ESPACES ADÉLIQUES QUADRATIQUES

ÉRIC GAUDRON ET GAËL RÉMOND

Abstract. We study quadratic forms defined on an adelic vector space over an algebraic extension K of the rationals. Under the sole condition that a Siegel lemma holds over K, we provide height bounds for several objects naturally associated to the quadratic form, such as an isotropic subspace, a basis of isotropic vectors (when it exists) or an orthogonal basis. Our bounds involve the heights of the form and of the ambient space. In several cases, we show that the exponents of these heights are best possible. The results improve and extend previously known statements for number fields and the field of algebraic numbers.

1. Introduction

Lorsqu'un système linéaire homogène sur un corps de nombres admet une solution non nulle, on sait montrer l'existence d'une petite solution grâce à un lemme de Siegel. De manière analogue, lorsqu'une équation

$$q(x) = 0$$

où q est une forme quadratique admet une solution non nulle, il en existe une de hauteur contrôlée, d'après un résultat qui remonte à Cassels en 1955 [Ca1] pour $\mathbb{Q}$ et a ensuite été généralisé en plusieurs étapes aux corps de nombres. Nous renvoyons le lecteur aux survols [SS3] et [F4] pour une description de cette histoire.

Nous examinons ici ce problème quadratique lorsque le corps de base K est une extension algébrique arbitraire de $\mathbb{Q}$. Le cas linéaire faisait l'objet de notre article [GR3] où nous avons en particulier baptisé *corps de Siegel* un tel corps K sur lequel s'énonce un lemme de Siegel. Les deux situations sont en fait intimement liées : que l'on songe seulement au simple cas où q est le carré d'une forme linéaire. Pour cette raison nous supposerons dans tous nos théorèmes ci-dessous que K est un corps de Siegel. Nous verrons que cette condition nécessaire se révèle suffisante et que tous les résultats classiques dans le sillage de l'énoncé de Cassels s'étendent à un tel corps.

Chemin faisant, nous revisitons les preuves existantes et en donnons des versions améliorées qui conduisent à des énoncés plus fins même dans le cas des corps de nombres. Disons encore que l'exemple $K = \overline{\mathbb{Q}}$, qui avait été abordé par Fukshansky [F3], se trouve naturellement englobé dans nos considérations et les résultats portés au même degré de précision que ceux des corps de nombres, ce qui n'était pas le cas jusqu'ici.

Voici le cadre précis dans lequel nous nous placerons.

Définition 1.1. Un espace adélique quadratique (E, q) sur K (extension algébrique de $\mathbb{Q}$) est un espace adélique rigide E sur K que l'on munit d'une forme quadratique $q\colon E \to K$.

MSC 2010 : 11E12 (11G50, 11D09, 11H55).

Mots-clefs : Formes quadratiques, espaces adéliques rigides, isotropie, bases orthogonales, lemmes de Siegel d'évitement.

Date: 18 avril 2016.

La notion d'espace adélique rigide a été introduite dans [GR3] et sera définie au paragraphe 2.1. Rappelons simplement ici qu'il s'agit d'un couple $(E, (\|\cdot\|_v)_v)$ formé d'un espace vectoriel de dimension finie sur K et d'une collection de normes locales qui permet de définir la hauteur $H(\cdot)$ des sous-espaces vectoriels de E. En particulier, la hauteur d'un élément non nul $x \in E$, notée $H_E(x)$, est la hauteur $H(Kx)$ de la droite qu'il engendre.

Nous disons que K est de Siegel si pour tout $n \geq 1$ il existe un réel $c(n)$ tel que si E est un espace adélique rigide sur K de dimension n il existe $x \in E \setminus \{0\}$ avec $H_E(x) \leq (c(n)H(E))^{1/n}$. Dans ce cas, l'infimum des choix possibles pour $c(n)$ est noté $c_K^{\Lambda}(n)$. Plus bas, nous employerons aussi la variante $c_K^{\mathrm{BV}}(n)$ (voir paragraphe 2.1). Pour permettre la comparaison avec les résultats antérieurs, rappelons que nous avons $c_K^{\Lambda}(n) \leq c_K^{\mathrm{BV}}(n) \leq (n\delta_{K/\mathbb{Q}})^{n/2}$ lorsque K est un corps de nombres de discriminant réduit $\delta_{K/\mathbb{Q}}$ et $c_{\mathbb{Q}}^{\Lambda}(n) = c_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{BV}}(n) = \exp(n(H_n-1)/2) \leq n^{n/2}$ pour le nombre harmonique $H_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$.

Dans le cadre de la définition, la structure adélique nous autorise aussi à introduire la hauteur $H(q)$ de la forme quadratique q à l'aide de normes d'opérateurs locales. Là encore, la définition précise sera donnée plus bas mais indiquons pour fixer les idées que, lorsque $E = K^n$ est l'espace standard et (a_{ij}) la matrice de q, alors $H(q)$ est comprise entre les deux hauteurs de la famille des nombres a_{ij} obtenues en prenant à l'infini les normes L_∞ ou L_2.

Dans nos énoncés, nous employons le vocabulaire usuel associé à la forme quadratique q : orthogonalité, rang, espace régulier, vecteur isotrope, sous-espace isotrope, forme isotrope, anisotrope... (voir rappels au paragraphe 2.2). Signalons simplement que nous utilisons la locution sous-espace isotrope pour désigner un sous-espace sur lequel la forme q est identiquement nulle, là où certains auteurs parlent de sous-espace totalement isotrope.

Nous pouvons maintenant formuler nos résultats principaux. Le problème initial évoqué ci-dessus consiste à trouver un vecteur isotrope de hauteur contrôlée. Plus généralement, nous pouvons obtenir un petit sous-espace isotrope de dimension arbitraire.

Théorème 1.2. *Soit (E, q) un espace adélique quadratique sur K de dimension n. Soient d la dimension des sous-espaces isotropes maximaux de (E, q) et $e \in \{0, \ldots, d\}$. Supposons q isotrope, c'est-à-dire $d \geq 1$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace isotrope F de E, de dimension e, et de hauteur*

$$H(F) \leq (1+\varepsilon)\left(c_K^{\Lambda}(d)c_K^{\Lambda}(n-d)\,(2H(q))^{(n-d)/2}\,H(E)\right)^{e/d}.$$

La résolution de l'équation $q(x) = 0$ correspond donc au cas $e = 1$. Nous verrons que les exposants de $H(q)$ et $H(E)$ dans la borne sont les meilleurs possibles (paragraphe 5.2). Nous montrerons également que si un énoncé de cette forme est vrai pour un corps K alors il s'agit nécessairement d'un corps de Siegel (paragraphe 5.3).

Au lieu d'un unique vecteur isotrope, nous pouvons chercher une base constituée de vecteurs isotropes. Il n'en existe pas toujours mais nous savons caractériser précisément les situations où c'est le cas (voir théorème 7.4). Par exemple, il suffit de supposer E régulier (c'est-à-dire $E^\perp = \{0\}$) et q isotrope. Dans ce cadre, nous disposons de l'estimation suivante.

Théorème 1.3. *Soit (E, q) un espace adélique quadratique régulier, de dimension $n \geq 2$. Supposons q isotrope. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on ait $q(e_i) = 0$ et*

$$H_E(e_1)H_E(e_i) \leq (1+\varepsilon)2^{n+1}c_K^{\mathrm{BV}}(n-1)^2H(q)^{n-1}H(E)^2.$$

Nous ne savons pas si $c_K^{\mathrm{BV}}(n)$ est toujours finie lorsque K est de Siegel mais nous établirons des variantes qui donnent une constante finie pour tout corps de Siegel (voir théorème 6.3).

La démonstration du théorème, plus délicate que celle du précédent, s'appuie sur un résultat d'existence de familles de sous-espaces isotropes, le théorème 6.1, qui unifie et généralise les travaux antérieurs de Schlickewei et Schmidt [SS2] et de Vaaler [Va2] sur les corps de nombres.

Pour obtenir une petite base $(e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs isotropes, une autre approche, plus élémentaire, est de raisonner par récurrence en choisissant un vecteur isotrope e_i qui n'appartienne pas au sous-espace vectoriel engendré par $e_1, \ldots, e_{i-1}$. Cette méthode s'apparente aux *lemmes d'évitement* de [GR1] : il s'agit d'assurer l'existence d'un vecteur de petite hauteur (ayant ici la particularité supplémentaire de se trouver dans le lieu des zéros de q) dans un ouvert de Zariski de E. L'usage de ces lemmes apparaît déjà dans la démonstration du théorème 1.3. Dans la partie 7, nous les utilisons plus systématiquement pour obtenir des bases isotropes en dehors d'un fermé donné. À titre d'exemple, les théorèmes 7.4 et 7.6 avec $K = \mathbb{Q}$ et $E = \mathbb{Q}^n$ muni de sa structure adélique standard fournissent le résultat suivant.

Théorème 1.4. *Soient $n \geq 1$ et $q\colon \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}$ une forme quadratique qui n'est pas le produit de deux formes linéaires. Soit I un idéal de $\mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_n]$, engendré par une famille de polynômes de degré $\leq M$. Soit $Z(I)$ le lieu des zéros de I dans $\mathbb{Q}^n$. Supposons qu'il existe un vecteur régulier $x \in \mathbb{Q}^n \setminus Z(I)$ tel que $q(x) = 0$. Alors il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{Q}^n$ telle que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on ait $q(e_i) = 0$, $e_i \notin Z(I)$ et*

$$H_{\mathbb{Q}^n}(e_i) \leq 4(M+2)^3 n^n \left(2H(q)\right)^{(n-d+1)/2}$$

où d est la dimension des sous-espaces isotropes maximaux de $(\mathbb{Q}^n, q)$.

En réalité l'hypothèse sur q peut encore être un peu affaiblie (voir théorème 7.4). Nous verrons également que l'exposant de $H(q)$ est optimal. À la suite de Masser [Ma], ce résultat a des applications aux théorèmes d'existence de petites solutions x de l'équation $q(x) = a$ ($a \in K$ fixé), car ce problème équivaut à chercher les vecteurs isotropes de la forme quadratique $(x, y) \in E \oplus K \mapsto q(x) - ay^2$ pour lesquels $y \neq 0$. Nous détaillerons ce cas particulier et démontrerons une généralisation du théorème de Masser.

Le dernier thème abordé dans cet article est celui de l'existence de bases orthogonales de (E, q) composées de vecteurs de petites hauteurs. Voici un exemple de résultat, écrit ici dans le cas particulier de l'espace standard (voir le théorème 8.11 pour un énoncé général).

Théorème 1.5. *Soit $q\colon \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}$ une forme quadratique non identiquement nulle. Il existe une base orthogonale $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{Q}^n$ telle que*

$$\prod_{i=1}^{n} H_{\mathbb{Q}^n}(e_i) \leq (3n)^{14n^3} H(q)^{4n^2}.$$

L'approche pour obtenir un tel énoncé est d'utiliser la décomposition de Witt pour se ramener aux cas anisotrope et hyperbolique. Dans un espace anisotrope, une construction par récurrence directe de la base donne le résultat, moyennant le contrôle de la hauteur de l'orthogonal d'un sous-espace (fourni par le corollaire 2.5). Le cas hyperbolique se traite différemment, au moyen de lemmes d'évitement. Les techniques mises en œuvre pour passer au cas général nous conduisent à formuler un théorème de décomposition de Witt *effectif* (théorème 8.12) qui représente une synthèse de nombreux résultats de cet article.

Examinons maintenant brièvement comment les résultats ci-dessus améliorent les énoncés connus dans le cas des corps de nombres et de $\overline{\mathbb{Q}}$. Pour permettre la comparaison rappelons que notre notion de hauteur de q est plus petite que celle utilisée dans les articles cités ci-dessous. Pour un corps de nombres, les théorèmes 1.2 et 1.3 améliorent les inégalités (1.6) et (1.4), respectivement, données par Vaaler [Va2]. Les énoncés de la forme du théorème 1.4 améliorent le travail récent de Chan, Fukshansky et Henshaw [CFH] qui donnait par exemple l'exposant $(9n+11)/2$ pour $H(q)$ dans le cas cité. Pour les bases orthogonales, les énoncés de Fukshansky ne concernent en fait que le cas anisotrope. Dans ce cas, le résultat que nous obtenons améliore le théorème 2.4 de [F2]. Disons encore que le facteur $1+\varepsilon$ qui apparaît dans les théorèmes 1.2 et 1.3 ainsi que dans de très nombreux énoncés de ce texte peut être omis dans le cas des corps de nombres et plus généralement des corps de Northcott : en effet, s'il n'y a qu'un nombre fini d'objets de hauteur bornée, il devient possible de choisir $\varepsilon = 0$ dans toute affirmation donnant l'existence d'un objet de hauteur $\leq (1+\varepsilon)B$.

Lorsque $K = \overline{\mathbb{Q}}$, le théorème 1.2 améliore significativement le théorème 1.1 de [F3] : ce dernier donnait une borne beaucoup plus grande et seulement sous les hypothèses E régulier et $e = d$. Aucun résultat comparable aux autres théorèmes n'était connu. Même si notre approche a systématiquement été de traiter l'ensemble des corps K de Siegel de manière uniforme, il convient tout de même de rappeler ici quelques particularités de $\overline{\mathbb{Q}}$. En effet, le simple fait que tout élément possède une racine carrée (la remarque s'étendrait donc à d'autres corps de Siegel jouissant de cette propriété) entraîne qu'il n'existe pas d'espace anisotrope de dimension ≥ 2. Ceci éclaire les énoncés précédents d'une lumière différente : par exemple, la dimension d des sous-espaces isotropes maximaux vaut toujours au moins $(n-1)/2$ donc, si $d \neq 0$, l'exposant $(n-d)/(2d)$ est majoré par 1.

Les démonstrations des théorèmes que nous venons de présenter s'appuient sur des arguments de géométrie des nombres et, en particulier, les généralisations du second théorème de Minkowski développées dans notre article [GR3]. C'est de là que viennent les constantes $c_K^{\Lambda}(n)$ et $c_K^{\mathrm{BV}}(n)$ des théorèmes précédents, qui étendent la constante d'Hermite classique. À partir d'un lemme clef, présent en substance dans la littérature, nous établissons deux théorèmes de transfert (propositions 4.3 et 4.4) entre minima successifs de quotients de E par des sous-espaces isotropes de hauteurs quasi-minimales. Ces résultats, qui n'avaient pas été mis en évidence auparavant, forment la clef de voûte de cet article. Les aspects fondamentaux de la théorie des espaces adéliques quadratiques qu'ils révèlent, combinés à leurs formulations très simples, expliquent en grande partie les progrès par rapport aux travaux antérieurs. L'autre source d'amélioration a été d'adopter le langage des espaces adéliques rigides introduits dans [GR3]. Par ses aspects intrinsèques, il offre des énoncés à la fois plus généraux et plus précis. À cet égard, la majoration de la hauteur du radical de (E,q) donnée par la proposition 2.6 marque l'efficacité de ces techniques, puisque, par une démonstration simple et naturelle, nous obtenons une borne plus fine (et même optimale) que celles déjà présentes dans la littérature. Enfin, les lemmes de Siegel d'évitement jouent un rôle important dans plusieurs des démonstrations. S'il est ordinaire de faire appel à eux pour des énoncés comme le théorème 1.4, il est plus surprenant de voir qu'ils interviennent également dans la démonstration du théorème 1.3 et dans la construction de bases orthogonales pour un plan hyperbolique. Ils apparaissent comme l'une des pierres angulaires de ce texte, raison pour laquelle nous leur avons consacré le paragraphe 2.4.

Remerciements. Nous remercions Alexis Marin et Damien Roy de leurs commentaires sur une première version de ce texte. Le premier auteur remercie la région

Auvergne de son aide financière apportée à travers le projet Diophante. Les auteurs ont bénéficié du soutien du projet ANR Gardio 14-CE25-0015.

Table des matières

2. Espaces adéliques quadratiques

Dans cet article, par défaut, les inégalités sont larges. Par exemple, l'expression x *supérieur à* y signifie $x \geq y$.

2.1. Commençons par rappeler quelques éléments de la théorie des espaces adéliques rigides développée dans notre article [GR3].

Soit K une extension algébrique de $\mathbb{Q}$. Désignons par $V(K)$ l'ensemble des places de K et $V_\infty(K)$ l'ensemble des places archimédiennes. Pour chaque $v \in V(K)$, notons $|\cdot|_v$ l'unique valeur absolue sur le complété K_v de K en v caractérisée par $|p|_v \in \{1, p, p^{-1}\}$ pour tout nombre premier p. Munissons $V(K)$ de la topologie engendrée par les ouverts $V_v(K) = \{w \in V(K)\,;\ w_{|L} = v\}$ où L parcourt les sous-corps de nombres de K et $v \in V(L)$ et où $w_{|L}$ désigne la restriction de w à L. Notons μ l'unique mesure borélienne sur $V(K)$ telle que

$$\mu(V_v(K)) = \frac{[L_v : \mathbb{Q}_v]}{[L : \mathbb{Q}]} \quad \text{pour tous } L \text{ et } v \in V(L)$$

($\mathbb{Q}_v = \mathbb{R}$ si v est archimédienne et $\mathbb{Q}_p$ si v divise le nombre premier p).

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur K. Une structure adélique sur E est la donnée, pour chaque $v \in V(K)$, d'une norme $\|\cdot\|_v$ sur $E \otimes_K K_v$. Dans la suite nous noterons simplement E pour le couple $(E, (\|\cdot\|_v)_{v \in V(K)})$. L'*espace standard* est K^n muni des normes : pour $v \in V(K)$ et $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K_v^n$,

$$|x|_v = \begin{cases} (|x_1|_v^2 + \cdots + |x_n|_v^2)^{1/2} & \text{si } v \mid \infty, \\ \max(|x_1|_v, \ldots, |x_n|_v) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ceci permet par déformation d'obtenir la notion plus générale d'espace adélique rigide. Désignons par $\mathbb{A}_\mathbb{Q}$ l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{A}_K = \mathbb{A}_\mathbb{Q} \otimes K$.

Définition 2.1. Un espace adélique rigide E sur K est un K-espace adélique $(E, (\|\cdot\|_v))$, de dimension finie n, pour lequel existent un isomorphisme $\varphi\colon E \to K^n$ et une matrice adélique $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K)$ tels que, pour tout $v \in V(K)$ et tout $x \in E \otimes K_v$, on ait $\|x\|_v = |A_v \varphi_v(x)|_v$.

Dans cette écriture, $\varphi_v = \varphi \otimes \mathrm{id}_{K_v}$ est l'application naturelle $E \otimes_K K_v \to K_v^n$ induite par φ et $|\cdot|_v$ la norme de l'espace standard K^n.

Étant donnée une fonction intégrable bornée $f\colon V(K)\to\mathbb{R}_{>0}$ telle que $\{v\in V(K)\,;\ f(v)\neq 1\}$ est contenu dans un compact, le module $|f|$ est

$$|f|=\exp\left(\int_{V(K)}\log(f(v))\mathrm{d}\mu(v)\right)\in\mathbb{R}_{>0}.$$

Le module de $v\mapsto|\det A_v|_v$ est la hauteur de E, notée $H(E)$ (elle vaut 1 pour l'espace standard K^n). De manière analogue, la hauteur $H_E(x)$ d'un vecteur $x\in E$ est le module de $v\mapsto\|x\|_v$ si $x\neq 0$ et 0 sinon. L'inégalité d'Hadamard se traduit par le fait que pour toute base $(e_1,\ldots,e_n)$ de E on a

$$H(E)\leq H_E(e_1)\cdots H_E(e_n)$$

(voir [GR3, lemme 3.7]). Tout sous-espace vectoriel F de E possède une structure d'espace adélique rigide induite par la restriction à F des normes de E. Il en est de même pour E/F en prenant les normes quotients et pour E^{v} avec les normes duales. On a $H(E/F)=H(E)/H(F)$ et $H(E^{\mathsf{v}})=H(E)^{-1}$ (voir [GR3, proposition 3.6]). Si $\varphi\colon E\to F$ est une application linéaire entre espaces adéliques rigides sur K, notons $\|\varphi\|_v$ la norme d'opérateur de l'application K_v-linéaire $E\otimes_K K_v\to F\otimes_K K_v$ induite par φ et $H(\varphi)$ le module de l'application $v\mapsto\|\varphi\|_v$.

