C. R. Acad. Sci. Paris, t. 333, Série I, p. 1059–1064, 2001
Théorie des nombres/*Number Theory*
(Géométrie algébrique/*Algebraic Geometry*)

Mesure d'indépendance linéaire de logarithmes dans un groupe algébrique commutatif

Éric GAUDRON

LArAl, Université Jean Monnet, 23, rue du docteur Paul Michelon, 42023 Saint-Étienne cedex 2, France
Courriel : gaudron@univ-st-etienne.fr

(Reçu le 3 octobre 2001, accepté le 30 octobre 2001)

Résumé. Nous présentons de nouveaux résultats relatifs à la théorie des formes linéaires de logarithmes dans un groupe algébrique commutatif quelconque, défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Nous généralisons le travail récent de S. David et N. Hirata [1]. En particulier, nous obtenons une mesure d'indépendance *optimale* en la hauteur de la forme linéaire et plus précise que la mesure de N. Hirata [4] en les paramètres liés au logarithme considéré. La démonstration repose sur la méthode de Baker et un nouvel argument de nature *arithmétique*. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Linear independence measure of logarithms on a commutative algebraic group

Abstract. *We obtain some new results in the theory of linear forms in logarithms on a commutative algebraic group, defined over* $\overline{\mathbb{Q}}$. *We generalize recent progress of S. David and N. Hirata* [1]. *In particular, we achieve an optimal linear independence measure in the height of the linear form and a measure more precise than Hirata's* [4] *for parameters related to the logarithms. The proof rests on Baker's method and a new argument of arithmetical nature.* © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

Let n be a positive integer and $G_0 := \mathbb{G}_\mathrm{a}, G_1, \ldots, G_n$ be commutative algebraic groups, of respective dimensions δ_ℓ $(1 \leqslant \ell \leqslant n)$, defined over a number field K, of degree D over $\mathbb{Q}$. We shall assume that K is embedded into $\mathbb{C}$. We set $G := G_0 \times G_1 \times \cdots \times G_n$, $d := \delta_1 + \cdots + \delta_n$ and, for each $\ell \in \{1, \ldots, n\}$, $\rho_\ell := 1$ if G_ℓ is a linear group and $\rho_\ell := 2$ if not. We denote by t_G the K-vector space tangent at the origin of the group G. This vector space will be identified with the direct sum $t_{G_0} \oplus \cdots \oplus t_{G_n}$. We choose

(1) a $\mathbb{Q}$-basis $\xi_1, \ldots, \xi_D$ of K;
(2) an embedding Φ of G into a projective space $\mathbb{P}$;
(3) a norm $\|\cdot\|$ on the complex vector space $t_G(\mathbb{C})$. We denote by d the distance associated to this norm.

Note présentée par Christophe SOULE.

S0764-4442(01)02190-5/FLA

As $G(\mathbb{C})$ is a complex Lie group, we have at our disposal the exponential map

$$\exp : t_G(\mathbb{C}) \to G(\mathbb{C}).$$

For each $\ell \in \{0, \ldots, n\}$, let us consider a point p_ℓ in $G_\ell(K)$ and let u_ℓ be a logarithm of p_ℓ, i.e., an element of $t_{G_\ell}(\mathbb{C})$ such that $\exp(u_\ell) = p_\ell$. The real number $h(p_\ell)$ is the absolute logarithmic height of the point $\Phi(p_\ell)$ in $\mathbb{P}(K)$. We denote by u the point $u_0 + \cdots + u_n$ of $t_G(\mathbb{C})$ and by p the point $\exp(u)$ of $G(K)$. Moreover, for a non-negative integer a, we set $\Gamma_p(a) := \{kp;\ k \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant k \leqslant a\}$. Finally, let W be a hyperplane of t_G and let $h(W)$ denote its absolute logarithmic Schmidt height [7].

We write $[x]$ for the integral part of a real number x and "card" for the number of elements of some set. With these notations, one has the following result.

