons maintenant $n \geq 2$. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbf{Z})$ une matrice dont aucun mineur (d'ordre quelconque) n'est nul. Par exemple la matrice de coefficient (i,j) égal à $(i+j)!!$ convient. Choisissons ensuite un nombre premier p tel que la propriété des mineurs de M reste vraie modulo p (par exemple si p est strictement plus grand que les valeurs absolues des mineurs de M). Par ailleurs, sans restriction, on peut supposer que $\varepsilon < 1 - \sqrt{1-1/n}$. Prenons alors $a_1 = 1$ et $a_2, \ldots, a_n \in p^{\mathbf{Q}}$ tels que, pour tout $i \in \{2, \ldots, n\}$, on a $\sqrt{i}(1-\varepsilon) < a_i \leq \sqrt{i}$. La condition sur ε entraîne $a_1 < \cdots < a_n$. Soit $k = \mathbf{Q}(a_1, \ldots, a_n)$ et, pour $t \in \{1, \ldots, n\}$, posons Δ_t la matrice diagonale $\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_t)$ de $\mathrm{M}_t(k)$. Considérons le k-fibré adélique hermitien $\overline{E}$ égal à $(k^n, |\cdot|_2)$ sauf en les places v de k au-dessus de p pour lesquelles on pose

$$\forall\, x \in E \otimes_k \mathbf{C}_v, \quad \|x\|_{\overline{E},v} := |\Delta_n M(x)|_{2,v}\,.$$

La pente de $\overline{E}$ vaut $-(1/n)\log\prod_{v|p} |\det(\Delta_n M)|_v^{[k_v:\mathbf{Q}_v]/[k:\mathbf{Q}]} = \log(a_1 \cdots a_n)^{1/n}$ car $|a_i|_v = a_i^{-1}$ pour tout $v \mid p$. Montrons maintenant que $\Lambda(\overline{E}, \overline{\mathbf{Q}}) = 1$. Soient $t \in \{1, \ldots, n\}$ et $x \in \overline{\mathbf{Q}}^n \setminus \{0\}$ ayant exactement t coordonnées non nulles, disons $x_{j_1}, \ldots, x_{j_t}$. Soient $x' = (x_{j_1}, \ldots, x_{j_t})$ et m la matrice extraite $t \times t$ de M de lignes $\{1, \ldots, t\}$ et de colonnes $\{j_1, \ldots, j_t\}$. Le vecteur $\Delta_t m(x')$ est le vecteur des t premières coordonnées de $\Delta_n M(x)$ et donc, pour toute place v de k au-dessus de p, on a $\|x\|_{\overline{E},v} \geq |\Delta_t m(x')|_{2,v}$. Cette dernière quantité vaut

$\max_i |a_i y_i|_v$ où les y_i sont les coordonnées de $m(x')$. On obtient alors

$$\|x\|_{\overline{E},v} \geq |a_t|_v |m(x')|_{2,v} = a_t^{-1}|x'|_{2,v} = a_t^{-1}|x|_{2,v}$$

car m est une isométrie en la place v (choix de M). On en déduit que

$$H_{\overline{E}}(x) \geq a_t^{-1} H_{(k^n,|\cdot|_2)}(x) \geq a_t^{-1}\sqrt{t} \geq 1$$

en utilisant le lemme 2.2. Comme de plus $H_{\overline{E}}(1,0,\dots 0) = 1$, ceci montre que $\Lambda(\overline{E},\overline{\mathbf{Q}}) = 1$ puis $q(\overline{E}) = (a_1 \cdots a_n)^{1/n}$. La minoration $q(\overline{E}) \geq (1-\varepsilon)\sqrt{n!}^{1/n}$ découle alors du choix des a_i et l'inégalité $n! > (n/e)^n$ entraîne $q(\overline{E}) \geq \sqrt{n/e}$ (avec un choix convenable de ε). ∎

4. Minima et produit tensoriel

L'étude du comportement du premier minimum d'un fibré hermitien par produit tensoriel remonte aux travaux de Kitaoka dans les années soixante-dix [Ki, chapitre 7]. Il a montré que $\Lambda(\overline{E}\otimes\overline{F},\mathbf{Q}) = \Lambda(\overline{E},\mathbf{Q})\Lambda(\overline{F},\mathbf{Q})$ lorsque $\overline{E},\overline{F}$ sont des fibrés adéliques hermitiens sur $\mathbf{Q}$ avec $\dim E \leq 43$. *A contrario* Steinberg a établi l'existence, pour tout entier $n \geq 292$, d'un fibré $\overline{E}$ sur $\mathbf{Q}$, de dimension n, tel que $\Lambda(\overline{E}^{\otimes 2},\mathbf{Q}) < \Lambda(\overline{E},\mathbf{Q})^2$ (voir [MH, p. 47]). Par la suite, Coulangeon a obtenu des résultats analogues pour des minima de fibrés sur un corps imaginaire quadratique [Co]. Dans cette partie nous examinons le comportement du minimum sur $\overline{\mathbf{Q}}$ vis-à-vis du produit tensoriel. La situation est plus tranchée : nous montrons que le couple $\{43, 292\}$ sur $\mathbf{Q}$ peut être remplacé par $\{1,2\}$.

4.1. Réseau de racines de type $\mathbf{A}_n$. Nous donnons un bref exemple pour lequel on a multiplicativité par rapport au produit tensoriel. Ce serait déjà le cas pour le fibré standard mais nous proposons une variante qui nous servira également à illustrer d'autres résultats.

Soient n un entier ≥ 1 et A_n l'hyperplan $\{(x_1,\dots,x_{n+1})\,;\, x_1+\cdots+x_{n+1} = 0\}$ de $\mathbf{Q}^{n+1}$.

Proposition 4.1: *Le fibré adélique hermitien $\mathbf{A}_n := (A_n, |\cdot|_2)$ possède la propriété suivante. Pour toute extension algébrique $K/\mathbf{Q}$, pour tout fibré adélique hermitien $\overline{E}$ sur $\mathbf{Q}$, on a*

$$\Lambda(\mathbf{A}_n \otimes \overline{E}, K) = \Lambda(\mathbf{A}_n, K)\Lambda(\overline{E}, K) \quad \textit{et} \quad \Lambda(\mathbf{A}_n, K) = \sqrt{2}.$$

Démonstration. On peut supposer que K est un corps de nombres. Pour

$$x_1, \ldots, x_n \in E_K := E \otimes K,$$

l'application

$$x := \sum_{i=1}^{n} (e_i - e_{n+1}) \otimes x_i \mapsto \iota(x) := (x_1, \ldots, x_n, x_1 + \cdots + x_n)$$

est une injection (isométrique) de $\mathbf{A}_n \otimes \overline{E}_K$ dans $\bigoplus_{i=1}^{n+1} \overline{E}_K$ et donc

$$H_{\mathbf{A}_n \otimes \overline{E}}(x) = H_{\bigoplus_{i=1}^{n+1} \overline{E}}(\iota(x)) \geq \left(H_{\overline{E}}(x_1 + \cdots + x_n)^2 + \sum_{i=1}^{n} H_{\overline{E}}(x_i)^2 \right)^{1/2}$$

par le lemme 2.2. Dans le minorant au moins deux termes ne sont pas nuls si $x \neq 0$ et, dans ce cas, $H_{\mathbf{A}_n \otimes \overline{E}}(x) \geq \sqrt{2}\Lambda(\overline{E}, K)$ puis $\Lambda(\mathbf{A}_n \otimes \overline{E}, K) \geq \sqrt{2}\Lambda(\overline{E}, K)$. L'égalité s'obtient en considérant le vecteur $(e_1 - e_{n+1}) \otimes x_1$ avec $H_{\overline{E}}(x_1) = \Lambda(\overline{E}, K)$. ∎

De cette démonstration l'on déduit également que les vecteurs x de $A_n \otimes E_K$ tels que $H_{\mathbf{A}_n \otimes \overline{E}}(x) = \Lambda(\mathbf{A}_n \otimes \overline{E}, K)$ sont *scindés*, de la forme $(e_i - e_j) \otimes e$ avec $i \neq j$ et $H_{\overline{E}}(e) = \Lambda(\overline{E}, K)$.