Lemme 2.2. *Si φ est un isomorphisme alors $H(F)\leq H(E)H(\varphi)^{\dim E}$.*

Démonstration. Posons $n=\dim E$ et considérons une base $e_1,\ldots,e_n$ de E. Notons $E_0=\{0\}$ et $E_i=\mathrm{Vect}_K(e_1,\ldots,e_i)$ pour $1\leq i\leq n$ puis $F_i=\varphi(E_i)$. Nous allons montrer $H(F_i/F_{i-1})\leq H(E_i/E_{i-1})H(\varphi)$ pour tout i, ce qui entraîne le lemme en faisant le produit de ces inégalités. Soient $v\in V(K)$ et $x\in E_{i-1}\otimes_K K_v$ tels que $\|\overline{e_i}\|_{E_i/E_{i-1},v}=\|e_i+x\|_{E,v}$. On a

$$\|\overline{\varphi(e_i)}\|_{F_i/F_{i-1},v}\leq\|\varphi(e_i+x)\|_{F,v}\leq\|\varphi\|_v\|e_i+x\|_{E,v}=\|\varphi\|_v\|\overline{e_i}\|_{E_i/E_{i-1},v}.$$

Prenons alors le logarithme, intégrons sur $V(K)$ puis reprenons l'exponentielle. Nous obtenons l'inégalité annoncée en remarquant $H(F_i/F_{i-1})=H_{F_i/F_{i-1}}(\overline{\varphi(e_i)})$ et $H(E_i/E_{i-1})=H_{E_i/E_{i-1}}(\overline{e_i})$. □

Pour une partie $S\subset E$, notons $H_E(S)=\sup_{x\in S}H_E(x)$ et désignons par $\mathrm{Vect}(S)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par S et par $\mathrm{Zar}(S)$ l'adhérence de $\{ax\,;\ a\in K,\ x\in S\}$ pour la topologie de Zariski de E. Nous pouvons alors définir trois types de minima successifs associés à un espace adélique rigide E : pour $i\in\{1,\ldots,n\}$, $\Lambda_i(E)=\inf\{H_E(S)\,;\ S\subset E,\ \dim\mathrm{Vect}(S)\geq i\}$ (minima de Roy-Thunder), $Z_i(E)=\inf\{H_E(S)\,;\ S\subset E,\ \dim\mathrm{Zar}(S)\geq i\}$ (minima de Zhang) et $\lambda_i^{\mathrm{BV}}(E)=\inf\{r\,;\ \dim\mathrm{Vect}(E_r)\geq i\}$ où E_r est l'ensemble des $x\in E$ tels que $\|x\|_v\leq r$ si $v\mid\infty$ et $\|x\|_v\leq 1$ sinon (minima de Bombieri-Vaaler). Comme dans [GR3], nous uniformiserons les notations en utilisant $\lambda_i^{\Lambda}(E)=\Lambda_i(E)$ et $\lambda_i^{Z}(E)=Z_i(E)$. Rappelons aussi que, pour $i\geq 2$, la quantité $Z_i(E)$ n'est finie que si K n'est pas un corps de Northcott [GR3, proposition 4.4]. Pour $*\in\{\Lambda,\mathrm{BV},Z\}$ et n un entier ≥ 1, notons

$$c_K^*(n)=\sup_{\dim E=n}\frac{\lambda_1^*(E)\cdots\lambda_n^*(E)}{H(E)}.$$

Pour $*\in\{\Lambda,\mathrm{BV}\}$, on peut aussi écrire

$$c_K^*(n)=\sup_{\dim E=n}\frac{\lambda_1^*(E)^n}{H(E)}$$

(voir le théorème 4.12 de [GR3]), ce qui est la définition utilisée dans l'introduction. Cette quantité analogue à la constante d'Hermite classique est le sujet d'étude de [GR3], où elle était notée $c_{\mathrm{II}}^*(n,K)^n$. Nous rappelons que, pour tous entiers

$n, m \geq 1$, on a $c_K^\Lambda(n) c_K^\Lambda(m) \leq c_K^\Lambda(n+m)$, ce qui entraîne en particulier la croissance de la fonction $n \mapsto c_K^\Lambda(n)$ (voir [GR3, § 4.5]). Par ailleurs, il est possible de comparer $\Lambda_i(E)$ et $\lambda_i^{\mathrm{BV}}(E)$ au moyen de $c_1(K) = c_K^{\mathrm{BV}}(1)$. Ce nombre (qui peut être infini) fournit l'estimation $\lambda_i^{\mathrm{BV}}(E) \leq c_1(K)\Lambda_i(E)$ [GR3, proposition 4.8]. Lorsque K est un corps de nombres de discriminant réduit $\delta_{K/\mathbb{Q}}$, on montre que $c_K^*(n) \leq (n\delta_{K/\mathbb{Q}})^{n/2}$ pour tout $n \geq 1$ et $* \in \{\Lambda, \mathrm{BV}\}$ [GR3, proposition 5.1] (en revanche $c_K^Z(n) = \infty$ dès que $n \geq 2$) et donc, aussi, $c_1(K) \leq \delta_{K/\mathbb{Q}}^{1/2}$. Lorsque $K = \overline{\mathbb{Q}}$, le théorème 1.3 de [GR3] permet de calculer ces constantes. Si l'on désigne par H_n le nombre harmonique $1 + 1/2 + \cdots + 1/n$, on a

$$c_{\overline{\mathbb{Q}}}^\Lambda(n) = c_{\overline{\mathbb{Q}}}^{\mathrm{BV}}(n) = c_{\overline{\mathbb{Q}}}^Z(n) = \exp\left(n(H_n - 1)/2\right)$$

et, en particulier, $c_1(\overline{\mathbb{Q}}) = 1$.

2.2. Résumons maintenant quelques résultats bien connus sur les formes quadratiques, utilisés tout au long de ce texte (voir par exemple [dSP]). Un espace quadratique est un couple (E, q) constitué d'un espace vectoriel E sur K, de dimension finie, et d'une forme quadratique $q \colon E \to K$. Dans la suite, nous noterons $b \colon E \times E \to K$ la forme bilinéaire symétrique associée à q :

$$\forall\, x, y \in E, \quad b(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right).$$

Si F est un sous-espace vectoriel de E, l'*orthogonal* de F est l'espace vectoriel $F^\perp = \{x \in E\,;\, \forall\, y \in F,\ b(x,y) = 0\}$. Lorsque F est une droite engendrée par $x \in E$, on notera plus simplement $x^\perp$ pour l'orthogonal de $K.x$. Si $F = E$, l'orthogonal $E^\perp$ est aussi appelé *radical* de E. Si F, G sont des sous-espaces vectoriels de E, on a toujours $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$. On dit que (E, q) est *régulier* si $E^\perp = \{0\}$. La forme quadratique q induit une forme quadratique $\overline{q} \colon E/E^\perp \to K$ donnant à l'espace quadratique $(E/E^\perp, \overline{q})$ la propriété d'être régulier (la dimension de cet espace est le *rang* de q). En notant $q_{|F}$ la restriction de q à F, l'espace $(F, q_{|F})$ est régulier si et seulement si $F \oplus F^\perp = E$. En particulier, pour $x \in E$, l'égalité $K.x \oplus x^\perp = E$ est satisfaite si et seulement si $q(x) \neq 0$ (x non isotrope). On dit que F est *isotrope* si $q(x) = 0$ pour tout $x \in F$. Cette condition équivaut à $b(x,y) = 0$ pour tous $x, y \in F$ (on dit alors parfois que F est totalement isotrope). Elle équivaut aussi à $F \subset F^\perp$. Si F est isotrope, la restriction de la forme quadratique q à l'orthogonal de F induit une forme quadratique $q' \colon F^\perp/F \to K$ conférant à $F^\perp/F$ une structure d'espace quadratique. Un sous-espace isotrope est dit *maximal* s'il l'est pour la relation d'inclusion. Les sous-espaces isotropes maximaux sont tous de même dimension. Si (E, q) est régulier, un *lagrangien* est un sous-espace isotrope de dimension moitié de celle de l'espace total. L'espace (E, q) est dit *hyperbolique* s'il est régulier et s'il possède un lagrangien. Ainsi un plan hyperbolique est un espace engendré par deux vecteurs isotropes x, y tels que $b(x,y) \neq 0$. L'exemple canonique d'espace hyperbolique est l'espace $\mathbb{H}(F) = F \times F^\vee$ donné par un espace vectoriel F et son dual, muni de la forme quadratique $(x, \varphi) \mapsto \varphi(x)$. Deux espaces quadratiques (E, q) et (E', q') sont isomorphes s'il existe un isomorphisme $\iota \colon E \to E'$ d'espaces vectoriels tel que $q'(\iota(x)) = q(x)$ pour tout $x \in E$. La *somme directe orthogonale* de (E, q) et (E', q'), notée $E \perp E'$, est l'espace vectoriel $E \oplus E'$ muni de la forme quadratique $(x, x') \mapsto q(x) + q'(x')$.

Théorème de Witt. *Supposons que l'espace quadratique* (E, q) *soit régulier. Alors* (E, q) *est isomorphe à* $(F^\perp/F) \perp \mathbb{H}(F)$ *pour tout sous-espace isotrope maximal* $F \subset E$.

Une réalisation de cet isomorphisme est obtenue en considérant un supplémentaire quelconque G de F dans $F^\perp$. On a $E = G \oplus G^\perp$. L'espace quadratique

$(G, q_{|G})$ est anisotrope — c'est-à-dire $q(x) \neq 0$ pour tout $x \in G\setminus\{0\}$ — et $(G^\perp, q_{|G^\perp})$ est un espace hyperbolique dans lequel $F \subset G^\perp$ est un lagrangien.

2.3. Soient E un espace adélique rigide sur K et $q\colon E \to K$ une forme quadratique. Nous dirons que le couple (E, q) est un *espace adélique quadratique*. Pour chaque $v \in V(K)$, considérons la norme de la forme bilinéaire symétrique b associée à q :

$$\|b\|_v = \sup\left\{\frac{|b(x,y)|_v}{\|x\|_v\|y\|_v}\ ;\ x, y \in (E \otimes_K K_v) \setminus \{0\}\right\}.$$

La hauteur de q, notée $H(q)$, est le module de la fonction $v \mapsto \|b\|_v$ si $q \neq 0$ et 0 sinon. Dans la suite nous utiliserons souvent que la hauteur de la forme quadratique $\overline{q}\colon E/E^\perp \to K$ est la même que celle de q. En effet, pour tout $v \in V(K)$ et toutes classes $\xi, \eta \in (E/E^\perp) \otimes K_v$, il existe des représentants $x, y \in E \otimes K_v$ tels que $\|\xi\|_v = \|x\|_v$ et $\|\eta\|_v = \|y\|_v$. Comme on a $\overline{b}(\xi, \eta) = b(x, y)$, on en déduit $\|\overline{b}\|_v = \|b\|_v$ puis l'égalité $H(\overline{q}) = H(q)$.

Proposition 2.3. *Soient A, B des sous-espaces vectoriels de E. Soient $x \in B^\perp$ et $y \in A^\perp$. Supposons que $A \subset B^\perp$ et $b(x, y) \neq 0$. Alors on a*

$$1 \leq H(q) H_{E/A}(\overline{x}) H_{E/B}(\overline{y}).$$

Démonstration. Les hypothèses impliquent $b(x+\alpha, y+\beta) = b(x, y)$ pour tous $\alpha \in A \otimes_K K_v$, $\beta \in B \otimes_K K_v$ et $v \in V(K)$. De là découle l'inégalité

$$|b(x,y)|_v \leq \|b\|_v \|\overline{x}\|_{E/A,v} \|\overline{y}\|_{E/B,v}.$$

On prend le logarithme, on intègre sur v et l'on conclut avec la formule du produit. □

Considérons maintenant deux sous-espaces vectoriels F, G de E. Pour $\overline{x} \in F/F \cap G^\perp$, on définit la forme linéaire $b_{\overline{x}}\colon G/F^\perp \cap G \to K$ par $b_{\overline{x}}(\overline{g}) = b(x, g)$ (cette expression ne dépend pas du choix des représentants x et g). On en déduit une application linéaire $B(F, G)\colon F/F \cap G^\perp \to \left(G/F^\perp \cap G\right)^\vee$ donnée par $B(F, G)(\overline{x}) = b_{\overline{x}}$. Cette application est injective car si $b(x, g)$ est nul pour tout $g \in G$ alors $x \in F \cap G^\perp$ et donc $\overline{x} = 0$. Ceci donne une majoration de la dimension du premier espace par celle du second et donc, en permutant les rôles de F et de G, l'égalité

$$\dim F + \dim F^\perp \cap G = \dim G + \dim G^\perp \cap F. \tag{1}$$

Ainsi $B(F, G)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Proposition 2.4. *Soient F, G des sous-espaces vectoriels d'un espace adélique quadratique (E, q). Alors on a*

$$H(F^\perp \cap G) H(F \cap G^\perp) \leq H(F) H(G) H(q)^{\dim F/F \cap G^\perp}.$$

Démonstration. Nous appliquons le lemme 2.2 à $B(F, G)$ et nous utilisons l'estimation $H(B(F, G)) \leq H(q)$ qui découle de majorations locales du même type entre les normes d'opérateur de $B(F, G)$ et de b. □

En appliquant ce résultat à $F = G$ et $G = E$ nous obtenons les inégalités suivantes.

Corollaire 2.5. *Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace adélique quadratique (E, q). On a*

$$H(F \cap F^\perp) \leq H(F) H(q)^{\frac{1}{2}\dim F/F \cap F^\perp}.$$

Si, de plus, (E, q) est régulier alors

$$H(F^\perp) \leq H(F) H(E) H(q)^{\dim F}.$$

En choisissant $F = E$ nous obtenons un énoncé qui améliore et généralise le théorème 2 de [Va2].

Proposition 2.6. *Soit (E, q) un espace adélique quadratique. On a $H(E^\perp) \le H(E)H(q)^{\frac{1}{2}\dim E/E^\perp}$.*

Cette majoration de $H(E^\perp)$ est optimale comme le montre l'exemple suivant. Choisissons l'espace standard $E = \mathbb{Q}^n$, un entier $d \in \{1, \ldots, n-1\}$, un entier naturel a et la forme quadratique

$$q(x) = (x_{d+1} - ax_d)^2 + \cdots + (x_n - ax_{n-1})^2.$$

On vérifie que $E^\perp = \{(x_1, \ldots, x_d, ax_d, \ldots, a^{n-d}x_d)\,;\ x_1, \ldots, x_d \in \mathbb{Q}\}$. Ce radical est de dimension d et sa hauteur vaut $H(\mathbb{Q}^{d-1})H(E^\perp/\mathbb{Q}^{d-1})$, c'est-à-dire

$$H(E^\perp) = H_{\mathbb{Q}^{n-d+1}}(1, a, \ldots, a^{n-d}) = \left(\sum_{i=0}^{n-d} a^{2i}\right)^{1/2} \ge a^{n-d}.$$

Par ailleurs, la forme bilinéaire b associée à q s'écrit

$$b(x, y) = \sum_{i=d+1}^{n} x_i y_i - a\sum_{i=d}^{n-1} x_i y_{i+1} - a\sum_{i=d}^{n-1} x_{i+1} y_i + a^2 \sum_{i=d}^{n-1} x_i y_i.$$

Chacune des quatre sommes définit une forme bilinéaire sur $\mathbb{Q}^n$ de normes 1 en toutes les places. On en déduit $H(q) \le (1+a)^2$. La proposition 2.6 s'écrit alors $a^{n-d} \le H(E^\perp) \le 1 \times (1+a)^{n-d}$, ce qui prouve l'optimalité annoncée en faisant tendre a vers l'infini. Si $a = 0$ cet exemple fournit l'égalité dans la proposition car alors toutes les hauteurs valent 1.

2.4. Lemmes d'évitement. Certains des théorèmes présentés dans l'introduction reposent sur la possibilité de choisir, dans un espace adélique donné, un vecteur non nul de petite hauteur qui n'appartient pas à un ensemble algébrique strict, fixé au préalable. Un cas particulièrement utile est celui où cet ensemble est une union finie d'espaces vectoriels. Ce type de résultat est appelé *lemme d'évitement*. Dans cette partie, nous énonçons des lemmes d'évitement pour les espaces adéliques rigides sur une extension algébrique de $\mathbb{Q}$, qui généralisent (pour l'essentiel) ceux démontrés dans [GR1]. On désigne par E un espace adélique rigide de dimension n sur une extension algébrique $K/\mathbb{Q}$. On note $\mathbf{S}(E^\mathsf{v})$ l'algèbre symétrique du dual de E.

Théorème 2.7. *Soient $s \in \{1, \ldots, n\}$ et I un idéal de $\mathbf{S}(E^\mathsf{v})$, engendré par une famille d'éléments de degré $\le M$. Soit $Z(I)$ le lieu des zéros de I dans E. Supposons qu'aucun sous-espace vectoriel de E de dimension s ne soit inclus dans $Z(I)$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in E \setminus Z(I)$ tel que*

$$\sup_{v \in V_\infty(K)} \|x\|_v \le (1+\varepsilon)M\lambda_s^{\mathrm{BV}}(E) \quad \textit{et} \quad \sup_{v \notin V_\infty(K)} \|x\|_v \le 1.$$

Démonstration. L'argument est identique à celui du théorème 2.2 de [GR1], que nous rappelons brièvement. Soit $(e_1, \ldots, e_s)$ une famille libre de E telle que

$$\forall\, j \in \{1, \ldots, s\}, \quad \|e_j\|_v \le \begin{cases} (1+\varepsilon)\lambda_j^{\mathrm{BV}}(E) & \text{si } v \text{ est archimédienne,} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme, par hypothèse, l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}_K(e_1, \ldots, e_s)$ n'est pas inclus dans $Z(I)$, il existe $P \in I$ de degré $\le M$ tel que le polynôme $Q(X_1, \ldots, X_s) = P(X_1e_1 + \cdots + X_se_s)$ n'est pas identiquement nul. Soit $X_1^{a_1} \cdots X_s^{a_s}$ un monôme de degré maximal apparaissant dans Q. Le théorème des zéros combinatoire d'Alon [Al] assure alors l'existence de $(x_1, \ldots, x_s) \in \prod_{i=1}^s \{0, 1, \ldots, a_i\}$ tel que $Q(x_1, \ldots, x_s) \neq 0$. Le vecteur $x = \sum_{i=1}^s x_i e_i$ vérifie les conditions requises car $\sum_i a_i \le M$. $\square$

Si K possède au moins M racines de l'unité alors on peut remplacer M dans la majoration de $\sup_{v\in V_\infty(K)}\|x\|_v$ par s puisque, au lieu du théorème d'Alon, on choisit simplement x_i parmi ces racines et 0. Par ailleurs, le choix d'une famille libre $(e_1,\ldots,e_s)$ comme dans la démonstration ci-dessus et de $Z(I) = \mathrm{Vect}_K(e_1,\ldots,e_{s-1})$ (pour lequel $M=1$) montre que la dépendance en E du théorème 2.7 est optimale (nous y reviendrons un peu plus loin).

Voici un analogue de l'énoncé précédent avec les minima de Zhang.

Théorème 2.8. *Soit I un idéal de $\mathbf{S}(E^\vee)$. Soient $Z(I)$ le lieu des zéros de I dans E et t la dimension de $Z(I)$. Alors, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $x\in E\setminus Z(I)$ tel que $H_E(x)\le(1+\varepsilon)Z_{t+1}(E)$.*

Démonstration. Par définition du minimum de Zhang, il existe une partie S de E telle que $\dim \mathrm{Zar}(S)\ge t+1$ et $H_E(S)\le(1+\varepsilon)Z_{t+1}(E)$. Par dimension on a $S\not\subset Z(I)$ et il existe $x\in S\setminus Z(I)$, qui est le vecteur recherché car $H_E(x)\le H_E(S)$. □

Nous utiliserons également la variante suivante qui permet de construire un petit supplémentaire commun à une famille finie de sous-espaces vectoriels de même dimension.