THEOREM 0.1. – *There exists an integer $c_1 \geqslant 1$, depending only on (G, Φ, d), with the following property. Let E be a real number $\geqslant e$. Let us define some real numbers a, U by*

$$a := 1 + \left[\frac{D\log(D + \sum_{\ell=1}^{n}(h(p_\ell) + E\|u_\ell\|))}{\log E}\right] \tag{1}$$

and

$$\begin{aligned} U \ :=\ & \frac{\operatorname{card}(\Gamma_p(a))}{(a\log E)^d} \times \big(Dh(W) + Dh(u_0) + a\log E\big) \\ & \times \prod_{\ell=1}^{n}\Big(a\log E + D\max_{0\leqslant s\leqslant c_1 a}\big\{h(sp_\ell)\big\} + \big(Ea\|u_\ell\|\big)^{\rho_\ell}\Big)^{\delta_\ell}. \end{aligned} \tag{2}$$

- *If $u \in W \otimes \mathbb{C}$ then there exists an algebraic subgroup $\widetilde{G}$ of G, of dimension $\tilde{d}$, such that:*
  - (i) *the tangent space at the origin $t_{\widetilde{G}}$ is included in W;*
  - (ii) *the point u belongs to $t_{\widetilde{G}}(\mathbb{C})$;*
  - (iii) *if $\pi : G \to \prod_{\ell=1}^{n} G_\ell$ is the canonical projection, there exists an integer $m \geqslant 1$ and some distinct integers $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_m \leqslant n$ such that the degree of $\pi(\widetilde{G})$ (relative to the embedding Φ) satisfies*

$$\begin{aligned} \deg_\Phi \pi\big(\widetilde{G}\big) \leqslant c_1 & \frac{\operatorname{card}(\Gamma_p(a))}{(a\log E)^{\tilde{d}}} \times \prod_{\ell=1}^{m-1}\Big(a\log E + D\max_{0\leqslant s\leqslant c_1 a}\big\{h(sp_{j_\ell})\big\} + \big(Ea\,\|u_{j_\ell}\|\big)^{\rho_{j_\ell}}\Big)^{\delta_{j_\ell}} \\ & \times \Big(a\log E + D\max_{0\leqslant s\leqslant c_1 a}\big\{h(sp_{j_m})\big\} + \big(Ea\,\|u_{j_m}\|\big)^{\rho_{j_m}}\Big)^{\tilde{d}-(\delta_{j_1}+\cdots+\delta_{j_{m-1}})} \\ & \times \max\left\{1,\ \frac{Dh(\xi_1 : \cdots : \xi_D)}{U}\right\}. \end{aligned}$$

- *If $u \notin W \otimes \mathbb{C}$ then*

$$\log \mathrm{d}(u, W) \geqslant -c_1 \max\big\{U,\ Dh(\xi_1 : \cdots : \xi_D)\big\}. \tag{3}$$

We deduce the following consequence.

COROLLARY 0.2. – *There exists a positive real number c_2 such that, for any hyperplane W of t_G, not going through u, we have*

$$\log \mathrm{d}(u, W) \geqslant -c_2 \max\big\{1,\ h(W)\big\}.$$

When the vector u_0 is non-zero ("non-homogeneous case") and $\pi(G)$ is a semi-Abelian variety,[1] we can give a more precise inequality than (3) (*see* French version, théorème 2.3).

To obtain these results, we implement Baker's method like P. Philippon and M. Waldschmidt's article [6], using Hirata's trick [4], with the change of variables'process due to G.V. Chudnovsky. This last argument is the key point of the proof. It allows us to improve markedly the estimate of denominators of an element of K which appear during the demonstration. We give a few more details in § 3 below (French version).

1. Introduction

Étant donné un groupe algébrique commutatif G défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$, un hyperplan W de l'espace tangent à l'origine de G et u un point complexe de cet espace tangent, dont l'image par l'exponentielle (du groupe de Lie complexe $G(\mathbb{C})$) est algébrique, nous nous intéressons à la distance qui sépare u de cet hyperplan W. Cette problématique se scinde immédiatement en deux parties :

(1) *expliquer les raisons pour lesquelles u peut appartenir à $W \otimes \mathbb{C}$,*

(2) *minorer la distance $\mathrm{d}(u, W)$ (lorsqu'elle n'est pas nulle).*

Dans ce cadre général, G. Wüstholz [9] a démontré que si u appartient à $W \otimes \mathbb{C}$ alors il existe un sous-groupe algébrique $\widetilde{G}$ de G, d'espace tangent inclus dans W, tel que $u \in t_{\widetilde{G}}(\mathbb{C})$. Le problème devient alors :

