Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

Journal of Number Theory 127 (2007) 220–261

JOURNAL OF Number Theory

www.elsevier.com/locate/jnt

Étude du cas rationnel de la théorie des formes linéaires de logarithmes

Éric Gaudron

Université Grenoble I, Institut Fourier, UMR 5582, BP 74, 38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex, France

Reçu le 1er octobre 2004 ; révisé le 10 mai 2007

Disponible sur Internet le 20 septembre 2007

Communiqué par J.-B. Bost

Résumé

Dans ce travail, nous établissons des mesures d'indépendance linéaire de logarithmes d'un groupe algébrique commutatif dans le cas rationnel. Plus précisément, soit k un corps de nombres et v_0 une place quelconque de k. Soit G un groupe algébrique commutatif défini sur k et H un sous-groupe algébrique connexe de G, d'algèbre de Lie $\mathrm{Lie}(H)$. Soit $u \in \mathrm{Lie}(G(\mathbf{C}_{v_0}))$ un logarithme d'un point p de $G(k)$. Dans le *cas non-périodique* (le point p n'est pas de torsion modulo certains sous-groupes de G), nous obtenons des minorations de la distance de u à $\mathrm{Lie}(H) \otimes_k \mathbf{C}_{v_0}$ qui généralisent en partie les mesures déjà connues dans le cas d'un groupe linéaire. Les principales caractérisques de ces résultats sont d'une part d'améliorer la dépendance en la hauteur $\log a$ du point p, en supprimant une puissance de $\log\log a$, et, d'autre part, d'être valides dans un contexte très général. La démonstration utilise le formalisme des tailles de sous-schémas formels au sens de Bost en association avec un lemme arithmétique de Raynaud. Nous avons également recours à un lemme de Siegel absolu et, lorsque v_0 est ultramétrique, à un lemme d'interpolation de Roy.

Abstract

We establish new measures of linear independence of logarithms on commutative algebraic groups in the so-called *rational case*. More precisely, let k be a number field and v_0 be an arbitrary place of k. Let G be a commutative algebraic group defined over k and H be a connected algebraic subgroup of G. Denote by $\mathrm{Lie}(H)$ its Lie algebra at the origin. Let $u \in \mathrm{Lie}(G(\mathbf{C}_{v_0}))$ a logarithm of a point $p \in G(k)$. Assuming (essentially) that p is not a torsion point modulo proper connected algebraic subgroups of G, we obtain lower bounds for the distance from u to $\mathrm{Lie}(H) \otimes_k \mathbf{C}_{v_0}$. For the most part, they generalize the measures already known when G is a linear group. The main feature of these results is to provide a better dependence

Adresse e-mail : Eric.Gaudron@ujf-grenoble.fr.

URL : http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~gaudron.

0022-314X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.jnt.2007.08.001

in the height $\log a$ of p, removing a polynomial term in $\log\log a$. The proof relies on sharp estimates of sizes of formal subschemes associated to H (in the sense of Bost) obtained from a lemma by Raynaud as well as an absolute Siegel lemma and, in the ultrametric case, a recent interpolation lemma by Roy.

MSC : 11J86 ; 11J61 ; 11J13

Mots-clés : Formes linéaires de logarithmes ; Cas rationnel ; Méthode de Baker ; Groupe algébrique commutatif ; Taille de sous-schéma formel ; Lemme d'interpolation p-adique ; Lemme de Siegel absolu

Notations et conventions

Soit g un entier naturel $\geqslant 1$. Pour $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_g) \in \mathbf{N}^g$, on désigne par $|\mathbf{t}|$ la longueur $t_1 + \dots + t_g$ de $\mathbf{t}$, et, si $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_g)$ est un g-uplet de variables (ou d'objets mathématiques plus généraux, tels des opérateurs différentiels), on note $\mathbf{X}^{\mathbf{t}} = X_1^{t_1} \cdots X_g^{t_g}$. Si x un nombre réel, on note $\log^+(x) = \log\max\{1, x\}$ et $[x]$ la partie entière de x.

Si G est un schéma en groupes sur un corps commutatif, t_G ou $\mathrm{Lie}(G)$ désigne son espace tangent à l'origine. Si E est un espace vectoriel, $\mathbf{S}(E)$ (*resp.* $S^g(E)$) est l'algèbre symétrique de E (*resp.* la composante de degré g de $\mathbf{S}(E)$) et $\mathbf{P}(E)$ désigne le schéma projectif $\mathrm{Proj}\,\mathbf{S}(E)$.

Lorsque k est un corps commutatif, on note $\bar{k}$ une clôture algébrique de k. Soit dorénavant k un corps de nombres, d'anneau des entiers $\mathcal{O}_k$, et v une place de k.

Normes et valeurs absolues

- Soit v une place ultramétrique de k, qui correspond à un idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_k$, et p le nombre premier qui engendre l'idéal $\mathfrak{p} \cap \mathbf{Z}$. On note k_v (*resp.* $\mathcal{O}_v$) le complété $\mathfrak{p}$-adique de k en $\mathfrak{p}$ (*resp.* son anneau de valuation). On munit k_v de l'unique valeur absolue $|\cdot|_v$ qui vérifie $|p|_v = p^{-1}$. Cette valeur absolue s'étend (de manière unique) à $\bar{k}_v$ et, en particulier, aux extensions finies de k_v. Soit $\mathbf{C}_v = \mathbf{C}_p$ le complété du corps valué $(\bar{k}_v, |\cdot|_v)$. Si E_v est un $\mathbf{C}_v$-espace vectoriel de dimension g, alors toute base $(e_1, \dots, e_g)$ de E_v définit une norme v-adique $\|\cdot\|_v$ sur E_v par
$$\left\| \sum_{i=1}^{g} x_i e_i \right\|_v := \max_{1 \leqslant i \leqslant g} \{|x_i|_v\}.$$
Ainsi, lorsque $E_v = \mathbf{C}_v^g$ est muni de sa base canonique, on note $\|\mathcal{F}\|_v$ ou $|\mathcal{F}|_v$ la norme d'un vecteur $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_g) \in \mathbf{C}_v^g$:
$$\|\mathcal{F}\|_v = |\mathcal{F}|_v = \max_{1 \leqslant i \leqslant g} \{|f_i|_v\}.$$
- Soit v une place archimédienne de k. On munit $\mathbf{C}_v = \mathbf{C}$ de la valeur absolue usuelle. Si $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_g) \in \mathbf{C}^g$, on note
$$|\mathcal{F}|_v := \max_{1 \leqslant i \leqslant g} \{|f_i|_v\} \quad \text{et} \quad \|\mathcal{F}\|_v := \left(\sum_{i=1}^{g} |f_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Avec ces conventions, la formule du produit s'écrit, $\forall \alpha \in k \setminus \{0\}$, $\prod_v |\alpha|_v^{[k_v:\mathbf{Q}_v]} = 1$ où v parcourt l'ensemble des places de k et $[k_v : \mathbf{Q}_v]$ est le degré local $1, 2$ ou $[k_v : \mathbf{Q}_p]$ selon le caractère réel, complexe ou p-adique de la place v.

Hauteurs

Soit $\mathcal{F} \in k^g \setminus \{0\}$. La hauteur de Weil (logarithmique absolue[1]) de $\mathcal{F}$ est

$$h(\mathcal{F}) = \sum_v \frac{[k_v : \mathbf{Q}_v]}{[k : \mathbf{Q}]} \log|\mathcal{F}|_v.$$

C'est une hauteur projective ($\forall \alpha \in k \setminus \{0\}$, $h(\alpha\mathcal{F}) = h(\mathcal{F})$) et elle se prolonge naturellement aux points de $\mathbf{P}^{g-1}(k)$. La hauteur L^2 de $\mathcal{F}$ est

$$h_{\mathrm{L}^2}(\mathcal{F}) = \sum_v \frac{[k_v : \mathbf{Q}_v]}{[k : \mathbf{Q}]} \log\|\mathcal{F}\|_v.$$

On a $h(\mathcal{F}) \leqslant h_{\mathrm{L}^2}(\mathcal{F}) \leqslant h(\mathcal{F}) + \frac{1}{2}\log(\#\mathcal{F})$ et l'inégalité de Liouville $\log|\alpha|_v \geqslant -[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}]h(\{1, \alpha\})$ (pour toute place v de $\mathbf{Q}(\alpha)$). Soit $v_1, \ldots, v_d$ des vecteurs linéairement indépendants de $\overline{\mathbf{Q}}^g$ (muni de sa base canonique $e_1, \ldots, e_g$). La hauteur de Schmidt de $(v_1, \ldots, v_d)$ est la hauteur L^2 de l'ensemble des coordonnées de Plücker du produit extérieur $v_1 \wedge \cdots \wedge v_d$ dans la base $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_d}$ $(1 \leqslant i_1 < \cdots < i_d \leqslant g)$. Cette définition ne dépend en réalité que de l'espace vectoriel V sur $\overline{\mathbf{Q}}$ engendré par les vecteurs $v_1, \ldots, v_d$ et induit la hauteur de Schmidt $h(V)$ de V (et, par convention, $h(\{0\}) = 0$).

1. Introduction

L'objectif de ce travail est d'établir des résultats généraux — archimédiens et ultramétriques — de la *théorie des formes linéaires de logarithmes* dans le cas particulier où le lieu des zéros des formes linéaires est une algèbre de Lie *algébrique*, c'est-à-dire l'algèbre de Lie d'un sous-groupe algébrique.

Soit G un groupe algébrique commutatif de dimension g défini sur un corps de nombres k et v_0 une place (quelconque) de k. Le groupe de Lie $G(\mathbf{C}_{v_0})$ possède une application exponentielle $\exp_{v_0} : \mathscr{T}_{v_0} \to G(\mathbf{C}_{v_0})$ définie sur un voisinage ouvert $\mathscr{T}_{v_0}$ de 0 dans l'algèbre de Lie de $G(\mathbf{C}_{v_0})$ (notée $\operatorname{Lie} G(\mathbf{C}_{v_0})$ ou $t_G(\mathbf{C}_{v_0})$ dans la suite). Considérons un élément $u \neq 0$ de $\mathscr{T}_{v_0}$ d'exponentielle $p := \exp_{v_0}(u)$ *k-rationnelle* et donnons-nous par ailleurs une norme $\|\cdot\|_{v_0}$ sur $\mathscr{T}_{v_0}$ (de distance associée d_{v_0}) ainsi qu'une fonction hauteur $h \geqslant 0$ sur $G(\overline{\mathbf{Q}})$ (provenant par exemple d'une hauteur de Weil sur un espace projectif dans lequel G se plonge).

La théorie des formes linéaires de logarithmes consiste, dans son aspect quantitatif, à fournir des minorations de la distance $\mathrm{d}_{v_0}(u, V)$ entre u et une sous-k-algèbre de Lie V de $\operatorname{Lie}(G)$, en fonction des invariants liés aux données introduites (hauteur des quantités algébriques, norme de u, degré de k, etc.). Pour qualifier une minoration de $\mathrm{d}_{v_0}(u, V)$, on parle aussi de *mesure d'indépendance linéaire de logarithmes*. Le donnée principale à laquelle on va s'intéresser ici est la hauteur du point p.

[1] Comme le seront toutes les hauteurs de ce texte.

Le cas $V = \{0\}$ est déjà remarquable. Une conséquence des résultats présentés au §1.2 est l'existence d'une fonction $c_1 = c_1(G, k, v_0, \|\cdot\|_{v_0}) \geqslant 1$, indépendante de p, telle que

$$\log\|u\|_{v_0} \geqslant -c_1 \max\{1, h(p)\} \tag{1}$$

pourvu que le sous-groupe engendré par p ne rencontre aucun sous-groupe algébrique strict de $G(\bar{k})$ sauf en 0. Il s'agit d'une variante sophistiquée de l'inégalité de Liouville (voir la discussion à la suite du corollaire 1.2 de [16]). Une propriété importante de cette minoration est d'être optimale en la hauteur de p, comme on peut le voir en se plaçant sur le groupe additif $\mathbb{G}_a$. Pour un espace V quelconque, les meilleures mesures connues de $\log \mathrm{d}_{v_0}(u, V)$ en fonction de $h(p)$ sont de la forme :

$$\log \mathrm{d}_{v_0}(u, V) \geqslant -c_2 \max\{1, h(p)\}^{g/t+\epsilon} \tag{2}$$

où t est la codimension de V dans $\mathrm{Lie}(G)$, $\epsilon > 0$ un nombre réel et c_2 une fonction qui ne dépend pas de la hauteur de p.[2]

Dans cet article, nous montrons que l'on peut supprimer ϵ dans le minorant (2) dans le cas dit *rationnel* où l'algèbre de Lie V est *algébrique*. Nous démontrerons le résultat suivant (qui sera rendu plus précis au §1.2).

Théorème 1.1. *Soit $G, k, v_0, \|\cdot\|_{v_0}, p, u, V, t$ les données générales introduites ci-dessus. Il existe une fonction $c_3 = c_3(G, k, v_0, \|u\|_{v_0})$ ayant la propriété suivante. Supposons d'une part que le sous-groupe de G engendré par p ne rencontre aucun sous-groupe algébrique strict de G (sauf en 0) et, d'autre part, que V est* l'algèbre de Lie d'un sous-groupe algébrique *H de G. Soit b un nombre réel $\geqslant e$ tel que $\log b$ soit un majorant de la hauteur de V. Alors*

$$\log \mathrm{d}_{v_0}(u, V) \geqslant -c_3(\log b)^{1+\frac{g+1}{t}} \max\{1, h(p)\}^{g/t}. \tag{3}$$

Jusqu'à présent, seul le cas d'une puissance du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ et d'*une* forme linéaire ($t = 1$) a vraiment été étudié (voir [2,14,19,23,24,33,34,37][3]). Bien qu'il soit extrêmement probable que la minoration (3) reste vraie en supprimant le terme $(g+1)/t$ dans l'exposant de $\log b$, il s'avère que les méthodes employées ici pour démontrer cette inégalité ne sont pas suffisantes pour obtenir cela.