Proposition 2.9. *Soient $M\ge1$ un entier et $t\in\{0,\ldots,n-1\}$. Soit $\{E_m\,;\ 1\le m\le M\}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E, de dimensions $\le t$. Alors, pour tout $\varepsilon>0$, il existe une famille libre $(e_1,\ldots,e_{n-t})$ de vecteurs de E vérifiant les conditions suivantes :*

(i) *Pour tout $m\in\{1,\ldots,M\}$, on a $\mathrm{Vect}_K(e_1,\ldots,e_{n-t})\cap E_m=\{0\}$.*

(ii) *Pour tout $i\in\{1,\ldots,n-t\}$, on a*

$$\sup_{v\in V_\infty(K)}\|e_i\|_v\le(1+\varepsilon)M\lambda_{t+i}^{\mathrm{BV}}(E)\quad \textit{et}\quad \sup_{v\notin V_\infty(K)}\|e_i\|_v\le1.$$

Le même énoncé vaut en remplaçant la condition (ii) *par*

(ii′) *Pour tout $i\in\{1,\ldots,n-t\}$, on a $H_E(e_i)\le(1+\varepsilon)Z_{t+i}(E)$.*

Démonstration. On construit la famille $\{e_1,\ldots,e_{n-t}\}$ par récurrence. Pour $1\le i\le n-t$, supposons $e_1,\ldots,e_{i-1}$ construits. Soit I l'idéal radiciel de $\mathbf{S}(E^\vee)$ tel que

$$Z(I)=\bigcup_{m=1}^{M}E_m\oplus\mathrm{Vect}_K(e_1,\ldots,e_{i-1}).$$

Il est engendré par une famille de polynômes de degré M. Comme $\dim Z(I)\le t+i-1$, on peut appliquer un des deux résultats précédents, qui fournit alors $e_i\notin Z(I)$. La condition (i) découle de la construction même de cette famille. □

Bien sûr le point (ii) fournit la borne $H_E(e_i)\le(1+\varepsilon)M\lambda_{t+i}^{\mathrm{BV}}(E)$. *Via* l'inégalité d'Hadamard, cette proposition donne l'existence d'un sous-espace G de E, de dimension $n-t$, ne rencontrant pas $\bigcup_m E_m\setminus\{0\}$, tel que

$$H(G)\le(1+\varepsilon)\min\{M^{n-t}\lambda_{t+1}^{\mathrm{BV}}(E)\cdots\lambda_n^{\mathrm{BV}}(E),\,Z_{t+1}(E)\cdots Z_n(E)\}.$$

Par exemple, lorsque les espaces vectoriels E_m sont tous de dimension t, ce résultat permet de trouver un petit supplémentaire G commun à tous les E_m. Dans le cas où il n'y a qu'un seul espace à éviter, on a un énoncé plus précis :

Proposition 2.10. *Soit F un sous-espace vectoriel de E, de dimension $t<n$. Pour tout $\varepsilon>0$, il existe une famille libre $(e_1,\ldots,e_{n-t})$ de E telle que, si on pose $G=\mathrm{Vect}_K(e_1,\ldots,e_{n-t})$, on a $E=F\oplus G$ et $H_E(e_i)\le(1+\varepsilon)\Lambda_{t+i}(E)$ pour tout i. En particulier* $\inf\{H(G)\,;\ E=F\oplus G\}\le\Lambda_{t+1}(E)\cdots\Lambda_n(E)$.

Démonstration. Soit $(a_1, \ldots, a_n)$ une base de E telle que $H_E(a_i) \leq (1+\varepsilon)\Lambda_i(E)$ pour tout $1 \leq i \leq n$. On construit par récurrence une suite injective $i_1, \ldots, i_{n-t}$ telle que $i_j \leq t+j$ et $a_{i_j} \notin F \oplus \mathrm{Vect}_K(a_{i_1}, \ldots, a_{i_{j-1}})$ pour $1 \leq j \leq n-t$. Ceci est possible car ce dernier espace est de dimension $t+j-1$ alors qu'il y a $t+j$ possibilités pour i_j. Les vecteurs $e_j = a_{i_j}$ pour $j \in \{1, \ldots, n-t\}$ conviennent. □

Les résultats présentés dans cette partie ne dépendent pas de la géométrie des sous-ensembles que l'on évite. Les énoncés uniformes ainsi obtenus sont pratiquement optimaux. L'énoncé suivant permet de montrer que l'exposant 1 de M dans le théorème 2.7 ne peut être remplacé par un nombre réel $< 1/2$ (lorsque $c_1(K)$ est fini).

Proposition 2.11. *Soit K une extension algébrique de $\mathbb{Q}$. Soit $f\colon \mathbb{N}\times]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ une fonction ayant la propriété suivante. Pour tout espace adélique rigide E de dimension n, pour tout idéal I de $\mathbf{S}(E^\vee)$ engendré par une famille d'éléments de degré $\leq M$ et vérifiant $Z(I) \neq E$, il existe un vecteur de $E \setminus Z(I)$ de hauteur plus petite que $f(M, \Lambda_n(E))$. Alors on a $f(x,y) \geq y\sqrt{x}$ pour tous $(x,y) \in \mathbb{N}\times]0,+\infty[$.*

En utilisant la comparaison $\lambda_n^{\mathrm{BV}}(E) \leq c_1(K)\Lambda_n(E)$, le théorème 2.7 montre que la fonction $f(x,y) = (1+\varepsilon)c_1(K)xy$ convient.

Démonstration. Soient $y > 0$ et x un entier ≥ 1. Soient K_y la droite standard K où les valeurs absolues en les places archimédiennes sont multipliées par y et $E = K_y^x$ la somme directe hermitienne de ces droites. On a $\Lambda_i(E) = y$ pour tout $i \in \{1, \ldots, x\}$. Soit I l'idéal de $K[X_1, \ldots, X_x]$ engendré par le produit $X_1 \cdots X_x$. Un vecteur $a \in E$ n'appartient pas à $Z(I)$ si et seulement si aucune de ses coordonnées n'est nulle. Par l'inégalité de convexité

$$H_E(a_1, \ldots, a_x) \geq \left(\sum_{i=1}^{x} H_{K_y}(a_i)^2 \right)^{1/2}$$

(voir [GR2, lemme 2.2]) et en utilisant $H_{K_y}(u) = y$ si $u \in K \setminus \{0\}$, nous en déduisons $H_E(a) \geq y\sqrt{x}$ pour tout $a \in E \setminus Z(I)$. □

Pour notre dernière remarque d'optimalité, nous allons utiliser le lemme élémentaire suivant, évident lorsque les minima sont atteints (par exemple si le corps K est de Northcott).

Lemme 2.12. *Soit E un espace adélique rigide sur K. Il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E ayant la propriété suivante : pour tout $t \in \{0, \ldots, n-1\}$ et toute partie S de E telle que $\ell := \dim \mathrm{Vect}_K\{e_1, \ldots, e_t, S\} > t$, on a $H_E(S) \geq \Lambda_\ell(E)$.*

Démonstration. Choisissons la base $(e_1, \ldots, e_n)$ de sorte que $H_E(e_1) \leq \cdots \leq H_E(e_n)$ et $\Lambda_i(E) \leq H_E(e_i) < \Lambda_{i+1}(E)$ dès que $\Lambda_i(E) < \Lambda_{i+1}(E)$. Ceci entraîne que si $\Lambda_i(E) < \Lambda_j(E)$ alors $H_E(e_i) < \Lambda_j(E)$. Par choix de ℓ, on a $H_E(\{e_1, \ldots, e_t, S\}) \geq \Lambda_\ell(E)$. Donc si $H_E(e_t) < \Lambda_\ell(E)$ alors $H_E(S) = H_E(\{e_1, \ldots, e_t, S\})$ et le lemme est démontré. Sinon $\Lambda_t(E) = \Lambda_\ell(E)$ et le plus petit indice $i \geq 1$ tel que $\Lambda_i(E) = \Lambda_\ell(E)$ est inférieur à t. Ainsi l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}_K\{e_1, \ldots, e_{i-1}, S\}$ est de dimension au moins $i-1+\ell-t \geq i$ et $H_E(\{e_1, \ldots, e_{i-1}\}) < \Lambda_i(E)$. On en déduit $H_E(S) = H_E(\{e_1, \ldots, e_{i-1}, S\}) \geq \Lambda_i(E) = \Lambda_\ell(E)$. □

On peut alors observer que la majoration de la plus petite hauteur d'un supplémentaire d'un sous-espace donnée par la proposition 2.10 est optimale au sens suivant : si K est un corps de Siegel (c'est-à-dire $c_K^\Lambda(2) < \infty$) alors, pour tout espace adélique rigide E de dimension n sur K, il existe $F \subset E$ de dimension t tel que, pour tout supplémentaire G de F dans E, on ait

$$\Lambda_{t+1}(E) \cdots \Lambda_n(E) \leq c_K^\Lambda(n-t) H(G).$$

En effet, choisissons $(e_1,\dots,e_n)$ comme dans le lemme et posons $F = \mathrm{Vect}_K(e_1,\dots,e_t)$. Si G est un supplémentaire de F dans E alors, en prenant $S \subset G$, le lemme et la définition des minima entraînent $\Lambda_i(G) \geq \Lambda_{t+i}(E)$ pour $1 \leq i \leq n-t$. Il suffit ensuite d'utiliser la définition de $c_K^{\Lambda}(n-t)$ pour obtenir la majoration de $\Lambda_{t+1}(E)\cdots\Lambda_n(E)$ annoncée.

3. Lemmes clefs

Soit (E,q) un espace adélique quadratique sur K. Pour tout sous-espace vectoriel F de E et tout $x \in E\setminus F$, notons F_x le noyau de la forme linéaire $a_x\colon F\oplus K.x \to K$, $f+\lambda x \mapsto 2b(f,x)+\lambda q(x)$. Si F est isotrope, l'application a_x ne dépend que de la classe de x modulo F.

Lemme clef. *Soient $F \subset E$ un sous-espace isotrope et $x \in E\setminus F$. Si $F\oplus K.x$ n'est pas isotrope alors F_x est un sous-espace isotrope de E, de même dimension que F, vérifiant*
$$\frac{H(F_x)}{H(F)} \leq 2H(q)H_{E/F}(\overline{x})^2.$$

Démonstration. Comme F est isotrope on a $q(f+\lambda x) = \lambda a_x(f+\lambda x)$ pour tous $f \in F$ et $\lambda \in K$. Cette égalité montre que F_x est isotrope. De plus sa dimension est égale à celle de F car $F\oplus K.x$ n'est pas isotrope et donc $a_x \neq 0$. Par la proposition 3.6 de [GR3], on a
$$H(F_x) = H(F\oplus K.x)H(a_x) = H(F)H_{E/F}(\overline{x})H(a_x)$$
où $H(a_x)$ est la hauteur de a_x vu comme élément de $(F\oplus K.x)^{\vee}$. Pour conclure, nous devons montrer $H(a_x) \leq 2H(q)H_{E/F}(\overline{x})$. Soient $v \in V(K)$ et $x_v \in E_v = E\otimes K_v$ tel que $x_v - x \in F_v = F\otimes K_v$. On a alors, pour tous $f \in F_v$ et $\lambda \in K_v$,
$$a_x(f+\lambda x_v) = a_{x_v}(f+\lambda x_v) = b(2f+\lambda x_v, x_v)$$
ce qui entraîne $|a_x(f+\lambda x_v)|_v \leq \|b\|_v\|2f+\lambda x_v\|_v\|x_v\|_v$. Choisissons x_v de sorte que $\|x_v\|_v = \|\overline{x}\|_{E/F,v}$ et montrons que $\|2f+\lambda x_v\|_v \leq 2^{\varepsilon_v}\|f+\lambda x_v\|_v$ où $\varepsilon_v \in \{0,1\}$ vaut 1 si et seulement si $v \in V_\infty(K)$. Si v n'est pas archimédienne nous observons que $\|2f+\lambda x_v\|_v = \|2f+2\lambda x_v - \lambda x_v\|_v$ est majoré par
$$\max\left(\|2f+2\lambda x_v\|_v, \|\lambda x_v\|_v\right) \leq \max\left(\|f+\lambda x_v\|_v, \|\lambda x_v\|_v\right) = \|f+\lambda x_v\|_v.$$
Si $v \in V_\infty(K)$ alors x_v est orthogonal à F_v et donc
$$\|2f+\lambda x_v\|_v = \sqrt{4\|f\|_v^2 + \|\lambda x_v\|_v^2} \leq 2\sqrt{\|f\|_v^2+\|\lambda x_v\|_v^2} = 2\|f+\lambda x_v\|_v.$$
On en déduit
$$\frac{|a_x(f+\lambda x_v)|_v}{\|f+\lambda x_v\|_v} \leq 2^{\varepsilon_v}\|b\|_v\|\overline{x}\|_{E/F,v}.$$
En prenant la borne supérieure du membre de gauche, on a $\|a_x\|_v \leq 2^{\varepsilon_v}\|b\|_v\|\overline{x}\|_{E/F,v}$ d'où découle la borne voulue pour $H(a_x)$. □

Il peut être intéressant de noter que l'espace F_x est l'image de F par toute symétrie orthogonale
$$s_z\colon y \mapsto y - \frac{2b(z,y)}{q(z)}z$$
où z est un élement non isotrope de $F\oplus K.x$. Le lemme apparaît alors comme une majoration fine de la hauteur de cette image. L'argument principal de la démonstration — remplacer la forme quadratique q par la forme linéaire a_x — n'est pas nouveau. Déjà présent, sous une forme rudimentaire, dans un article de Thue de 1911 [Th, p. 18–19], l'on doit à Cassels [Ca1] de l'avoir démocratisé. Il se retrouve alors, de manière parfois déguisée, dans tous les travaux estimant la hauteur minimale des sous-espaces isotropes (lorsque K est un corps de nombres),

de Davenport [Da] à Vaaler [Va2] en passant par Schlickewei [ScH]. En revanche, sous cette forme épurée, le lemme est original (même si le théorème 4 de [Va2] s'en approche). Comme son nom l'indique, il revêt un aspect fondamental dans la mesure où il intervient dans plusieurs des énoncés qui vont suivre.

Le résultat suivant ne semble pas avoir été non plus formulé aussi explicitement dans la littérature. Il s'avérera d'une importance cruciale dans la suite.

Proposition 3.1. *Soit (E,q) un espace adélique quadratique. Soient $\varepsilon > 0$ et m un entier naturel pour lequel existe un sous-espace isotrope de E de dimension m. Choisissons un tel sous-espace F vérifiant*

$$H(F) \leq (1+\varepsilon)\inf\{H(F')\,;\ F' \subset E \textit{ isotrope et } \dim F' = m\}.$$

Soient $x, y \in E \setminus F$. Si $\{x,y\} \not\subset F^{\perp}$ ou si $b(x,y) \neq 0$ alors

$$(1+\varepsilon)^{-1} \leq 2H(q)H_{E/F}(\overline{x})H_{E/F}(\overline{y}).$$

Démonstration. On distingue trois cas. Si $U = F \oplus K.x$ et $V = F \oplus K.y$ ne sont pas isotropes on applique le lemme clef aux couples (F,x) et (F,y). Chacune des hauteurs de F_x et de F_y est supérieure à $H(F)(1+\varepsilon)^{-1}$ puisque ces espaces sont isotropes de dimension m. On en déduit alors l'inégalité souhaitée :

$$(1+\varepsilon)^{-1} \leq \left(\frac{H(F_x)H(F_y)}{H(F)^2}\right)^{1/2} \leq 2H(q)H_{E/F}(\overline{x})H_{E/F}(\overline{y}).$$

Si U et V sont isotropes alors $\{x,y\} \subset F^{\perp}$ et donc $b(x,y) \neq 0$. Dans ce cas on applique la proposition 2.3 à $A = B = F$. Il vient $1 \leq H(q)H_{E/F}(\overline{x})H_{E/F}(\overline{y})$ puis le résultat voulu. Compte tenu de la symétrie entre x et y, il reste le cas où U est isotrope et V non isotrope. On peut même supposer que $y \notin F^{\perp}$ sinon on retombe dans le cas précédent. Ainsi $y \notin U^{\perp}$ et l'intersection $U^{\perp} \cap V$ est un sous-espace strict de V. Elle contient F car elle est égale à $F^{\perp} \cap x^{\perp} \cap V$ et $x \in F^{\perp}$ par isotropie de U. Comme F est un hyperplan de V il y a égalité $U^{\perp} \cap V = F$. Comme on l'a vu au paragraphe 2.3, ceci implique que la dimension de $U \cap V^{\perp}$ est égale à celle de F. L'espace $U \cap V^{\perp}$ est isotrope comme sous-espace de U isotrope. On a donc $H(F)(1+\varepsilon)^{-1} \leq H(U \cap V^{\perp})$. Appliquons alors la proposition 2.4 à U et V. On a

$$\frac{H(F)}{1+\varepsilon} \times H(F) \leq H(U \cap V^{\perp})H(U^{\perp} \cap V) \leq H(q)H(U)H(V).$$

On conclut en utilisant $H_{E/F}(\overline{x}) = H(U)/H(F)$ et $H_{E/F}(\overline{y}) = H(V)/H(F)$. □

On en déduit le résultat suivant (bien connu pour un corps de nombres).

Corollaire 3.2. *Soit (E,q) un espace adélique quadratique tel que q n'est pas identiquement nulle sur E. Alors on a*

$$1 \leq 2H(q)\sup\{\Lambda_1(E/F)^2\,;\ F \subset E \textit{ isotrope maximal}\}.$$

Démonstration. Lorsque F est maximal (donc distinct de E car $q \neq 0$), l'on peut choisir $x = y$ quelconques, n'appartenant pas à F, dans la proposition précédente. On a alors, pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence de F tel que $(1+\varepsilon)^{-1} \leq 2H(q)H_{E/F}(\overline{x})^2$ pour tout $\overline{x} \in (E/F) \setminus \{0\}$. □

Cette inégalité est optimale comme le prouve l'exemple suivant : sur l'espace standard $E = \mathbb{Q}^n$, prenons $q(x_1,\ldots,x_n) = x_1^2 - x_2^2$, de forme bilinéaire associée $b(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz en une place archimédienne et l'inégalité ultramétrique permettent de voir que $\|b\|_v = 1$ pour tout $v \in V(K)$ et donc $H(q) = 1$. Les espaces isotropes maximaux de $(\mathbb{Q}^n, q)$ sont les hyperplans $F_a = \{x_2 = ax_1\}$ pour $a = \pm 1$, chacun de hauteur $\sqrt{1+a^2} = \sqrt{2}$. Aussi a-t-on $\Lambda_1(\mathbb{Q}^n/F_a) = H(\mathbb{Q}^n)/H(F_a) = 1/\sqrt{2}$ et donc, sur cet exemple, l'égalité

$$2H(q)\sup\{\Lambda_1(E/F)^2\,;\ F \subset E \text{ isotrope maximal}\} = 1.$$

4. Théorèmes de transfert

Cette partie s'articule autour de nos deux théorèmes de transfert (propositions 4.3 et 4.4). Après leurs démonstrations nous examinons leurs retombées. Nous montrons en particulier qu'ils permettent de retrouver directement des (généralisations de) résultats disséminés dans la littérature.

4.1. Pour notre premier théorème de transfert, nous passerons par les deux lemmes suivants. La notation F_x a été introduite avant le lemme clef de la partie 3.