$(1)'$ *si $u \in W$, quelles informations fournir sur un sous-groupe (algébrique) $\widetilde{G}$ tel que $u \in t_{\widetilde{G}}(\mathbb{C})$? Peut-on, par exemple, estimer le covolume de son groupe des périodes ?*

Les réponses que nous apportons aux questions $(1)'$ et (2) (énoncés du § 2) s'appuient sur la méthode de Baker, telle qu'elle est mise en œuvre dans les articles de P. Philippon et M. Waldschmidt [6] et N. Hirata [4]. Nos résultats découlent de l'estimation plus fine du dénominateur[2] d'un élément de $\overline{\mathbb{Q}}$ (noté α au § 3), construit au cours de la démonstration. Pour cela, nous réinterprétons cet élément de $\overline{\mathbb{Q}}$, qui apparaît initialement comme un coefficient de Taylor d'une fonction définie sur l'espace tangent $t_G(\mathbb{C})$, en un coefficient (de Taylor) d'une série formelle en des paramètres locaux du groupe G. L'idée de ce changement de variable est due à G.V. Chudnovsky mais a été utilisée pour la première fois dans ce contexte par S. David et N. Hirata [1]. Nous esquissons une présentation de ce procédé au § 3.

2. Données et résultats

2.1. Le groupe algébrique

Soient n un entier naturel non nul et K un corps de nombres plongé dans $\mathbb{C}$. Considérons $G_1, \ldots, G_n$ des groupes algébriques commutatifs, définis sur K. Notons $G_0 := \mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ et

$$G := G_0 \times G_1 \times \cdots \times G_n$$

le groupe algébrique produit, δ_ℓ la dimension de G_ℓ et $d + 1 := \delta_0 + \delta_1 + \cdots + \delta_n$ celle de G. Soit $\mathbf{e} := (e_m)_{0 \leqslant m \leqslant d}$ une base de l'espace tangent t_G obtenue par recollement de bases de chacun des espaces t_{G_ℓ} $(0 \leqslant \ell \leqslant d)$. Enfin, nous choisissons un plongement Φ du groupe G dans un espace multi-projectif $\mathbb{P} := \mathbb{P}^{N_0} \times \cdots \times \mathbb{P}^{N_n}$. Pour $1 \leqslant \ell \leqslant n$, nous posons $\rho_\ell = 1$ si G_ℓ est un groupe linéaire (commutatif) et $\rho_\ell = 2$ si G_ℓ a une partie abélienne non triviale.

2.2. Données arithmétiques

Soient $D := [K : \mathbb{Q}]$ et $p \in G(K)$. Soit $\xi_1, \ldots, \xi_D$ une base quelconque du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel K. Le réel $h(\xi_1 : \cdots : \xi_D)$ désigne la hauteur logarithmique absolue de $(\xi_1 : \cdots : \xi_D) \in \mathbb{P}^{D-1}(K)$. Pour $0 \leqslant \ell \leqslant n$, soit $p_\ell \in G_\ell(K)$ et choisissons un logarithme u_ℓ de p_ℓ, i.e. un élément de $t_{G_\ell}(\mathbb{C})$ dont l'image par l'exponentielle de $G(\mathbb{C})$ est égale à p_ℓ. Notons $p = (p_0, \ldots, p_n) \in G(K)$ et $u = u_0 + \cdots + u_n$. Le réel $h(p_j)$ est la hauteur logarithmique absolue du point $\Phi(p_j)$ de l'espace multi-projectif $\mathbb{P}$.

Enfin, soit W un hyperplan de t_G d'équation $z_0 = \beta_1 z_1 + \cdots + \beta_d z_d$ dans la base $\mathbf{e}$, où $\beta_1, \ldots, \beta_d$ sont des éléments de K. La hauteur $h(W)$ de W est la hauteur logarithmique absolue du point $(1 : \beta_1 : \cdots : \beta_d)$ de $\mathbb{P}^d(K)$.

Pour énoncer le théorème du paragraphe suivant, nous fixons une norme hermitienne $\|\cdot\|$ sur $t_G(\mathbb{C})$ (et notons d la distance associée à cette norme).