4.2. Non-multiplicativité. Dans ce paragraphe nous démontrons que le premier minimum sur $\overline{\mathbf{Q}}$ n'est en général pas multiplicatif relativement au produit tensoriel (théorème 1.5).

Soit $q \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$. Pour $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, soit $(2+\varepsilon i)^q$ une puissance $q^{\text{ème}}$ de $2+\varepsilon i$. Soit k une extension finie de $\mathbf{Q}(i)$ contenant $(2+i)^q$ et $(2-i)^q$. Les nombres $2+i$ et $2-i$ engendrent les deux idéaux premiers de $\mathbf{Z}[i]$ au-dessus de 5 et la valeur absolue v-adique de $2+\varepsilon i$ vaut $1/5$ ou 1 selon que la place v de k divise ou non la place $2+\varepsilon i$. Considérons alors le fibré adélique hermitien $\overline{E}_q$ sur k d'espace sous-jacent k^2, de normes $|\cdot|_{2,v}$ en toutes les places v de k qui ne divisent pas 5 et, pour $\varepsilon \in \{-1, 1\}$,

$$\|(x,y)\|_{\overline{E}_q, v} := \max\left(|x|_v, 5^q \left|x + \varepsilon y\right|_v\right) \quad \text{si } v \mid 2 + \varepsilon i.$$

En d'autres termes, $\overline{E}_q$ est le fibré hermitien donné par la matrice

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (2+\varepsilon i)^{-q} & \varepsilon(2+\varepsilon i)^{-q} \end{pmatrix}$$

en une place $v \mid 2+\varepsilon i$ (et la matrice identité en les autres places). En particulier, on a $\widehat{\mu}(\overline{E}_q) = -(q/2)\log 5$.

Théorème 4.2: *Il existe un nombre réel $\eta > 0$ tel que, pour tout nombre rationnel q vérifiant $\sqrt{2} < 5^q < \sqrt{2} + \eta$, on a $\Lambda(\overline{E}_q, \overline{\mathbf{Q}}) = 5^q$. En particulier, pour un tel q, on a $\Lambda(\overline{E}_q^{\otimes 2}, \overline{\mathbf{Q}}) < \Lambda(\overline{E}_q, \overline{\mathbf{Q}})^2$.*

La démonstration utilise le lemme suivant.

Lemme 4.3: *Soient $q \in \mathbf{Q}$ et $(x, y) \in \overline{\mathbf{Q}}^2$ avec $q > 0$ et $xy \neq 0$. Alors $H_{\overline{E}_q}(x, y) > \sqrt{2}$.*

Démonstration. Si $v \mid 2+\varepsilon i$ nous avons $\max(|x|_v, |y|_v) \leq \max(|x|_v, |x+\varepsilon y|_v) \leq \|(x, y)\|_{\overline{E}_q, v}$ donc $H_{\overline{E}_q}(x, y) \geq H_{(k^2, |\cdot|_2)}(x, y) \geq \sqrt{2}$ où la seconde inégalité résulte du lemme 2.2. Supposons qu'il y ait égalité $H_{\overline{E}_q}(x, y) = \sqrt{2}$. Alors $y = \xi x$ avec ξ racine de l'unité vérifiant $|1 + \varepsilon\xi|_v \leq 5^{-q}$ pour toute place $v \mid 2+\varepsilon i$ et tout $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Ainsi $(1+\varepsilon\xi)/(2+\varepsilon i)^q$, dont toutes les valeurs absolues ultramétriques sont plus petites que 1, est un entier algébrique. L'égalité $1 - \xi = -\xi(\overline{1 - \xi})$ montre que $(1 - \xi)/(2 + i)^q$ est aussi un entier algébrique. Il en est alors de même pour $2/(2+i)^q = (1-\xi+1+\xi)/(2+i)^q$ ce qui est absurde puisque sa valeur absolue en une place au-dessus de $2 + i$ est $5^q > 1$. ∎

Démonstration du théorème 4.2. Nous appliquons le théorème 3.1 à $\overline{E}_{1/5}$: on a $Z_2(\overline{E}_{1/5}) \geq e^{1/4}5^{1/10} > 5^{1/4} > \sqrt{2}$. Par définition de Z_2, les couples $(x, y) \in \overline{\mathbf{Q}}^2$ tels que $H_{\overline{E}_{1/5}}(x, y) \leq 5^{1/4}$ appartiennent à un nombre fini de droites. D'après le lemme, il existe donc $\eta > 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in \overline{\mathbf{Q}}^2$ avec $xy \neq 0$, on a $H_{\overline{E}_{1/5}}(x, y) \geq \sqrt{2}+\eta$. Choisissons maintenant $q \in \mathbf{Q}$ tel que $\sqrt{2} < 5^q < \sqrt{2}+\eta$, ce qui implique $q > 1/5$. Pour tous nombres algébriques x, y et toute place v, on a $\|(x, y)\|_{\overline{E}_q, v} \geq \|(x, y)\|_{\overline{E}_{1/5}, v}$ et donc $H_{\overline{E}_q}(x, y) \geq H_{\overline{E}_{1/5}}(x, y)$. Si $xy \neq 0$ ces hauteurs sont supérieures à $\sqrt{2} + \eta > 5^q$. Si $xy = 0$ et $(x, y) \neq (0, 0)$ alors $H_{\overline{E}_q}(x, y) = 5^q$. Ceci montre que $\Lambda(\overline{E}_q, \overline{\mathbf{Q}}) = 5^q$. Quant au produit tensoriel $\overline{E}_q^{\otimes 2}$, il s'identifie à k^4 muni de sa structure hermitienne usuelle sauf en les places v au-dessus de $2 + \varepsilon i$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, pour lesquelles la norme est donnée par le produit de Kronecker $A_\varepsilon \otimes A_\varepsilon$:

$$\|(x, y, z, t)\|_{\overline{E}_q \otimes \overline{E}_q, v} = \max\left(|x|_v, 5^q|x + \varepsilon y|_v, 5^q|x + \varepsilon z|_v, 5^{2q}|x + \varepsilon y + \varepsilon z + t|_v\right).$$

De la sorte on a $\Lambda(\overline{E}_q^{\otimes 2}, \overline{\mathbf{Q}}) \leq H_{\overline{E}_q \otimes \overline{E}_q}(1, 0, 0, -1) = \sqrt{2} \cdot 5^q$ et la seconde assertion du théorème s'ensuit. ∎

Le théorème 1.5 s'obtient en choisissant pour $\overline{E}$ et $\overline{F}$ des sommes directes hermitiennes d'un $\overline{E}_q$ fixé et d'un fibré quelconque de minimum absolu $\geq 5^q$. En calculant le minimum d'une somme directe comme indiqué après le lemme 2.2, nous trouvons $\Lambda(\overline{E}, \overline{\mathbf{Q}}) = \Lambda(\overline{F}, \overline{\mathbf{Q}}) = 5^q$ et $\Lambda(\overline{E} \otimes \overline{F}, \overline{\mathbf{Q}}) \leq \Lambda(\overline{E}_q^{\otimes 2}, \overline{\mathbf{Q}}) < 5^{2q}$.