1.1. Données générales

Dans ce paragraphe, nous fixons des notations qui seront utilisées tout au long de ce texte. Certains des théorèmes qui vont suivre ne seront valides qu'avec des hypothèses supplémentaires sur les objets introduits ici, hypothèses qui seront alors explicitement mentionnées.

Soit n un entier naturel $\geqslant 1$, k un corps de nombres de degré D et v_0 une place quelconque (archimédienne ou ultramétrique) de k qui sera privilégiée par la suite.

[2] La quantité $h(p)^\epsilon$ dans (2) peut être remplacée par une puissance entière convenable du logarithme de $h(p)$.

[3] Vu la grande richesse de la littérature sur ce thème, il serait vain d'essayer d'entrer dans tous les détails sans augmenter de manière exponentielle cette introduction ; le lecteur intéressé pourra se reporter au livre de M. Waldschmidt [33] dont, en particulier, le §10.4 « The state of the Art » ainsi que les pages 545 à 547 qui retracent les principales étapes de l'histoire du sujet.

Soit $G_1, \dots, G_n$ des groupes algébriques (connexes) commutatifs définis sur k et $g_1, \dots, g_n$ leurs dimensions respectives. Soit $\Phi_i : G_i \hookrightarrow \mathbf{P}_k^{N_i}$ un plongement de G_i dans l'espace projectif $\mathbf{P}_k^{N_i}$. En particulier, les degrés et fonctions de Hilbert–Samuel géométriques considérés dans la suite sont relatifs aux faisceaux $\mathcal{O}_{G_i}(1)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, induits par ces plongements. Notons G le groupe $G_1 \times \cdots \times G_n$, $g := g_1 + \cdots + g_n$ sa dimension et Φ le plongement de G dans le produit des $\mathbf{P}_k^{N_i}$ induit par les Φ_i. Soit $\mathcal{G}_i \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_k[1/m_i]$ ($m_i \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$) un schéma en groupes lisse et dont la fibre générique $\mathcal{G}_i \times \operatorname{Spec}(k)$ est (isomorphe à) G_i. Quitte à restreindre $\mathcal{G}_i$ à un ouvert plus petit, nous pouvons supposer d'une part que m_i est le même entier m pour tous les i et d'autre part que l'anneau $\mathcal{O}_k[1/m]$ est principal.[4] Soit $\mathcal{G} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_k[1/m]$ le modèle lisse de G induit par les $\mathcal{G}_i$. Fixons v une place de k et $i \in \{1, \dots, n\}$. Considérons $\exp_{i,v}$ une application exponentielle du groupe de Lie v-adique $G_i(\mathbf{C}_v)$, définie sur un voisinage ouvert de 0 dans $t_{G_i}(\mathbf{C}_v)$. Lorsque v est une place archimédienne, il est bien connu que cette application se prolonge en un morphisme analytique à tout l'espace tangent $t_{G_i}(\mathbf{C}_v)$ et définit ainsi une application $\mathbf{C}_v$-analytique $\exp_{i,v} : t_{G_i}(\mathbf{C}_v) \to G_i(\mathbf{C}_v)$ surjective. Lorsque v est ultramétrique, ces propriétés ne sont plus vraies en général. Notons alors dans ce cas $\mathscr{T}_{i,v}$ un sous-groupe ouvert de $t_{G_i}(\mathbf{C}_v)$ tel que $\exp_{i,v}$ réalise un difféomorphisme analytique de $\mathscr{T}_{i,v}$ sur son image $\mathscr{U}_{i,v}$ (ouvert de $G_i(\mathbf{C}_v)$ contenant l'élément neutre). Dans la suite, l'exponentielle $\exp_{i,v}$ sera l'application restreinte $\mathscr{T}_{i,v} \to \mathscr{U}_{i,v}$. Afin d'uniformiser les notations, nous écrirons encore $\mathscr{T}_{i,v} = t_{G_i}(\mathbf{C}_v)$ (*resp.* $\mathscr{U}_{i,v} = G_i(\mathbf{C}_v)$) dans le cas archimédien, bien que l'exponentielle « restreinte » ne soit plus alors un difféomorphisme (en général). L'espace tangent à l'origine $t_{\mathcal{G}_i}$ de $\mathcal{G}_i$ est un $\mathcal{O}_k[1/m]$-module libre (car projectif, voir note de bas de page) de rang g_i et $t_{\mathcal{G}}$ est également libre de rang g. Soit $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_g)$ une base sur $\mathcal{O}_k[1/m]$ de $t_{\mathcal{G}}$ obtenue par concaténation de bases des $t_{\mathcal{G}_i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Quitte à multiplier chacun des e_i par une puissance suffisamment grande de m, nous pouvons supposer que, pour toute place ultramétrique v, le disque ouvert

$$D(0, r_p) = \left\{ \mathbf{z} = z_1 e_1 + \cdots + z_g e_g \in t_G(\mathbf{C}_v);\ \max_{1 \leqslant j \leqslant g} |z_j|_v < r_p \right\},$$

où $r_p := |p|_v^{1/(p-1)}$, est inclus dans $\mathscr{T}_v := \mathscr{T}_{1,v} \times \cdots \times \mathscr{T}_{n,v}$. En effet, il existe un entier $n_0 \geqslant 1$, ne dépendant que de $(\mathcal{G}, m)$, pour lequel, en toute place v, le développement en série de l'exponentielle de $G(\mathbf{C}_v)$ au voisinage de 0 s'écrit

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{N}^g} \frac{a_{\mathbf{n},v}}{\mathbf{n}!} \mathbf{z}^{\mathbf{n}}$$

avec $a_{\mathbf{n},v} \in \mathcal{O}_v[1/m]$, polynôme en $1/m$ de degré $\leqslant n_0|\mathbf{n}|$. Aux places $v \nmid m$, on a $a_{\mathbf{n},v} \in \mathcal{O}_v$ et l'on sait que le disque $D(0, r_p)$ est contenu dans le domaine de convergence strict de cette série. Si $v \mid m$, on se ramène au cas précédent en considérant les coordonnées de $\mathbf{z}$ dans la base $m^{n_0}\mathbf{e}$ de $t_G(\mathbf{C}_v)$.

L'exponentielle $\exp_v := (\exp_{1,v}, \dots, \exp_{n,v})$ de $G(\mathbf{C}_v)$ munie de la base $\mathbf{e}$ est appelée dans la littérature *exponentielle normalisée* (cela fixe un isomorphisme de $\mathscr{U}_v := \mathscr{U}_{1,v} \times \cdots \times \mathscr{U}_{n,v}$ avec un groupe *standard* selon la terminologie de Bourbaki [9], III, §7, no 3). La base $\mathbf{e}$ confère également à $t_G(\mathbf{C}_v)$ une structure d'espace vectoriel normé, par transport de la structure hermitienne (v archimédienne) ou de la norme du sup (v ultramétrique) fournie par la base canonique de $\mathbf{C}_v^g$

[4] Si bien qu'un $\mathcal{O}_k[1/m]$-module projectif (de type fini) est nécessairement libre.

(voir § Notations et conventions). Nous notons $\|\cdot\|_v$ (*resp.* d_v) cette norme sur $t_G(\mathbf{C}_v)$ (*resp.* la distance associée à cette norme).

Considérons un point[5] $p = (p_1, \dots, p_n)$ de $G(k) \cap \mathscr{U}_{v_0}$ ainsi qu'un logarithme $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathscr{T}_{v_0}$ de ce point :

$$\exp_{v_0}(u) = p.$$

Soit V un sous-espace vectoriel de l'espace tangent $t_G(k)$, de codimension $t \geqslant 1$ (ce qui suit est trivial et dénué d'intérêt lorsque $t = 0$, c.à-d. $V = t_G(k)$).

Hypothèse. Dans tout ce texte, nous supposerons que V est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe algébrique connexe H de G.

En d'autres termes, l'espace V est une algèbre de Lie *algébrique* au sens de [13] (II, §6, 2.4, p. 262).

Importante convention. Dans toute la suite, le mot « constante » qualifie un nombre réel $\geqslant 1$ qui ne dépend que de $G, \Phi, \mathcal{G}, m, \mathbf{e}, (d_v)_v, v_0$, c'est-à-dire du groupe algébrique G et des données satellites autour de G. Partant, ce nombre réel est indépendant de k (il ne dépend que d'un corps de définition de G), de p, u, V etc. Une telle constante sera désignée par la lettre c munie d'un indice.

1.2. Résultats

Les théorèmes que nous allons énoncer ici concernent tous le cas rationnel, comme nous l'avons mentionné dans l'introduction.

Fixons auparavant quelques notations supplémentaires. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, le plongement (en tant qu'espace quasi-projectif) de G_i dans $\mathbf{P}_k^{N_i}$ fournit une hauteur de Weil h sur l'ensemble des points $\overline{\mathbf{Q}}$-rationnels de G_i (dont, en particulier, p_i). Nous noterons encore h la hauteur induite sur $G(\overline{\mathbf{Q}})$. Soit ρ_i l'ordre analytique de G_i défini comme suit : $\rho_i = 1$ si G_i est un groupe linéaire et $\rho_i = 2$ sinon (c'est-à-dire lorsque G_i a une composante abélienne non triviale). Soit $y \in \{0, 1\}$ un paramètre tel que $y = 0$ lorsque G est une variété semi-abélienne et $y = 1$ sinon.

Dans le cas archimédien, l'énoncé le plus général que nous obtenons est le suivant.

Théorème 1.2. *Il existe une constante $c_4 \geqslant 1$ ayant la propriété suivante. Supposons que v_0 est une place archimédienne. Soit $\mathfrak{e}$ un nombre réel $\geqslant e$ et $\mathfrak{a}$ un entier naturel supérieur ou égal à $D\max\{1, h(V)\}/\log\mathfrak{e}$. Notons U_0 le nombre réel*

$$\begin{aligned} U_0 :=\ & (\mathfrak{a}\log\mathfrak{e})\left(\mathfrak{a}^y + \frac{D}{\log\mathfrak{e}}\log\left(e + \frac{D}{\log\mathfrak{e}}\right)\right)^{1/t} \\ & \times \prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{D\max_{0\leqslant s\leqslant c_4\mathfrak{a}}\{h(sp_i)\} + (\mathfrak{e}\mathfrak{a}\|u_i\|_{v_0})^{\rho_i}}{\mathfrak{a}\log\mathfrak{e}}\right)^{g_i/t}. \end{aligned} \tag{4}$$

[5] La lettre p désigne à la fois ce point et le nombre premier qui divise v_0. Mais cette maladresse ne devrait pas créer d'ambiguïté.

Supposons que pour tout entier $s \in \{1, \ldots, c_4\mathfrak{a}\}$ *et tout sous-groupe algébrique connexe* G' *de* G *vérifiant* $t_{G'} + V \neq t_G$ *on ait* $s(p_1, \ldots, p_n) \notin G'(\bar{k})$*. Alors* $u \notin V \otimes_{v_0} \mathbf{C}$ *et*

$$\log \mathrm{d}_{v_0}(u, V) \geqslant -c_4 U_0. \tag{5}$$

Formellement, ce résultat est très proche de celui énoncé avec $t = 1$ dans le théorème principal de [15]. Hormis la disparition de la hauteur d'une $\mathbf{Q}$-base de k, c'est surtout la définition de l'entier $\mathfrak{a}$ qui change radicalement. Dans l'article en question, cet entier était (en substance) $\frac{D}{\log \mathfrak{e}} \log h(p)$ alors qu'ici il dépend du sous-espace V mais pas du point p. Sachant qu'il existe une constante c_5 pour laquelle $h(sp_i) \leqslant c_5 s^{\rho_i} \max\{1, h(p_i)\}$ pour tout entier $s \geqslant 1$, l'on déduit aisément de la définition de U_0 la dépendance standard en $h(p)$ décrite dans l'introduction. Si $n = 1$, nous pouvons regarder la dépendance *minimale* en $h(p)$ de U_0, c'est-à-dire choisir $\mathfrak{e}$ (qui est le seul paramètre vraiment « libre » du théorème 1.2) de sorte que U_0, comme fonction uniquement de $h(p)$, soit minimal. Avec des considérations élémentaires, on s'aperçoit que, dans cette optique, le meilleur choix pour $\mathfrak{e}$ est $e\sqrt{\max\{1, h(p)\}}$, ce qui conduit à l'estimation

$$\log \mathrm{d}_{v_0}(u, V) \geqslant -c_6 \left(\frac{\max\{1, h(p)\}}{\log \max\{e, h(p)\}} \right)^{g/t} \tag{6}$$

où c_6 est une fonction des données qui ne dépend pas de la hauteur de p. Si nous comparons cela à la conséquence I.3.3 de [15] (écrite avec $t = 1$), nous constatons à nouveau la disparition d'un logarithme de $h(p)$ (qui était au numérateur du membre de droite de (6)). Autrement dit, nous vérifions ainsi que l'amélioration en $h(p)$ est bien une caractéristique intrinsèque de la mesure (5) et non pas le simple effet d'un choix différent de paramètres dans deux énoncés « semblables ».

Nous avons également une version ultramétrique de l'énoncé 1.2.