Notons $\mathsf{u}_0, \ldots, \mathsf{u}_d$ les coordonnées de u dans la base $\mathbf{e}$ et posons $\Lambda := \mathsf{u}_0 - \beta_1 \mathsf{u}_1 - \cdots - \beta_d \mathsf{u}_d$. Alors si nous choisissons la norme qui rend la base $\mathbf{e}$ orthonormée, la distance $\mathrm{d}(u, W)$ de u à W vaut

$$\mathrm{d}(u, W) = \frac{|\Lambda|}{(1 + |\beta_1|^2 + \cdots + |\beta_d|^2)^{1/2}}.$$

Ainsi, il est *équivalent* de minorer $\mathrm{d}(u, W)$ et le module d'une forme linéaire de logarithmes.

2.3. Énoncés

THÉORÈME 2.1. – *Il existe un entier $c_1 \geqslant 1$, calculable explicitement et ne dépendant que du triplet (G, Φ, d), ayant la propriété suivante. Soit E un réel $\geqslant e$. On définit a et U par les formules* (1) *et* (2) (voir *la version anglaise*).

- *Si $u \in W \otimes \mathbb{C}$, alors il existe un sous-groupe algébrique connexe $\widetilde{G}$ de G, de dimension $\tilde{d}$, tel que* :
  (a) *l'espace tangent à l'origine $t_{\widetilde{G}}$ est inclus dans l'hyperplan W* ;
  (b) *le point u appartient à $t_{\widetilde{G}}(\mathbb{C})$* ;
  (c) *si $\pi : G \to \prod_{j=1}^n G_j$ désigne la projection canonique, il existe un entier $m \geqslant 1$ et des entiers distincts $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_m \leqslant n$ tels que le degré de $\pi(\widetilde{G})$ (relatif au plongement Φ) vérifie*

$$\begin{aligned}\deg_\Phi \pi\big(\widetilde{G}\big) \leqslant c_1 \frac{\mathrm{card}(\Gamma_p(a))}{(a \log E)^{\tilde{d}}} &\times \prod_{\ell=1}^{m-1} \Big(a \log E + D \max_{0 \leqslant s \leqslant c_1 a} \big\{h(sp_{j_\ell})\big\} + \big(Ea \,\|u_{j_\ell}\|\big)^{\rho_{j_\ell}}\Big)^{\delta_{j_\ell}} \\ &\times \Big(a \log E + D \max_{0 \leqslant s \leqslant c_1 a} \big\{h(sp_{j_m})\big\} + \big(Ea \,\|u_{j_m}\|\big)^{\rho_{j_m}}\Big)^{\tilde{d} - (\delta_{j_1} + \cdots + \delta_{j_{m-1}})} \\ &\times \max\Big\{1, \frac{Dh(\xi_1 : \cdots : \xi_D)}{U}\Big\}.\end{aligned}$$

- *Si $u \notin W \otimes \mathbb{C}$, alors* $\log \mathrm{d}(u, W) \geqslant -c_1 \max\{U, Dh(\xi_1 : \cdots : \xi_D)\}$.

Nous déduisons immédiatement le

COROLLAIRE 2.2. – *Pour tout hyperplan W de t_G, ne passant pas par u, on a*

$$\log \mathrm{d}(u, W) \geqslant -c_2 \max\big\{1, h(W)\big\}, \tag{4}$$

où c_2 est un nombre réel $\geqslant 1$, indépendant de $h(W)$.

L'inégalité (4) est établie de longue date [2] lorsque G est un groupe linéaire (commutatif). S. David et N. Hirata l'ont également démontrée lorsque chacun des groupes G_ℓ $(1 \leqslant \ell \leqslant n)$ est une *courbe elliptique* (définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$). Dans le cadre général dans lequel nous nous plaçons, la meilleure estimation connue de $\log \mathrm{d}(u, W)$ en fonction (uniquement) du paramètre $h(W)$ était due à N. Hirata [4] et elle comportait un terme polynomial en $\log h(W)$ supplémentaire.

Dans le cas particulier où la forme linéaire est non-homogène, nous avons le résultat plus précis suivant.