5. Pentes et produit tensoriel

5.1. Actions de groupes. Nous donnons dans ce paragraphe un calcul de pente maximale en présence d'une action de groupe. Nous disons qu'un *groupe* G *agit sur un fibré vectoriel adélique* $\overline{E}$ lorsque G agit sur l'espace vectoriel E et que, pour tout $g \in G$ et toute place v de k, l'automorphisme de $E \otimes_k \mathbf{C}_v$ donné par g est une isométrie pour la norme $\| \cdot \|_{\overline{E},v}$. De plus, l'action est dite :

- *irréductible* si les seuls sous-espaces G-stables de E sont $\{0\}$ et E ;
- *géométriquement irréductible* si l'action de G sur $E \otimes_k \overline{k}$ est irréductible.

Avec cette terminologie, nous avons l'énoncé suivant.

Proposition 5.1: *Soient $\overline{E}$ et $\overline{F}$ deux fibrés vectoriels adéliques hermitiens. Soit G un groupe agissant sur $\overline{E}$ de façon géométriquement irréductible. Alors $\overline{E}$ est semi-stable et $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E} \otimes \overline{F}) = \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) + \widehat{\mu}_{\max}(\overline{F})$.*

Nous utilisons dans la démonstration le lemme ci-dessous de théorie des représentations.

Lemme 5.2: *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur un corps k. Soient G un groupe agissant sur E de manière géométriquement irréductible et W un sous-espace G-stable de $E \otimes F$. Alors il existe un sous-espace F_0 de F tel que $W = E \otimes F_0$.*

Démonstration. Nous raisonnons par l'absurde et considérons un espace F de dimension minimale pour lequel le lemme est faux (à E fixé). Nous choisissons ensuite un sous-espace W de dimension minimale qui viole l'énoncé. Ceci entraîne d'une part que le seul sous-espace F_1 de F tel que $W \subset E \otimes F_1$ est F lui-même et d'autre part que W est irréductible pour l'action de G : s'il contenait un sous-espace strict non nul et G-stable celui-ci serait de la forme $E \otimes F_2$ et $W/(E \otimes F_2) \subset E \otimes (F/F_2)$ fournirait un contre-exemple de dimension inférieure. Par conséquent si $\ell \in F^\vee$ alors $\mathrm{id}_E \otimes \ell$ induit un G-morphisme $W \to E$ qui ne peut être que nul ou bijectif. S'il est nul $W \subset E \otimes \operatorname{Ker} \ell$ donne $\operatorname{Ker} \ell = F$ donc $\ell = 0$. Par suite, pour tous $\ell, \ell' \in F^\vee \setminus \{0\}$, nous obtenons un G-automorphisme

$\varphi = (\mathrm{id}_E \otimes \ell')_{|W} \circ (\mathrm{id}_E \otimes \ell)^{-1}_{|W}$ de E. Par le lemme de Schur, φ s'écrit $\lambda \mathrm{id}_E$ pour $\lambda \in k$ (c'est ici qu'intervient l'hypothèse d'irréductibilité sur $\overline{k}$: il existe $\lambda \in \overline{k}$ tel que $\varphi_{\overline{k}} - \lambda \mathrm{id}_{E\otimes\overline{k}}$ est non inversible donc nul donc $\varphi_{\overline{k}} = \lambda \mathrm{id}_{E\otimes\overline{k}}$ puis $\lambda \in k$). Nous en déduisons $(\mathrm{id}_E \otimes \ell')_{|W} = \lambda(\mathrm{id}_E \otimes \ell)_{|W}$ puis $W \subset E \otimes \mathrm{Ker}(\ell' - \lambda\ell)$ et, comme ci-dessus, cela entraîne $\ell' - \lambda\ell = 0$. On conclut $\dim F = 1$ mais comme $\dim W = \dim E$ l'inclusion $W \subset E \otimes F$ ne peut pas être stricte et c'est la contradiction cherchée. ∎

L'autre ingrédient de notre démonstration est l'existence, pour un fibré adélique hermitien $\overline{E}$, d'un unique sous-espace V de pente et dimension maximales (voir [G1, lemme 5.12]) parfois appelé sous-espace *déstabilisant*. En particulier, si un groupe G agit sur $\overline{E}$, ceci montre immédiatement que V est G-stable (si $g \in G$ le sous-espace $g(V)$ a même pente et même dimension que V). On en déduit donc (voir [G1, proposition 5.17]) que si l'action est irréductible alors $\overline{E}$ est semi-stable (car $V = E$). Ceci permet également de voir que la pente maximale est invariante par extension de corps *via* l'action d'un groupe de Galois.

Démonstration de la proposition 5.1. Soit W l'unique sous-espace de $E\otimes F$ avec $\widehat{\mu}(\overline{W}) = \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}\otimes\overline{F})$ et de dimension maximale parmi les sous-espaces de même pente. Par unicité W est G-stable donc par le lemme il est de la forme $E \otimes F_0$. Par suite nous avons

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E} \otimes \overline{F}) = \widehat{\mu}(\overline{W}) = \widehat{\mu}(\overline{E}) + \widehat{\mu}(\overline{F_0}) \leq \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) + \widehat{\mu}_{\max}(\overline{F})$$

et le résultat en découle car l'inégalité contraire est toujours vraie. ∎

Comme application directe, nous voyons que $\mathbf{A}_n$ est semi-stable et que, pour tout fibré adélique hermitien $\overline{E}$ sur un corps de nombres, on a

$$\widehat{\mu}_{\max}(\mathbf{A}_n \otimes \overline{E}) = \widehat{\mu}_{\max}(\mathbf{A}_n) + \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}).$$

En effet le groupe symétrique $\mathfrak{S}_{n+1}$ sur $n+1$ éléments agit sur $\mathbf{A}_n$ de manière géométriquement irréductible (en permutant les coordonnées).

5.2. Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème 1.3 et ses conséquences directes.

Démonstration du théorème 1.3. Soit K une extension finie de k. On choisit $x = \sum_{i=1}^{\ell} e_i \otimes f_i \in E \otimes F \otimes K$ tel que i) $H_{\overline{E}\otimes\overline{F}}(x) = \Lambda(\overline{E}\otimes\overline{F}, K)$ et ii) l'entier ℓ est minimal pour cette propriété. La minimalité de ℓ implique que les espaces vectoriels $E_1 := \mathrm{vect}_K(e_1, \ldots, e_\ell)$ et $F_1 := \mathrm{vect}_K(f_1, \ldots, f_\ell)$ sont de dimension ℓ. Montrons que[2]

$$H_{\overline{E}\otimes\overline{F}}(x) \geq \sqrt{\ell} \exp\left\{-\left(\widehat{\mu}(\overline{E_1}) + \widehat{\mu}(\overline{F_1})\right)\right\}. \tag{4}$$

On le fait place par place. On choisit des bases orthonormées de $\overline{E_1}$ et $\overline{F_1}$ en une place v et l'on note X_v (resp. Y_v) la matrice de $(e_1, \ldots, e_\ell)$ (resp. $(f_1, \ldots, f_\ell)$) dans les bases orthonormées choisies. Alors $\|x\|_{\overline{E}\otimes\overline{F},v}$ vaut $|{}^{\mathrm{t}}X_vY_v|_{2,v}$, *i.e.* la racine carrée de la somme des carrés des valeurs absolues des coefficients de ${}^{\mathrm{t}}X_vY_v$ (norme de Hilbert–Schmidt) si v est archimédienne et le maximum des valeurs absolues des coefficients de ${}^{\mathrm{t}}X_vY_v$ si v est ultramétrique. Or, comme conséquence de l'inégalité arithmético-géométrique dans le cas archimédien et de la simple inégalité ultramétrique dans le cas ultramétrique, on a

$$|\det X_v|_v^{1/\ell}\, |\det Y_v|_v^{1/\ell} = \left|\det {}^{\mathrm{t}}X_vY_v\right|_v^{1/\ell} \leq \|x\|_{\overline{E}\otimes\overline{F},v} \times \begin{cases} \ell^{-1/2} & \text{si } v \mid \infty, \\ 1 & \text{si } v \nmid \infty. \end{cases}$$