Théorème 1.3. *Il existe une constante* $c_7 \geqslant 1$ *ayant la propriété suivante. Supposons que* v_0 *est ultramétrique et que* $\|u\|_{v_0} < r_p^2$ *(où, rappelons-le,* p *est la caractéristique résiduelle de* v_0 *et* $r_p = p^{-1/(p-1)}$*). Considérons un nombre réel* $\mathfrak{r}$ *dans l'intervalle ouvert* $]1, r_p^2/\|u\|_{v_0}[$*. Soit* $\mathfrak{a}$ *un entier naturel vérifiant*

$$\mathfrak{a} \geqslant \frac{D \max\{1, h(V)\} + \log^+((\log(\mathfrak{r}))^{-1})}{\log \mathfrak{r}}.$$

Notons U_1 *le nombre réel*

$$\big(\mathfrak{a} \log(1 + \mathfrak{r})\big) \left(\mathfrak{a}^y + \frac{D}{\log \mathfrak{r}} \log\left(e + \frac{D}{\log \mathfrak{r}} \right) \right)^{1/t} \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{D \max_{0 \leqslant s \leqslant c_7 \mathfrak{a}} \{h(sp_i)\}}{\mathfrak{a} \log \mathfrak{r}} \right)^{g_i/t}. \tag{7}$$

Supposons que pour tout entier $s \in \{1, \ldots, c_7\mathfrak{a}\}$ *et tout sous-groupe algébrique connexe* G' *de* G *tel que* $t_{G'} + V \neq t_G$ *on ait* $s(p_1, \ldots, p_n) \notin G'(\bar{k})$*. Alors* $u \notin V \otimes \mathbf{C}_{v_0}$ *et* $\log \mathrm{d}_{v_0}(u, V) \geqslant -c_7 U_1$*.*

Remarques 1.4.

(1) Les différences entre les versions archimédienne et ultramétrique résident d'une part dans le changement de $\mathfrak{e}$ par $\mathfrak{r}$ et d'autre part dans une contrainte plus forte sur l'entier $\mathfrak{a}$ dans

le cas ultramétrique. Par ailleurs, toujours dans ce cas, la norme $\|u_j\|_{v_0}$ du logarithme u_j n'apparaît plus.

(2) Soulignons que cette minoration ne dévoile pas la dépendance en la place v_0, dont une partie est dans la constante c_7, non explicite.

Si la littérature est assez riche et variée en analogues p-adiques de mesures d'indépendance linéaire de logarithmes lorsque G est un groupe linéaire (en particulier grâce aux travaux de Yu [35–37]), elle est en revanche beaucoup plus réduite si G a une partie abélienne, voire même inexistante lorsque, comme ici, G est quelconque. Mentionnons la série d'articles de Bertrand [3–5] (la dernière référence est un article en commun avec Yu. Flicker) à la fin des années 70, ainsi que le résultat de Rémond & Urfels [25] qui traite le cas du produit de *deux* courbes elliptiques.

2. Quelques mots sur la démonstration des théorèmes 1.2 et 1.3

Nous n'allons pas expliquer ici le schéma de la démonstration, somme toute assez classique, fondé sur la méthode de Baker revisitée et approfondie par Philippon & Waldschmidt [22]. La démarche est rappelée au début du §4. Nous voulons plutôt dégager de façon élémentaire *la* difficulté technique sur laquelle achoppaient les preuves dans le cas du tore pour le passage à un groupe algébrique quelconque. Nous en profiterons également pour mettre en lumière certaines modifications techniques de la démonstration, qui la simplifient (dans une certaine mesure), mais au prix, il est vrai, de l'hypothèse sur le point p déjà rencontrée dans l'énoncé 1.1.

Commençons donc par expliquer l'idée fondamentale du cas rationnel usuel dans $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ qui conduit à de meilleures mesures d'indépendances linéaires de logarithmes. Pour cela, simplifions la situation au maximum et ne conservons que $G = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2$, la forme linéaire $z_2 - bz_1$ ($b \in \mathbf{Z}$, z_1, z_2 coordonnées sur $\mathrm{Lie}(G)$) et le point $p = (\alpha_1, \alpha_2) \in (k \setminus \{0\})^2$ de logarithme (u_1, u_2). Autrement dit, nous nous intéressons à la forme linéaire en deux logarithmes $\Lambda = u_2 - bu_1$. Les preuves « classiques » qui mènent à une minoration de $|\Lambda|_{v_0}$ reposent sur l'étude des dérivées (divisées) le long de la droite $z_2 = bz_1$ d'un certain polynôme exponentiel $(z_1, z_2) \to P(e^{z_1}, e^{z_2})$ ($P \in k[X, Y]$) en les points $s \cdot (u_1, u_2)$, $s \in \mathbf{N}$. Par translation sur le groupe G, l'on peut se ramener à $s = 0$ et le résultat clef qui permet d'exploiter l'hypothèse $b \in \mathbf{Z}$ est le suivant.

Fait 2.1. Soit $P \in \mathbf{Z}[X, Y]$, b un entier et ℓ un entier naturel. Supposons que l'application $z \mapsto P(e^z, e^{bz})$, analytique au voisinage de 0, s'annule à l'ordre ℓ en 0. Alors le nombre

$$\frac{1}{\ell!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{\ell} P\left(e^z, e^{bz}\right)\Big|_{z=0} \tag{8}$$

est un entier relatif.

Il y a au moins deux preuves assez différentes de ce résultat. La première utilise les polynômes binomiaux

$$\Delta_0(X) := 1, \quad \Delta_n(X) := \frac{X(X+1)\cdots(X+n-1)}{n!} \quad \left(n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}\right) \tag{9}$$

qui prennent des valeurs entières aux points entiers. En considérant un monôme X^iY^j qui intervient dans P (avec le coefficient $p_{i,j} \in \mathbf{Z}$), la dérivée $\ell^{\text{ème}}$ de $z \mapsto e^{(i+jb)z}$ en 0 vaut $(i + jb)^{\ell}/\ell!$.

Ce terme est la somme de $\Delta_\ell(i+jb)$ et d'une combinaison linéaire de $(i+jb)^h$ avec $h<\ell$ dont les coefficients ne dépendent que de ℓ. L'hypothèse sur P se traduit alors par l'égalité entre le coefficient (8) et

$$\sum_{i,j} p_{i,j}\Delta_\ell(i+jb), \tag{10}$$

manifestement un entier, ce qui conclut la preuve. Aussi astucieux soit-il, ce procédé comporte néanmoins une limitation consubstantielle puisque b ne peut être qu'un entier (ou au pire un nombre rationnel), faute de quoi il est difficile d'envisager une généralisation. La seconde preuve du fait 2.1 que nous connaissons est basée sur un changement de variables. On pose $T=e^z-1$. Comme $b\in\mathbf{Z}$, chacune des fonctions $e^{(i+jb)z}=(1+T)^{i+jb}$ appartient à l'anneau de séries formelles $\mathbf{Z}[\![T]\!]$. Il en est donc de même pour $P(e^z,e^{bz})$ et l'hypothèse sur P implique que le coefficient (8) est également le coefficient de T^ℓ dans ce développement. C'est donc un entier. Contrairement à la démonstration précédente, cette méthode peut être généralisée à un groupe algébrique quelconque. D'ailleurs, rappelons que ce passage de la variable z (sur $\mathrm{Lie}(\mathbb{G}_\mathrm{m})$) à la variable T (sur $\mathbb{G}_\mathrm{m}$) et ses répercussions arithmétiques constituent la cheville ouvrière des récentes avancées dans le domaine des formes linéaires de logarithmes (voir [11,15]), mais aussi dans les questions liées à l'algébricité de feuilles formelles [8,17]. C'est cette observation qui apporte l'essentiel des résultats nouveaux de cet article.

Il me faut signaler cependant qu'une difficulté technique échappe à l'analyse du cas d'un tore telle que nous venons de la faire. Dans le cas général, nous avons besoin de modèles lisses des groupes G et H (rappelons que $V=\mathrm{Lie}(H)$) sur des anneaux de la forme $\mathcal{O}_k[1/m]$, où m est un entier >0. Si pour le groupe G cela ne pose aucun problème (m dépend de G), le groupe H, quant à lui, admet un modèle lisse mais sur un anneau localisé $\mathcal{O}_k[1/mm']$ avec m' un entier qui dépend *a priori* de H. Par conséquent, il est important de contrôler l'entier m' fonction du modèle de H. Cela revient à avoir des estimations p-adiques de nombres algébriques plus généraux issus de (8) qui soient les plus précises possible et qui tiennent compte du modèle choisi pour H. C'est pourquoi nous emploierons un formalisme particulièrement adapté à cette exigence, décrit par Bost au §3.1 de [8]. Le langage géométrique de ce formalisme, qui s'exprime en termes de « tailles de schémas formels lisses », éclaire le rôle exact joué par le choix du modèle de H. Mais la difficulté technique évoquée ne disparaît pas pour autant dans ce langage. Un théorème de Raynaud, donnant un condition pour que l'inclusion entre variétés abéliennes se prolonge en une *immersion fermée* pour les modèles de Néron correspondants, permet alors de contrôler très précisément l'entier m'. Nous détaillerons tout cela au §4.2.

Cet argument arithmétique crucial s'accompagne d'une double utilisation d'un lemme de Siegel absolu, à la fois pour bâtir le « classique » polynôme auxiliaire requis par la démonstration de transcendance mais aussi pour fixer une k-base de $V=\mathrm{Lie}(H)$, de « petite » hauteur, qui restera la même à chaque étape de la preuve. Ce dernier point évite le recours à certaines bases orthonormées de $\mathrm{Lie}(G)\otimes_v\mathbf{C}$ et les contrôles de changements de bases subséquents, qui intervenaient auparavant. Quant à construire le polynôme auxiliaire de la sorte, cela procure l'avantage de supprimer la quantité $Dh(\xi_1,\dots,\xi_D)$, où $\xi_1,\dots,\xi_D$ est une $\mathbf{Q}$-base de k (i.e., de manière équivalente, le logarithme du discriminant absolu de k, cf. [28]), qui apparaissait dans les mesures de [15]. L'emploi d'un lemme de Siegel absolu dans le contexte des formes linéaires de logarithmes nous avait été communiqué par S. David (voir [1,11]). Il remplace le lemme de Thue–Siegel dont on se servait d'ordinaire. Nous le présentons au §3.7 et nous l'appliquons aux §4.1.3 et 4.4. Tous les bienfaits de ce lemme pour la démonstration (à commencer par la clarté même de l'argumentation) sont malheureusement un peu ternis par une difficulté technique que je ne sais pas surmonter sans supposer que le groupe engendré par le point p ne rencontre aucun sous-groupe strict de $G(\bar{k})$ sauf en 0. Nous avions déjà été contraint d'émettre ce type d'hypothèses lorsque nous avions mis en œuvre la méthode des pentes, qui elle, pourtant, ne requiert aucun lemme de Siegel (voir [16]). Le point commun aux deux approches est un certain sous-cas, appelé *cas périodique*, que je ne sais pas intégrer dans les preuves, bien qu'il fût déjà résolu de manière très astucieuse par Philippon & Waldschmidt dans leur article [22], grâce à une extrapolation (à la manière de Gel'fond) sur les dérivations.

3. Préparatifs

La démonstration des théorèmes 1.2 et 1.3 requiert plusieurs énoncés d'intérêts indépendants que nous présentons dans cette partie.

3.1. Mise en place de données supplémentaires

Considérons le groupe $\mathbb{G}_\mathrm{a} \times G$, le point $q = (1, p) \in (\mathbb{G}_\mathrm{a} \times G)(k)$ et le sous-espace vectoriel W de $t_{\mathbb{G}_\mathrm{a}} \oplus t_G$ défini par $t_{\mathbb{G}_\mathrm{a}} \oplus V$. L'élément $1 \oplus u \in t_{\mathbb{G}_\mathrm{a}}(\mathbf{C}_{v_0}) \oplus \mathscr{T}_{v_0}$ est un logarithme du point q. Pour uniformiser les notations, nous posons $G_0 := \mathbb{G}_\mathrm{a}$ et $u_0 := 1$. Par ailleurs, considérons un entier i compris entre 1 et n. Soit Φ_i un plongement de G_i dans l'espace projectif $\mathbf{P}_k^{N_i}$ du type de ceux construits par Serre [30]. Quitte à effectuer un changement de coordonnées, nous pouvons supposer que l'élément neutre de G_i est représenté par $(1 : 0 : \cdots : 0) \in \mathbf{P}^{N_i}$. Soit $x \in G_i(\mathbf{C}_{v_0})$ et $(x_0 : \cdots : x_{N_i})$ les coordonnées de $\Phi_i(x)$. On note

$$A_x^{(i)} = \bigl(A_{x,0}^{(i)}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : \cdots : A_{x,N_i}^{(i)}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\bigr) \tag{11}$$

une famille de polynômes (à coefficients dans $\mathcal{O}_{v_0(k)}$) qui exprime la loi d'addition de G_i au voisinage de x. Dans cette formule, $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ sont des $(N_i + 1)$-uplets de variables et chacun des $A_{x,j}^{(i)}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, $0 \leqslant j \leqslant N_i$, est homogène de même degré sur chacune des variables $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$, inférieur à une constante c_8, qui peut être choisie uniforme en x (quasi-compacité de G_i) et en i (nombre fini). Cette constante ne dépend que de (G, Φ). Dans la suite, pour ne pas alourdir excessivement les notations, nous omettrons souvent la référence à x en indice et nous écrirons $A_j^{(i)}$ au lieu de $A_{x,j}^{(i)}$. Soit v une place quelconque de K. Il est possible également de représenter l'exponentielle v-adique de $G_i(\mathbf{C}_v)$ par des fonctions $(\theta_{v,i,j})_{0 \leqslant j \leqslant N_i}$, analytiques et sans zéros communs dans $\mathscr{T}_{i,v}$, telles que $(\theta_{v,i,0}(0), \ldots, \theta_{v,i,N_i}(0)) = (1, 0, \ldots, 0)$:

$$\exp_{i,v}(z) = \bigl(\theta_{v,i,0}(z) : \cdots : \theta_{v,i,N_i}(z)\bigr), \quad z \in \mathscr{T}_{i,v}.$$