Lemme 4.1. *Soient F, F' des sous-espaces isotropes de E. Soient $x \in F'$, $y \in F$ tels que $b(x,y) \neq 0$. Alors $F_x \cap F'_y = F \cap F'$.*

Démonstration. Le vecteur $x \in F'$ est isotrope et donc $F_x = F \cap x^\perp \oplus K.x$. Comme $F' \subset x^\perp$ on a $F \cap F' \subset F \cap x^\perp \subset F_x$. Par symétrie, la même inclusion vaut pour F'_y et donc $F \cap F' \subset F_x \cap F'_y$. Réciproquement, si $u \in F_x \cap F'_y$, il existe $f \in F \cap x^\perp$, $f' \in F' \cap y^\perp$, $\lambda, \mu \in K$ tels que $u = f + \lambda x = f' + \mu y$. Ainsi $b(u,x) = b(f,x) + \lambda q(x) = 0$ car $f \in x^\perp$ et x est isotrope. Comme f' et x appartiennent à F' ils sont orthogonaux et donc $b(u,x) = \mu b(y,x)$. L'hypothèse $b(x,y) \neq 0$ implique $\mu = 0$. Par symétrie, on a de même $\lambda = 0$. On en déduit $u = f = f' \in F \cap F'$ et l'égalité des intersections. □

Lemme 4.2. *Soient s un entier ≥ 1 et $a, b, a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_s$ des nombres réels positifs vérifiant $a \leq b$, $a_1 \leq \cdots \leq a_s$ et $b_1 \leq \cdots \leq b_s$. Supposons qu'il existe une permutation σ de $\{1, \ldots, s\}$ telle que, pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$, on ait $a \leq a_i b_{\sigma(i)} \leq b$. Alors $a \leq a_i b_{s+1-i} \leq b$ pour tout i.*

Démonstration. Fixons $i \in \{1, \ldots, s\}$. Comme l'ensemble $\{s+2-i, \ldots, s\}$ possède $i-1$ éléments, il existe $h \in \{1, \ldots, i\}$ tel que $\sigma(h) \in \{1, \ldots, s+1-i\}$. On a alors $a \leq a_h b_{\sigma(h)} \leq a_i b_{s+1-i}$. De même il existe $\ell \in \{i, \ldots, s\}$ tel que $\sigma(\ell) \notin \{1, \ldots, s-i\}$. On a alors $a_i b_{s+1-i} \leq a_\ell b_{\sigma(\ell)} \leq b$. □

Voici notre premier théorème de transfert.

Proposition 4.3. *Soit (E,q) un espace adélique quadratique tel que $E/E^\perp$ est hyperbolique de dimension $2s > 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux sous-espaces isotropes maximaux F, F' de E, de codimension s, tels que $E = F + F'$ et*

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, s\}, \qquad (1+\varepsilon)^{-1} \leq 2H(q)\Lambda_i(E/F)\Lambda_{s+1-i}(E/F').$$

Démonstration. Un sous-espace isotrope maximal contient nécessairement $E^\perp$. Comme E/F est isomorphe comme espace adélique rigide à $(E/E^\perp)/(F/E^\perp)$, on peut supposer que $E^\perp = \{0\}$ et que E est hyperbolique. Il existe donc deux lagrangiens F et F' tels que $E = F \oplus F'$. Désignons par α la borne inférieure des produits des hauteurs $H(F)H(F')$ sur tous les couples (F, F') de supplémentaires lagrangiens de E. Choisissons alors un tel couple vérifiant $H(F)H(F') \leq (1+\varepsilon)^2\alpha$. Nous affirmons que, pour tous $x \in F'$ et $y \in F$ tels que $b(x,y) \neq 0$, on a

$$(1+\varepsilon)^{-1} \leq 2H(q)H_{E/F}(\overline{x})H_{E/F'}(\overline{y}). \tag{2}$$

En effet, appliquons le lemme clef à (F,x) et (F',y). Il fournit deux lagrangiens F_x et F'_y de hauteurs contrôlées. En faisant le produit de ces hauteurs, nous obtenons

$$\left(\frac{H(F_x)H(F'_y)}{H(F)H(F')}\right)^{1/2} \leq 2H(q)H_{E/F}(\overline{x})H_{E/F'}(\overline{y}).$$

Par le lemme 4.1 on a $F_x \cap F'_y = F \cap F' = \{0\}$. Ainsi on a encore $E = F_x \oplus F'_y$ et le produit des hauteurs est supérieur à α. L'inégalité (2) se déduit du choix de (F, F'). Considérons maintenant une base $(e_1, \ldots, e_s)$ de F' et posons $a_i = H_{E/F}(\overline{e_i})$. On suppose que $a_1 \leq \cdots \leq a_s$. Considérons une base analogue $(e_{s+1}, \ldots, e_{2s})$ de F et posons $b_i = H_{E/F'}(\overline{e_{s+i}})$, supposés rangés dans l'ordre croissant. Comme (E,q) est régulier, la matrice $(b(e_i,e_j))_{1\le i,j\le 2s}$ est inversible. Cette matrice est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad A = (b(e_i, e_{s+j}))_{1\le i,j\le s}.$$

Ainsi A est inversible et il existe une permutation σ de $\{1,\dots,s\}$ telle que $b(e_i, e_{s+\sigma(i)}) \neq 0$ pour tout $i \in \{1,\dots,s\}$. Appliquons alors la minoration (2) à $x = e_i$ et $y = e_{s+\sigma(i)}$ puis le lemme 4.2 avec $a = (2(1+\varepsilon)H(q))^{-1}$ pour obtenir :

$$\forall\, i \in \{1,\dots,s\}, \qquad (1+\varepsilon)^{-1} \le 2H(q) H_{E/F}(\overline{e_i}) H_{E/F'}(\overline{e_{2s+1-i}}).$$

La proposition découle alors de la définition des minima de E/F et E/F' et d'un choix convenable des e_i. □

Étant donné un sous-espace isotrope F de E, notons

$$t(F) = \dim E + \dim E^{\perp} - 2\dim F.$$

L'égalité (1) appliquée à E et F fournit l'expression alternative

$$t(F) = (\dim E^{\perp} - \dim E^{\perp} \cap F) + (\dim F^{\perp} - \dim F).$$

Sous cette forme l'on voit que $t(F)$ est un entier naturel et que $t(F) = 0$ si et seulement si $F^{\perp} = F$ (en utilisant l'inclusion $E^{\perp} \subset F^{\perp}$ toujours vraie). Cette condition se traduit exactement par le fait que $E/E^{\perp}$ est un espace hyperbolique dans lequel $F/E^{\perp}$ est un lagrangien. L'énoncé qui suit, où l'on suppose $t(F) \neq 0$, apparaît alors comme complémentaire à la proposition 4.3.

Proposition 4.4. *Soient (E,q) un espace adélique quadratique et m un entier supérieur à $\dim E^{\perp}$. Supposons qu'il existe un sous-espace isotrope de dimension m. Si $t = \dim E + \dim E^{\perp} - 2m$ n'est pas nul alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace isotrope F, de dimension m, contenant $E^{\perp}$, tel que*

$$\forall\, i \in \{1,\dots,t\}, \qquad (1+\varepsilon)^{-1} \le 2H(q)\Lambda_i(E/F)\Lambda_{t+1-i}(E/F).$$

Démonstration. Observons tout d'abord que l'on peut se ramener au cas régulier. En effet, considérons un sous-espace isotrope F de E de dimension m. L'espace $(F+E^{\perp})/E^{\perp}$ est un sous-espace isotrope de $E/E^{\perp}$. Sa dimension est supérieure à $m - \dim E^{\perp}$ (entier positif par hypothèse) et il existe donc un sous-espace de $(F+E^{\perp})/E^{\perp}$ de dimension exactement $m - \dim E^{\perp}$ et, nécessairement, isotrope. Quitte alors à remplacer E par $E/E^{\perp}$ et m par $m - \dim E^{\perp}$ (l'entier t est inchangé, égal à $\dim E/E^{\perp} - 2(m - \dim E^{\perp})$), il suffit d'établir la proposition sous l'hypothèse $E^{\perp} = \{0\}$. Choisissons maintenant un sous-espace isotrope F, de dimension m, tel que

$$H(F) \le (1+\varepsilon)\inf\{H(F')\,;\ F' \subset E \text{ isotrope et } \dim F' = m\}.$$

On a $t = n - 2m \le n - m = \dim E/F$. Il est donc possible de choisir une famille de vecteurs $(e_1,\dots,e_t)$ de E dont les images dans E/F forment une famille libre. On supposera cette famille ordonnée de telle sorte que les hauteurs des images (relatives à E/F) soient croissantes. Considérons l'ensemble $I = \{i\,;\ e_i \in F^{\perp}\}$ et posons $G = F \oplus \mathrm{Vect}(e_i)_{i\in I}$. On notera que I est de cardinal $\dim G/F$. Comme $G \subset F^{\perp}$ on a $F \subset G \cap G^{\perp}$. En particulier la famille des images des vecteurs e_i, $i \in I$, dans $G/G\cap G^{\perp}$ forme une famille génératrice de cet espace et l'on peut en extraire une partie J de cardinal $s = \dim G - \dim G \cap G^{\perp}$ telle que $\{\overline{e_j}\,;\ j \in J\}$ est une base de $G/G\cap G^{\perp}$. Comme ce quotient est un espace quadratique régulier, la matrice $(b(e_i,e_j))_{i,j\in J}$ est inversible. Il existe donc une permutation σ de J telle que $b(e_i, e_{\sigma(i)}) \neq 0$ pour tout $i \in J$. On étend σ en une permutation de $\{1,\dots,t\}$

ayant la propriété : $i \in I \setminus J \Rightarrow \sigma(i) \in \{1,\dots,t\} \setminus I$. Ceci est possible pour une simple raison de cardinalité :

$$\begin{aligned}\operatorname{Card}\{1,\dots,t\} \setminus I - \operatorname{Card} I \setminus J &= t + s - 2\operatorname{Card} I \\ &\geq t + (\dim G - \dim G^{\perp}) - 2(\dim G - \dim F) \\ &= \dim E - \dim G - \dim G^{\perp} = 0.\end{aligned}$$

Ainsi, pour $i \in I \setminus J$, on a $e_{\sigma(i)} \notin F^{\perp}$. On en déduit que, pour tout $i \in \{1,\dots,t\}$, le couple de vecteurs $\{e_i, e_{\sigma(i)}\}$ vérifie les conditions de la proposition 3.1 et donc

$$(1+\varepsilon)^{-1} \leq 2H(q)H_{E/F}(\overline{e_i})H_{E/F}(\overline{e_{\sigma(i)}}).$$

Le lemme 4.2 entraîne alors

$$\forall\, i \in \{1,\dots,t\}, \qquad (1+\varepsilon)^{-1} \leq 2H(q)H_{E/F}(\overline{e_i})H_{E/F}(\overline{e_{t+1-i}})$$

et la proposition découle de la définition des minima. □

4.2. Ces deux propositions ont des conséquences intéressantes sur les hauteurs minimales des sous-espaces isotropes. Commençons par un énoncé qui généralise des résultats de Schlickewei et Schmidt [SS2, lemme 4] ($K = \mathbb{Q}$) et de Vaaler [Va2, lemme 8] (K corps de nombres).

Corollaire 4.5. *Soient (E,q) un espace adélique quadratique et m un entier supérieur à $\dim E^{\perp}$. Supposons qu'il existe un sous-espace isotrope de dimension m. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace isotrope F de E, de dimension m, tel que, pour tout $\ell \in \{\dim E + \dim E^{\perp} - 2m, \dots, \dim E - m\}$,*

$$(1+\varepsilon)^{-1} \leq (2H(q))^{\ell/2}\Lambda_1(E/F)\cdots\Lambda_\ell(E/F).$$

Démonstration. Si $t = \dim E + \dim E^{\perp} - 2m$ n'est pas nul, la proposition 4.4 avec un ε' fournit un sous-espace isotrope F de dimension m tel que

$$\forall\, i \in \{1,\dots,t\}, \qquad (1+\varepsilon')^{-1} \leq 2H(q)\Lambda_i(E/F)\Lambda_{t+1-i}(E/F).$$

De ces inégalités l'on déduit d'une part que $(1+\varepsilon')^{-1} \leq 2H(q)\Lambda_i(E/F)^2$ pour tout $i \geq (t+1)/2$ et, d'autre part, en faisant le produit, que $(1+\varepsilon')^{-t} \leq (2H(q))^t(\Lambda_1(E/F)\cdots\Lambda_t(E/F))^2$. Il ne reste plus qu'à utiliser la première minoration pour tous les indices $i \in \{t+1,\dots,\ell\}$ et à multiplier par la seconde pour conclure (en ajustant ε'). Si $t = 0$ alors un sous-espace isotrope de dimension m est maximal par la discussion qui précède la proposition 4.4. On applique alors le corollaire 3.2 qui fournit un sous-espace isotrope maximal F tel que $(1+\varepsilon)^{-1} \leq (2H(q))^{1/2}\,\Lambda_1(E/F)$. C'est le cas $\ell = 1$ du corollaire, dont découle le cas général en utilisant $\Lambda_1(E/F) \leq \Lambda_i(E/F)$ pour tout $1 \leq i \leq \ell$. □

On peut alors majorer la borne inférieure des hauteurs des sous-espaces isotropes de dimension supérieure à $\dim E^{\perp}$.

Proposition 4.6. *Soit (E,q) un espace adélique quadratique sur K. Soit s un entier inférieur au rang de q tel qu'il existe un sous-espace isotrope de E de codimension s. Alors on a*

$$\inf\{H(F)\,;\ F \textit{ isotrope de codimension } s\} \leq c_K^{\Lambda}(s)\,(2H(q))^{s/2}\,H(E).$$

Cet énoncé généralise l'inégalité (1.6) de [Va2]. Les exposants de $H(q)$ et $H(E)$ sont moins bons que ceux donnés par le théorème 1.2 mais la constante peut être meilleure (par exemple si s est minimal).

Démonstration. Les hypothèses signifient qu'il existe un sous-espace isotrope de dimension $m = \dim E - s \geq \dim E^{\perp}$. On applique le corollaire ci-dessus avec $\ell = s$ et on utilise la définition de $c_K^{\Lambda}(s)$ pour majorer le produit des minima. Nous obtenons alors, pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence d'un sous-espace isotrope F de E, de codimension s, tel que

$$(1+\varepsilon)^{-1} \leq (2H(q))^{s/2} c_K^{\Lambda}(s) H(E/F),$$

ce qui équivaut à l'énoncé de la proposition. □

Lorsque s est minimal (sous-espaces isotropes maximaux), ce résultat découle aussi plus simplement du corollaire 3.2 en utilisant $\Lambda_1(E/F) \leq (c_K^{\Lambda}(s)H(E/F))^{1/s}$ ainsi que la relation $H(E/F) = H(E)/H(F)$. Dans ce cas particulier, le premier résultat de ce type a été obtenu en 1985 par Schlickewei pour $K = \mathbb{Q}$ [ScH] puis étendu peu après par Vaaler à un corps de nombres [Va1]. Il est suffisant pour démontrer le théorème 1.2 (voir la partie suivante). Dans le cas $t = 0$, si nous gardons les deux espaces F et F' donnés par la proposition 4.3, l'énoncé suivant s'obtient comme la proposition 4.6.

Corollaire 4.7. *Soit (E, q) un espace adélique quadratique sur K tel que $E/E^{\perp}$ est hyperbolique de dimension $2s$. Alors on a*

$$\begin{aligned} &\inf \{H(F)H(F') \,;\ E = F + F' \text{ et } F, F' \text{ isotropes maximaux}\} \\ &\quad \leq c_K^{\Lambda}(s)^2 \,(2H(q))^s\, H(E)^2. \end{aligned}$$

Ce résultat précise le théorème 3 de [SS2]. On en déduit alors le

Corollaire 4.8. *Soit (E, q) un espace adélique hyperbolique sur K de dimension $2s$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des plans hyperboliques $\mathbb{H}_1, \ldots, \mathbb{H}_s$ tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{s} \mathbb{H}_i$ et*

$$\prod_{i=1}^{s} H(\mathbb{H}_i) \leq (1+\varepsilon) c_K^{\Lambda}(s)^4 \,(2H(q))^s\, H(E)^2.$$

Démonstration. D'après le corollaire précédent, il existe deux lagrangiens F et F' de E tels que $E = F \oplus F'$ et

$$H(F)H(F') \leq (1+\varepsilon)^{1/2} c_K^{\Lambda}(s)^2 \,(2H(q))^s\, H(E)^2.$$

Par définition de $c_K^{\Lambda}(s)$ il existe une base $e_1, \ldots, e_s$ de F telle que

$$\prod_{i=1}^{s} H_E(e_i) \leq (1+\varepsilon)^{1/4} c_K^{\Lambda}(s) H(F).$$

Considérons une base analogue $e_{s+1}, \ldots, e_{2s}$ de F'. Comme (E, q) est régulier, la matrice $(b(e_i, e_{s+j}))_{1 \leq i,j \leq s}$ est inversible et il existe une permutation σ de $\{1, \ldots, s\}$ telle que $b(e_i, e_{s+\sigma(i)}) \neq 0$ pour tout i. Ainsi, l'espace $\mathbb{H}_i = \mathrm{Vect}(e_i, e_{s+\sigma(i)})$ est un plan hyperbolique et, par l'inégalité d'Hadamard, il est de hauteur plus petite que $H_E(e_i)H_E(e_{s+\sigma(i)})$. Le produit des hauteurs des $\mathbb{H}_i$ est alors inférieur à $(1+\varepsilon)^{1/2} c_K^{\Lambda}(s)^2 H(F)H(F')$ et la borne voulue se déduit du choix des lagrangiens. □

Nous verrons plus loin un énoncé du même type avec, cette fois-ci, des plans hyperboliques orthogonaux entre eux deux à deux (proposition 8.3).

5. Petits vecteurs isotropes

Dans cette partie, nous démontrons le théorème 1.2 et nous discutons de son optimalité. Nous montrerons également qu'un tel énoncé requiert que le corps K soit de Siegel.

5.1. Démonstration du théorème 1.2. Soit F un sous-espace isotrope maximal de (E,q). La croissance de $i \mapsto \Lambda_i(F)$ fournit les inégalités

$$(\Lambda_1(F)\cdots\Lambda_e(F))^{1/e} \leq \Lambda_e(F) \leq \Lambda_i(F)$$

pour tout $i \in \{e+1,\ldots,d\}$. De la définition de $c_K^\Lambda(d)$ se déduit alors la majoration

$$\Lambda_1(F)\cdots\Lambda_e(F) \leq \left(c_K^\Lambda(d)H(F)\right)^{e/d}.$$

Par définition des minima, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une famille libre $\{f_1,\ldots,f_e\}$ de vecteurs de F telle que $H_E(f_i) \leq (1+\varepsilon)^{1/e}\Lambda_i(F)$ pour $i \in \{1,\ldots,e\}$. Soit F_e le sous-espace vectoriel de F engendré par $f_1,\ldots,f_e$. L'espace F_e est isotrope de dimension e et, par l'inégalité d'Hadamard, sa hauteur est inférieure à

$$H_E(f_1)\cdots H_E(f_e) \leq (1+\varepsilon)\Lambda_1(F)\cdots\Lambda_e(F) \leq (1+\varepsilon)\left(c_K^\Lambda(d)H(F)\right)^{e/d}.$$

Il ne reste plus qu'à choisir F isotrope maximal et de hauteur (quasi-)minimale et à utiliser la proposition 4.6.

5.2. Optimalité du théorème 1.2. Considérons des entiers $1 \leq e \leq d \leq n$ pour lesquels existent des constantes c_1, c_2, c_3 vérifiant : *pour tout espace adélique quadratique (E,q) sur $\mathbb{Q}$, de dimension n et ayant ses sous-espaces isotropes maximaux de dimension d, il existe un sous-espace isotrope F de E, de dimension e et de hauteur $H(F) \leq c_1H(q)^{c_2}H(E)^{c_3}$.* Dans ces conditions, nous affirmons que l'on a nécessairement $c_2 = (n-d)e/(2d)$ et $c_3 = e/d$. En effet, considérons la forme quadratique

$$q(x_1,\ldots,x_n) = x_1^2 + \cdots + x_{n-d}^2$$

sur $\mathbb{Q}^n$ et l'espace adélique rigide $E = \mathbb{Q}^n$ muni des normes standards sauf en la place archimédienne de $\mathbb{Q}$ où l'on choisit

$$\|(x_1,\ldots,x_n)\|_{E,\infty}^2 = \alpha^2\left(|x_1|^2+\cdots+|x_{n-d}|^2\right) + \beta^2\left(|x_{n-d+1}|^2+\cdots+|x_n|^2\right)$$

pour des nombres réels $\alpha, \beta > 0$. Des calculs directs donnent $H(E) = \alpha^{n-d}\beta^d$ et $H(q) = 1/\alpha^2$. De plus, le seul sous-espace isotrope maximal de (E,q) est $\{0\} \times \mathbb{Q}^d$, de dimension d. Ainsi, par la propriété ci-dessus, il existe un sous-espace isotrope F de E, de dimension e et de hauteur

$$H(F) \leq c_1\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)^{c_2}\left(\alpha^{n-d}\beta^d\right)^{c_3} = c_1\alpha^{(n-d)c_3-2c_2}\beta^{dc_3}.$$

Pour minorer la hauteur de F, observons qu'il existe une base $u_1,\ldots,u_e$ de F telle que $\prod_{i=1}^e H_E(u_i) \leq c_\mathbb{Q}^\Lambda(e)H(F)$. Chacun des vecteurs u_i est non nul et isotrope (car F est isotrope). Or les $n-d$ premières coordonnées d'un tel vecteur sont nulles et, par définition de la norme à l'infini de E, sa hauteur est supérieure à β. On en déduit la relation

$$\beta^e \leq \left(c_\mathbb{Q}^\Lambda(e)c_1\right)\alpha^{(n-d)c_3-2c_2}\beta^{dc_3}.$$

De là, en faisant varier α et β, découlent immédiatement les valeurs de c_2 et c_3 annoncées. Ainsi, les exposants de $H(q)$ et $H(E)$ dans le théorème 1.2 sont les seuls, et donc meilleurs, possibles, du moins si l'on admet qu'ils ne dépendent pas de K.