On obtient alors (4) par produit car la matrice adélique $(X_v)_{v\in V(K)}$ définit la structure hermitienne de $\overline{E_1}$ (*idem* pour les Y_v et $\overline{F_1}$). Ceci étant établi, on applique le théorème 1.1 à $\overline{E_1}$: $\Lambda(\overline{E_1}, \overline{\mathbf{Q}}) \leq \sqrt{\ell} \exp\left\{-\widehat{\mu}(\overline{E_1})\right\}$. En majorant $\widehat{\mu}(\overline{F_1})$ par $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{F})$ et $\Lambda(\overline{E}, \overline{\mathbf{Q}})$ par $\Lambda(\overline{E_1}, \overline{\mathbf{Q}})$, on obtient

$$\Lambda(\overline{E}, \overline{\mathbf{Q}})e^{-\widehat{\mu}_{\max}(\overline{F})} \leq \Lambda(\overline{E}\otimes\overline{F}, K)$$

pour toute extension K/k. Ceci permet de conclure. ∎

Remarque 5.3: Nous venons de démontrer le théorème 1.3 à l'aide du théorème 1.1. Inversement, ce dernier est contenu dans le théorème 1.3 comme le montre l'argument suivant (inspiré de celui du théorème 3.6 de [BC]) : soit V le sous-espace déstabilisant de E ; on a $\Lambda(\overline{V}\otimes\overline{V}^{\vee}, \overline{\mathbf{Q}}) \leq \sqrt{\dim V} \leq \sqrt{n}$ en considérant l'identité ; le théorème 1.3 donne

$$\Lambda(\overline{V}\otimes\overline{V}^{\vee}, \overline{\mathbf{Q}}) \geq \Lambda(\overline{V}, \overline{\mathbf{Q}})e^{-\widehat{\mu}_{\max}(\overline{V}^{\vee})} \geq \Lambda(\overline{E}, \overline{\mathbf{Q}})e^{\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})}$$

car $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{V}^{\vee}) = \widehat{\mu}(\overline{V}^{\vee}) = -\widehat{\mu}(\overline{V}) = -\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})$ par semi-stabilité de $\overline{V}$ et de son dual. On obtient ainsi $\Lambda(\overline{E}, \overline{\mathbf{Q}})e^{\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})} \leq \sqrt{n}$.

Nous déduisons de cet énoncé une version légèrement plus précise du corollaire 1.4.

[2] L'argument qui suit est classique. On le trouve en substance au chapitre 7 du livre de Kitaoka [Ki].

Corollaire 5.4: *Soient $N \geq 1$ un entier naturel et $\overline{E}_1, \ldots, \overline{E}_N$ des fibrés adéliques hermitiens, de dimensions respectives $n_1, \ldots, n_N \geq 1$. Alors on a*

$$\Lambda\left(\overline{E}_1 \otimes \cdots \otimes \overline{E}_N, \overline{\mathbf{Q}}\right)^{-1} \prod_{i=1}^{N} \Lambda(\overline{E}_i, \overline{\mathbf{Q}}) \leq \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{N}(H_{n_i} - 1)\right)$$

et

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_1 \otimes \cdots \otimes \overline{E}_N) \leq \left(\sum_{i=1}^{N} \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_i)\right) + \frac{1}{2}(H_{n_1 \cdots n_N} - 1).$$

Nous pouvons également citer la conséquence suivante du théorème 1.3.

Corollaire 5.5: *Pour tous fibrés adéliques hermitiens $\overline{E}_1, \ldots, \overline{E}_N$, on a*

$$\exp\left\{-\sum_{i=1}^{N} \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_i)\right\} \leq \Lambda(\overline{E}_1 \otimes \cdots \otimes \overline{E}_N, \overline{\mathbf{Q}}).$$

6. Puissances symétriques

Dans cette partie, nous établissons le résultat suivant.

Théorème 6.1: *Soient $\ell \geq 1$ un entier et $\overline{E}$ un fibré adélique hermitien sur k, de dimension $n \geq 1$. Soit $p(n, \ell)$ le ppcm des coefficients multinomiaux $\{\ell!/i!\,; i \in \mathbf{N}^n$ et $|i| = \ell\}$ (voir l'appendice). On a*

$$0 \leq \widehat{\mu}_{\max}\left(\overline{S^{\ell}(E)}\right) - \ell\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) \leq \frac{1}{2}\log\binom{\ell + n - 1}{n - 1} + \log p(n, \ell)$$

et

$$1 \leq \Lambda\left(\overline{S^{\ell}(E)}, \overline{\mathbf{Q}}\right)^{-1} \Lambda(\overline{E}, \overline{\mathbf{Q}})^{\ell} \leq p(n, \ell)\exp\left(\frac{\ell - 1}{2}(H_n - 1)\right).$$

La démonstration du théorème 6.1 repose sur le résultat suivant.

Lemme 6.2: *Avec les données du théorème 6.1, on a*

$$\Lambda(\overline{E}^{\otimes \ell}, \overline{\mathbf{Q}}) \leq p(n, \ell)\Lambda\left(\overline{S^{\ell}(E)}, \overline{\mathbf{Q}}\right).$$

Démonstration. La projection canonique $(E^{\vee})^{\otimes \ell} \to S^{\ell}(E^{\vee})$ fournit une injection isométrique

$$\iota\colon \left(S^{\ell}(E^{\vee})\right)^{\vee} \hookrightarrow \left((E^{\vee})^{\otimes \ell}\right)^{\vee} \simeq E^{\otimes \ell}.$$

Soit $\theta\colon S^\ell(E) \to \left(S^\ell(E^\vee)\right)^\vee$ l'application linéaire définie de la manière suivante : soient $x_1 \cdots x_\ell \in S^\ell(E)$ $(x_i \in E)$ et $\varphi_1 \cdots \varphi_\ell \in S^\ell(E^\vee)$ $(\varphi_i \in E^\vee)$. Posons

$$(\theta(x_1 \cdots x_\ell))\,(\varphi_1 \cdots \varphi_\ell) := \frac{1}{\ell!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_\ell} \prod_{i=1}^{\ell} \varphi_i(x_{\sigma(i)})$$

($\mathfrak{S}_\ell$ est le groupe symétrique de $\{1, \ldots, \ell\}$). Cette formule a un sens car, par symétrie, elle ne dépend pas du choix de l'ordre dans lequel sont les x_i. La définition de θ se prolonge naturellement à des éléments quelconques de $S^\ell(E)$ et $S^\ell(E^\vee)$ par bilinéarité. L'application θ est un isomorphisme d'espaces vectoriels et l'inégalité (3) appliquée à $\iota \circ \theta$ donne

$$\Lambda(\overline{E}^{\otimes \ell}, \overline{\mathbf{Q}}) \leq H(\theta) \Lambda\left(\overline{S^\ell(E)}, \overline{\mathbf{Q}}\right).$$

Montrons que $H(\theta) = p(n, \ell)$. Soit θ_v le prolongement de θ à $S^\ell(E) \otimes_k \mathbf{C}_v$. On a une écriture alternative de θ_v, valable pour toute base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $E \otimes_k \mathbf{C}_v$, de base duale $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$, de la forme (les notations sont celles du § 2.6) :

$$\theta_v\Bigg(\sum_{|i|=\ell} a_i e^i\Bigg)\Bigg(\sum_{|i|=\ell} b_i \phi^i\Bigg) = \sum_{|i|=\ell} \frac{i!}{\ell!} a_i b_i$$