Nous noterons

$$\Theta_{v,i} : z \in \mathscr{T}_{i,v} \mapsto \bigl(\theta_{v,i,0}(z), \ldots, \theta_{v,i,N_i}(z)\bigr) \in \mathbf{C}_v^{N_i+1}$$

et, si j est un entier naturel inférieur à N_i,

$$\Psi_{v,i,j} : z \in \mathscr{T}_{i,v} \setminus \theta_{v,i,j}^{-1}\bigl(\{0\}\bigr) \mapsto \left(\frac{\theta_{v,i,0}}{\theta_{v,i,j}}(z), \ldots, \frac{\theta_{v,i,N_i}}{\theta_{v,i,j}}(z)\right) \in \mathbf{C}_v^{N_i+1}.$$

Bien que ce soit un abus de notations, nous nous permettrons d'écrire ces formules pour $z \in \mathcal{T}_v$ au lieu de la $i^{\text{ème}}$ composante de z sur $\mathcal{T}_{i,v}$. Comme nous l'avons vu au §1.1, lorsque v est ultramétrique, le choix de la base $\mathbf{e}$ permet d'écrire chacune des coordonnées $\theta_{v,i,j}(z)$ sous la forme d'une série $\sum_{\mathbf{n}} \frac{a_{\mathbf{n},v,i,j}}{\mathbf{n}!}\mathbf{z}^{\mathbf{n}}$ où $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_{g_i})$ sont les coordonnées de z dans la base $\mathbf{e}$ et $a_{\mathbf{n},v,i,j} \in \mathcal{O}_v$. De plus, lorsque v est archimédienne, les fonctions $\theta_{v,i,j}$, $0 \leqslant j \leqslant N_i$, sont d'ordre analytique $\leqslant \rho_i$ et il existe une constante $c_9 \geqslant 1$ telle que, pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$, pour tout vecteur z de $\mathcal{T}_{i,v}$, on ait

$$-c_9\big(1 + \|z\|_v\big)^{\rho_i} \leqslant \log \max_{0\leqslant j\leqslant N_i} \big|\theta_{v,i,j}(z)\big| \leqslant c_9\big(1 + \|z\|_v\big)^{\rho_i}. \tag{12}$$

La k-structure de l'espace tangent t_{G_i} entraîne une stabilité par dérivation (selon un vecteur de $t_{G_i}(k)$) de l'anneau $k[(\theta_{v,i,j}/\theta_{v,i,0})_{0\leqslant j\leqslant N_i}]$. Ces propriétés seront utilisées aux paragraphes 4.2 et 4.3.

Dans la suite nous noterons $\mathbf{P}$ l'espace multiprojectif $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^{N_1} \times \cdots \times \mathbf{P}^{N_n}$ (le corps de base étant k, $\bar{k}$ ou $\mathbf{C}_{v_0}$ selon le contexte). Il est naturellement muni du faisceau canonique $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1, \dots, 1)$ et, si V est une sous-variété (fermée) de $\mathbf{P}$, l'entier $\deg \mathsf{V}$ (*resp.* le polynôme $H(\mathsf{V}; X_0, \dots, X_n)$) désigne le degré (*resp.* le polynôme de Hilbert–Samuel) de V relatif à ce faisceau. On considère également le multidegré

$$\mathcal{H}(\mathsf{V}; X_0, \dots, X_n) := (\dim \mathsf{V})! \lim_{\alpha\to+\infty} \frac{H(\mathsf{V}; \alpha.X_0, \dots, \alpha.X_n)}{\alpha^{\dim \mathsf{V}}}$$

et on étend cette définition aux sous-schémas intègres de $\mathbf{P}$ en prenant l'adhérence de Zariski dans $\mathbf{P}$. Le plongement $G_0 \times G \hookrightarrow \mathbf{P}$ permet alors de définir le polynôme $\mathcal{H}(G'; X_0, \dots, X_n)$ pour tout sous-schéma en groupes G' de $G_0 \times G$. Rappelons que ses coefficients sont des entiers naturels de somme égale à $\deg G'$.

3.2. Paramètres et choix d'un sous-groupe

Soit $x, \widetilde{D}_0, \widetilde{D}_1, \dots, \widetilde{D}_n, \widetilde{T}, C_0$ des nombres réels strictement positifs et $0 < S_0 \leqslant S$ des entiers. Posons, pour chaque entier $i \in \{0, \dots, n\}$, $\widetilde{D}_i^{\#} := x\widetilde{D}_i$ et $D_i := [\widetilde{D}_i^{\#}]$, ainsi que $T := [\widetilde{T}]$. Nous supposerons que l'entier T est non nul. En guise de support à l'intuition, mentionnons que x est une variable « d'ajustement », les D_i des degrés de polynômes, T un ordre de dérivation, S un nombre de points (tous multiples de q) et C_0 une constante positive (que l'on peut prendre entière) plus grande que toutes celles qui interviendront dans ce texte.

Lorsque G' est un sous-groupe algébrique de $G_0 \times G$, on note $\lambda' := \operatorname{codim}_W W \cap t_{G'}$ et $r' := \operatorname{codim}_G G'$.

Définition 3.1. Soit G' un sous-groupe algébrique connexe de $G_0 \times G$ tel que $t_{G'} + W \neq t_{G_0\times G}$. On définit

$$A(G') := \left(\frac{\widetilde{T}^{\lambda'} \operatorname{card}\big(\frac{\Sigma_q(S)+G'(\bar{k})}{G'(\bar{k})}\big)\mathcal{H}(G'; \widetilde{D}_0, \dots, \widetilde{D}_n)}{C_0\mathcal{H}(G_0 \times G; \widetilde{D}_0, \dots, \widetilde{D}_n)}\right)^{\frac{1}{r'-\lambda'}}$$

et $B(G') := A(G')^{\frac{r'-\lambda'}{r'}} \max\{1, A(G')\}^{\frac{\lambda'}{r'}}$.

Remarquons alors que l'ensemble

$$\left\{B(G'); B(G') \leqslant B\big(\{0\}\big) \text{ et } t_{G'} + W \neq t_{G_0\times G}\right\}$$

est fini. En effet, si $B(G') \leqslant B(\{0\})$ alors $A(G') \leqslant B(\{0\})$ donc $\mathscr{H}(G'; \widetilde{D}_0, \ldots, \widetilde{D}_n)$ et par conséquent $\deg G'$ sont bornés. Le degré de G' étant un entier, il n'y a qu'un nombre fini de valeurs possibles pour lui et comme les coefficients du polynôme $\mathscr{H}(G'; X_0, \ldots, X_n)$ sont des entiers compris entre 0 et $\deg G'$, il n'y en a également qu'un nombre fini. Il est alors clair que $B(G')$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs lorsque G' varie (parmi les sous-groupes tels que $B(G') \leqslant B(\{0\})$). Cela justifie la définition suivante.

Définition 3.2. On définit le nombre réel strictement positif

$$x := \min_{t_{G'}+W\neq t_{G_0\times G}} \left\{B(G')\right\}$$

où G' varie parmi les sous-groupes algébriques connexes de $G_0 \times G$ tel que $t_{G'} + W$ est strictement inclus dans l'espace tangent $t_{G_0\times G}$. On note également $\widetilde{G}$ un sous-groupe parmi les G' en question tel que $x = B(\widetilde{G})$.

Lemme 3.3. *Supposons qu'il existe un sous-groupe algébrique connexe $H_1 \subseteq G_0 \times G$ tel que $t_{H_1} + W \neq t_{G_0\times G}$ et $A(H_1) \leqslant 1$. Alors $x \leqslant 1$ et pour tout sous-groupe algébrique connexe G' de $G_0 \times G$ vérifiant $t_{G'} + W \neq t_{G_0\times G}$, on a*

$$\widetilde{T}^{\lambda'} \operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_q(S) + G'(\bar{k})}{G'(\bar{k})}\right)\mathscr{H}\big(G'; D_0^{\#}, \ldots, D_n^{\#}\big) \geqslant C_0\mathscr{H}\big(G_0 \times G; D_0^{\#}, \ldots, D_n^{\#}\big). \tag{13}$$

De plus, cette inégalité est une égalité pour $G' = \widetilde{G}$.

Démonstration. De l'existence de H_1, on déduit immédiatement que $B(H_1) \leqslant 1$ et donc $x \leqslant 1$. Par ailleurs, pour un schéma en groupes G' qui vérifie les hypothèses de l'énoncé, considérons le nombre réel

$$\mho_{G'} := \frac{\widetilde{T}^{\lambda'} \operatorname{card}\big(\frac{\Sigma_q(S)+G'(\bar{k})}{G'(\bar{k})}\big)\mathscr{H}(G'; D_0^{\#}, \ldots, D_n^{\#})}{C_0\mathscr{H}(G_0 \times G; D_0^{\#}, \ldots, D_n^{\#})}.$$

On a $x^{r'}\mho_{G'} = A(G')^{r'-\lambda'}$ par homogénéité de $\mathscr{H}$.

- Si $A(G') \geqslant 1$ on a $\mho_{G'} \geqslant 1/x^{r'} \geqslant 1$.
- Si $A(G') \leqslant 1$ on a $B(G') = A(G')^{\frac{r'-\lambda'}{r'}} \geqslant x$ donc encore $\mho_{G'} \geqslant 1$.

Cela démontre l'inégalité (13). De plus comme $A(\widetilde{G}) \leqslant 1$ (sinon $x = B(\widetilde{G})$ serait > 1), on a $x = A(\widetilde{G})^{\frac{\tilde{r}-\tilde{\lambda}}{\tilde{r}}}$ puis $\mho_{\widetilde{G}} = 1$ et il y a donc bien égalité dans (13) pour $\widetilde{G}$. $\square$

3.3. Rang d'un système d'équations linéaires

Soit $(P_0 = 1, P_1, \ldots, P_{D_0})$ une base de $k[X]_{\leqslant D_0}$ et $\mathbf{D} = (D_0, \ldots, D_n)$. Considérons l'espace vectoriel $k[\mathbf{P}]_{\mathbf{D}}$ des polynômes multihomogènes en les variables $\mathbf{X}_i = (X_0^{(i)}, \ldots, X_{N_i}^{(i)})$, $0 \leqslant i \leqslant n$ (en posant $N_0 := 1$), de multidegrés $\mathbf{D}$. Lorsque v est une place de k et

$$P = \sum_{|\lambda_i| = D_i} q_{\boldsymbol{\lambda}} \prod_{i=0}^{n} \mathbf{X}_i^{\lambda_i} \in k[\mathbf{P}]_{\mathbf{D}}$$

$(\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \prod_{i=0}^{n} \mathbf{N}^{N_i+1}$, $p_{\boldsymbol{\lambda}} \in k)$, nous noterons $F_{P,v}$, ou plus simplement F s'il n'y a pas d'ambiguïté, l'application

$$F_{P,v} : z \mapsto \sum_{\boldsymbol{\lambda}} q_{\boldsymbol{\lambda}} z_0^{\lambda_0} \prod_{i=1}^{n} \Theta_{v,i}^{\lambda_i}(z_i) \tag{14}$$

définie pour $z = (z_0, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}_v \times \mathscr{T}_v$ et à valeurs dans $\mathbf{C}_v$. Dans cette expression, nous avons identifié l'élément $\lambda_0 \in \mathbf{N}^2$ de longueur D_0 avec sa projection sur $\{0\} \times \mathbf{N}$, notée aussi λ_0 (nous commettrons souvent cet abus de notation). Nous noterons $(p_{\boldsymbol{\lambda}})$ les coefficients de P dans la base induite par P_{λ_0}, ce qui se traduit pour $F_{P,v}$ par

$$F_{P,v}(z) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}} p_{\boldsymbol{\lambda}} P_{\lambda_0}(z_0) \prod_{i=1}^{n} \Theta_{v,i}^{\lambda_i}(z_i).$$

Soit E la composante de degré $\mathbf{D}$ de l'espace vectoriel $k[\mathbf{P}]$ quotienté par l'idéal des polynômes identiquement nuls sur $G_0 \times G$ (c'est-à-dire tels que F_P soit identiquement nul). Soit $\mathbf{w} = (w_0, \ldots, w_{g-t})$ une base de W et $\mathcal{D}_{w_i}$ l'opérateur différentiel associé à w_i. Soit S_1, T_1 des entiers naturels non nuls. Considérons le système

$$\forall (s, \boldsymbol{\tau}) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^{\dim W}\ ;\ 0 \leqslant s \leqslant S_1,\ |\boldsymbol{\tau}| \leqslant T_1, \quad \mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}} F_{P,v_0}(s, su) = 0 \tag{15}$$

en les variables $q_{\boldsymbol{\lambda}}$ ou, de manière équivalente, en les variables $p_{\boldsymbol{\lambda}}$. En considérant un sous-groupe algébrique G' de $G_0 \times G$, nous allons majorer le rang ρ du système (15) en fonction de G'. Pour cela, nous adoptons la même démarche que celle du lemme 6.7 de [22] (voir aussi la preuve du lemme 6.1 de [10]). Soit $\mathbf{w}'$ une base d'un supplémentaire de $W \cap t_{G'}$ dans W et $\lambda' = \dim W - \dim(W \cap t_{G'})$. Avec ces données, on montre que ρ est inférieur au rang du système

$$\forall (s, \boldsymbol{\tau}) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^{\lambda'}\ ;\ 0 \leqslant s \leqslant S_1,\ |\boldsymbol{\tau}| \leqslant T_1, \quad \mathcal{D}_{\mathbf{w}'}^{\boldsymbol{\tau}} P(sq + G') = 0,$$

et donc aussi plus petit que

$$\operatorname{card}\bigl\{\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{N}^{\lambda'};\ |\boldsymbol{\tau}| \leqslant T_1\bigr\} \times \operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_q(S_1) + G'(\bar{k})}{G'(\bar{k})}\right) \dim\bigl(\mathbf{C}_{v_0}[\mathbf{P}]/I(G')\bigr)_{2\mathbf{D}}.$$