5.3. Le théorème 1.2 montre que si K est un corps de Siegel il existe un vecteur non nul de petite hauteur solution de l'équation quadratique $q(x) = 0$. Il s'avère que la réciproque est également vraie. Pour le voir, considérons une extension algébrique K de $\mathbb{Q}$ pour laquelle existent un entier $n \geq 3$ et des constantes c_1, c_2, c_3 vérifiant : *pour tout espace adélique quadratique (E,q) sur K, de dimension n et ayant ses sous-espaces isotropes maximaux de dimension $n-1$, il existe un vecteur isotrope $x \in E\backslash\{0\}$ de hauteur $H_E(x) \leq c_1H(q)^{c_2}H(E)^{c_3}$.* La démonstration du paragraphe précédent s'étend à ce cas particulier car le seul sous-espace isotrope maximal de

$q(x) = x_1^2$ est encore $\{0\} \times K^{n-1}$. Nous obtenons ainsi $c_2 = 1/(2n-2)$ et $c_3 = 1/(n-1)$. Soit alors F un espace adélique rigide sur K, de dimension $n-1$. Notons $G = F \oplus K$ la somme directe avec la droite standard K (au sens de la fin du paragraphe 3.3 de [GR3]). On a $H(G) = H(F)$ (*ibid.*). Considérons la forme quadratique (sur G) $q(x,y) = y^2$ pour $x \in F$ et $y \in K$. La hauteur de q vaut 1 et F est l'unique sous-espace isotrope maximal de l'espace adélique quadratique (G,q). Par propriété de K, il existe donc $x \in F \setminus \{0\}$ tel que $H_F(x) = H_G(x,0) \leq c_1 H(F)^{1/(n-1)}$. Ceci étant vrai pour tout F, la constante $c_K^{\Lambda}(n-1)$ est finie et il en est donc de même pour $c_K^{\Lambda}(2) \leq c_K^{\Lambda}(n-1)$ car $n \geq 3$. Le lemme 4.11 de [GR3] entraîne alors que K est un corps de Siegel. Ainsi, l'existence d'une solution non nulle de petite hauteur à une équation quadratique n'est assurée que dans un corps où il est déjà possible de résoudre en vecteurs non nuls de petite hauteur les équations linéaires.

6. Petits sous-espaces isotropes

6.1. L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème suivant. On note $\lceil x \rceil$ l'entier immédiatement supérieur à un nombre réel x.

Théorème 6.1. *Soient (E,q) un espace adélique quadratique sur K de dimension n. Soient m, ℓ deux entiers naturels tels que $1 \leq \ell \leq m - \dim E^{\perp}$. Supposons qu'il existe un sous-espace isotrope de dimension m. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N = \lceil \frac{n-m}{\ell} \rceil$ couples $(F_{i,1}, F_{i,2})$, $1 \leq i \leq N$, de sous-espaces isotropes de E, tels que, pour tous $i \in \{1, \ldots, N\}$ et $j \in \{1,2\}$, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) $\dim F_{i,j} = m$
(ii) $E^{\perp} \subset F_{i,j}$
(iii) $(F_{i,1} + F_{i,2})/F_{i,1} \cap F_{i,2}$ *est hyperbolique** *de dimension* 2ℓ
(iv) $\dim F_{i,1} \cap F_{i,2} = m - \ell$
(v) $\bigcap_i (F_{i,1} + F_{i,2})$ *contient un espace isotrope de dimension* m
(vi) $\sum_{i=1}^{N} F_{i,1} + F_{i,2} = E$
(vii) *le produit des hauteurs* $H(F_{i,1})H(F_{i,2})$ *est plus petit que*

$$(1+\varepsilon)\left(c_K^{\Lambda}(\ell)a\right)^2 (2H(q))^{n-m} H(E)^2$$

où a est le minimum entre

$$2^{\ell} c_K^{\mathrm{BV}}(n-m), \quad (2c_1(K))^{\ell} c_K^{\Lambda}(n-m) \quad \textit{et} \quad c_K^{Z}(n-m).$$

Lorsque l'on choisit $\ell = m - \dim E^{\perp}$ et $K = \mathbb{Q}$, cet énoncé est une version améliorée d'un résultat de Schlickewei et Schmidt [SS2, théorème 1]. Si l'on prend $\ell = 1$ et K un corps de nombres, on retrouve un théorème de Vaaler [Va2] comme nous le verrons au paragraphe 6.3. L'exemple de l'espace standard $E = \mathbb{Q}^n$ muni de la forme quadratique de Kneser $q(x) = x_m^2 - (x_{m+1} - ux_m)^2 - \cdots - (x_n - ux_{n-1})^2$, où u est un entier strictement positif et $m \in \{1, \ldots, n-1\}$, permet de montrer que l'exposant $n-m$ de la hauteur de q dans la borne (vii) ne peut être amélioré (voir [SS1, p. 680]).

6.2. Démonstration du théorème 6.1. Quitte à remplacer (E,q) par $(E/E^{\perp}, \overline{q})$ (ce qui ne change pas la hauteur de q) et m par $m - \dim E^{\perp}$, nous pouvons supposer que (E,q) est régulier. Nous allons construire une famille $(G_1, \ldots, G_N)$ de sous-espaces de (E,q), de dimension $m + \ell$, de hauteurs contrôlées, tels que $G_1 + \cdots + G_N = E$ et $G_i / G_i \cap G_i^{\perp}$ est hyperbolique de dimension 2ℓ pour tout $1 \leq i \leq N$.

*L'intersection $F_{i,1} \cap F_{i,2}$ est le radical de $F_{i,1} + F_{i,2}$. La structure d'espace quadratique hyperbolique de $(F_{i,1} + F_{i,2})/F_{i,1} \cap F_{i,2}$ est celle donnée par la forme quadratique $\overline{q_{|F_{i,1}+F_{i,2}}}$.

Lemme 6.2. *Soit (E,q) un espace quadratique. Soient F un sous-espace isotrope de dimension m et G un sous-espace vectoriel contenant F et de dimension $m+\ell$. Alors l'espace $(G/G\cap G^{\perp},\overline{q_{|G}})$ est hyperbolique de dimension 2ℓ si et seulement si $F^{\perp}\cap G=F$.*

Démonstration. Pour un sous-espace H de E, l'intersection $H^{\perp}\cap G$ n'est rien d'autre que l'orthogonal de H dans G. Aussi pouvons-nous supposer que $G=E$. Il s'agit alors de démontrer que $E/E^{\perp}$ est hyperbolique de dimension 2ℓ si et seulement si $F^{\perp}=F$. Comme nous l'avons vu avant la proposition 4.4, ceci équivaut à la nullité de $t(F)=\dim E+\dim E^{\perp}-2m$. On conclut alors en observant

$$t(F)=0 \iff \dim E^{\perp}=m-\ell \iff \dim E/E^{\perp}=2\ell.$$

□

Considérons un sous-espace isotrope F, de dimension m, donné par le corollaire 4.5 avec un $\varepsilon'>0$ choisi de sorte que $(1+\varepsilon')^5\leq 1+\varepsilon$. Posons $t=n-m-\ell$ et effectuons la division euclidienne $n-m=k\ell+r$, $0\leq r<\ell$. Appliquons successivement le lemme d'évitement 2.9 à E/F et $\{F^{\perp}/F,\bigoplus_{1\leq j<i}G_j/F\}$ pour obtenir une suite de sous-espaces $(G_i)_{1\leq i\leq k}$ ayant les propriétés suivantes :

(1) $F\subset G_i$ et $\dim G_i=m+\ell$
(2) $(G_i/F)\cap(F^{\perp}/F)=\{0\}$ et $(G_i/F)\cap\bigoplus_{1\leq j<i}G_j/F=\{0\}$
(3) $H(G_i/F)\leq(1+\varepsilon')2^{\ell}\lambda_{t+1}^{\mathrm{BV}}(E/F)\cdots\lambda_{n-m}^{\mathrm{BV}}(E/F)$.

On notera que les hypothèses de ce lemme sont bien vérifiées à chaque pas car t, qui est supérieur à la dimension $n-2m$ de $F^{\perp}/F$ est aussi plus grand que $(k-1)\ell$. Si ℓ ne divise pas $n-m$, c'est-à-dire $N=k+1$, on choisit un sous-espace A de $\bigoplus_{1\leq i\leq k}G_i/F$, de dimension t. On applique à nouveau la proposition 2.9 à $\{F^{\perp}/F,A\}$. On trouve $G_N=G_{k+1}$ ayant les mêmes propriétés que ci-dessus. Les égalités $\bigoplus_{1\leq i\leq k}G_i/F=E/F$ (si $\ell\mid n-m$) et $A\oplus(G_N/F)=E/F$ (sinon) assurent que $G_1+\cdots+G_N=E$. De plus, par le lemme 6.2 et la propriété (2), chaque $(G_i/G_i\cap G_i^{\perp},\overline{q_{|G_i}})$, $i\in\{1,\ldots,N\}$, est un espace hyperbolique de dimension 2ℓ. Ceci permet d'utiliser le corollaire 4.7 qui fournit un couple de lagrangiens $(F_{i,1}/G_i\cap G_i^{\perp},F_{i,2}/G_i\cap G_i^{\perp})$, de somme (directe) égale à $G_i/G_i\cap G_i^{\perp}$, tels que

$$H(F_{i,1})H(F_{i,2})\leq(1+\varepsilon')c_K^{\Lambda}(\ell)^2\left(2H(q)\right)^{\ell}H(G_i)^2.$$

On a $\dim F_{i,1}=\dim F_{i,2}=\ell+\dim G_i\cap G_i^{\perp}=\ell+(m+\ell-2\ell)=m$. De plus on a $F_{i,1}\cap F_{i,2}=G_i\cap G_i^{\perp}$ puisque les quotients $F_{i,1}/G_i\cap G_i^{\perp}$ et $F_{i,2}/G_i\cap G_i^{\perp}$ sont d'intersection réduite à $\{0\}$. En particulier on a $\dim F_{i,1}\cap F_{i,2}=m-\ell$. Par (1), on notera aussi que F, de dimension m, est inclus dans l'intersection des $G_i=F_{i,1}+F_{i,2}$. À ce stade, les propriétés (i) à (vi) sont établies et, vu la borne ci-dessus pour le produit $H(F_{i,1})H(F_{i,2})$, il ne reste qu'à majorer convenablement $H(G_i)$ pour avoir la propriété (vii). Pour cela, rappelons que, par le choix de F comme dans le corollaire 4.5, on a

$$(1+\varepsilon')^{-1}\leq(2H(q))^{t/2}\Lambda_1(E/F)\cdots\Lambda_t(E/F).$$

En majorant $\Lambda_i(E/F)\leq\lambda_i^{\mathrm{BV}}(E/F)$ et en utilisant la définition de $c_K^{\mathrm{BV}}(n-m)$, on obtient alors

$$\lambda_{t+1}^{\mathrm{BV}}(E/F)\cdots\lambda_{n-m}^{\mathrm{BV}}(E/F)\leq(1+\varepsilon')(2H(q))^{t/2}c_K^{\mathrm{BV}}(n-m)H(E/F)$$

qui implique

$$H(G_i)\leq(1+\varepsilon')^2 2^{\ell}(2H(q))^{t/2}c_K^{\mathrm{BV}}(n-m)H(E).$$

On obtient alors le théorème avec la constante $2^{\ell}c_K^{\mathrm{BV}}(n-m)$. Alternativement, utilisons le corollaire 4.5 sous sa forme originale mais majorons chacun des minima dans la borne (3) de $H(G_i)$ par $c_1(K)\Lambda_i(E/F)$. Le produit $\lambda_{t+1}^{\mathrm{BV}}(E/F)\cdots\lambda_{n-m}^{\mathrm{BV}}(E/F)$ est alors majoré par

$$(1+\varepsilon')c_1(K)^\ell(2H(q))^{t/2}c_K^\Lambda(n-m)H(E/F)$$

d'où découle le théorème avec la constante $(2c_1(K))^\ell\, c_K^\Lambda(n-m)$. Enfin, troisième variante, on utilise la proposition 2.9 avec les minima de Zhang pour construire G_i. La hauteur de G_i/F vérifie maintenant

(3') $H(G_i/F) \leq (1+\varepsilon')Z_{t+1}(E/F)\cdots Z_{n-m}(E/F)$.

On procède de la même manière qu'avec les minima de Bombieri-Vaaler en utilisant le corollaire 4.5 et les majorations $\Lambda_i(E/F) \leq Z_i(E/F)$ pour $1 \leq i \leq t$.

6.3. Cas particulier. Nous montrons ici comment à partir du théorème 6.1 l'on déduit le résultat suivant qui généralise le théorème 1 de [Va2].

Théorème 6.3. *Soient (E,q) un espace adélique quadratique sur K et m un entier $> \dim E^\perp$. Supposons qu'il existe un sous-espace isotrope de dimension m. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des sous-espaces distincts $F_0,\dots,F_{n-m}$ vérifiant les conditions suivantes :*

(i) *Pour tout i, F_i est isotrope, contient $E^\perp$ et $\dim F_i = m$.*
(ii) *Pour tout $i \in \{1,\dots,n-m\}$, $(F_0+F_i)/F_0\cap F_i$ est un plan hyperbolique et $\dim F_0\cap F_i = m-1$.*
(iii) $F_0+\cdots+F_{n-m} = E$.
(iv) *Pour tout $i \geq 0$, $H(F_0)H(F_i) \leq (1+\varepsilon)(a')^2(2H(q))^{n-m}H(E)^2$ où a' est le minimum entre les trois quantités suivantes*

$$2c_K^{\mathrm{BV}}(n-m), \quad 2c_1(K)c_K^\Lambda(n-m) \quad \textit{et} \quad c_K^Z(n-m).$$

Démonstration. Le théorème 6.1 avec $\ell = 1$ fournit $n-m$ couples $(F_{i,1},F_{i,2})$ d'espaces isotropes de dimension m vérifiant les conditions (i) à (vii). Notons F_0 le sous-espace isotrope de dimension m, appelé F dans la démonstration du théorème 6.1. Cet espace provient soit de la proposition 4.4 soit de la proposition 3.1. Dans les deux cas, sa hauteur (modulo le quotient par $E^\perp$) vérifie

$$H(F_0) \leq (1+\varepsilon')\inf\{H(F')\,;\ E^\perp\subset F',\ F' \text{ isotrope}, \dim F' = m\} \tag{3}$$

pour un certain $\varepsilon' \leq \varepsilon$ (celui de la preuve du théorème 6.1). L'espace F_0 est contenu dans chaque $F_{i,1}+F_{i,2}$ (propriété (v)). Grâce à (iv), l'image de F_0 dans le quotient $(F_{i,1}+F_{i,2})/F_{i,1}\cap F_{i,2}$ est une droite isotrope. Or ce quotient est un plan hyperbolique par (iii) ; il ne possède donc que deux droites isotropes données par les images de $F_{i,1}$ et de $F_{i,2}$. Il vient $F_0 \in \{F_{i,1},F_{i,2}\}$, ce qui permet, après une éventuelle renumérotation de supposer $F_0 = F_{i,1}$ et de définir $F_i := F_{i,2}$. L'énoncé est démontré sauf pour la majoration de $H(F_0)^2$ dans (iv). Grâce à l'inégalité (3), on a $H(F_0)(1+\varepsilon')^{-1} \leq H(F_1)$ puis la borne voulue en multipliant par $H(F_0)$. □

Démonstration du théorème 1.3. Il suffit d'appliquer le théorème précédent avec $m = 1$ (on a $E^\perp = \{0\}$ par hypothèse). Le vecteur e_i est un générateur quelconque de F_{i-1}. La constante dans la borne du produit $H_E(e_1)H_E(e_i)$ vient de la majoration $a' \leq 2c_K^{\mathrm{BV}}(n-1)$. □

7. Petits vecteurs isotropes qui évitent un fermé algébrique

Soit (E,q) un espace adélique quadratique sur une extension algébrique $K/\mathbb{Q}$. Soit $a \in K$ tel que l'équation $q(x) = a$ possède une solution $x \in E$. La question qui nous intéresse ici est de majorer la plus petite hauteur d'une telle solution x. L'homogénéité de q permet de ramener le problème à celui de trouver un petit vecteur isotrope pour la forme quadratique $(x,y) \mapsto q(x) - ay^2$ définie sur $E \oplus K$

pour lequel la coordonnée y est non nulle. D'une manière plus générale, se pose le problème suivant : *Étant donné un fermé algébrique $Z \subset E$, quelle borne effective peut-on donner pour la plus petite hauteur d'un vecteur isotrope $x \in E \setminus Z$ (lorsqu'un tel vecteur existe) ?* Une première réponse a été apportée par Masser [Ma] lorsque $K = \mathbb{Q}$ et Z un hyperplan. La démarche de Masser repose sur le principe suivant : si l'on dispose d'un petit vecteur isotrope x qui appartient à Z alors, en faisant agir une réflexion bien choisie (qui conserve l'isotropie du vecteur), il est possible de s'arranger pour que l'image de x sorte de Z sans que sa hauteur n'augmente trop. Dans cet esprit, Fukshansky [F1] a étendu le résultat de Masser à un corps de nombres et une union finie d'hyperplans, en perdant au passage l'optimalité de la dépendance de la borne en la hauteur de q présente dans le théorème de Masser. Ce défaut a été partiellement corrigé par Dietmann [Di], qui a obtenu un exposant de $H(q)$ proche de celui de Masser mais la constante dans son résultat n'est pas calculée. Récemment Chan, Fukshansky et Henshaw [CFH] ont obtenu des bornes explicites (mais compliquées) lorsque K est un corps global et Z un fermé algébrique quelconque, par des méthodes un peu différentes. Ici, au moyen d'une approche plus directe (sans récurrence sur la dimension de E par exemple), nous allons obtenir des résultats qui améliorent et généralisent ces travaux.

Théorème 7.1. *Soit (E, q) un espace adélique quadratique sur K, de dimension $n \geq 1$. On suppose que q n'est pas identiquement nulle sur E. Soit I un idéal de l'algèbre symétrique $\mathbf{S}(E^{\mathsf{v}})$, engendré par une famille d'éléments de degré $\leq M$. Soit $Z(I)$ le lieu des zéros de I dans E. Supposons qu'il existe $x \in E \setminus Z(I)$ tel que $q(x) = 0$. Désignons par $H(E, q, M)$ la quantité suivante*

$$H(E,q,M) = 4M^3 c_1(K)^3 c_K^{\Lambda}(n)^2 \left(\frac{H(E)^2}{\Lambda_1(E)^{n+d-2}} \right) (2H(q))^{(n-d+1)/2}$$

où $d \geq 1$ est la dimension des sous-espaces isotropes maximaux de (E, q). Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un vecteur isotrope $x \in E \setminus Z(I)$ de hauteur $H_E(x) \leq (1 + \varepsilon) H(E, q, M)$

Lorsque K est un corps de Zhang (c'est-à-dire $c_K^Z(2) < \infty$), il est possible de supprimer la dépendance en M de ce majorant en remplaçant la constante $4M^3 c_1(K)^3 c_K^{\Lambda}(n)^2$ dans $H(e, q, M)$ par $c_K^Z(n) c_K^Z(d) c_K^Z(n - d)$. Pour cela, il suffit d'utiliser le théorème 2.8 au lieu du théorème 2.7 dans la preuve qui va suivre.