$(a_i, b_i \in k)$. Pour utiliser cette formule, nous choisissons une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de $E \otimes \mathbf{C}_v$ et la base duale est automatiquement orthonormée. L'application θ_v est une isométrie si v est archimédienne. En effet, en une telle place v, en écrivant $(i!/\ell!) a_i b_i = \sqrt{(i!/\ell!)} a_i \times \sqrt{(i!/\ell!)} b_i$ et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\left\| \theta_v\Bigg(\sum_{|i|=\ell} a_i e^i\Bigg) \right\|_{\overline{S^\ell(E^\vee)^\vee}, v} \leq \left\| \sum_{|i|=\ell} a_i e^i \right\|_{\overline{S^\ell(E)}, v}.$$

Le choix $b_i := \overline{a_i}$ donne l'égalité et θ_v est une isométrie en v. Si v est ultramétrique, les bases $(e^i)_{|i|=\ell}$ et $(\phi^i)_{|i|=\ell}$ sont orthonormées et par inégalité ultramétrique, on a

$$\|\theta\|_v = \sup_{x \in S^\ell(E \otimes_k \mathbf{C}_v) \setminus \{0\}} \left(\frac{\|\theta_v(x)\|_{\overline{S^\ell(E^\vee)^\vee}, v}}{\|x\|_{\overline{S^\ell(E)}, v}} \right) = \max_{|i|=\ell} \left| \frac{i!}{\ell!} \right|_v$$

(l'égalité est satisfaite comme on le voit en considérant $x = e^i$, i réalisant le maximum). Il ne reste plus qu'à observer que le dernier maximum qui apparaît vaut $|p(n, \ell)|_v^{-1}$ et que le produit de ces nombres (renormalisés avec les degrés locaux) sur les places ultramétriques v de k vaut $p(n, \ell)$. ∎

Démonstration du théorème 6.1. La positivité de la différence des pentes maximales est bien connue (voir [G1, proposition 7.1]). Pour la majoration de cette différence, le corollaire 5.5 minore $\Lambda(\overline{E}^{\otimes\ell},\overline{\mathbf{Q}})$ par $\exp\{-\ell\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})\}$ et le théorème de Zhang 1.1 donne

$$\Lambda\left(\overline{S^\ell(E)},\overline{\mathbf{Q}}\right)\leq\binom{\ell+n-1}{n-1}^{1/2}\exp\left\{-\widehat{\mu}_{\max}\overline{(S^\ell(E))}\right\}.$$

On conclut avec le lemme 6.2. En ce qui concerne le minimum de $\overline{S^\ell(E)}$, la majoration par $\Lambda(\overline{E},\overline{\mathbf{Q}})^\ell$ s'obtient simplement en considérant $x^\ell\in S^\ell(E\otimes\overline{\mathbf{Q}})\setminus\{0\}$ pour $x\in(E\otimes\overline{\mathbf{Q}})\setminus\{0\}$. On a

$$\Lambda(\overline{S^\ell(E)},\overline{\mathbf{Q}})\leq H_{\overline{S^\ell(E)}}(x^\ell)\leq H_{\overline{E}^{\otimes\ell}}(x\otimes\cdots\otimes x)=H_{\overline{E}}(x)^\ell$$

et l'on fait ensuite tendre $H_{\overline{E}}(x)$ vers $\Lambda(\overline{E},\overline{\mathbf{Q}})$. Pour la minoration, on utilise encore le lemme 6.2 et l'on minore $\Lambda(\overline{E}^{\otimes\ell},\overline{\mathbf{Q}})$ avec le corollaire 5.4. ∎

Afin de juger de la finesse de cette estimation, voici un calcul de la pente maximale d'une puissance symétrique lorsque $\overline{E}=(\mathbf{Q}^n,|\cdot|_2)$.

Proposition 6.3: *Soient $n,\ell\geq1$ deux entiers. Posons $\lambda:=[\ell/n]$. Pour toute extension algébrique K de $\mathbf{Q}$, on a*

$$-\log\Lambda\left(S^\ell(\mathbf{Q}^n,|\cdot|_2),K\right)=\widehat{\mu}_{\max}\left(S^\ell(\mathbf{Q}^n,|\cdot|_2)\right)=\frac{1}{2}\log\frac{\ell!}{\lambda!^n\,(\lambda+1)^{\ell-n\lambda}}.$$

Démonstration. Soient $e_1,\ldots,e_n$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbf{Q}^n$. Alors $S^\ell(\mathbf{Q}^n,|\cdot|_2)$ est la somme directe hermitienne des droites $\mathbf{Q}.e_1^{i_1}\cdots e_n^{i_n}$ pour $i=(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbf{N}^n$ de longueur $|i|=\ell$. Ainsi on a

$$\widehat{\mu}_{\max}(S^\ell(\mathbf{Q}^n,|\cdot|_2))=\max_{|i|=\ell}\{\widehat{\mu}(\mathbf{Q}.e_1^{i_1}\cdots e_n^{i_n})\}=\max_{|i|=\ell}\left\{\frac{1}{2}\log\frac{\ell!}{i!}\right\}\tag{5}$$

(voir [G1, p. 66]). Par ailleurs $\Lambda\left(S^\ell(\mathbf{Q}^n,|\cdot|_2),K\right)$ est le minimum des hauteurs des $e_1^{i_1}\cdots e_n^{i_n}$, qui vaut $\min\sqrt{i!/\ell!}$ (voir § 2.8). Ceci établit la première égalité de la proposition 6.3. Quant à la seconde, considérons le multiplet $j=(j_1,\ldots,j_n)$ qui réalise le maximum dans (5). Pour tous entiers $h,m\in\{1,\ldots,n\}$, on a $j_h\leq j_m+1$ comme on le voit en posant $j'=j-e_h+e_m$ (lorsque $j_h\neq0$) et en utilisant $j!\leq j'!$. Les valeurs prises par les coordonnées de j sont donc soit a soit $a+1$ pour un certain entier naturel a. Posons $N=\operatorname{card}\{h\,;\ j_h=a+1\}$. On a $N=\ell-na$ car $|j|=\ell$. Si $N=n$ alors $a+1=\ell/n=\lambda$ et la proposition est démontrée. Si $N\leq n-1$ alors l'égalité $\ell=na+N$ est la division euclidienne de ℓ par n et donc $a = \lambda$. Il suffit alors d'observer que $j! = a!^{n-N}(a+1)!^N = a!^n(a+1)^N$ pour conclure. ∎

Le théorème 6.1 et la proposition 6.3 donnent un encadrement de la quantité $\Delta(n,\ell) := \sup_{\overline{E}} (\widehat{\mu}_{\max}(\overline{S^\ell(E)}) - \ell\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}))$ où $\overline{E}$ parcourt tous les fibrés adéliques hermitiens de dimension n. Plus précisément, on a

$$\begin{array}{ccccc} \widehat{\mu}_{\max}\left(S^\ell(\mathbf{Q}^n, |\cdot|_2)\right) & \leq & \Delta(n,\ell) & \leq & \frac{1}{2}\log\binom{\ell+n-1}{n-1} + \log p(n,\ell) \\ \| & & & & \| \\ \frac{\ell}{2}\log n + \mathrm{o}(\ell) & \leq & \Delta(n,\ell) & \leq & \ell H_{n-1} + \mathrm{o}(\ell) \end{array}$$

lorsque $\ell \to +\infty$. L'égalité de gauche provient de la formule de Stirling et celle de droite est démontrée au § 8.2 où nous verrons aussi $\Delta(n,\ell) \leq 2\ell\log n$.