En vertu d'un théorème de Nesterenko [20], le dernier terme est lui-même contrôlé en fonction de $\mathscr{H}(G')$:

$$\dim\bigl(\mathbf{C}_{v_0}[\mathbf{P}]/I(G')\bigr)_{2\mathbf{D}} \leqslant c_{10} \mathscr{H}\bigl(G'; D_0', \ldots, D_n'\bigr)$$

où $D_i' := \max\{1, D_i\}$ et c_{10} est une constante (explicite). Nous obtenons ainsi l'existence d'une constante c_{11} telle que

$$\rho \leqslant c_{11} T_1^{\lambda'} \operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_q(S_1) + G'(\bar{k})}{G'(\bar{k})}\right) \mathscr{H}\left(G'; D_0', \ldots, D_n'\right). \tag{16}$$

En appliquant ce résultat au sous-groupe $G' = \widetilde{G}$ introduit dans la définition 3.2, nous avons la

Proposition 3.4. *Supposons que $sq \notin \widetilde{G}(\bar{k})$ pour tout $s \in \{1, \ldots, S\}$. Alors le rang ρ du système* (15) *avec $S_1 := S_0$ et $T_1 := 2(g+1)T$ vérifie*

$$\rho \leqslant C_0^{3/2} \frac{S_0}{S} \mathscr{H}\left(G; D_0', \ldots, D_n'\right).$$

Démonstration. En effet la dernière assertion du lemme 3.3 permet de simplifier la majoration (16) en

$$\rho \leqslant c_{11} C_0 \frac{\operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_q(S_0) + \widetilde{G}(\bar{k})}{\widetilde{G}(\bar{k})}\right)}{\operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_q(S) + \widetilde{G}(\bar{k})}{\widetilde{G}(\bar{k})}\right)} \mathscr{H}\left(G; D_0', \ldots, D_n'\right)$$

car chacune des applications partielles

$$x_i \mapsto \mathscr{H}(\widetilde{G}; x_0, \ldots, x_n) / \mathscr{H}(G; x_0, \ldots, x_n)$$

est décroissante (voir propriété 4.4, p. 414, de [18]) et $D_i^{\#} \leqslant 2D_i'$. Pour conclure, nous utilisons l'hypothèse faite sur q. □

Remarque 3.5. L'hypothèse sur q correspond à celle faite sur p dans les théorèmes 1.2 et 1.3 et elle n'intervient dans toute la preuve qu'à cet endroit précis.

3.4. Remarque auxiliaire (*non-nullité du* $\max\{D_i\}$)

Lemme 3.6. *Supposons que $x \leqslant 1$ et que $sq \notin \widetilde{G}(\bar{k})$ pour tout $s \in \{1, \ldots, C_0 \deg(G_0 \times G)\}$. Si les deux conditions suivantes sont satisfaites*

(1) $S \geqslant C_0 \deg(G_0 \times G)$,
(2) $\widetilde{T}(S+1) \max_{1 \leqslant i \leqslant n}\{\widetilde{D}_i\} \geqslant C_0 \deg(G_0 \times G) \widetilde{D}_0$,

alors les entiers D_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, ne sont pas tous nuls.

Démonstration. Par construction, il s'agit de montrer que $\max_{1 \leqslant i \leqslant n}\{x \widetilde{D}_i\} \geqslant 1$. Comme $x = B(\widetilde{G}) = A(\widetilde{G})^{\frac{\tilde{r}-\tilde{\lambda}}{\tilde{r}}}$ (car précisément $x \leqslant 1$ par hypothèse), on a

$$\left(x \max_{1 \leqslant i \leqslant n}\{\widetilde{D}_i\}\right)^{\tilde{r}} = \frac{\widetilde{T}^{\tilde{\lambda}} \operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_q(S) + \widetilde{G}(\bar{k})}{\widetilde{G}(\bar{k})}\right) \mathscr{H}(\widetilde{G}; \widetilde{D}_0, \ldots, \widetilde{D}_n) \max_{1 \leqslant i \leqslant n}\{\widetilde{D}_i\}^{\tilde{r}}}{C_0 \mathscr{H}(G_0 \times G; \widetilde{D}_0, \ldots, \widetilde{D}_n)}. \tag{17}$$

Soit $\pi_0 : G_0 \times G \to G_0$ la projection canonique sur G_0 et $\pi : G_0 \times G \to G$ celle sur G. Si $\pi_0(\widetilde{G}) = \{0\}$ alors $\widetilde{G} = \{0\} \times \pi(\widetilde{G})$ donc

- $\mathrm{card}(\frac{\Sigma_q(S)+\widetilde{G}(\bar{k})}{\widetilde{G}(\bar{k})}) = S+1$ (car la première composante de q est 1),
- $\tilde{\lambda} \geqslant 1$ (car sinon $W \subseteq t_{\widetilde{G}}$ et on aurait $t_{G_0} \subseteq t_{\pi_0(\widetilde{G})} = \{0\}$),
- $\mathscr{H}(\widetilde{G}; \widetilde{D}_0, \ldots, \widetilde{D}_n) \geqslant \min_{\substack{i_1+\cdots+i_n=\dim \widetilde{G} \\ 0\leqslant i_j \leqslant g_j}} \{\widetilde{D}_1^{i_1} \cdots \widetilde{D}_n^{i_n}\}$

et de la formule (17) on déduit

$$\Bigl(x \max_{1\leqslant i\leqslant n} \{\widetilde{D}_i\}\Bigr)^{\tilde{r}} \geqslant \frac{\widetilde{T}(S+1)\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\widetilde{D}_i\}}{C_0 \deg(G_0 \times G)\widetilde{D}_0} \tag{18}$$

et cette dernière quantité est supérieure à 1 par hypothèse.

Si $\pi_0(\widetilde{G}) = G_0$ on a alors

$$\mathscr{H}(\widetilde{G}; \widetilde{D}_0, \ldots, \widetilde{D}_n) \geqslant \widetilde{D}_0 \min_{\substack{i_1+\cdots+i_n=\dim \widetilde{G}-1 \\ 0\leqslant i_j\leqslant g_j}} \bigl\{\widetilde{D}_1^{i_1} \cdots \widetilde{D}_n^{i_n}\bigr\} \tag{19}$$

et

$$\Bigl(x \max_{1\leqslant i\leqslant n} \{\widetilde{D}_i\}\Bigr)^{\tilde{r}} \geqslant \frac{\widetilde{T}^{\tilde{\lambda}}\,\mathrm{card}\bigl(\frac{\Sigma_q(S)+\widetilde{G}(\bar{k})}{\widetilde{G}(\bar{k})}\bigr)}{C_0 \deg(G_0 \times G)} \geqslant 1 \tag{20}$$

par hypothèse. □

3.5. Lemme de multiplicités

Rappelons que si $\mathbf{w} = (w_0, \ldots, w_{g-t})$ désigne une base de W, on note $\mathcal{D}_{w_i}$ l'opérateur différentiel associé à w_i. L'objet de ce paragraphe est de montrer que, sous des hypothèses « minimales » (en particulier sans la nécessité d'un choix très précis des paramètres à cette étape) et grâce au lemme de multiplicités de Philippon [21], il est possible d'affirmer que le système

$$\forall (m, \mathbf{t}) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^{\dim W},\ 0 \leqslant m \leqslant (g+1)S,\ |\mathbf{t}| \leqslant (g+1)T, \quad \mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{t}} F_{P,v_0}(m, mu) = 0 \tag{21}$$

n'admet pas de solution polynomiale P non nulle (les notations sont celles du §3.3).

Lemme 3.7. *Supposons que les entiers $D_1, \ldots, D_n$ ne sont pas tous nuls et que $x \leqslant 1$. Supposons également que, pour tout sous-groupe algébrique G' de G tel que $t_{G'} + V \neq t_G$, pour tout entier $s \in \{1, \ldots, C_0\}$, on ait $sp \notin G'(\bar{k})$ et supposons enfin que*

$$\widetilde{T} \geqslant c_{12} \max\biggl\{\frac{\widetilde{D}_0}{(S+1)^{1-y}}, \widetilde{D}_1, \ldots, \widetilde{D}_n, 1\biggr\} \tag{22}$$

avec $c_{12} = 8^g (\deg G_0 \times G) \prod_{i=1}^n \deg G_i$. Alors il n'existe pas de polynôme $P \in E_{v_0} \setminus \{0\}$ tel que la dérivée $\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{t}} F_{P,v_0}(m, mu)$ soit nulle pour tout $(m, \mathbf{t}) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^{\dim W}$, $0 \leqslant m \leqslant (g+1)S$ et $|\mathbf{t}| \leqslant (g+1)T$.

Démonstration. Supposons qu'un tel polynôme $P \neq 0$ existe. Alors, d'après le lemme de multiplicités [21], il existe un sous-groupe algébrique connexe et strict G' de $G_0 \times G$ tel que

$$\begin{aligned} T^{\lambda'} \operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_q(S)+G'(\bar{k})}{G'(\bar{k})}\right)\mathscr{H}\left(G'; D'_0, \dots, D'_n\right) \\ \leqslant 2^g \mathscr{H}\left(G_0 \times G; D'_0, \dots, D'_n\right) \end{aligned} \tag{23}$$

où, rappelons-le, $\lambda' = \operatorname{codim}_W W \cap t_{G'}$ et $D'_i = \max\{1, D_i\}$. Nous allons examiner séparément les cas $t_{G'} + W = t_{G_0 \times G}$ et $t_{G'} + W \neq t_{G_0 \times G}$ afin de conclure que G' ne peut pas exister.

Si $t_{G'} + W = t_{G_0 \times G}$ alors $\lambda' = r' = \operatorname{codim}_{G_0 \times G} G'$ et l'inégalité (23) entraîne

$$T^{r'} \leqslant 2^g \left(\deg(G_0 \times G)\right) \max\{D_0, \dots, D_n\}^{r'},$$

ce qui contredit l'hypothèse (22) lorsque y vaut 1 (cas général). Dans le cas semi-abélien ($y = 0$), le groupe G' s'écrit $G'_0 \times A$ avec $G'_0 \subseteq G_0$ et $A \subseteq G$. Si $G'_0 = G_0$ alors l'inégalité (23) implique

$$T^{r'} \mathscr{H}\left(A; D'_1, \dots, D'_n\right) \leqslant 2^g \left(\deg(G_0 \times G)\right)\left(D'_1\right)^{g_1} \cdots \left(D'_n\right)^{g_n}$$

ce qui est incompatible avec $\widetilde{T} > 4^g (\deg(G_0 \times G)) \max\{\widetilde{D}_1, \dots, \widetilde{D}_n\}$. Si $G'_0 = \{0\}$ alors

$$\operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_q(S)+G'(\bar{k})}{G'(\bar{k})}\right) = S + 1$$

et (23) devient

$$T^{r'}(S+1)\mathscr{H}\left(A; D'_1, \dots, D'_n\right) \leqslant 2^g \left(\deg(G_0 \times G)\right) D'_0 \left(D'_1\right)^{g_1} \cdots \left(D'_n\right)^{g_n}$$

ce qui implique $T^{r'}(S+1) \leqslant 2^g (\deg(G_0 \times G)) D'_0 \max\{D_1, \dots, D_n\}^{r'-1}$, ce qui est encore impossible d'après l'hypothèse (22). Ce cas ne peut donc pas se produire et on a nécessairement $t_{G'} + W \neq t_{G_0 \times G}$. Soit alors $1 \leqslant \kappa_1 < \cdots < \kappa_h \leqslant n$ les entiers pour lesquels $D_{\kappa_i} \neq 0$, $1 \leqslant i \leqslant h$, et notons $\pi_\kappa : G_0 \times G \to \prod_{i=1}^h G_{\kappa_i}$ la projection canonique.

Si $D'_0 = 1$, on a

$$\binom{\dim G'}{\dim \pi_\kappa(G')} \mathscr{H}\left(\pi_\kappa(G'); D_{\kappa_1}, \dots, D_{\kappa_h}\right) \leqslant \mathscr{H}\left(G'; D'_0, \dots, D'_n\right) \tag{24}$$

ce qui entraîne *via* (23)

$$T^{\lambda'} \operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_q(S)+G'(\bar{k})}{G'(\bar{k})}\right) \leqslant c_{13} \frac{\mathscr{H}(\pi_\kappa(G); D_{\kappa_1}, \dots, D_{\kappa_h})}{\mathscr{H}(\pi_\kappa(G'); D_{\kappa_1}, \dots, D_{\kappa_h})}$$

avec

$$c_{13} := \frac{2^g (g+1)!(\dim \pi_\kappa(G'))!(\dim G' - \dim \pi_\kappa(G'))!}{(\dim \pi_\kappa(G))!(\dim G')!} \prod_{\substack{m \neq \kappa_i \\ 1 \leqslant i \leqslant h}} \frac{\deg G_m}{g_m!}.$$

Comme chacune des applications partielles

$$x_i \mapsto \frac{\mathscr{H}(\pi_\kappa(G); D_{\kappa_1}, \ldots, x_i, \ldots, D_{\kappa_h})}{\mathscr{H}(\pi_\kappa(G'); D_{\kappa_1}, \ldots, x_i, \ldots, D_{\kappa_h})}, \quad 1 \leqslant i \leqslant h,$$

est croissante sur $]0, +\infty[$, on déduit de la majoration $D_i \leqslant x\widetilde{D}_i$ l'inégalité

$$\begin{aligned} &T^{\lambda'} \operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_q(S) + G'(\bar{k})}{G'(\bar{k})}\right) \\ &\quad \leqslant c_{13} \frac{\mathscr{H}(\pi_\kappa(G); \widetilde{D}_{\kappa_1}, \ldots, \widetilde{D}_{\kappa_h})}{\mathscr{H}(\pi_\kappa(G'); \widetilde{D}_{\kappa_1}, \ldots, \widetilde{D}_{\kappa_h})} x^{\dim \pi_\kappa(G) - \dim \pi_\kappa(G')}. \end{aligned} \tag{25}$$