THÉORÈME 2.3. – *Avec les notations du théorème 2.1, supposons que le nombre complexe u_0 soit non nul et que le groupe algébrique $\prod_{j=1}^n G_j$ soit une variété semi-abélienne. Alors u n'appartient pas à $W \otimes \mathbb{C}$ et il existe un entier $c_3 \geqslant 1$, ne dépendant que du triplet (G, Φ, d), tel que, si*

$$\begin{aligned}U' := \frac{a}{(a \log E)^d} &\times \Big(Dh(W) + D \max_{0 \leqslant s \leqslant c_3 a} \big\{h(su_0)\big\} + \log E\Big) \\ &\times \prod_{j=1}^n \Big(a \log E + D \max_{0 \leqslant s \leqslant c_3 a} \big\{h(sp_j)\big\} + \big(Ea\|u_j\|\big)^{\rho_j}\Big)^{\delta_j}\end{aligned}$$

alors

$$\log \mathrm{d}(u, W) \geqslant -c_3 \max\{U',\, Dh(\xi_1 : \cdots : \xi_D)\}.$$

La démonstration de ce théorème est une variante de celle du théorème 2.1. Les hypothèses supplémentaires permettent de mieux décrire les sous-groupes de G et d'utiliser plus finement le lemme de zéros [5].

3. Le lemme clef de la preuve

Dans tout ce qui suit, nous supposerons $n = 1$; le cas général se traite alors sans difficulté particulière, les expressions mathématiques sont seulement plus lourdes à manipuler. Supposons que Φ est un plongement « à la Serre » (*voir* [8]) et notons $(\psi_0 : \cdots : \psi_{N_1})$ une représentation de l'exponentielle de $G_1(\mathbb{C})$ par des fonctions holomorphes (avec $\psi_0(0) \neq 0$). Dans une première étape,[3] nous choisissons deux couples de paramètres entiers (D_0, D_1) et (T, S) (le sous-groupe $\widetilde{G}$ du théorème 2.1 apparaît à cet endroit) et nous construisons un polynôme non nul $P(X_0, X_1, Y_0, \ldots, Y_{N_1})$, homogène de degré D_0 en (X_0, X_1) et de degré D_1 en $(Y_0, \ldots, Y_{N_1})$, à coefficients algébriques (p_λ) de hauteur contrôlée, tel que les dérivées

$$\frac{1}{t_1! \cdots t_d!}\left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \beta_1 \frac{\partial}{\partial z_0}\right)^{t_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial z_d} + \beta_d \frac{\partial}{\partial z_0}\right)^{t_d} P(1, z_0, \psi_0, \ldots, \psi_{N_1})(su) \tag{5}$$

soient « petites » pour $t_1 + \cdots + t_d \leqslant 2T$ et $s \in \{0, \ldots, S\}$. Nous raisonnons alors par l'absurde en supposant fausses toutes les affirmations du théorème 2.1. *Via* une extrapolation analytique, nous montrons que les dérivées (5) restent « petites » pour $t_1 + \cdots + t_d \leqslant T$ et $s \in \{0, \ldots, C_0 S\}$ où $C_0 \geqslant 1$ est un entier ne dépendant que de (G, Φ, d). Considérons le premier $(d+1)$-uplet $(s, t_1, \ldots, t_d)$ (pour l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^{d+1}$) pour lequel le nombre complexe (5) n'est pas nul. Par translation sur le groupe G (et quitte à modifier le polynôme P), nous pouvons supposer $s = 0$. Posons alors

$$\alpha := \frac{1}{t_1! \cdots t_d!}\left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \beta_1 \frac{\partial}{\partial z_0}\right)^{t_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial z_d} + \beta_d \frac{\partial}{\partial z_0}\right)^{t_d} P\left(1, z_0, 1, \frac{\psi_1}{\psi_0}, \ldots, \frac{\psi_{N_1}}{\psi_0}\right)(0). \tag{6}$$

On montre que ce nombre complexe appartient à K (choix de Φ). Notons q le ppcm des produits d'entiers non nuls $i_1 \cdots i_h$ avec $h \leqslant D_0$ et $i_1 + \cdots + i_h \leqslant 2T$.