Remarque 6.4: Le début de la démonstration de la proposition 6.3 montre également que la puissance symétrique $S^\ell(\mathbf{Q}^n, |\cdot|_2)$ est semi-stable si et seulement si ℓ ou n égale 1. En effet, la pente $\widehat{\mu}(S^\ell(\mathbf{Q}^n, |\cdot|_2))$ est la moyenne des pentes des $\mathbf{Q}.e_1^{i_1}\cdots e_n^{i_n}$ (la pente d'une somme directe hermitienne est une moyenne pondérée des pentes, voir § 2.4) tandis que (5) montre que la pente maximale est le maximum de ces pentes. Par conséquent, l'égalité $\widehat{\mu}_{\max}(S^\ell(\mathbf{Q}^n, |\cdot|_2)) = \widehat{\mu}(S^\ell(\mathbf{Q}^n, |\cdot|_2))$ n'est possible que si $i!$ reste constant sur $\{i \in \mathbf{N}^n\,;\ |i| = \ell\}$. On voit alors que les seules possibilités sont $\ell = 1$ ou $n = 1$ en considérant les multiplets $(\ell, 0, \ldots, 0)$ et $(\ell-1, 1, 0, \ldots, 0)$ (lorsque $n \geq 2$).

7. Puissances extérieures

Soient $\overline{E}$ un fibré adélique hermitien sur k de dimension $n \geq 1$ et $\ell \in \{1, \ldots, n\}$.

Théorème 7.1: *On a*

$$\ell\widehat{\mu}(\overline{E}) \leq \widehat{\mu}_{\max}(\overline{\wedge^\ell E}) \leq \ell\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) + \frac{1}{2}\log\frac{n!}{(n-\ell)!}$$

et

$$-\log\Lambda(\overline{\wedge^\ell E}, \overline{\mathbf{Q}}) \leq -\ell\log\Lambda(\overline{E}, \overline{\mathbf{Q}}) + \frac{\ell-1}{2}(H_n - 1) + \frac{1}{2}\log\ell!.$$

Démonstration. La minoration de la pente maximale découle de la formule donnant la pente de $\overline{\wedge^\ell E}$ en fonction de celle de $\overline{E}$ (§ 2.7). Pour la majoration, considérons l'application $\psi\colon \wedge^\ell E \to E^{\otimes\ell}$ induite par la forme multilinéaire alternée

$$(x_1, \ldots, x_\ell) \mapsto \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_\ell} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(\ell)}$$

($\varepsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ). L'application ψ est injective et ses normes d'opérateur sont $\|\psi\|_v = 1$ si $v \nmid \infty$ et $\|\psi\|_v = \sqrt{\ell!}$ si $v \mid \infty$. Par conséquent, on a $\Lambda(\overline{E}^{\otimes \ell}, \overline{\mathbf{Q}}) \leq \sqrt{\ell!} \cdot \Lambda(\overline{\wedge^\ell E}, \overline{\mathbf{Q}})$ d'après (3). En utilisant le corollaire 5.5 et la majoration $\Lambda(\overline{\wedge^\ell E}, \overline{\mathbf{Q}}) \leq \sqrt{\binom{n}{\ell}} \exp(-\widehat{\mu}_{\max}(\overline{\wedge^\ell E}))$ du théorème 1.1, nous obtenons la majoration souhaitée de la pente maximale de $\overline{\wedge^\ell E}$. Si nous appliquons plutôt le corollaire 5.4 nous obtenons la majoration de $-\log \Lambda(\overline{\wedge^\ell E}, \overline{\mathbf{Q}})$ du théorème. ∎

Dans la minoration de la pente maximale de $\overline{\wedge^\ell E}$ donnée par ce théorème, il n'est pas possible en général de remplacer $\widehat{\mu}(\overline{E})$ par $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})$ car si $\ell = n$ alors $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{\wedge^\ell E}) = \widehat{\mu}(\overline{\wedge^\ell E}) = \ell \widehat{\mu}(\overline{E})$.

Revenons au réseau de racines $\mathbf{A}_n$ introduit au § 4.1.

Proposition 7.2: *Soient $n \geq 1$ et $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ des entiers. Pour tout fibré adélique hermitien $\overline{E}$ sur $\mathbf{Q}$, on a*

$$\Lambda(\wedge^\ell \mathbf{A}_n \otimes \overline{E}, \overline{\mathbf{Q}}) = \sqrt{\ell + 1} \cdot \Lambda(\overline{E}, \overline{\mathbf{Q}})$$

et

$$\widehat{\mu}_{\max}(\wedge^\ell \mathbf{A}_n \otimes \overline{E}) = -\frac{\ell}{2n} \log(n+1) + \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}).$$

Démonstration. En utilisant la base canonique $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ de $\mathbf{Q}^{n+1}$, nous avons une description de la puissance extérieure $(\wedge^\ell A_n) \otimes E$ de la manière suivante. Soit

$$x = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_\ell \leq n+1} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_\ell} \otimes x_{i_1, \ldots, i_\ell}$$

un vecteur de $\wedge^\ell \mathbf{Q}^{n+1} \otimes E \otimes \overline{\mathbf{Q}}$. Si $i_1, \ldots, i_\ell$ sont des entiers quelconques de $\{1, \ldots, n\}$, posons $x_{i_1, \ldots, i_\ell} := 0$ si deux indices i_j sont égaux et $x_{i_1, \ldots, i_\ell} := \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(i_1), \ldots, \sigma(i_\ell)}$ si σ est la permutation de $\{i_1, \ldots, i_\ell\}$, de signature $\varepsilon(\sigma)$, telle que $\sigma(i_1) < \cdots < \sigma(i_\ell)$. Avec cette convention, les équations qui décrivent $\wedge^\ell(A_n) \otimes E$ sont $(\star)$ $\sum_{h=1}^{n+1} x_{i_1, \ldots, i_{\ell-1}, h} = 0$ pour tout $(i_1, \ldots, i_{\ell-1})$ tel que $1 \leq i_1 < \cdots < i_{\ell-1} \leq n$. Si $x \in \wedge^\ell(A_n) \otimes E \otimes \overline{\mathbf{Q}} \setminus \{0\}$, considérons $x_{i_1, \ldots, i_\ell}$ un coefficient non nul de x avec $1 \leq i_1 < \cdots < i_\ell \leq n$. Pour toute partie J de $\{i_1, \ldots, i_\ell\}$ à $\ell - 1$ éléments, les équations $(\star)$ montrent qu'il existe $h_J \in \{1, \ldots, n+1\} \setminus \{i_1, \ldots, i_\ell\}$ tel que $x_{J, h_J} \neq 0$. Comme il y a ℓ possibilités pour J et que les ensembles $J \cup \{h_J\}$ sont tous distincts, il y a au moins $\ell + 1$ vecteurs $x_{i_1, \ldots, i_\ell}$ qui ne sont pas nuls. En une place v d'un corps de définition de x, la norme de x vaut $(\sum \|x_{i_1, \ldots, i_\ell}\|_{\overline{E}, v}^2)^{1/2}$ si $v \mid \infty$ et $\max \|x_{i_1, \ldots, i_\ell}\|_{\overline{E}, v}$