Posons

$$G'' := \pi_\kappa(G') \times \prod_{m \notin \{\kappa_1, \ldots, \kappa_h\}} G_m$$

(vu, après permutation éventuelle des facteurs, comme un sous-groupe de $G_0 \times G$). Ce groupe algébrique est différent de G sinon $\pi_\kappa(G') = \pi_\kappa(G)$ et l'inégalité (25) entraîne $T^{\lambda'} \operatorname{card}(\frac{\Sigma_q(S)+G'(\bar{k})}{G'(\bar{k})}) \leqslant c_{13}$. L'hypothèse sur le point p (appliquée à la projection de G' sur G) entraîne alors $C_0 \leqslant c_{13}$ ce qui est impossible si C_0 est assez grand. Nous allons maintenant obtenir à partir de (25) une inégalité pour G'' analogue à (23). En effet, observons d'une part que

$$\frac{\mathscr{H}(G_0 \times G; \widetilde{D}_0, \ldots, \widetilde{D}_n)}{\mathscr{H}(G''; \widetilde{D}_0, \ldots, \widetilde{D}_n)} = c_{14} \frac{\mathscr{H}(\pi_\kappa(G); \widetilde{D}_{\kappa_1}, \ldots, \widetilde{D}_{\kappa_h})}{\mathscr{H}(\pi_\kappa(G'); \widetilde{D}_{\kappa_1}, \ldots, \widetilde{D}_{\kappa_h})}$$

avec $c_{14} := \frac{(g+1)!(\dim \pi_\kappa(G'))!}{(\dim G'')!(\dim \pi_\kappa(G))!}$ et, d'autre part, on a

(1) $\dim \pi_\kappa(G) - \dim \pi_\kappa(G') = \operatorname{codim}_{G_0 \times G} G'' =: r''$,
(2) $\lambda'' := \operatorname{codim}_W W \cap t_{G''} \leqslant \operatorname{codim}_W W \cap t_{G'} = \lambda'$ (car $G' \subseteq G''$),
(3) $\operatorname{card}(\frac{\Sigma_q(S)+G''(\bar{k})}{G''(\bar{k})}) \leqslant \operatorname{card}(\frac{\Sigma_q(S)+G'(\bar{k})}{G'(\bar{k})})$.

L'inégalité (25) devient

$$\frac{T^{\lambda''} \operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_q(S)+G''(\bar{k})}{G''(\bar{k})}\right) \mathscr{H}(G''; \widetilde{D}_0, \ldots, \widetilde{D}_n)}{\mathscr{H}(G_0 \times G; \widetilde{D}_0, \ldots, \widetilde{D}_n)} \leqslant \frac{c_{13}}{c_{14}} x^{r''}. \tag{26}$$

En reprenant alors exactement les mêmes arguments que dans la première partie de la preuve et en remplaçant la constante 2^g par c_{13}/c_{14} (il faut observer que ce quotient est strictement plus petit que $4^g \prod_{i=1}^n \deg G_i$), on démontre que $t_{G''} + W \neq t_{G_0 \times G}$. L'inégalité (26) se lit alors en fonction de $A(G'')$ (en minorant T par $\widetilde{T}/2$) :

$$A(G'')^{r'' - \lambda''} \leqslant \left(\frac{2^{\lambda''} c_{13}}{c_{14} C_0}\right) x^{r''}. \tag{27}$$

Comme $C_0 > 2^g c_{13}/c_{14}$ et $x \leqslant 1$, cette inégalité implique $A(G'') \leqslant 1$ donc $x \leqslant B(G'') = A(G'')^{\frac{r''-\lambda''}{r''}}$, ce qui contredit (27). On vient donc de montrer que nécessairement $D_0' = D_0$, c.à-d. $D_0 \geqslant 1$. À quelques variantes près, la même preuve conduit encore à une contradiction. En effet, considérons $\pi_{0,\kappa}$ la projection $G_0 \times G \to G_0 \times \pi_\kappa(G)$ et posons

$$G^\star = \pi_{0,\kappa}(G') \times \prod_{m \notin \{\kappa_1,\dots,\kappa_h\}} G_m, \tag{28}$$

vu comme sous-groupe de $G_0 \times G$. Comme

$$\binom{\dim G'}{\dim \pi_{0,\kappa}(G')} \mathscr{H}\big(\pi_{0,\kappa}(G'); D_0, D_{\kappa_1}, \dots, D_{\kappa_h}\big) \leqslant \mathscr{H}\big(G'; D_0', \dots, D_n'\big), \tag{29}$$

un raisonnement similaire au précédent (à partir de l'inégalité (24)) conduit encore à une impossibilité à condition de remplacer $\pi_\kappa(G')$ par $\pi_{0,\kappa}(G')$ et G'' par $G^\star$ (dans les constantes c_{13} et c_{14} en particulier).

Conclusion. Dans tous les cas, l'existence de G' aboutit à une contradiction, ce qui démontre ainsi le lemme 3.7. □

3.6. *Poids de la droite affine*

Rappelons que $(P_{\lambda_0})_{\lambda_0 \in \{0,\dots,D_0\}}$ désigne une famille libre de polynômes en une variable (voir §3.3). Dans ce paragraphe, nous introduisons une quantité mi-arithmétique mi-analytique qui mesure l'influence du choix de cette famille sur les paramètres U_0 et U_1 des théorèmes 1.2 et 1.3. C'est ce que nous voulons évoquer par la terminologie « poids de $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ ».

Définition 3.8. Si v_0 est archimédienne, nous appelons *poids* de $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ relatif à la famille (P_{λ_0}), aux paramètres $(T, S, \mathfrak{e})$ et à la place v_0, la quantité

$$\begin{aligned} \aleph\big((P_{\lambda_0})\big) \;:= h\bigg(\bigg\{\frac{1}{t_0!}P_{\lambda_0}^{(t_0)}(s),\ 0 \leqslant \lambda_0 \leqslant D_0,\ 0 \leqslant s \leqslant S,\ 0 \leqslant t_0 \leqslant T\bigg\}\bigg) \\ + \frac{1}{D}\log \max_{\substack{0 \leqslant t_0 \leqslant T \\ |z| \leqslant \mathfrak{e}S}} \left|\frac{1}{t_0!}P_{\lambda_0}^{(t_0)}(z)\right|_{v_0}. \end{aligned}$$

Lorsque v_0 est ultramétrique, le poids de $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ (relatif à $(T, S, \mathfrak{r})$) est la quantité obtenue en remplaçant ci-dessus $\mathfrak{e}S$ (qui est en indice dans le dernier terme) par $\mathfrak{r}$.

Le poids de $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ est le terme résiduel qui provient de l'introduction même du groupe $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ dans la démonstration des théorèmes 1.2 et 1.3. Cet inconvénient s'avère largement compensé par au moins deux avantages que procure $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$. D'une part, il s'accompagne d'un paramètre D_0 qui facilite la construction du polynôme auxiliaire en rendant la condition de Siegel plus simple à satisfaire. D'autre part, il permet de modifier le point p en un point $q = (1, p)$ moins vulnérable aux phénomènes de torsion modulo des sous-groupes particuliers de $G_0 \times G$ (à commencer par le sous-groupe nul, q n'étant alors jamais de torsion). Cela est particulièrement important pour le lemme de multiplicité qui fait intervenir le cardinal du quotient $(\Sigma_q(S) + G'(\bar{k}))/G'(\bar{k})$, G' étant un sous-groupe algébrique de $\mathbb{G}_{\mathrm{a}} \times G$ (voir à cet égard le §3.5).

Pour minimiser ce poids, nous allons utiliser la famille des polynômes de Matveev, définie de la manière suivante. Soit $(\Delta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la famille des polynômes binomiaux définie par (9).

Définition 3.9. Étant donné $\lambda_0, D_0^\flat \in \mathbf{N}$, le polynôme de Matveev $\delta_{D_0^\flat}(X;\lambda_0)$ est $\Delta_{D_0^\flat}(X)^q\Delta_r(X)$ où les entiers q et r sont respectivement les quotient et reste de la division euclidienne de λ_0 par $D_0^\flat$.

Le degré de $\delta_{D_0^\flat}(X;\lambda_0)$ est λ_0. Par conséquent, lorsque $D_0^\flat$ est fixé, la famille $\delta_{D_0^\flat}(X;\lambda_0)$, $\lambda_0 = 0,\dots,D_0$, forme une base de $k[X]_{\leqslant D_0}$.

Lemme 3.10. *Il existe une constante absolue $c_{15}\geqslant 1$ pour laquelle nous disposons des estimations suivantes.*

- *Si v_0 est archimédienne alors*

$$\begin{aligned}&\aleph\big(\big(\delta_{D_0^\flat}(X;\lambda_0)\big)_{\lambda_0}\big)\\&\quad\leqslant c_{15}\left(D_0\log\left(e+\frac{S}{D_0^\flat}\right)+\min(D_0,T)D_0^\flat+\frac{D_0}{D}\log\left(1+\frac{\mathfrak{e}S}{D_0^\flat}\right)\right).\end{aligned}\tag{30}$$

- *Si v_0 est ultramétrique alors l'inégalité ci-dessus reste vraie en remplaçant le dernier terme par $\frac{D_0}{D}\log(\mathfrak{r})$.*

Dans le cas archimédien la démonstration de cette majoration découle des estimations sur les polynômes de Matveev qui sont données dans le livre de Waldschmidt [33], p. 269 et suivantes. Dans le cas ultramétrique, l'évaluation de la dérivée $\delta_{D_0^\flat}(X;\lambda_0,t_0)$ pour $t_0\leqslant T$ et $|z|\leqslant\mathfrak{r}$ repose sur la formule de Leibniz et l'existence d'une constante absolue $c_{16}>0$ telle que $|\lambda_0!|_{v_0}\geqslant c_{16}^{\lambda_0}$. Notons par ailleurs qu'en choisissant $D_0^\flat=1$ l'on retrouve une estimation du poids de la famille $(X^{\lambda_0})_{0\leqslant\lambda_0\leqslant D_0}$:

$$\aleph\big(\big(X^{\lambda_0}\big)\big)\leqslant c_{16}D_0\left(\log S+\frac{\log\mathfrak{e}}{D}\right)$$

(et $\mathfrak{r}$ à la place de $\mathfrak{e}$ dans le cas ultramétrique).

Remarque 3.11. Bien que tous les théorèmes énoncés reposent sur le même choix de la base $(P_i)_i$ (base des polynômes de Matveev en l'occurrence), il nous semble préférable de conserver une base indifférenciée jusqu'à la toute fin de la démonstration (§4.6). Outre une justification *a posteriori* du choix des paramètres, cela permet également d'obtenir d'une part des variantes d'énoncés à moindre frais et d'autre part une meilleure compréhension du rôle joué par ce facteur $\mathbb{G}_a$ supplémentaire au cours de la preuve, comme nous venons de le voir. Ce procédé a déjà été mis en œuvre (sous une forme très légèrement différente) par Waldschmidt (voir [33], pp. 477–480).

3.7. Lemme de Siegel absolu

Nous présentons un raffinement du lemme de Siegel absolu de Roy & Thunder [27], signalé par David et Philippon dans [12], et qui repose sur une inégalité de Zhang relative aux minima successifs d'une variété arithmétique.

Lemme 3.12. *Soit m un entier naturel $\geqslant 1$ et V un sous-espace vectoriel de $\overline{\mathbf{Q}}^{m+1}$, de dimension $d \geqslant 1$. Il existe une base $(v_1, \dots, v_d)$ de V telle que*

$$\sum_{i=1}^{d} h_{\mathrm{L}^2}(v_i) \leqslant h(\mathsf{V}) + d\log(d) \tag{31}$$

où $h(\mathsf{V})$ est la hauteur (logarithmique absolue) de Schmidt de V.

Le résultat précédemment cité de Roy & Thunder conduit à une majoration de ce type mais avec un terme linéaire en d^2 en lieu et place du $d\log(d)$. En fait l'argument de [12], remarque du §4.2, pp. 523–524, fournit un résultat un peu plus fort : pour tout nombre réel $\epsilon > 0$, il existe une base $(v_1, \dots, v_d)$ de V (qui dépend de cet ϵ) telle que

$$\sum_{i=1}^{d} h_{\mathrm{L}^2}(v_i) \leqslant h(\mathsf{V}) + \sum_{j=1}^{d-1}\sum_{i=1}^{j} \frac{1}{2i} + \epsilon. \tag{32}$$

4. Démonstrations des théorèmes 1.2 et 1.3

Nous fixons une fois pour toutes un corps de nombres K, qui contient k, de sorte que tous les nombres algébriques considérés au cours de la démonstration et qui, bien sûr, sont en nombre fini, sont inclus dans K. Il est commode d'introduire un tel corps pour les estimations locales de ces nombres algébriques.

Description de la preuve

La démarche suivie est assez classique et elle est commune aux deux théorèmes à démontrer. Il s'agit de construire un élément α de $K \setminus \{0\}$, de « petite » hauteur, et dont toutes les valeurs absolues v-adiques, pour v une place de K au-dessus de v_0, sont majorées par un terme linéaire en la distance $\mathrm{d}_{v_0}(u, V)$. De sorte que de la formule du produit appliquée à α se déduit une minoration de cette distance, ce qui est l'assertion des théorèmes 1.2 et 1.3. Comme cela est fréquent en transcendance, l'élément α en question provient d'un coefficient de Taylor d'une fonction de la forme $P \circ \exp_{(G_0\times G)(\mathbf{C}_{v_0})}$ restreinte à l'espace W. Dans cette expression, P est un polynôme construit au moyen du lemme de Siegel absolu énoncé dans le paragraphe précédent et $\exp_{(G_0\times G)(\mathbf{C}_{v_0})} := (\exp_{G_0(\mathbf{C}_{v_0})}, \exp_{v_0})$ désigne l'exponentielle (à valeurs dans l'espace multiprojectif $\mathbf{P}$) du groupe de Lie $(G_0 \times G)(\mathbf{C}_{v_0})$.