Commençons auparavant par un résultat purement géométrique qui utilise l'espace F_x introduit au début de la partie 3. Si $x = 0$, nous désignerons par F_0 l'espace F lui-même. Lorsque F est isotrope, F_x ne dépend que de la classe $\overline{x}$ de x modulo F. Si $a \in E/F$, notons $F_a = F_x$ pour un représentant quelconque $x \in E$ de la classe a.

Lemme 7.2. *Soient (E, q) un espace quadratique et I un idéal de l'algèbre symétrique $\mathbf{S}(E^{\mathsf{v}})$, engendré par une famille d'éléments de degré $\leq M$. Soit F un sous-espace isotrope maximal de E contenu dans $Z(I)$. Supposons qu'il existe un vecteur isotrope hors de $Z(I)$. Alors $\{a \in E/F\,;\ F_a \subset Z(I)\}$ est contenu dans une hypersurface de E/F de degré inférieur à $2M$.*

Démonstration. Soient G un supplémentaire de F dans E et $p \colon E/F \to G$ l'isomorphisme déduit de la projection sur G parallèlement à F. Pour $u \in F$ et $a \in E/F$, on a $q(p(a))u - 2b(p(a), u)p(a) \in F_a$ et l'ensemble $\{a \in E/F\,;\ F_a \subset Z(I)\}$ est contenu dans le lieu des zéros de $Q_{G,P,u} \colon a \mapsto P(q(p(a))u - 2b(p(a), u)p(a))$ pour tout $P \in I$. Ce polynôme sur E/F est de degré $\leq 2 \deg P$ et il suffit de voir qu'il en existe un non identiquement nul. Pour cela, considérons un vecteur isotrope $x_0 \notin Z(I)$ (en particulier $x_0 \notin F$) puis $P \in I$, de degré $\leq M$, tel que $P(x_0) \neq 0$ et enfin $u \in F$ tel que $b(u, x_0) = -1/2$. L'existence de u découle de la maximalité de F qui empêche l'espace $F \oplus K.x_0$ d'être isotrope et donc x_0 d'être orthogonal à F. Il ne reste plus qu'à choisir G contenant x_0, ce qui donne $p(\overline{x_0}) = x_0$. Le polynôme $Q_{G,P,u}$ ainsi obtenu n'est pas nul car $Q_{G,P,u}(\overline{x_0}) = P(x_0) \neq 0$. □

Démonstration du théorème 7.1. Soit $\varepsilon' > 0$ tel que $(1+\varepsilon')^{(n-d+7)/2} \leq 1+\varepsilon$. Par le corollaire 3.2, il existe un sous-espace isotrope maximal F de (E,q) tel que $(1+\varepsilon')^{-1} \leq 2H(q)\Lambda_1(E/F)^2$. Si $F \subset Z(I)$, le lemme précédent et le théorème 2.7 donnent l'existence de $a \in E/F$ tel que $F_a \not\subset Z(I)$ et

$$H_{E/F}(a) \leq (1+\varepsilon')2M\lambda_{n-d}^{\mathrm{BV}}(E/F) \leq (1+\varepsilon')2Mc_1(K)\Lambda_{n-d}(E/F).$$

Le vecteur a est non nul car $F_0 = F \subset Z(I)$. Renommons F_a en F' et notons $F' = F$ si $F \not\subset Z(I)$. Dans ce dernier cas, l'on note encore a un vecteur non nul de E/F dont la hauteur satisfait à la majoration ci-dessus. Dans les deux cas, que ce soit par le lemme clef de la partie 3 ou par choix de F, on a $H(F') \leq (1+\varepsilon')H(F)2H(q)H_{E/F}(a)^2$. L'espace F' est isotrope et il n'est pas inclus dans $Z(I)$. En utilisant à nouveau le théorème 2.7, il existe $x \in F' \backslash Z(I)$ de hauteur $\leq (1+\varepsilon')Mc_1(K)\Lambda_d(F')$. Comme $x \in F'$, le vecteur x est isotrope et nous affirmons que sa hauteur est plus petite que $(1+\varepsilon)H(E,q,M)$. Pour le voir, majorons $\Lambda_d(F')$ par $c_K^{\Lambda}(d)H(F')\Lambda_1(F')^{1-d} \leq c_K^{\Lambda}(d)H(F')\Lambda_1(E)^{1-d}$. En remplaçant dans cette borne les hauteurs $H(F')$ et $H_{E/F}(a)$ par les majorants trouvés précédemment, on en déduit que la hauteur de x est plus petite que

$$(1+\varepsilon')^4 4M^3c_1(K)^3c_K^{\Lambda}(d)\Lambda_1(E)^{1-d}\,(2H(q))\,\Lambda_{n-d}(E/F)^2H(F).$$

Majorons alors $\Lambda_{n-d}(E/F)^2$ par $\Lambda_{n-d}(E/F)\Lambda_n(E)$ puis, avec la définition des constantes d'Hermite,

$$\Lambda_{n-d}(E/F)^2 \leq c_K^{\Lambda}(n-d)c_K^{\Lambda}(n)\frac{H(E/F)}{\Lambda_1(E/F)^{n-d-1}} \cdot \frac{H(E)}{\Lambda_1(E)^{n-1}}.$$

Par choix de F, le premier minimum de E/F est minoré par $(2H(q)(1+\varepsilon'))^{-1/2}$. Ainsi l'expression $\Lambda_{n-d}(E/F)^2H(F)$ est majorée par

$$(1+\varepsilon')^{(n-d-1)/2}c_K^{\Lambda}(n-d)c_K^{\Lambda}(n)H(E)^2\Lambda_1(E)^{1-n}\,(2H(q))^{(n-d-1)/2}$$

que l'on reporte dans la borne précédente pour $H_E(x)$. On conclut avec $c_K^{\Lambda}(d)c_K^{\Lambda}(n-d) \leq c_K^{\Lambda}(n)$. □

En posant $x_1 = x$ et en remplaçant $Z(I)$ par $Z(I) \cup \mathrm{Vect}_K(x_1,\ldots,x_i)$ pour $1 \leq i \leq d-1$ dans cette démonstration, l'on obtient une base $x_1,\ldots,x_d$ de F' composée de vecteurs (isotropes) n'appartenant pas à $Z(I)$ et de hauteurs plus petites que $(1+\varepsilon)H(E,q,M+1)$. Ce résultat améliore alors le théorème 1.1 de [CFH] (voir aussi la majoration (63), *ibid.*) où les bornes pour les hauteurs étaient beaucoup moins précises.

Nous pouvons appliquer le théorème 7.1 à l'équation $q_0(x) = a$ (où q_0 est un polynôme de degré 2) et obtenir ainsi un résultat qui prolonge celui de Masser tout en conservant l'optimalité de l'exposant de la hauteur de la forme quadratique. Rappelons que la structure d'espace adélique rigide sur $E \oplus K$ est donnée par les normes

$$\forall\,(x,y) \in \,(E \otimes_K K_v) \oplus K_v, \quad \|(x,y)\|_v = \begin{cases} (\|x\|_v^2 + |y|_v^2)^{1/2} & \text{si } v \mid \infty, \\ \max\left(\|x\|_v, |y|_v\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Corollaire 7.3. *Soit E un espace adélique rigide sur K, de dimension $n \geq 1$. Soient q_0 un polynôme de degré 2 sur E et $q\colon E \oplus K \to K$ la forme quadratique définie (de manière unique) par*

$$\forall\, x \in \,E,\ \forall\, y \in K \setminus \{0\}, \quad q(x,y) = y^2q_0(x/y).$$

Supposons qu'il existe $x \in E$ tel que $q_0(x) = 0$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un tel $x \in E$ de hauteur $H_{E\oplus K}(x,1)$ plus petite que

$$(1+\varepsilon)4c_1(K)^3 c_K^{\Lambda}(n+1)^2 \left(\frac{H(E)^2}{\min\left(1,\Lambda_1(E)\right)^{n+d-1}}\right)(2H(q))^{(n-d)/2+1}$$

où d est la dimension des sous-espaces isotropes maximaux de $(E \oplus K, q)$.

Démonstration. On applique le théorème précédent à $(E \oplus K, q)$ et à l'hyperplan $Z(I) = E$, pour lequel $M = 1$. On a $H(E \oplus K) = H(E)H(K) = H(E)$ et

$$\Lambda_1(E \oplus K) = \min\left(\Lambda_1(E), \Lambda_1(K)\right) = \min\left(1, \Lambda_1(E)\right).$$

□

L'exemple de l'espace standard $E = \mathbb{Q}^n$ muni de la forme quadratique

$$q(x) = 2x_{d+1}x_d - a^2x_d^2 - (x_{d+2} - ax_{d+1})^2 - \cdots - (x_n - ax_{n-1})^2$$

où $d \in \{1, \ldots, n-1\}$, a est un entier ≥ 1 et $Z(I) = \{x \in \mathbb{Q}^n\,;\ x_d = 0\}$, montre que l'exposant $(n-d+1)/2$ de $H(q)$ dans le théorème 7.1 est optimal. En effet, la forme bilinéaire b associée à q est

$$b(x,y) = x_{d+1}y_d + x_d y_{d+1} - a^2 x_d y_d - \sum_{i=d+1}^{n-1} (x_{i+1} - ax_i)(y_{i+1} - ay_i).$$

Son noyau est décrit par les équations $x_{i+1} - ax_i = 0$ pour $d+1 \leq i \leq n-1$, $x_d = 0$ et $x_{d+1} = a^2 x_d$. Il est donc égal à $\mathbb{Q}^{d-1} \times \{0\}$. Le vecteur $(0, \ldots, 0, 2, a^2, \ldots, a^{n-d+1})$ est isotrope pour q et il n'appartient pas à ce noyau. En particulier la dimension d_0 des sous-espaces isotropes maximaux de $(\mathbb{Q}^n, q)$ est supérieure à $d - 1 + 1 = d$. Par ailleurs, la hauteur de q est plus petite que $2(1+a)^2$ (argument identique à celui de l'exemple qui suit la proposition 2.6). Considérons un vecteur isotrope $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}^n \setminus Z(I)$. Par homogénéité on peut supposer que $x_d = 1$, ce qui implique $x_{d+1} \geq a^2/2$. La hauteur de x est supérieure à sa norme en la place infinie de $\mathbb{Q}$ et même à $|x_n|$. On a

$$\begin{aligned}
|x_n - a^{n-d-1}x_{d+1}| &= \left|\sum_{i=d+1}^{n-1} a^{n-i-1}(x_{i+1} - ax_i)\right| \\
&\leq na^{n-d-2}\left(\sum_{i=d+1}^{n-1} (x_{i+1} - ax_i)^2\right)^{1/2} \\
&\leq na^{n-d-2}(2x_{d+1} - a^2)^{1/2} \leq 2na^{n-d-2}x_{d+1}.
\end{aligned}$$

On en déduit alors $|x_n| \geq (a - 2n)a^{n-d-2}x_{d+1}$. Ainsi un vecteur isotrope de q qui n'appartient pas à $Z(I)$ est de hauteur supérieure à $a^{n-d+1}/4$ pour $a \geq 4n$. En comparant cette information avec le théorème 7.1 qui donne un majorant en $\left(a^2\right)^{(n-d_0+1)/2}$, l'on voit que $d_0 = d$ et qu'il n'est pas possible de remplacer l'exposant $(n-d+1)/2$ par un nombre réel strictement plus petit.

Pour terminer cette partie, nous allons déduire du théorème 7.1 un énoncé qui fournit toute une base de petits vecteurs isotropes qui évitent un fermé algébrique. Auparavant expliquons quand l'existence d'une telle base est possible. Il est bien connu que si une forme quadratique sur E n'est pas identiquement nulle alors E possède une base composée de vecteurs isotropes si et seulement s'il existe un vecteur isotrope qui n'appartient pas au radical de E. Cette dernière condition s'avère donc minimale pour notre problème. Elle s'étend à un fermé algébrique contenant $E^{\perp}$ sous la forme suivante. Notons $Z(q) = \{x \in E\,;\ q(x) = 0\}$ le cône isotrope d'une forme quadratique q.

Théorème 7.4. *Soient $q\colon E \to K$ une forme quadratique sur K et I un idéal de $\mathbf{S}(E^\vee)$. Alors il existe une base de E contenue dans $Z(q) \setminus (Z(I) \cup E^\perp)$ si et seulement si $Z(I) \cup E^\perp$ ne contient aucune composante irréductible de $Z(q)$.*

La démonstration repose sur la description suivante du cône isotrope (valable pour tout corps K infini de caractéristique $\neq 2$).

Proposition 7.5. *Le cône isotrope d'une forme quadratique $E \to K$ est soit $E^\perp$, soit un fermé algébrique irréductible qui n'est contenu dans aucun hyperplan de E, soit une union de deux hyperplans distincts.*

Lorsque $K = \overline{\mathbb{Q}}$, la proposition découle de la décomposition en facteurs irréductibles du polynôme q et de la correspondance entre fermés algébriques et idéaux de $\mathbf{S}(E^\vee)$ donnée par le théorème des zéros de Hilbert.

Démonstration. Supposons le cône isotrope différent de $E^\perp$ et d'une union de deux hyperplans distincts. Pour $u \in Z(q)$, considérons l'application $f_u\colon E \times K \times E^\perp \to Z(q)$ définie par $f_u(x, \lambda, y) = 2b(x, u)\lambda x - q(x)\lambda u + y$ pour tous $x \in E$, $\lambda \in K$ et $y \in E^\perp$. L'ensemble $f_u(E \times K \times E^\perp)$ est l'image d'un espace vectoriel, irréductible en tant qu'ensemble algébrique, par une application polynomiale. L'adhérence de Zariski Y_u de cette image est donc un fermé algébrique irréductible de $Z(q)$. Si $u \in Z(q) \setminus E^\perp$ alors Y_u n'est inclus dans aucun hyperplan de E. En effet, dans le cas contraire, il existe une forme linéaire φ, non nulle, telle que, pour tout $x \in E$, on a $q(x)\varphi(u) = 2b(x, u)\varphi(x)$. Les deux formes linéaires φ et $b(\cdot, u)$ sont non nulles donc leur produit est une forme quadratique non nulle d'où $\varphi(u) \neq 0$. Ces deux formes sont donc linéairement indépendantes car l'une s'annule en u et l'autre pas. On en déduit que $Z(q)$ est l'union des noyaux qui sont des hyperplans distincts, ce qui est exclu par hypothèse. Nous allons maintenant montrer que $Y_u = Z(q)$ pour tout $u \in Z(q) \setminus E^\perp$. Ceci donnera l'irréductibilité du cône isotrope, permettant de conclure. Observons tout d'abord que, pour tous $x, v \in Z(q)$ tels que $b(x, v) \neq 0$, on a $x = f_v(x, b(2v, x)^{-1}, 0) \in Y_v$. On en déduit immédiatement $Z(q) \subset Y_v \cup v^\perp$. Pour $u, v \in Z(q) \setminus E^\perp$, le fermé Y_u est inclus dans $Z(q)$ mais pas dans l'hyperplan $v^\perp$. Par irréductibilité on a donc $Y_u \subset Y_v$ puis l'égalité $Y_u = Y_v$ en permutant les rôles de u et v. Notons Y cette valeur commune. Si $v \in Z(q) \setminus E^\perp$, on a $Y_v \not\subset v^\perp$ et il existe donc $u \in Z(q)$ tel que $b(u, v) \neq 0$. On a vu qu'alors $v \in Y_u = Y$. Si $v \in E^\perp$, on a $v = f_u(0, 0, v) \in Y$ pour tout $u \in Z(q) \setminus E^\perp$. □

Démonstration du théorème 7.4. Supposons que $Z(I) \cup E^\perp$ ne contienne aucune composante irréductible de $Z(q)$. Il suffit de montrer que, pour tout sous-espace F strictement inclus dans E, il existe un vecteur isotrope qui n'appartient pas à $Z(I) \cup E^\perp \cup F$. La base $(e_1, \ldots, e_n)$ recherchée est alors simplement construite par récurrence en prenant $e_i \notin Z(I) \cup E^\perp \cup \mathrm{Vect}_K(e_1, \ldots, e_{i-1})$. Supposons donc $Z(q)$ inclus dans $Z(I) \cup E^\perp \cup F$. Chaque composante irréductible de $Z(q)$ est contenue dans cette union et donc, par l'hypothèse, dans F. La description du cône donnée par la proposition implique $F = E^\perp$ si $Z(q) = E^\perp$ ou $F = E = F_1 + F_2$ si $Z(q)$ est l'union de deux hyperplans F_1, F_2 distincts. Les deux cas sont impossibles et le résultat annoncé est démontré. Réciproquement, s'il existe une base $e_1, \ldots, e_n$ de E contenue dans $Z(q) \setminus (Z(I) \cup E^\perp)$, la description de $Z(q)$ montre que $Z(I) \cup E^\perp$ ne peut contenir une composante irréductible de $Z(q)$ que si $Z(q)$ est une union de deux hyperplans $F_1 \neq F_2$. Si, par exemple, on avait $F_1 \subset Z(I) \cup E^\perp$ alors chacun des vecteurs $e_i \in Z(q) = F_1 \cup F_2$ appartiendrait à F_2, ce qui est impossible par dimension. □

Le théorème 7.4 affirme que, si q est une forme quadratique non nulle, l'existence d'un vecteur isotrope hors de $Z(I) \cup E^\perp$ suffit à assurer l'existence d'une base de E composée de vecteurs ayant tous cette propriété (ceci étant aussi bien sûr une condition nécessaire) *sauf* lorsque q est un produit de deux formes linéaires dont l'un des noyaux est inclus dans $Z(I) \cup E^{\perp}$. Revenons maintenant au problème d'estimer la hauteur minimale des vecteurs d'une telle base.

Théorème 7.6. *Soit (E, q) un espace adélique quadratique sur K, de dimension $n \geq 1$. Soit I un idéal de $\mathbf{S}(E^{\vee})$ engendré par une famille d'éléments de degré $\leq M$. Reprenons la notation $H(E, q, M)$ du théorème 7.1. Supposons qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a*

1) $q(e_i) = 0$
2) $e_i \notin Z(I) \cup E^{\perp}$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une telle base qui vérifie de plus

3) $H_E(e_i) \leq (1+\varepsilon)H(E, q, M+2)$

Nous n'avons pas trouvé de résultat similaire dans la littérature.

Démonstration. Rappelons qu'un sous-espace vectoriel F de E est le lieu des zéros d'une famille finie de formes linéaires sur E et donc de l'idéal J_F de $\mathbf{S}(E^{\vee})$ qu'elles engendrent. On a $Z(I) \cup F = Z(IJ_F)$ et l'idéal produit IJ_F est engendré par des éléments de degré $\leq M+1$. Considérons alors une base $(a_1, \ldots, a_n)$ de E vérifiant les conditions 1) et 2) et supposons $e_1, \ldots, e_{i-1}$ construits. Par dimension, l'un des vecteurs a_j n'appartient pas à $\mathrm{Vect}_K(e_1, \ldots, e_{i-1})$. Il n'appartient donc pas non plus au fermé $Z_i = (Z(I) \cup \mathrm{Vect}_K(e_1, \ldots, e_{i-1})) \cup E^{\perp}$, lieu des zéros d'un idéal de $\mathbf{S}(E^{\vee})$ engendré par des polynômes de degré $\leq M+2$. Le théorème 7.1 fournit l'existence d'un vecteur isotrope $e_i \notin Z_i$ tel que $H_E(e_i) \leq (1+\varepsilon)H(E, q, M+2)$. □

En choisissant $I = \mathbf{S}(E^{\vee})$ (c'est-à-dire $Z(I) = \emptyset$, $M = 0$), ce résultat redonne un énoncé analogue au théorème 1.3, mais qui semble de nature différente. En effet, le produit $H_E(e_1)H_E(e_i)$ des hauteurs des vecteurs de la base fournie par le théorème 7.6 est maintenant majoré par $(1+\varepsilon)H(E, q, 2)^2$. Dans ce carré, l'exposant de $H(q)$ est $n-d+1$, meilleur que celui (égal à $n-1$) de la borne du théorème 1.3 seulement lorsque $d \geq 2$. Nous notons également la présence au dénominateur de $\Lambda_1(E)$ (à la puissance $2(n+d-2)$) qui ne figurait pas dans le majorant du théorème 1.3.