sinon. On obtient alors la minoration $H_{\wedge^\ell \mathbf{A}_n \otimes \overline{E}}(x) \geq \sqrt{\ell+1} \cdot \Lambda(\overline{E}, \overline{\mathbf{Q}})$ par le lemme de convexité 2.2, ce qui donne $\Lambda(\wedge^\ell \mathbf{A}_n \otimes \overline{E}, \overline{\mathbf{Q}}) \geq \sqrt{\ell+1} \cdot \Lambda(\overline{E}, \overline{\mathbf{Q}})$. L'égalité s'obtient en choisissant x de la forme $(e_1 - e_{n+1}) \wedge \cdots \wedge (e_\ell - e_{n+1}) \otimes y$ avec $H_{\overline{E}}(y)$ qui se rapproche de $\Lambda(\overline{E}, \overline{\mathbf{Q}})$. Pour les pentes maximales, le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit encore sur $\wedge^\ell \mathbf{A}_n$ de manière géométriquement irréductible (voir [FH, proposition 3.12]). On applique alors la proposition 5.1 qui donne $\widehat{\mu}_{\max}(\wedge^\ell \mathbf{A}_n \otimes \overline{E}) = \ell \widehat{\mu}_{\max}(\mathbf{A}_n) + \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})$. La pente maximale de $\mathbf{A}_n$ se calcule au moyen du déterminant de ce fibré

$$\widehat{\mu}_{\max}(\mathbf{A}_n) = \widehat{\mu}(\mathbf{A}_n) = \frac{1}{n}\widehat{\mu}(\wedge^n \mathbf{A}_n) = -\frac{1}{n}\log \Lambda(\wedge^n \mathbf{A}_n, \overline{\mathbf{Q}}) = -\frac{1}{2n}\log(n+1)$$

et la proposition est démontrée. ∎

8. Appendice : ppcm des multinomiaux

8.1. Soient n, ℓ deux entiers strictement positifs. Soit

$$p(n,\ell) := \operatorname{ppcm}\left(\frac{\ell!}{i_1! \cdots i_n!}\,;\ i_j \in \mathbf{N} \text{ et } i_1 + \cdots + i_n = \ell\right). \tag{6}$$

Dans cette partie, nous nous proposons d'établir le théorème suivant (le crochet désigne la partie entière).

Théorème 8.1: *On a*

$$p(n,\ell) = \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\operatorname{ppcm}(1,2,3,\ldots,[(\ell+n-1)/j])}{\ell+j}.$$

Le cas $n=2$ figure déjà dans un article de Williams [Wi]. Nous n'avons pas trouvé de référence dans la littérature pour le cas général. Aussi donnons-nous ci-dessous une démonstration (élémentaire) du théorème 8.1.

Pour n et ℓ comme ci-dessus et $x \geq 1$ un nombre réel, nous utilisons les notations suivantes :

$$q(n,\ell) = \frac{(\ell+n-1)!}{\ell!} p(n,\ell), \quad d(x) = \operatorname{ppcm}(1,2,\ldots,[x]),$$

$$r(n,\ell) = \prod_{k=1}^{n-1} d\Big(\frac{\ell+n-1}{k}\Big) = \operatorname{ppcm}(j_1 \cdots j_{n-1};\ 1 \leq h j_h \leq \ell+n-1),$$

$$s(n,\ell) = \operatorname{ppcm}(j_1 \cdots j_{n-1};\ 1 \leq j_{n-1} < j_{n-2} < \cdots < j_1 \leq \ell+n-1).$$

Nous allons montrer les divisibilités $r(n,\ell) \mid s(n,\ell) \mid q(n,\ell) \mid r(n,\ell)$ et donc l'égalité de ces entiers naturels. En particulier $q(n,\ell) = r(n,\ell)$ est le théorème 8.1.

• $r(n,\ell) \mid s(n,\ell)$

Soient $j_1,\ldots,j_{n-1}$ avec $1 \leq hj_h \leq \ell+n-1$ pour $1 \leq h \leq n-1$. Définissons des entiers j'_h par le procédé suivant : si $j'_1,\ldots,j'_{h-1}$ sont construits on choisit un multiple j'_h de j_h avec $j'_h \notin \{j'_1,\ldots,j'_{h-1}\}$ et $1 \leq j'_h \leq \ell+n-1$ (ceci est possible car $1 \leq hj_h \leq \ell+n-1$ montre qu'au moins h multiples de j_h appartiennent à $[1,\ell+n-1]$). Alors les j'_h sont deux à deux distincts et $j_1\cdots j_{n-1} | j'_1\cdots j'_{n-1} | s(n,\ell)$.

• $s(n,\ell) \mid q(n,\ell)$

Soient $0 = j_n < j_{n-1} < j_{n-2} < \cdots < j_1 < j_0 = \ell+n$. Le nombre j_h divise

$$j_h\binom{j_{h-1}-1}{j_h} = \frac{(j_{h-1}-1)!}{(j_h-1)!(j_{h-1}-j_h-1)!}$$

donc par produit

$$j_1\ldots j_{n-1} \,|\, \frac{(j_0-1)!}{(j_0-j_1-1)!\cdots(j_{n-2}-j_{n-1}-1)!(j_{n-1}-1)!} = \frac{(\ell+n-1)!}{i_1!\cdots i_n!} \,|\, q(n,\ell)$$

avec $i_h = j_{h-1} - j_h - 1 \geq 0$ de sorte que $i_1 + \cdots + i_n = j_0 - j_n - n = \ell$.

• $q(n,\ell) \mid r(n,\ell)$: ceci découle par récurrence sur n du lemme suivant (avec $q(1,\ell) = 1$).

Lemme 8.2: *On a $q(n,\ell-1) \mid q(n,\ell)$ et $q(n,\ell) \mid d(1+\ell/(n-1))q(n-1,\ell+1)$.*

Démonstration. Soit $(i_1,\ldots,i_n) \in \mathbf{N}^n$ tel que $i_1+\cdots+i_n = \ell-1$. Par définition de $q(n,\ell)$ et pour tout $j \in \{1,\ldots,n\}$, on a

$$q(n,\ell)\frac{(i_j+1)\prod_{h=1}^n i_h!}{(\ell+n-1)!} \in \mathbf{N}$$

ce qui, en sommant sur j, conduit à

$$q(n,\ell)\frac{\prod_{h=1}^n i_h!}{(\ell+n-2)!} \in \mathbf{N}.$$

Ceci montre la première assertion. Pour la seconde, nous transitons par des intégrales, comme Nair [Na] dans le cas $n=2$. Considérons le simplexe

$$S_n := \{(x_1,\ldots,x_n) \in [0,1]^n;\ x_1+\cdots+x_n \leq 1\}.$$

Si $i_1 + \cdots + i_n = \ell$ et $i_1 \neq 0$ nous avons

$$I := i_1 \int_{S_n} x_1^{i_1-1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n} \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \frac{i_1! \cdots i_n!}{(\ell+n-1)!}.$$

Pour le voir, effectuons le changement de variables $x_j = ty_j$ $(j < n)$ et $x_n = 1-t$ qui donne

$$I = \left(i_1 \int_{S_{n-1}} y_1^{i_1-1} y_2^{i_2} \cdots y_{n-1}^{i_{n-1}} \, \mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_{n-1} \right) \int_0^1 (1-t)^{i_n} t^{i_1+\cdots+i_{n-1}+n-2} \, \mathrm{d}t.$$