4.1. Choix des paramètres

Dans ce paragraphe, nous précisons toutes ces données pour la démonstration proprement dite des théorèmes 1.2 et 1.3. Cependant les choix que nous dévoilons ici ne seront véritablement utilisés qu'à l'étape « Extrapolation » (§4.5) *via* les lemmes 4.1 et 4.2 qui vont suivre. Posons

$$\Upsilon := \left\{(s,\mathbf{t}) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^{\dim W};\ 0 \leqslant s \leqslant S_0 \text{ et } |\mathbf{t}| \leqslant 2(g+1)T\right\}.$$

Dans un souci de clarté, nous distinguons les choix selon que v_0 est une place archimédienne ou ultramétrique.

4.1.1. v_0 archimédienne

Rappelons que $\mathfrak{a}$ désigne un entier supérieur ou égal à $D\max\{1,h(V)\}/\log\mathfrak{e}$. Le paramètre C_0 est une constante suffisamment grande par rapport à toutes les constantes c_i qui interviendront dans la suite. Posons alors $S_0 := C_0^3\mathfrak{a}$, $S := C_0^6\mathfrak{a}$,

$$\begin{aligned} U\ &:= C_0^{25g}(\mathfrak{a}\log\mathfrak{e})\left(\mathfrak{a}^y + \frac{D}{\log\mathfrak{e}}\log\left(e+\frac{D}{\log\mathfrak{e}}\right)\right)^{1/t} \\ &\quad\times \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{D\max_{0\leqslant s\leqslant (g+1)C_0^6\mathfrak{a}}\{h(sp_i)\} + (\mathfrak{e}\mathfrak{a}\|u_i\|_{v_0})^{\rho_i}}{\mathfrak{a}\log\mathfrak{e}}\right)^{g_i/t} \end{aligned}$$

(il s'agit essentiellement de $C_0^{25g}U_0$ mais où la constante « indéfinie » c_4 qui est en indice du $\max\{h(sp_i)\}$ dans U_0 est remplacée par $(g+1)C_0^6$),

$$\widetilde{T} := \frac{C_0U}{S_0\log\mathfrak{e}}, \qquad T := [\widetilde{T}],$$

$$\widetilde{D}_i := \frac{U}{C_0^2(D\max_{0\leqslant s\leqslant (g+1)S}\{h(sp_i)\} + (\mathfrak{e}S\|u_i\|_{v_0})^{\rho_i} + S_0\log\mathfrak{e})}$$

si $1 \leqslant i \leqslant n$. Soit également

$$D_0^\flat := \left[\frac{S_0\log\mathfrak{e}}{DC_0^3}\right] \quad \text{et} \quad \widetilde{D}_0 := \frac{U}{C_0^4(D\log(e+\frac{D}{\log\mathfrak{e}}) + S_0^y\log\mathfrak{e})}.$$

La définition 3.2 introduit un nombre réel $x > 0$ et l'on note $D_i := [x\widetilde{D}_i]$, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$. Considérons alors pour (P_{λ_0}) la famille des polynômes de Matveev

$$\left(\delta_{D_0^\flat}(X;\lambda_0)\right)_{0\leqslant\lambda_0\leqslant D_0}$$

définie au §3.6.

Voici résumées en quelques lignes les principales conditions que satisfont ces paramètres.

Lemme 4.1. *On a*

① $\widetilde{T} \geqslant C_0^2$, $S/S_0 \geqslant C_0^2$, $S_0 \geqslant C_0^2$,

② $\widetilde{T} \geqslant C_0 \max\{\widetilde{D}_0/(S+1)^{1-y}, \widetilde{D}_1, \ldots, \widetilde{D}_n\}$,
③ $\widetilde{T}^{g-t+1}(S+1) \leqslant C_0 \widetilde{D}_0 \widetilde{D}_1^{g_1} \cdots \widetilde{D}_n^{g_n}$,
④ $U \geqslant C_0^{3/2} D\aleph((P_{\lambda_0}))$,
⑤ $S_0 \log \mathfrak{e} \geqslant C_0^3 D \max\{1, h(V)\}$,
⑥ $U \geqslant C_0^2 D_i (D \max_{0 \leqslant s \leqslant (g+1)S}\{h(sp_i)\} + (\mathfrak{e}S\|u_i\|_{v_0})^{\rho_i})$ *pour tout* $1 \leqslant i \leqslant n$.

Démonstration. Les points ① et ② découlent immédiatement de la définition des paramètres. L'inégalité ③ correspond précisément à la définition de U_0 à une constante près. La condition ④ découle du lemme 3.10 et les points ⑤ et ⑥ sont évidents à partir des définitions de $\mathfrak{a}$ et des $\widetilde{D}_i$. □

Accessoirement, on pourra aussi noter que $U \geqslant C_0^2 D \log(D_0 S)$. La condition ③ et le lemme 3.3 avec $H_1 = \{0\}$ impliquent $x \leqslant 1$.

4.1.2. v_0 ultramétrique

Reprenons les notations $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{a}$ du théorème 1.3. Posons $S_0 := C_0^3 \mathfrak{a}$, $S := C_0^6 \mathfrak{a}$,

$$U := C_0^{25g}(\mathfrak{a}\log\mathfrak{r})\left(\mathfrak{a}^y + \frac{D}{\log\mathfrak{r}}\log\left(e + \frac{D}{\log\mathfrak{r}}\right)\right)^{1/t} \times \prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{D\max_{0\leqslant s\leqslant (g+1)C_0^6\mathfrak{a}}\{h(sp_i)\}}{\mathfrak{a}\log\mathfrak{r}}\right)^{g_i/t},$$

puis $\widetilde{T} := C_0 U/(S_0 \log \mathfrak{r})$, $T := [\widetilde{T}]$ et

$$\widetilde{D}_i := \frac{U}{C_0^2(D\max_{s\leqslant(g+1)S}\{h(sp_i)\} + S_0\log\mathfrak{r})} \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Soit

$$D_0^\flat := \left[\frac{S_0\log\mathfrak{r}}{C_0^3 D}\right] \quad \text{et} \quad \widetilde{D}_0 := \frac{U}{C_0^4(D\log(e + \frac{D}{\log\mathfrak{r}}) + S_0^y\log\mathfrak{r})}.$$

Ensuite, comme dans le cas archimédien, nous prenons le nombre réel $x > 0$ de la définition 3.2 (p. 231), nous formons les entiers $D_i := [x\widetilde{D}_i]$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, et la famille (P_{λ_0}) est la même que celle du cas archimédien.

Les conditions remplies par ces paramètres sont les conditions ①, ②, ③ du lemme 4.1 (en particulier, on a $x \leqslant 1$) et celles apportées par le lemme suivant.

Lemme 4.2. *On a*

❹ $U \geqslant C_0^{3/2} D\aleph((P_{\lambda_0}))$,
❺ $S_0 \log\mathfrak{r} \geqslant C_0(D\max\{1, h(V)\} + \log S_0)$,
❻ $U \geqslant C_0^2 D D_i \max_{s\leqslant(g+1)S}\{h(sp_i)\}$.

Démonstration. Ces trois inégalités sont faciles à vérifier à partir du choix des paramètres, la première, par exemple, étant une conséquence de la majoration

$$\aleph\big((P_{\lambda_0})\big) \leqslant c_{15}\left(D_0 \log\left(e + \frac{S}{D_0^\flat}\right) + T D_0^\flat + \frac{D_0 \log \mathfrak{r}}{D}\right)$$

induite par le lemme 3.10. □

Remarques 4.3.

(1) La présence du logarithme de S_0 dans la condition ❺, présence qui sera requise lors de l'extrapolation p-adique,[6] explique la modification du paramètre $\mathfrak{a}$ par rapport au cas archimédien, avec l'ajout du terme

$$\frac{\log^+((\log(\mathfrak{r}))^{-1})}{\log(\mathfrak{r})}.$$

(2) Il est facile de vérifier qu'avec ces choix les hypothèses du lemme 3.6 sont satisfaites et, par conséquent, qu'au moins un des entiers $D_1, \ldots, D_n$ est non nul. En revanche, bien que $\widetilde{D}_0$ soit clairement supérieur à 1, il se pourrait que D_0 soit nul.[7] Cela n'a (paradoxalement) aucune conséquence dans la suite de la démonstration.

(3) Lorsque dans la preuve on choisit de mettre sur la partie $\mathbb{G}_a$ la base des monômes usuels, cela remplace le terme $\mathfrak{a}^y + \frac{D}{\log \mathfrak{e}} \log(e + D/\log \mathfrak{e})$ qui est dans U par $\mathfrak{a}^y + \frac{D \log \mathfrak{a}}{\log \mathfrak{e}}$. Cela rajoute donc une dépendance supplémentaire en le logarithme de la hauteur du sous-espace V.

4.1.3. Choix d'une base de W

Soit w_0 la base canonique de $t_{\mathbb{G}_a}$ et $(w_1, \ldots, w_{g-t})$ une base de $V \otimes \overline{\mathbf{Q}}$ fournie par le lemme 3.12 (l'espace $V \otimes \overline{\mathbf{Q}}$ étant identifié à un sous-espace de $\overline{\mathbf{Q}}^g$ *via* la base $\mathbf{e}$ de t_G introduite au §1.1). Par définition, nous avons $\|w_0\|_v = 1$ pour toute place v de K et $h_{\mathrm{L}^2}(w_1) + \cdots + h_{\mathrm{L}^2}(w_{g-t}) \leqslant h(V) + g\log(g)$. Nous supposerons que ces vecteurs sont définis sur K (voir préambule) et que chacune des normes $\|w_j\|_v$ avec $j \in \{1, \ldots, g-t\}$ et v une place de K au-dessus de v_0 est supérieure ou égale à 1. Cela est toujours possible quitte à multiplier w_i par un nombre rationnel convenable et à utiliser l'invariance par homothétie des hauteurs L^2. De cette manière, nous fixons une base $\mathbf{w} := (w_0, \ldots, w_{g-t})$ de W. Tous les énoncés qui vont suivre jusqu'à la fin du §4.4 restent vrais avec une base quelconque de W.

4.2. Estimations ultramétriques d'un coefficient de Taylor

Dans tout ce paragraphe, v désigne une place ultramétrique du corps de nombres K et p la caractéristique résiduelle de v.

4.2.1. Nous rappelons la notion de *taille d'un sous-schéma formel lisse* telle qu'elle a été définie par Bost au §3.1 de [8]. Rappelons qu'au §1.1, nous avons introduit un modèle lisse

[6] Voir le lemme 4.21 et en particulier le réel κ.

[7] Je ne sais pas si cette éventualité peut se produire.

$\mathcal{G} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_k[\frac{1}{m}]$ de G. De la sorte, si v ne divise pas m, nous pouvons considérer le complété formel $\widehat{\mathcal{G}}_v$ de $\mathcal{G} \times \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_v)$ à l'origine ($\mathcal{O}_v$ étant l'anneau de valuation du complété K_v). C'est un groupe formel lisse sur $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_v)$ et le choix de coordonnées locales étales au voisinage de l'origine fournit un isomorphisme de schémas formels (sur $\mathcal{O}_v$)

$$\widehat{\mathcal{G}}_v \simeq \widehat{\mathbf{A}}^g_{\mathcal{O}_v} := \operatorname{Specf} \mathcal{O}_v[\![X_1, \ldots, X_g]\!].$$

Si $\mathfrak{X}$ est un sous-schéma formel lisse de $\widehat{G}_{K_v} \simeq \widehat{\mathcal{G}}_v \mathbin{\widehat{\otimes}} \operatorname{Spec} K_v$, on dispose d'un nombre réel $R_{\mathcal{G},v}(\mathfrak{X}) \in [0,1]$, appelé *taille de $\mathfrak{X}$ relativement au modèle $\widehat{\mathcal{G}}_v$ de $\widehat{G}_{K_v}$*, défini de la manière suivante. Considérons l'image de $\mathfrak{X}$ (notée encore $\mathfrak{X}$) dans $\widehat{\mathbf{A}}^g_{K_v}$ *via* le choix de coordonnées précédent. Le groupe $\operatorname{Aut}(\widehat{\mathbf{A}}^g_{K_v})$ des automorphismes de $\widehat{\mathbf{A}}^g_{K_v}$ s'identifie à l'ensemble des g-uplets de séries formelles $f = (f_1, \ldots, f_g) \in K_v[\![X_1, \ldots, X_g]\!]^g$ tels que $f(0) = 0$ et la matrice jacobienne $\mathrm{D}_0 f = (\partial f_i / \partial x_j(0))_{i,j}$ soit inversible. Pour $\varphi = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{N}^g} a_{\mathbf{n}} \mathbf{X}^{\mathbf{n}} \in K_v[\![\mathbf{X}]\!]$ et $r > 0$, on note

$$\|\varphi\|_r := \sup_{\mathbf{n} \in \mathbf{N}^g} |a_{\mathbf{n}}|_v r^{|\mathbf{n}|} \in [0, +\infty]$$

et

$$G_\omega(r) := \Big\{ f \in \operatorname{Aut}\big(\widehat{\mathbf{A}}^g_{K_v}\big);\ \mathrm{D}_0 f \in \mathrm{GL}_g(\mathcal{O}_v) \text{ et } \|f\|_r := \max_{1 \leqslant i \leqslant g} \|f_i\|_r \leqslant r \Big\}.$$