8. Petites bases orthogonales

Deux vecteurs x, y d'un espace quadratique (E, q) sont dits orthogonaux si $b(x, y) = 0$. L'objectif de cette partie est d'obtenir des bornes précises pour le produit des hauteurs de bases orthogonales d'un espace adélique quadratique.

8.1. Cas anisotrope.

Théorème 8.1. *Soit (E, q) un espace adélique anisotrope sur K. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une base orthogonale $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que*

$$H_E(e_1) \cdots H_E(e_n) \leq (1+\varepsilon)c_K^{\Lambda}(n^2)H(E)^n H(q)^{n(n-1)/2}.$$

On verra que la démonstration fournit une estimation avec une constante un peu plus précise. Des énoncés analogues mais plus faibles se trouvent dans les travaux de Fukshansky [F2, théorème 2.4] (corps de nombres) et [F3, théorème 6.1] ($\overline{\mathbb{Q}}$), où l'hypothèse d'anisotropie est systématiquement oubliée bien qu'utilisée.

Démonstration. Pour $i \geq 0$, on suppose $e_1, \ldots, e_i$ construits. On pose $F_i = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_i)$. Par anisotropie $E = F_i \oplus F_i^{\perp}$. On choisit e_{i+1} dans $F_i^{\perp}$ avec

$$0 < H_E(e_{i+1}) \leq (1+\varepsilon)\Lambda_1(F_i^{\perp}) \leq (1+\varepsilon)\left(c_K^{\Lambda}(n-i)H(F_i^{\perp})\right)^{1/(n-i)}.$$

De la sorte on obtient une base orthogonale $(e_1, \dots, e_n)$. Évaluons maintenant le produit des hauteurs des e_i. La dernière inégalité du corollaire 2.5 et l'inégalité d'Hadamard fournissent l'estimation

$$H(F_i^\perp) \le H_E(e_1) \cdots H_E(e_i) H(E) H(q)^i.$$

En faisant le produit pour $i = 0$ jusqu'à un entier $\ell \in \{1, \dots, n-1\}$ des inégalités

$$H_E(e_{i+1})^{n-i} \le (1+\varepsilon)^{n-i} c_K^\Lambda(n-i) H_E(e_1) \cdots H_E(e_i) H(E) H(q)^i$$

et en simplifiant, on obtient

$$(H_E(e_1) \cdots H_E(e_{\ell+1}))^{n-\ell} \le \left(\prod_{j=n-\ell}^{n} (1+\varepsilon)^j c_K^\Lambda(j) \right) H(E)^{\ell+1} H(q)^{\ell(\ell+1)/2}.$$

On choisit alors $\ell = n-1$ et on utilise la borne

$$\prod_{j=1}^{n} c_K^\Lambda(j) \le c_K^\Lambda(n(n+1)/2) \le c_K^\Lambda(n^2)$$

pour conclure (en changeant d'ε). □

8.2. Cas hyperbolique.

Théorème 8.2. *Soit (E, q) un espace adélique hyperbolique sur K. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une base orthogonale $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que*

$$H_E(e_1) \cdots H_E(e_n) \le (1+\varepsilon) 2^{n(n+1)/2} c_K^\Lambda(3n^2/2) c_1(K)^n \left(\frac{H(q)^{3n/2-1} H(E)^3}{\Lambda_1(E)} \right)^n.$$

Pour démontrer ce résultat nous allons nous ramener au cas $n = 2$, où nous donnerons un énoncé optimal pour les termes dépendants des hauteurs.

8.2.1. *Réduction au cas d'un plan hyperbolique.* L'énoncé suivant améliore les théorèmes de Fukshansky [F2, théorème 4.1] (K corps de nombres) et [F3, théorème 5.1] ($K = \overline{\mathbb{Q}}$). Une base hyperbolique d'un plan hyperbolique est une base composée de deux vecteurs isotropes.

Proposition 8.3. *Soit (E, q) un espace adélique hyperbolique sur K, de dimension $2s > 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$, il existe un plan hyperbolique $\mathbb{H}_i$ de (E, q) et une base hyperbolique (e_i, f_i) de $\mathbb{H}_i$ tels que $E = \mathbb{H}_1 \perp \cdots \perp \mathbb{H}_s$ et*

$$\forall\, i \in \{1, \dots, s\}, \qquad H(\mathbb{H}_i) \le H_E(e_i) H_E(f_i) \le (1+\varepsilon) 2^s c_K^\Lambda(s)^3 H(q)^{3s-1} H(E)^3.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon' > 0$ tel que $(1+\varepsilon')^2 \le 1+\varepsilon$. Par le corollaire 4.7 il existe deux lagrangiens F et F' de E tels que $E = F \oplus F'$ et $H(F)H(F') \le (1+\varepsilon') c_K^\Lambda(s)^2 \left(2H(q)\right)^s H(E)^2$. Considérons une base $(e_1, \dots, e_s)$ de F telle que $H_E(e_1) \cdots H_E(e_s) \le (1+\varepsilon') c_K^\Lambda(s) H(F)$. Pour tout $1 \le i \le s$, considérons un générateur f_i de la droite $(F' \oplus \mathrm{Vect}\{e_j\,;\ j \ne i\})^\perp \subset (F')^\perp = F'$. Nous affirmons que $\mathbb{H}_i = \mathrm{Vect}_K(e_i, f_i)$ répond au problème. En effet e_i et f_i sont isotropes car F et F' sont isotropes. Si $i \ne j$, on a $b(f_i, e_j) = 0$ par construction et $b(f_i, e_i) \ne 0$ car sinon f_i appartiendrait à $E^\perp = \{0\}$. Ainsi, l'espace $\mathbb{H}_i$ est engendré par deux vecteurs isotropes qui ne sont pas orthogonaux. Il est donc hyperbolique. De plus, si $i \ne j$, $\mathbb{H}_i$ est orthogonal à $\mathbb{H}_j$ puisque les générateurs sont orthogonaux. La hauteur de $\mathbb{H}_i$ est plus petite que le produit $H_E(e_i) H_E(f_i)$, lequel est lui-même inférieur à

$$H_E(e_i) H(F' \oplus \mathrm{Vect}\{e_j\,;\ j \ne i\}) H(E) H(q)^{2s-1}$$

grâce au corollaire 2.5. Par l'inégalité d'Hadamard, la hauteur de $F' \oplus \mathrm{Vect}\{e_j\,;\ j \ne i\}$ est inférieure à $H(F') \prod_{j \ne i} H_E(e_j)$. Il ne reste plus qu'à reporter cette borne dans celle de $H_E(e_i) H_E(f_i)$ et d'utiliser les choix de F, F' et des e_i pour conclure. □

8.2.2. *Petites bases orthogonales d'un plan hyperbolique.* Le moyen le plus simple pour obtenir une base orthogonale d'un plan hyperbolique (E, q) est de choisir $e_1 \in E$ tel que $q(e_1) \neq 0$ puis de choisir un générateur e_2 de la droite $e_1^{\perp}$. En quantifiant ce principe, nous obtenons l'énoncé suivant.

Proposition 8.4. *Soit (E, q) un plan adélique hyperbolique sur K. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une base orthogonale (e_1, e_2) de E telle que*

$$H_E(e_1)H_E(e_2) \leq (1+\varepsilon)\min\left(2c_K^{\mathrm{BV}}(2), c_K^Z(2), 2c_1(K)c_K^{\Lambda}(2)\right)^2 \frac{H(q)H(E)^3}{\Lambda_1(E)^2}.$$

Démonstration. D'après le théorème 2.7 appliqué à l'idéal engendré par q, il existe $e_1 \in E$ tel que $q(e_1) \neq 0$ et $H_E(e_1) \leq 2(1+\varepsilon)^{1/2}\lambda_2^{\mathrm{BV}}(E)$. On choisit alors $e_2 \in e_1^{\perp} \setminus \{0\}$. En vertu du corollaire 2.5 on a $H_E(e_2) \leq H_E(e_1)H(q)H(E)$. On en déduit $H_E(e_1)H_E(e_2) \leq (1+\varepsilon)\left(2\lambda_2^{\mathrm{BV}}(E)\right)^2 H(q)H(E)$. Pour majorer $\lambda_2^{\mathrm{BV}}(E)$, soit on utilise $\Lambda_1(E) \leq \lambda_1^{\mathrm{BV}}(E)$ et la définition de $c_K^{\mathrm{BV}}(2)$ pour obtenir $\lambda_2^{\mathrm{BV}}(E) \leq c_K^{\mathrm{BV}}(2)H(E)/\Lambda_1(E)$ et en déduire la proposition avec la constante $2c_K^{\mathrm{BV}}(2)$. Soit on utilise $\lambda_2^{\mathrm{BV}}(E) \leq c_1(K)\Lambda_2(E)$ puis la définition de $c_K^{\Lambda}(2)$ et l'on obtient la proposition avec la constante $2c_1(K)c_K^{\Lambda}(2)$. Enfin, pour avoir $c_K^Z(2)$, on construit e_1 au moyen du théorème 2.8 de sorte que $q(e_1) \neq 0$ et $H_E(e_1) \leq (1+\varepsilon)Z_2(E)$. On procède alors de la même manière en utilisant $\Lambda_1(E) = Z_1(E)$ et la définition de $c_K^Z(2)$. □

Une autre méthode pour construire une base orthogonale est d'utiliser une base hyperbolique (a_1, a_2) de E et d'observer que les vecteurs $e_1 = \alpha a_1 + \beta a_2$ et $e_2 = \alpha a_1 - \beta a_2$ pour $\alpha, \beta \in K^{\times}$ forment une base orthogonale de E. Par ce biais l'on obtient le résultat suivant.

Proposition 8.5. *Soient (E, q) un plan adélique hyperbolique sur K et (a_1, a_2) une base hyperbolique de E. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une base orthogonale (e_1, e_2) de E telle que*

$$H_E(e_1)H_E(e_2) \leq (2+\varepsilon)\left(\frac{c_1(K)H_E(a_1)H_E(a_2)}{\min\left(H_E(a_1), H_E(a_2)\right)}\right)^2.$$

D'après le corollaire 4.7, il existe une base hyperbolique (a_1, a_2) de E telle que $H_E(a_1)H_E(a_2) \leq (1+\varepsilon)2H(q)H(E)^2$. En utilisant cette borne et en remplaçant le minimum par $\Lambda_1(E)$, nous en déduisons le

Corollaire 8.6. *Soit (E, q) un plan adélique hyperbolique sur K. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une base orthogonale (e_1, e_2) de E telle que*

$$H_E(e_1)H_E(e_2) \leq (8+\varepsilon)\left(c_1(K)\frac{H(q)H(E)^2}{\Lambda_1(E)}\right)^2.$$

Par rapport à la proposition 8.4, nous avons un facteur supplémentaire $H(q)H(E)$, qui est plus grand que 1 d'après la proposition 2.6. En revanche la constante qui dépend de K peut être plus petite.

Les choix de α et β reposent sur le résultat suivant.

Lemme 8.7. *Soit E un espace adélique rigide sur K. Pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $x \in E$, il existe $\alpha \in K^{\times}$ tel que*

$$\sup_{v \in V_\infty(K)} \|\alpha x\|_v \leq (c_1(K)+\varepsilon)H_E(x) \quad \textit{et} \quad \sup_{v \notin V_\infty(K)} \|\alpha x\|_v \leq 1.$$

Démonstration. On peut supposer $x \neq 0$ et $c_1(K) < \infty$. Considérons un idèle $b = (b_v)_{v \in V(K)}$ tel que $b_v = 1$ si $v \notin V_\infty(K)$ et $b_v = (c_1(K)+\varepsilon)H_E(x)$ si $v \in V_\infty(K)$. Posons $a_v = b_v\|x\|_v^{-1}$. On a $|a| = |b|H_E(x)^{-1} > c_1(K)$ donc, par le lemme 4.7

de [GR3], il existe $\alpha \in K^\times$ (qui répond au problème) tel que $|\alpha|_v \leq a_v$ pour tout $v \in V(K)$. □

Démonstration de la proposition 8.5. Choisissons α, β comme dans le lemme, associés respectivement à a_1 et a_2. En utilisant l'inégalité $\|u+v\| \cdot \|u-v\| \leq \|u\|^2 + \|v\|^2$, valide pour toute norme hermitienne et tous vecteurs u, v, aux places infinies de K avec $u = \alpha a_1$ et $v = \beta a_2$, on a

$$H_E(\alpha a_1 + \beta a_2) H_E(\alpha a_1 - \beta a_2) \leq (c_1(K) + \varepsilon)^2 \left(H_E(a_1)^2 + H_E(a_2)^2\right).$$

Pour majorer cette dernière somme, on utilise

$$H_E(a_1)^2 + H_E(a_2)^2 \leq 2 \left(\frac{H_E(a_1) H_E(a_2)}{\min\left(H_E(a_1), H_E(a_2)\right)}\right)^2.$$

La proposition s'en déduit (en ajustant ε). □

8.2.3. *Questions d'optimalité.* Nous montrons ici que la proposition 8.4 est optimale au sens suivant.

Proposition 8.8. *Soient $u, v, c \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout plan adélique hyperbolique (E, q) sur $\mathbb{Q}$, il existe une base orthogonale (e_1, e_2) de E vérifiant*

$$H_E(e_1) H_E(e_2) \leq c \left(\frac{H(E)}{\Lambda_1(E)^2}\right)^u (H(q) H(E))^v H(E).$$

Alors u et v sont plus grands que 1.

Pour des raisons d'homogénéité, la puissance du dernier $H(E)$ est nécessairement égale à 1.

Démonstration. Commençons par montrer que $u \geq 1$. Soient $N \geq 2$ un entier et E l'espace adélique rigide $\mathbb{Q}^2$ muni des normes standards aux places finies et $\|(x, y)\|_\infty^2 = x^2 + Ny^2$ en la place archimédienne de $\mathbb{Q}$. Choisissons également $q(x, y) = 2xy$ qui fait de (E, q) un plan adélique hyperbolique. Alors $H(E) = \sqrt{N}$ car la norme $\|\cdot\|_\infty$ est définie par la matrice $A_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{N} \end{pmatrix}$. Comme $\mathbb{Z}$ est un anneau principal, pour tout $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ il existe $d \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ tel que $(dx, dy) \in \mathbb{Z}^2$ et $H_E(x, y) = d(x^2 + Ny^2)^{1/2}$. Lorsque $(x, y) \neq (0, 0)$, nous avons (i) $H_E(x, y) = 1$ si et seulement si $y = 0$, (ii) $H_E(x, y) = \sqrt{N}$ si et seulement si $x = 0$, (iii) $H_E(x, y) \geq \sqrt{N+1}$ si et seulement si $xy \neq 0$. De ces observations découlent : $\Lambda_1(E) = 1$ et $\Lambda_2(E) = \sqrt{N}$ ainsi que (x, y) non isotrope si et seulement si $H_E(x, y) \geq \sqrt{N+1}$. Si e est un vecteur d'une base orthogonale de (E, q) alors e n'est pas isotrope car sinon il appartiendrait à $E^\perp = \{0\}$. Donc, pour toute base orthogonale (e_1, e_2) de E on a $H_E(e_1) H_E(e_2) \geq N + 1$. Par ailleurs, la forme bilinéaire b associée à q est $b((x, y), (s, t)) = xt + ys$. Pour calculer sa norme en ∞, on remplace y par $y/\sqrt{N}$ et t par $t/\sqrt{N}$. Par Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\|b\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{N}} \sup \frac{xt + ys}{(x^2 + y^2)^{1/2} (s^2 + t^2)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

où la borne supérieure est prise sur tous les couples $(x, y), (s, t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Les normes de b aux places finies sont égales à 1 et l'on a donc $H(q) = N^{-1/2}$. En reportant ces calculs dans la majoration de $H_E(e_1) H_E(e_2)$ on en déduit $N + 1 \leq cN^{u/2}\sqrt{N}$ puis $u \geq 1$ en faisant tendre N vers l'infini. Montrons maintenant que $v \geq 1$. Choisissons pour E l'espace standard $\mathbb{Q}^2$ et la forme $q(x, y) = 2x(x + py)$ où p est un entier impair. On a $b((x, y), (s, t)) = 2xs + p(xt + ys)$. Pour toute place finie v, on a $\|b\|_v = 1$ par inégalités ultramétriques (et imparité de p pour $v \mid 2$). En la place infinie de $\mathbb{Q}$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\|b\|_\infty \leq p + 2$ et donc $H(q) \leq p+2$. Comme précédemment, une base orthogonale de E ne peut comporter de vecteur isotrope. En particulier si $\{(x,y),(s,t)\}$ est une telle base, que l'on peut choisir à coefficients entiers et premiers entre eux, on a $xs \neq 0$. La relation $(x,y) \perp (s,t)$ équivaut à $2xs + p(xt+ys) = 0$. On en déduit $p \mid xs$ puis $H_E(x,y)H_E(s,t) \geq |xs| \geq p$. Compte tenu de $\Lambda_1(\mathbb{Q}^2) = H(\mathbb{Q}^2) = 1$, on trouve alors $p \leq c(p+2)^v$ puis $v \geq 1$ en faisant tendre p vers l'infini. □

8.2.4. *Démonstration du théorème 8.2.* La proposition 8.3 fournit une décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^d \mathbb{H}_i$ de E en somme directe orthogonale de plans hyperboliques ainsi que des bases hyperboliques (a_i, b_i) de $\mathbb{H}_i$ telles que $H_E(a_i)H_E(b_i) \leq (1+\varepsilon)2^d c_K^\Lambda(d)^3 H(q)^{3d-1} H(E)^3$ pour tout $i \in \{1,\ldots,d\}$. Par la proposition 8.5 il existe alors une base orthogonale (e_i, e_{d+i}) de $\mathbb{H}_i$ telle que

$$H_E(e_i)H_E(e_{d+i}) \leq (2+\varepsilon)\left(\frac{c_1(K)H_E(a_i)H_E(b_i)}{\Lambda_1(E)}\right)^2.$$

Par concaténation, nous obtenons ainsi une base orthogonale $(e_1,\ldots,e_n)$ de E dont le produit des hauteurs est majoré par

$$(1+\varepsilon)^{3d} 2^{d(2d+1)} c_K^\Lambda(d)^{6d} c_1(K)^{2d} \left(\frac{H(q)^{3d-1}H(E)^3}{\Lambda_1(E)}\right)^{2d}.$$

On conclut avec $c_K^\Lambda(d)^{6d} \leq c_K^\Lambda(6d^2) = c_K^\Lambda(3n^2/2)$ et en ajustant ε.