Par intégrations par parties successives l'intégrale sur t vaut

$$i_n!(\ell+n-i_n-2)!/(\ell+n-1)!$$

et l'on conclut par récurrence. D'autre part, nous avons aussi

$$\begin{aligned} I &= \int_{S_{n-1}} (1 - x_2 - \cdots - x_n)^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n} \, \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n \\ &= \sum_{\substack{j=(j_2,\ldots,j_n) \\ j_2+\cdots+j_n \leq i_1}} \alpha_j \int_{S_{n-1}} x_2^{i_2+j_2} \cdots x_n^{i_n+j_n} \, \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n \end{aligned}$$

avec $\alpha_j \in \mathbf{Z}$. Fixons une famille $j = (j_2, \ldots, j_n)$ et notons $i'_1, \ldots, i'_{n-1}$ la suite ordonnée des nombres $i_2 + j_2, \ldots, i_n + j_n$. Nous avons $i'_1 + \cdots + i'_{n-1} = i_2 + \cdots + i_n + j_2 + \cdots + j_n \leq i_1 + i_2 + \ldots + i_n = \ell$ donc $i'_1 \leq \ell/(n-1)$. Ainsi $i'_1 + 1$ divise $d(1 + \ell/(n-1))$. Maintenant le nombre

$$\begin{aligned} (i'_1+1) \int_{S_{n-1}} x_2^{i_2+j_2} \cdots x_n^{i_n+j_n} \, \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n &= (i'_1+1) \int_{S_{n-1}} x_1^{i'_1} \cdots x_{n-1}^{i'_{n-1}} \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{n-1} \\ &= \frac{(i'_1+1)! i'_2! \cdots i'_{n-1}!}{(i'_1 + \cdots + i'_{n-1} + n - 1)!} \end{aligned}$$

appartient à $q(n-1, i'_1 + \cdots i'_{n-1} + 1)^{-1}\mathbf{Z} \subset q(n-1, \ell+1)^{-1}\mathbf{Z}$. En combinant tout ceci nous avons $i_1! \cdots i_n!/(\ell+n-1)! \in d(1+\ell/(n-1))^{-1} q(n-1, \ell+1)^{-1}\mathbf{Z}$ qui donne le lemme. ∎

8.2. Conséquences. Il est bien connu que le théorème des nombres premiers entraîne une estimation asymptotique de la *fonction de Tchebychev de seconde espèce* $\psi(x) := \log \mathrm{ppcm}(1, 2, \ldots, [x])$: $\psi(x) = x + \mathrm{o}(x)$ lorsque $x \to +\infty$. Ce résultat conduit à l'estimation asymptotique

$$p(n, \ell) = \exp\{\ell H_{n-1} + \mathrm{o}(\ell)\}, \quad \ell \to +\infty$$

où, comme plus haut, H_{n-1} désigne le nombre harmonique. Il peut être intéressant d'avoir un encadrement effectif de $p(n, \ell)$. Par exemple, en minorant $p(n, \ell)$

par le maximum des coefficients multinomiaux, on a une minoration simple et asymptotiquement précise :

$$n^\ell \binom{\ell+n-1}{n-1}^{-1} \leq p(n,\ell)$$

(on rappelle que la somme des multinomiaux vaut n^ℓ). En sens inverse, un théorème de Rosser et Schoenfeld [RS, théorème 12] implique $\psi(x) \leq x\log(2\sqrt{2})$ pour tout nombre réel $x \geq 0$, qui, à son tour, fournit la majoration suivante.

Proposition 8.3: *Pour tous entiers $n, \ell \geq 1$ on a $\log p(n,\ell) \leq \frac{3}{2}\ell\log n$.*

Démonstration. L'énoncé étant trivial si n ou ℓ égale 1, on peut supposer $\ell, n \geq 2$. Si $\ell \leq n^{3/2}$ on utilise la borne $p(n,\ell) \leq \ell!$ qui implique $p(n,\ell) \leq \ell^\ell \leq (n^{3/2})^\ell$. Lorsque $\ell > n^{3/2}$ on utilise le théorème 8.1 et la majoration de ψ ci-dessus qui permettent de majorer $\log p(n,\ell)$ par

$$(\ell+n-1)H_{n-1}\log(2\sqrt{2}) - \log\left((\ell+1)\cdots(\ell+n-1)\right).$$

Par une étude de fonction, on a $H_{n-1}\log(2\sqrt{2}) \leq (\log(n-1)+1)\log(2\sqrt{2}) \leq \frac{3}{2}\log n$ dès que $n \geq 7$. La majoration $H_{n-1}\log(2\sqrt{2}) \leq \frac{3}{2}\log n$ reste vraie pour $n \leq 6$ par vérification directe. En utilisant cette borne on trouve

$$(\ell+n-1)H_{n-1}\log(2\sqrt{2}) \leq \frac{3}{2}\ell\log n + \frac{3}{2}(n-1)\log n \leq \frac{3}{2}\ell\log n + \log \ell^{n-1}$$

car $n^{3/2} \leq \ell$ et l'on conclut en majorant ℓ^{n-1} par le produit des $\ell + i$, $i \in \{1,\ldots,n-1\}$. ∎

En utilisant $\binom{\ell+n-1}{n-1} \leq n^\ell$ et $H_n - 1 \leq \log n$, cette borne et le théorème 6.1 donnent les estimations suivantes.

Proposition 8.4: *Soient $\overline{E}$ un fibré adélique hermitien sur k, de dimension $n \geq 1$, et ℓ un entier ≥ 1. On a*

$$\widehat{\mu}_{\max}\left(\overline{S^\ell(E)}\right) \leq \ell\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) + 2\ell\log n \quad \textit{et} \quad \Lambda(\overline{E},\overline{\mathbf{Q}})^\ell \leq n^{2\ell}\Lambda\left(\overline{S^\ell(E)},\overline{\mathbf{Q}}\right).$$

Références

[An] Y. André, *On nef and semistable hermitian lattices, and their behaviour under tensor product*, The Tohoku Mathematical Journal **63** (2011), 629–649.

[Bo] J.-B. Bost, *Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres*, (d'après D. Masser et G. Wüstholz), Séminaire Bourbaki, Vol. 237 de Astérisque, Société Mathématique de France, 1996, pp. 115–161.

[BC] J.-B. Bost et H. Chen, *Concerning the semi-stability of tensor products in Arakelov geometry*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **99** (2013), 436–488.

[Ch] H. Chen, *Maximal slope of tensor product of Hermitian vector bundles*, Journal of Algebraic Geometry **18** (2009), 575–603.

[Co] R. Coulangeon, *Tensor products of Hermitian lattices*, Acta Arithmetica **92** (2000), 115–130.

[FH] W. Fulton et J. Harris, *Representation Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 129, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[G1] É. Gaudron, *Pentes des fibrés vectoriels adéliques sur un corps global*, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova **119** (2008), 21–95.

[G2] É. Gaudron, *Géométrie des nombres adélique et lemmes de Siegel généralisés*, Manuscripta mathematica **130** (2009), 159–182.

[Ki] Y. Kitaoka, *Arithmetic of Quadratic Forms*, Cambridge Tracts in Mathematics, Vol. 106, Cambridge University Press, 1993.

[MH] J. Milnor et D. Husemoller, *Symmetric Bilinear Forms*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 73, Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[Na] M. Nair, *On Chebyshev-type inequalities for primes*, The American Mathematical Monthly **89** (1982), 126–129.

[RS] J. Rosser et L. Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Illinois Journal of Mathematics **6** (1962), 64–94.

[RT] D. Roy et J. Thunder, *An absolute Siegel's lemma*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik **476** (1996), 1–26. Addendum et erratum, ibid., **508** (1999), 47–51.

[Th] J. Thunder, *An adelic Minkowski–Hlawka theorem and an application to Siegel's lemma*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik **475** (1996), 167–185.

[Va] J. Vaaler, *The best constant in Siegel's lemma*, Monatshefte für Mathematik **140** (2003), 71–89.

[Wi] I. Williams, *On a problem of Kurt Mahler concerning binomial coefficients*, Bulletin of the Australian Mathematical Society **14** (1976), 299–302.

[Z1] S. Zhang, *Positive line bundles on arithmetic varieties*, Journal of the American Mathematical Society **8** (1995), 187–221.

[Z2] S. Zhang, *Heights and reductions of semi-stable varieties*, Compositio Mathematica **104** (1996), 77–105.