LEMME 3.1. – *Pour toute place finie v de K, en dehors d'un ensemble fini ne dépendant que de (G, Φ), on a*

$$|q\alpha|_v \leqslant \max\{|p_\lambda|_v\} \times \max\{1, |\beta_1|_v, \ldots, |\beta_d|_v\}^{D_0}, \tag{7}$$

où $|\cdot|_v$ est une valeur absolue sur le complété K_v.

Notons que si, dans ce lemme, nous remplaçons q par $t_1! \cdots t_d!$ alors l'inégalité (7) est élémentaire. De plus, d'après le théorème des nombres premiers, l'entier q est inférieur à $(cD_0)^{2T}$, où c est une constante absolue. C'est pourquoi, au cours de la démonstration du théorème 2.1, nous choisissons D_0 « très petit » devant T.

Ce lemme et la construction de α conduisent alors à une contradiction avec la formule du produit appliquée à α. Le théorème 2.1 découle de ces considérations.

Démonstration concentrée du lemme 3.1. – Nous pouvons supposer que les coefficients de P appartiennent à $\mathcal{O}_K$, l'anneau des entiers de K. Soit N un entier naturel tel que $A := \mathcal{O}_K[\frac{1}{N}]$ soit un anneau principal et soit $\mathcal{G}_1 \to \operatorname{Spec} A$ un schéma en groupes lisse, de fibre générique G_1. On note $\mathcal{G} = \operatorname{Spec} A[T_0] \times_{\operatorname{Spec} A} \mathcal{G}_1$ le modèle de G. Le morphisme structural $\mathcal{G}_1 \to \operatorname{Spec} A$ est quasi-projectif et se factorise en une immersion $\Phi_1 : \mathcal{G}_1 \to \mathbb{P}_A^{N_1}$; du morphisme produit $\mathcal{G} \to \mathbb{P}_A^1 \times \mathbb{P}_A^{N_1}$, on déduit l'immersion Φ que nous avons considérée au § 2.1. Pour $x \in \mathcal{G}_1$, nous pouvons écrire les coordonnées de $\Phi_1(x)$ à l'aide des sections globales $s_i = \Phi_1^*(X_i)$ $(i = 0, \ldots, N_1)$ du fibré en droites $\mathcal{L}_1 := \Phi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^{N_1}}(1)$ sur $\mathcal{G}_1$: $\Phi_1(x) = (s_0(x) : \cdots : s_{N_1}(x))$.

Notons $\Phi_0 : \mathbb{G}_{\mathrm{a}|A} \to \mathbb{P}^1_A$ le plongement usuel et $\mathcal{L}_0 := \Phi_0^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_A}(1)$. Comme A est principal et $\mathcal{G}_1 \to \operatorname{Spec} A$ est lisse, le complété formel $\widehat{\mathcal{G}}_1$ le long de la section nulle de $\mathcal{G}_1$ est isomorphe (en tant que schéma formel) au spectre formel de l'algèbre $A[[T_1, \ldots, T_d]]$. Nous pouvons supposer que $s_0(0) \neq 0$, i.e. que s_0 définit une trivialisation de $\mathcal{L}_1$ au voisinage de la section nulle. *Via* l'homomorphisme canonique $\Gamma(\mathcal{G}_1, \mathcal{L}_1) \to \Gamma(\widehat{\mathcal{G}}_1, \mathcal{L}_1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{G}_1}} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{G}}_1})$, chacune des coordonnées s_i/s_0 s'écrit (localement) comme une série f_i en $T_1, \ldots, T_d$ à coefficients dans A. La section (globale) $s := P(1, T_0, s_0, \ldots, s_{N_1})$ de $\mathcal{L} := \mathcal{L}_0^{\otimes D_0} \boxtimes \mathcal{L}_1^{\otimes D_1}$ se développe (localement et dans la base $1^{\otimes D_0} \otimes s_0^{\otimes D_1}$ de $\mathcal{L}$) en une série $\sum_{\underline{i} \in \mathbb{N}^{d+1}} \theta_{\underline{i}} T_0^{i_0} \cdots T_d^{i_d}$ où $\theta_{\underline{i}} \in \sum_\lambda A.p_\lambda$ et $\theta_{\underline{i}} = 0$ si $i_0 > D_0$. Soit $(\mathrm{d}z_1, \ldots, \mathrm{d}z_d)$ une base (sur A) de l'espace cotangent $\omega^1_{\mathcal{G}_1|A}$. Le morphisme canonique $\omega^1_{\mathcal{G}_1|A} \to \omega^1_{\mathcal{G}_1|A} \otimes_{\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}} \widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{G}_1}$ permet d'écrire $z_i = \ell_i(T_1, \ldots, T_d)$ où

$$\mathrm{d}\ell_i \in \oplus_{j=1}^d A[[T_1, \ldots, T_d]]\, \mathrm{d}T_j \tag{8}$$