8.3. Cas général. Soit (E,q) un espace adélique quadratique de dimension $n \geq 1$ sur K.

Théorème 8.9. *Supposons (E,q) régulier. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une base orthogonale $(e_1,\ldots,e_n)$ de E telle que*

$$\prod_{i=1}^n H_E(e_i) \leq (1+\varepsilon)c_1(K)^n 3^{n^2} c_K^\Lambda(6n^2) H(q)^{4n^2} \Lambda_1(E)^{-2n^2} H(E)^{10n+1}.$$

Démonstration. Nous allons procéder par dévissage en utilisant la décomposition de Witt rappelée au § 2.2. Soit $\varepsilon' > 0$ tel que $(1+\varepsilon')^{16n} \leq 1+\varepsilon$. Soit $F \subset E$ un sous-espace isotrope maximal, de dimension d, tel que

$$H(F) \leq (1+\varepsilon')c_K^\Lambda(n-d)\,(2H(q))^{(n-d)/2}\,H(E)$$

(proposition 4.6). L'orthogonal $F^\perp$ contient F par isotropie et sa dimension est $n-d$ car (E,q) est régulier. Par la proposition 2.10, il existe un supplémentaire G de F dans $F^\perp$ de hauteur $H(G) \leq (1+\varepsilon')\Lambda_{d+1}(F^\perp)\cdots\Lambda_{n-d}(F^\perp)$. Par définition de $c_K^\Lambda(n-d)$, le produit de ces minima est plus petit que $c_K^\Lambda(n-d)H(F^\perp)\Lambda_1(F^\perp)^{-d}$. La minoration $\Lambda_1(F^\perp) \geq \Lambda_1(E)$ et le corollaire 2.5 qui permet de majorer $H(F^\perp)$ par $H(F)H(E)H(q)^d$ conduisent à l'estimation

$$H(G) \leq (1+\varepsilon')^2 c_K^\Lambda(n-d)^2 2^{(n-d)/2} H(q)^{(n+d)/2} H(E)^2 \Lambda_1(E)^{-d}.$$

Par le théorème de Witt, l'espace quadratique $(G, q_{|G})$ est anisotrope, $(G^\perp, q_{|G^\perp})$ est hyperbolique et $E = G \perp G^\perp$. Appliquons alors le théorème 8.1 à $(G, q_{|G})$ (avec ε') et substituons à $H(G)$ son majorant trouvé ci-dessus. Nous obtenons l'existence d'une base orthogonale $(e_1,\ldots,e_{n-2d})$ de G telle que

$$\prod_{i=1}^{n-2d} H_E(e_i) \leq (1+\varepsilon')^{3n} c_K^\Lambda((n-2d)^2) c_K^\Lambda(n-d)^{2(n-2d)} 2^{(n-2d)(n-d)/2} \times \left(\frac{H(E)^2}{\Lambda_1(E)^d}\right)^{n-2d} H(q)^{(n-2d)(2n-d-1)/2}.$$

Si $d \geq 1$, appliquons le théorème 8.2 à $(G^\perp, q_{|G^\perp})$ (de dimension $2d$). Il fournit une base orthogonale $(e_{n-2d+1}, \ldots, e_n)$ de $G^\perp$ dont le produit de hauteurs est majoré en fonction de $H(G^\perp)$, elle-même plus petite que $H(G)H(E)H(q)^{n-2d}$ par le corollaire 2.5. Si l'on y reporte la borne obtenue ci-dessus pour $H(G)$ et si nous minorons $\Lambda_1(G^\perp)$ par $\Lambda_1(E)$, nous obtenons

$$\prod_{i=n-2d+1}^{n} H_E(e_i) \leq (1+\varepsilon')^{13d} c_1(K)^{2d} 2^{3dn-d^2+d} c_K^\Lambda(6d^2) c_K^\Lambda(n-d)^{12d} \\ \times H(E)^{18d} \Lambda_1(E)^{-6d^2-2d} H(q)^{9dn-3d^2-2d}.$$

Comme un produit vide vaut 1, cette borne reste valide lorsque $d = 0$. L'union $\{e_1, \ldots, e_{n-2d}\} \cup \{e_{n-2d+1}, \ldots, e_n\}$ forme une base orthogonale de $E = G \perp G^\perp$. Compte tenu des estimations précédentes, le produit des hauteurs des vecteurs de cette base est majoré par

$$(1+\varepsilon) C \left(H(E) H(q)^{n/2} \right)^\alpha \left(\frac{c_K^\Lambda(n) H(E)}{\Lambda_1(E)^n} \right)^\beta H(E)$$

où

$$\alpha = 13d + 2n - \frac{2d}{n} - \frac{4d^2}{n} - 1 \quad \text{et} \quad \beta = \frac{d}{n}(n + 4d + 2)$$

et C est la constante

$$c_1(K)^{2d} 2^{(n^2+3nd+2d)/2} c_K^\Lambda(6d^2) c_K^\Lambda(n-d)^{2(n+4d)} c_K^\Lambda((n-2d)^2) c_K^\Lambda(n)^{-\beta}.$$

Dans ce majorant, chacune des deux expressions entre parenthèses est supérieure à 1 : pour la première, il s'agit de la proposition 2.6 avec $E^\perp = \{0\}$ et pour la seconde, cela découle de la définition de $c_K^\Lambda(n)$. On peut donc remplacer α et β par des majorants d'iceux. On sait que $d \leq n/2$ et la fonction $d \mapsto \alpha$ est croissante sur l'intervalle $[0, n/2]$. Par conséquent on a $\alpha \leq 15n/2 - 2 \leq 8n$. On a également $\beta \leq 2n$. On en déduit

$$\prod_{i=1}^{n} H_E(e_i) \leq (1+\varepsilon) C c_K^\Lambda(n)^{2n} H(q)^{4n^2} \Lambda_1(E)^{-2n^2} H(E)^{10n+1}.$$

Pour conclure, il ne reste plus qu'à simplifier la constante. Comme $c_1(K) \geq 1$ et $d \leq n/2$ on a $c_1(K)^{2d} \leq c_1(K)^n$. De plus $n^2 + 3dn + 2d \leq 3n^2$ et la puissance de 2 dans C peut être majorée par $2^{3n^2/2} \leq 3^{n^2}$. Enfin, en minorant β par d et en utilisant $d \leq n/2$ et $c_K^\Lambda(i) c_K^\Lambda(j) \leq c_K^\Lambda(i+j)$ pour $i, j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on trouve

$$\begin{aligned} & c_K^\Lambda(6d^2) c_K^\Lambda(n-d)^{2(n+4d)} c_K^\Lambda((n-2d)^2) c_K^\Lambda(n)^{2n-\beta} \\ & \quad \leq c_K^\Lambda(6d^2 + 2(n+4d)(n-d) + (n-2d)^2 + (2n-d)n) \\ & \quad \leq c_K^\Lambda(5n^2 + dn + 2d^2) \leq c_K^\Lambda(6n^2). \end{aligned}$$

□

Remarque 8.10. En utilisant dans cette démonstration une variante du théorème 8.2 basée sur la proposition 8.4 au lieu de la proposition 8.5, il est possible d'obtenir un résultat analogue avec $c_K^Z(2)$ à la place de $c_1(K)$. Les constantes numériques sont un peu plus grandes mais la borne du produit des hauteurs obtenue est finie sous la seule hypothèse que K est un corps de Siegel de degré infini (voir [GR3, corollaire 4.20]).

Si l'espace quadratique n'est pas régulier, il n'est plus possible d'utiliser $H(q)^{n/2} H(E) \geq 1$ dans la démonstration ci-dessus. Si $q \neq 0$, on peut cependant utiliser l'inégalité plus faible $\Lambda_n(E)^2 H(q) \geq 1$ qui découle de la proposition 2.3 avec $A = B = \{0\}$. Le coût est celui d'une puissance supplémentaire de la dimension dans la hauteur et le premier minimum de E.

Théorème 8.11. *Soit (E,q) un espace adélique quadratique sur K, de dimension $n \geq 1$. On suppose que q n'est pas identiquement nulle sur E. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une base orthogonale $(e_1,\ldots,e_n)$ de (E,q) telle que*

$$\prod_{i=1}^{n} H_E(e_i) \leq (1+\varepsilon)c_1(K)^n 3^{n^2} c_K^{\Lambda}(9n^3)\left(\frac{H(q)H(E)^2}{\Lambda_1(E)^{2n-2}}\right)^{4n^2} H(E).$$

Démonstration. Notons m la dimension du radical de E. Comme q n'est pas identiquement nulle, on a $m \in \{0,\ldots,n-1\}$. On peut supposer $n \geq 2$.

• Si $m = 0$ alors (E,q) est régulier. La proposition précédente s'applique et elle fournit une base orthogonale $(e_1,\ldots,e_n)$ et une borne pour $\prod_{i=1}^n H_E(e_i)$. Pour obtenir la majoration souhaitée, on fait apparaître le terme $\left(c_K^{\Lambda}(n)H(E)/\Lambda_1(E)^n\right)^{2n}$ dans cette borne. Comme l'intérieur de la parenthèse est supérieur à 1, on peut remplacer la puissance $2n$ par $8n(n-1)$. On obtient alors le majorant souhaité mais avec la constante $c_K^{\Lambda}(6n^2)c_K^{\Lambda}(n)^{8n(n-1)-2n}$. Il reste alors à observer que cette constante est plus petite que $c_K^{\Lambda}(6n^2+8n^3-10n^2)$, elle-même inférieure à $c_K^{\Lambda}(9n^3)$.

• Si $m = n-1$, une base orthogonale de E s'obtient en choisissant une base $(e_1,\ldots,e_{n-1})$ de $E^{\perp}$ et un vecteur quelconque e_n de $E \setminus E^{\perp}$. Considérons $\varepsilon' > 0$ tel que $(1+\varepsilon')^2 \leq 1+\varepsilon$. Au moyen de la définition de $c_K^{\Lambda}(n-1)$ et de la proposition 2.6 puis de la proposition 2.10, il est possible d'effectuer ces choix de sorte que

$$\prod_{i=1}^{n-1} H_E(e_i) \leq (1+\varepsilon')c_K^{\Lambda}(n-1)H(E^{\perp}) \leq (1+\varepsilon')c_K^{\Lambda}(n-1)H(E)H(q)^{1/2}$$

et $H_E(e_n) \leq (1+\varepsilon')c_K^{\Lambda}(n)H(E)\Lambda_1(E)^{1-n}$. En faisant le produit, nous obtenons

$$\prod_{i=1}^{n} H_E(e_i) \leq (1+\varepsilon)c_K^{\Lambda}(n-1)\left(\frac{c_K^{\Lambda}(n)^2 H(E)^2}{\Lambda_1(E)^{2n-2}} \cdot H(q)\right)^{1/2} H(E).$$

L'expression dans la puissance 1/2 est un majorant de $\Lambda_n(E)^2 H(q)$, qui est supérieur à 1 comme nous l'avons rappelé en préambule. Il est donc possible de remplacer l'exposant 1/2 par $4n^2$ et l'on obtient le théorème avec la constante $c_K^{\Lambda}(n-1)c_K^{\Lambda}(n)^{8n^2}$, que l'on majore ensuite par $c_K^{\Lambda}(n-1+8n^3) \leq c_K^{\Lambda}(9n^3)$.

• Si $m \in \{1,\ldots,n-2\}$, considérons $\varepsilon' > 0$ tel que $(1+\varepsilon')^{13n} \leq 1+\varepsilon$. Choisissons comme dans le cas précédent (définition de $c_K^{\Lambda}(m)$ et proposition 2.6) une base $(e_1,\ldots,e_m)$ de $E^{\perp}$ telle que

$$\prod_{i=1}^{m} H_E(e_i) \leq (1+\varepsilon')c_K^{\Lambda}(m)H(E)H(q)^{(n-m)/2}.$$

Considérons maintenant un supplémentaire E_1 de $E^{\perp}$ dans E fourni par la proposition 2.10 avec ε'. En particulier, cet espace, muni de $q_{|E_1}$, est régulier et sa hauteur est plus petite que $(1+\varepsilon')c_K^{\Lambda}(n)H(E)\Lambda_1(E)^{-m}$. Choisissons une base orthogonale $(e_{m+1},\ldots,e_n)$ de E_1 comme dans le théorème précédent. De la sorte nous avons une base orthogonale $(e_1,\ldots,e_n)$ de E dont le produit des hauteurs est inférieur à

$$\begin{aligned}&(1+\varepsilon)c_1(K)^{n-m}3^{(n-m)^2}c_K^{\Lambda}(6(n-m)^2)c_K^{\Lambda}(m)\\ &\quad\times\left(\frac{c_K^{\Lambda}(n)^2H(E)^2H(q)}{\Lambda_1(E)^{2n-2}}\right)^{4(n-m)^2+(n-m)/2}\left(\frac{c_K^{\Lambda}(n)H(E)}{\Lambda_1(E)^n}\right)^{\alpha} H(E)\end{aligned}$$

où $\alpha = (n-m)(8(m-n)+9)+1$. Il reste à simplifier cette borne. Commençons par remplacer $n-m$ par n dans les deux premiers termes après $1+\varepsilon$. Majorons également $6(n-m)^2+m$ par $6(n-1)^2+1 \leq n^3$ puis $c_K^{\Lambda}(6(n-m)^2)c_K^{\Lambda}(m)$ par $c_K^{\Lambda}(n^3)$. Les deux quantités entre parenthèses sont plus grandes que 1. Nous majorons l'exposant $4(n-m)^2+(n-m)/2$ par $4n^2$ (en utilisant $m \geq 1$) et α par 0 (au moyen de $m \leq$

$n-2$). Nous obtenons alors la borne du théorème avec la constante $c_K^\Lambda(n^3)c_K^\Lambda(n)^{8n^2}$, plus petite que $c_K^\Lambda(9n^3)$. $\square$

Le théorème 1.5 de l'introduction découle de cet énoncé en choisissant l'espace standard $\mathbb{Q}^n$ sur $K = \mathbb{Q}$. On a $c_1(\mathbb{Q}) = H(\mathbb{Q}^n) = \Lambda_1(\mathbb{Q}^n) = 1$ et la constante $(3n)^{14n^3}$ est un majorant strict de $3^{n^2}\left(9n^3\right)^{9n^3/2} \geq 3^{n^2}c_{\mathbb{Q}}^\Lambda(9n^3)$.

8.4. Décomposition de Witt effective. Par le théorème de Witt, tout espace adélique quadratique régulier (E, q) se décompose en une somme directe orthogonale

$$E = G \oplus \bigoplus_{i=1}^{d} \mathbb{H}_i$$

où $(G, q_{|G})$ est anisotrope et chaque $\mathbb{H}_i$, $1 \leq i \leq d$, est un plan hyperbolique. Le terme *effectif* signifie que, pour une certaine décomposition, l'on précise une borne pour la hauteur de chacun des espaces $G, \mathbb{H}_1, \ldots, \mathbb{H}_d$ en fonction des invariants de (E, q).

Théorème 8.12. *Soit (E, q) un espace adélique quadratique régulier sur K. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une décomposition de Witt comme ci-dessus telle que*

$$H(G) \leq (1+\varepsilon)2^n c_K^\Lambda(n)^2 H(q)^{(n+d)/2}\Lambda_1(E)^{-d}H(E)^2$$

et

$$\max_{1\leq i\leq d} H(\mathbb{H}_i) \leq (1+\varepsilon)3^n c_K^\Lambda(n)^8 H(q)^{5n-1}\Lambda_1(E)^{-2n}H(E)^{12}.$$

Ce résultat est à comparer aux théorèmes 1.3 et 4.1 de [F2] (K corps de nombres) et au théorème 5.1 de [F3] ($K = \overline{\mathbb{Q}}$). Dans ce dernier cas, la différence est particulièrement flagrante car, par exemple, l'exposant de $H(E)$ dans la borne de $\max_i H(\mathbb{H}_i)$ est supérieur à $(3/2)^n$, au lieu de 12 ici.

Démonstration. La démonstration du théorème 8.9 donne une décomposition $E = G \oplus \bigoplus_{i=1}^d \mathbb{H}_i$ avec

$$H(G) \leq (1+\varepsilon)c_K^\Lambda(n-d)^2 2^{(n-d)/2}H(q)^{(n+d)/2}H(E)^2\Lambda_1(E)^{-d},$$

dont découle immédiatement la borne annoncée et $\max_{1\leq i\leq d} H(\mathbb{H}_i)$ majoré par

$$(1+\varepsilon)2^{(3n-d)/2}c_K^\Lambda(d)^3 c_K^\Lambda(n-d)^6 H(q)^{(9n-3d-2)/2}H(E)^9\Lambda_1(E)^{-3d}.$$

Pour cette dernière borne, nous appliquons la proposition 8.3 avec $(G^\perp, q_{|G^\perp})$ et nous utilisons la majoration $H(G^\perp) \leq H(G)H(E)H(q)^{n-2d}$. La question est donc de simplifier l'expression du majorant de $H(\mathbb{H}_i)$. Nous procédons comme dans la démonstration du théorème 8.9 en faisant apparaître les quantités $H(q)^{n/2}H(E)$ et $c_K^\Lambda(n)H(E)/\Lambda_1(E)^n$ qui sont supérieures à 1. Le majorant ci-dessus de $\max_{1\leq i\leq d} H(\mathbb{H}_i)$, légèrement simplifié, s'écrit

$$(1+\varepsilon)3^n c_K^\Lambda(n)^6\left(H(q)^{n/2}H(E)\right)^{(9n-3d-2)/n}\left(\frac{c_K^\Lambda(n)H(E)}{\Lambda_1(E)^n}\right)^{3d/n}H(E)^{2/n}.$$

On conclut en majorant $(9n-3d-2)/n$ par $10 - 2/n$ et $3d/n$ par 2, ce qui est possible car d est la dimension des sous-espaces isotropes maximaux de l'espace régulier (E, q) et donc $2d \leq n$. $\square$

Références

[Al] N. Alon. Combinatorial Nullstellensatz. Recent trends in combinatorics (Mátraháza, 1995), *Combin. Probab. Comput.*, 8(1-2):7–29, 1999.

[Ca1] J. Cassels. Bounds for the least solutions of homogeneous quadratic equations. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 51:262–264, 1955.

[Ca2] J. Cassels. Addendum to the paper "Bounds for the least solutions of homogeneous quadratic equations". *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 52:602, 1956.

[CFH] W.K. Chan, L. Fukshansky et G. Henshaw. Small zeros of quadratic forms outside a union of varieties. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 366(10):5587–5612, 2014.

[Da] H. Davenport. Note on a theorem of Cassels. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 53:539–540, 1957.

[dSP] C. de Seguins Pazzis. *Invitation aux formes quadratiques.* Mathématiques en devenir. Calvage & Mounet, 2011.

[Di] R. Dietmann. Small zeros of quadratic forms avoiding a finite number of prescribed hyperplanes. *Canad. Math. Bull.*, 52(1):63–65, 2009.

[F1] L. Fukshansky. Small zeros of quadratic forms with linear conditions. *J. Number Theory*, 108(1):29–43, 2004.

[F2] L. Fukshansky. On effective Witt decomposition and the Cartan-Dieudonné theorem. *Canad. J. Math.*, 59(6):1284–1300, 2007.

[F3] L. Fukshansky. Small zeros of quadratic forms over $\overline{\mathbb{Q}}$. *Int. J. Number Theory* 4(3):503–523, 2008.

[F4] L. Fukshansky. Heights and quadratic forms : Cassels' theorem and its generalizations. In *Diophantine methods, lattices, and arithmetic theory of quadratic forms.* Contemp. Math., 587, Amer. Math. Soc. 2013. p. 77–93.

[GR1] É. Gaudron et G. Rémond. Lemmes de Siegel d'évitement. *Acta Arith.* 154:125–136, 2012.

[GR2] É. Gaudron et G. Rémond. Minima, pentes et algèbre tensorielle. *Israel J. Math.* 195:565–591, 2013.

[GR3] É. Gaudron et G. Rémond. Corps de Siegel. *J. reine angew. Math.*, à paraître. 61 pages.

[Ma] D. Masser. How to solve a quadratic equation in rationals. *Bull. London Math. Soc.*, 30(1):24–28, 1998.

[ScH] H.P. Schlickewei. Kleine Nullstellen homogener quadratischer Gleichungen. *Monatsh. Math.*, 100(1):35–45, 1985.

[SS1] H.P. Schlickewei et W. Schmidt. Quadratic geometry of numbers. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 301(2):679–690, 1987.

[SS2] H.P. Schlickewei et W. Schmidt. Isotrope Unterräume rationaler quadratischer Formen. *Math. Z.*, 201(2):191–208, 1989.

[SS3] H.P. Schlickewei et W. Schmidt. Bounds for zeros of quadratic forms. In *Number theory, Vol. II (Budapest, 1987)*, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 51:951–964, 1990.

[ScW] W. Schmidt. Small zeros of quadratic forms. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 291(1):87–102, 1985.

[Th] A. Thue. Eine Eigenschaft der Zahlen der Fermatschen Gleichung. *Kristiana Vidensk. Skr.*, 4:1–21, 1911.

[Va1] J. Vaaler. Small zeros of quadratic forms over number fields. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 302(1):281–296, 1987.

[Va2] J. Vaaler. Small zeros of quadratic forms over number fields. II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 313(2):671–686, 1989.

[Z] S. Zhang. Positive line bundles on arithmetic varieties. *J. Amer. Math. Soc.* 8:187–221, 1995.

Éric Gaudron
Laboratoire de mathématiques
Campus universitaire des Cézeaux
3 place Vasarely
63178 Aubière Cedex
France
`Eric.Gaudron@math.univ-bpclermont.fr`

Gaël Rémond
Institut de Mathématiques de Bordeaux
UMR 5251, Université de Bordeaux
351, cours de la Libération
33405 Talence Cedex
France
`Gael.Remond@math.u-bordeaux1.fr`