(le d-uplet $(\ell_1, \ldots, \ell_d)$ est le logarithme formel du groupe formel $\widehat{\mathcal{G}}_1$ correspondant aux choix des bases $(\mathrm{d}z_i)$ et $(\mathrm{d}T_i)$). Notons $(\mathrm{e}_i)_{i=1,\ldots,d}$ les séries (exponentielles formelles) réciproques des (ℓ_i). Par définition, l'élement α est le coefficient de $z_1^{t_1} \cdots z_d^{t_d}$ de

$$P\big(1, \beta_1 z_1 + \cdots + \beta_d z_d, 1, \mathrm{f}_1(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_d)(z_1, \ldots, z_d), \ldots, \mathrm{f}_{N_1}(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_d)(z_1, \ldots, z_d)\big). \tag{9}$$

Par construction (comme premier coefficient de Taylor non nul) et au moyen du changement de variables $z_i \rightsquigarrow T_i$, α est aussi le coefficient de $T_1^{t_1} \cdots T_d^{t_d}$ de

$$P(1, \beta_1 \ell_1 + \cdots + \beta_d \ell_d, 1, \mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_{N_1}) = \sum_{\underline{i}} \theta_{\underline{i}} (\beta_1 \ell_1 + \cdots + \beta_d \ell_d)^{i_0} T_1^{i_1} \cdots T_d^{i_d}. \tag{10}$$

Le lemme découle de cette observation et de l'arithmétique des coefficients des ℓ_i que l'on déduit de (8).

Remerciements. Je remercie S. David et M. Waldschmidt ainsi que les membres du LArAl qui ont relu attentivement la première version de ce texte.

---

[1] I.e., an extension of an Abelian variety by a (multiplicative) torus in the K-group scheme category.

[2] Si $x \in \overline{\mathbb{Q}}$, un *dénominateur* de x est un entier $q \geqslant 1$ tel que qx soit un *entier* algébrique.

[3] Ce que nous allons dire n'est vrai, *stricto sensu*, que dans le cas dit « non périodique ».

Références bibliographiques

[1] David S., Hirata N., Recent progress on linear forms in elliptic logarithms (à paraître).

[2] Fel'dman N.I., Improved estimate for a linear form of the logarithms of algebraic numbers (in Russian), Mat. Sb. (N.S.) 77 (119) (1968) 423–436, English Tranlation: Math. USSR Sb. 6 (3) (1968) 393–406.

[3] Gaudron É., Mesure d'indépendance linéaire de logarithmes dans un groupe algébrique commutatif, Thèse de doctorat, Université Jean Monnet de Saint-Étienne, 2001.

[4] Hirata N., Formes linéaires de logarithmes de points algébriques sur les groupes algébriques, Invent. Math. 104 (1991) 401–433.

[5] Philippon P., Lemme de zéros dans les groupes algébriques commutatifs, Bull. Soc. Math. France 114 (1986) 355–383. Errata et Addenda, ibid. 115 (1987).

[6] Philippon P., Waldschmidt M., Formes linéaires de logarithmes sur les groupes algébriques commutatifs, Illinois J. Math. 32 (2) (1988) 281–314.

[7] Schmidt W.M., Diophantine Approximations and Diophantine Equations, Lecture Notes in Math., Vol. 1467, 1991.

[8] Serre J.-P., Quelques propriétés des groupes algébriques commutatifs, appendice de « Nombres transcendants et groupes algébriques », Astérisque 69/70 (1979) 191–202.

[9] Wüstholz G., Algebraische Punkte auf analytischen Untergruppen algebraischen, Ann. Math. 129 (3) (1989) 501–517.