Alors, par définition, la taille de $\mathfrak{X}$ est

$$R_{\mathcal{G},v}(\mathfrak{X}) := \sup\big\{ r \in \,]0,1];\ \exists f \in G_\omega(r);\ f^*(\mathfrak{X}) = \widehat{\mathbf{A}}^d_{K_v} \times \{0\} \big\}$$

où $d := \dim \mathfrak{X}$. La borne supérieure est prise dans $[0,1]$, ainsi $R_{\mathcal{G},v}(\mathfrak{X}) = 0$ si l'ensemble précédent est vide. Dans cette écriture, $f^*(\mathfrak{X})$ désigne l'image inverse de $\mathfrak{X}$ par f. Le nombre $R_{\mathcal{G},v}(\mathfrak{X})$ est strictement positif lorsque $\mathfrak{X}$ est analytique. Observons également que si $\mathfrak{X}$ provient d'un sous-schéma de $\mathcal{G} \times \operatorname{Spec} \mathcal{O}_v$, lisse le long de l'origine, alors $R_{\mathcal{G},v}(\mathfrak{X}) = 1$. Lorsque cette dernière condition de lissité n'est pas remplie, nous disposons néanmoins d'une estimation un peu meilleure que seulement $R_{\mathcal{G},v}(\mathfrak{X}) \geqslant 0$. Supposons que $\mathfrak{X}$ est le complété formel le long de l'origine d'un sous-groupe algébrique de G_{K_v}. Rappelons que le groupe formel $\widehat{\mathcal{G}}_v$ possède une exponentielle formelle qui, en termes des coordonnées X_i, s'écrit comme un g-uplet $\mathbf{E} = (E_1(\mathbf{X}), \ldots, E_g(\mathbf{X}))$ de séries formelles de $K_v[\![\mathbf{X}]\!]$, telles que les coefficients de $\mathbf{X}^{\mathbf{n}}$ ($\mathbf{n} \in \mathbf{N}^g$) de $E_1, \ldots, E_g$ sont de la forme $\alpha_{\mathbf{n}}/\mathbf{n}!$ avec $\alpha_{\mathbf{n}} \in \mathcal{O}_v$. On peut normaliser cette exponentielle de sorte que la différentielle à l'origine $\mathrm{D}_0\mathbf{E}$ soit l'identité. Soit $r_p = |p|_v^{1/(p-1)}$ (déjà introduit p. 224). Le g-uplet $\mathbf{E}$ est un élément de $G_\omega(r_p)$ puisque $|\mathbf{n}!|_v \geqslant r_p^{|\mathbf{n}|-1}$. Au moyen de cette application exponentielle, il est alors aisé de construire un automorphisme $f \in G_\omega(r_p)$ tel que $f^*(\mathfrak{X}) = \widehat{\mathbf{A}}^d_{K_v} \times \{0\}$. Ce qui entraîne la minoration $R_{\mathcal{G},v}(\mathfrak{X}) \geqslant r_p$ (pour toute place $v \nmid m$). Toutefois cette estimation n'est vraiment utile qu'en un nombre fini de places v puisque le produit infini $\prod_p r_p$ diverge.

Revenons au cas d'un sous-schéma formel lisse $\mathfrak{X}$ quelconque de $\widehat{G}_{K_v}$. L'espace tangent à l'origine $t_{\mathfrak{X}}$ de $\mathfrak{X}$ est muni d'une structure entière en considérant le module

$$t_{\mathfrak{X}} \cap t_{\mathcal{G}_v} = \big\{ z \in t_{\mathfrak{X}} \subseteq t_G(K_v);\ \|z\|_v \leqslant 1 \big\}$$

sur l'anneau $\mathcal{O}_v$, ce qui confère à l'espace dual $t_{\mathfrak{X}}^{\vee}$ puis à l'espace symétrique $S^{\ell}(t_{\mathfrak{X}}^{\vee})$ de degré $\ell \in \mathbf{N}$ une norme notée $\|\cdot\|_{S^{\ell}(t_{\mathfrak{X}}^{\vee})}$.

Ces définitions conduisent alors au lemme suivant.

Lemme 4.4. *(Lemme 3.3 de [8].) Soit $\ell \in \mathbf{N}$, Ω un sous-schéma ouvert de $\mathcal{G}_v$ contenant la section nulle et s une fonction régulière sur Ω telle que s_{K_v} s'annule ainsi que ses dérivées d'ordre $< \ell$ le long de $\mathfrak{X}$ en l'élément neutre de G_{K_v}. Alors le jet $\mathrm{j}_{\mathfrak{X}}^{\ell} s$ d'ordre ℓ le long de $\mathfrak{X}$ en 0 — vu comme élément de $S^{\ell}(t_{\mathfrak{X}})^{\vee}$ [8] — vérifie*

$$\left\|\mathrm{j}_{\mathfrak{X}}^{\ell} s\right\|_{S^{\ell}(t_{\mathfrak{X}})^{\vee}} \leqslant R_{\mathcal{G},v}(\mathfrak{X})^{-\ell}. \tag{33}$$

Soit $\widehat{H}_v$ le complété formel à l'origine du schéma $H \times \operatorname{Spec} K_v$. C'est un sous-schéma formel lisse de $\widehat{G}_{K_v}$. Soit $P = \sum_{\boldsymbol{\lambda}} p_{\boldsymbol{\lambda}} \mathbf{X}^{\boldsymbol{\lambda}}$ un polynôme de $K_v[\mathbf{P}^{N_1} \times \cdots \times \mathbf{P}^{N_n}]$. Soit $p_{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}}$ un coefficient de P pour lequel $|p_{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}}|_v = \max_{\boldsymbol{\lambda}}\{|p_{\boldsymbol{\lambda}}|_v\}$. En appliquant le lemme à la section de $\mathcal{O}_{\mathcal{G}_v}$ définie par $(P/p_{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}}) \circ \exp_v$ au voisinage de 0 et $\mathfrak{X} = \widehat{H}_v$, nous obtenons le

Corollaire 4.5. *Soit ℓ un entier non nul et P le polynôme ci-dessus. Supposons que les dérivées $\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}}(P \circ \exp_v)(0)$ soient toutes nulles lorsque $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{N}^{\dim V}$ vérifie $|\boldsymbol{\tau}| < \ell$. Supposons également que v ne divise pas m. Alors la valeur absolue v-adique du coefficient de Taylor*

$$\frac{\mathcal{D}_{w_1}^{\tau_1} \cdots \mathcal{D}_{w_{g-t}}^{\tau_{g-t}}}{\tau_1! \cdots \tau_{g-t}!}\big(P \circ \exp_v(z)\big)\Big|_{z=0}, \tag{34}$$

pour $(\tau_1, \ldots, \tau_{g-t}) \in \mathbf{N}^{\dim V}$ de longueur ℓ, est majorée par

$$R_{\mathcal{G},v}(\widehat{H}_v)^{-\ell} \max_{\boldsymbol{\lambda}}\big\{|p_{\boldsymbol{\lambda}}|_v\big\} \prod_{i=1}^{g-t} \|w_i\|_v^{\tau_i}.$$

Désignons par χ_H la somme finie

$$\chi_H := \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \sum_{\substack{v \nmid m \\ v \text{ ultramétrique}}} [K_v:\mathbf{Q}_p] \log R_{\mathcal{G},v}(\widehat{H}_v)^{-1} \in \mathbf{R}^{+}. \tag{35}$$

Nous disposons d'une estimation *uniforme* de χ_H qui nous a été signalée par J.-B. Bost.

Lemme 4.6. *Il existe une constante $c_{17} \geqslant 1$ ne dépendant que de G (en particulier indépendante du corps K et du groupe H) telle que $\chi_H \leqslant c_{17}$.*

Ce résultat est une conséquence du théorème suivant de Raynaud.

[8] C'est-à-dire, si l'on écrit $s(x) = F(z).s_0(x)$ où $x = \exp_v(z)$ et F analytique dans un voisinage de 0 de $t_G(\mathbf{C}_v)$, on a $\mathrm{j}_{\mathfrak{X}}^{\ell} s = \mathrm{jet}_{t_{\mathfrak{X}}}^{\ell} F(0).s_0$.

Théorème 4.7. *(Corollaire du théorème 4 §7.5, de [6], p. 187.) Soit k_0 un corps de nombres et $A_1 \subseteq A_2$ deux variétés abéliennes sur k_0. Soit $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ leurs modèles de Néron respectifs sur $\mathcal{O}_{k_0}$. Soit v une place finie de k_0, de caractéristique résiduelle p et d'indice de ramification $e((k_0)_v \mid \mathbf{Q}_p)$.*[9] *Si $e((k_0)_v \mid \mathbf{Q}_p) < p-1$ et si $\mathcal{A}_2$ a bonne réduction en v alors $\mathcal{A}_1$ a bonne réduction en v et l'unique morphisme $\mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ issu de la propriété de modèle de Néron de $\mathcal{A}_2$ est une immersion fermée.*

Lemme 4.8. *Soit G_1 un sous-groupe algébrique connexe de $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}^{d_0} \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{d_1}$, défini sur un corps de nombres k_0. Il existe un sous-schéma en groupes $\mathcal{G}_1 \hookrightarrow \mathbb{G}_{\mathrm{a},\mathcal{O}_{k_0}}^{d_0} \times \mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathcal{O}_{k_0}}^{d_1}$, lisse sur* $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{k_0}$ *et de fibre générique G_1.*

Démonstration. Par décomposition, il suffit de traiter les cas $G_1 \subseteq \mathbb{G}_{\mathrm{a}}^{d_0}$ et $G_1 \subseteq \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{d_1}$. Dans le premier cas, on choisit le fibré vectoriel $\mathbf{V}((t_{G_1}(k_0) \cap \mathcal{O}_{k_0}^{d_0})^{\vee})$. Dans le second cas, il existe un sous-groupe facteur direct Φ de $\mathbf{Z}^{d_1}$ tel que, si $M := \mathbf{Z}^{d_1}/\Phi$ et si $\mathbf{Z}[M]$ est la $\mathbf{Z}$-algèbre engendrée par M, on a $G_1 = \operatorname{Spec} \mathbf{Z}[M] \times_{\operatorname{Spec} \mathbf{Z}} \operatorname{Spec} k_0$. On choisit $\mathcal{G}_1 := \operatorname{Spec} \mathbf{Z}[M] \times_{\operatorname{Spec} \mathbf{Z}} \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{k_0}$, qui est lisse sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{k_0}$ car M est sans torsion. □

Démonstration du lemme 4.6. Le groupe algébrique G est connexe par hypothèse. D'après le théorème de décomposition de Chevalley, et après une éventuelle extension finie du corps de nombres de définition k_0 de G, il existe des entiers naturels d_0 et d_1 et une variété abélienne A, définie sur k_0, tels que G soit une extension du groupe linéaire $G_0 := \mathbb{G}_{\mathrm{a},k_0}^{d_0} \times \mathbb{G}_{\mathrm{m},k_0}^{d_1}$ par A. Le sous-groupe H de G est alors une extension d'un sous-groupe algébrique (connexe) G_1 de G_0 par une sous-variété abélienne B de A. Soit $\mathcal{G}_0$ (*resp.* $\mathcal{A}$) le schéma en groupes $\mathbb{G}_{\mathrm{a},\mathcal{O}_{k_0}}^{d_0} \times \mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathcal{O}_{k_0}}^{d_1}$ (*resp.* le modèle de Néron de A sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{k_0}$). De même, soit $\mathcal{G}_1 \hookrightarrow \mathcal{G}_0$ le modèle lisse de G_1 donné par le lemme 4.8 et soit $\mathcal{B}$ le modèle de Néron de B. Il existe un ensemble fini F de places ultramétriques de k_0 (qui ne dépend pas de H) tel que, si $v \notin F$, les propriétés suivantes sont vérifiées :

(1) La suite $0 \to \mathcal{G}_{0,v} \to \mathcal{G}_v \to \mathcal{A}_v \to 0$ est exacte (l'indice v signifie que nous avons considéré le produit fibré avec $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_v$).
(2) Le schéma $\mathcal{B}_v$ est un sous-schéma abélien de $\mathcal{A}_v$.

Cette seconde assertion découle du théorème 4.7 : elle n'est pas satisfaite seulement si v est une place de mauvaise réduction pour $\mathcal{A}$ ou si la caractéristique résiduelle p de v est plus petite que $e((k_0)_v \mid \mathbf{Q}_p) + 1$, quantité elle-même inférieure à $[k_0 : \mathbf{Q}] + 1$ (nombre fini de telles places).

Soit $v \notin F$. Posons $d := d_0 + d_1$ et $h := \dim A$. On choisit des coordonnées locales $x_1, \ldots, x_d$ (*resp.* $y_1, \ldots, y_h$) sur $\mathcal{G}_{0,v}$ (*resp.* $\mathcal{A}_v$) étales en l'origine, telles que $x_1, \ldots, x_{\dim G_1}$ (*resp.* $y_1, \ldots, y_{\dim B}$) soient des coordonnées locales de $\mathcal{G}_{1,v}$ (*resp.* $\mathcal{B}_v$) (critère de Jacobi, voir la proposition du chapitre 2 de [6]). On obtient ainsi un système de coordonnées locales étales qui paramétrisent $H_v := H \times \operatorname{Spec}(k_0)_v$ au voisinage de l'origine, et qui, relativement à $(x_1, \ldots, y_h)$, est de taille 1. Ainsi, pour $v \notin F$, on a $R_{\mathcal{G},v}(\widehat{H_v}) = 1$. En les autres places, on utilise la minoration $R_{\mathcal{G},v}(\widehat{H_v}) \geqslant |p|_v^{1/(p-1)}$ évoquée un peu plus haut. Pour conclure il suffit d'observer que χ_H

[9] De la sorte, si ϖ est une uniformisante de l'anneau de valuation $\mathcal{O}_v \subseteq (k_0)_v$, l'idéal engendré par p est $(\varpi)^{e((k_0)_v \mid \mathbf{Q}_p)}$.

est inférieur à une expression du même type où le corps K est remplacé par k_0 et v parcourant les places ultramétriques de k_0 qui ne divisent pas m. L'existence de la constante c_{17} s'ensuit. $\square$

Remarque 4.9. En réalité, il n'est pas nécessaire d'avoir une estimation aussi fine de χ_H pour démontrer les théorèmes 1.2 et 1.3. Lorsque nous laissons χ_H « indéterminé » (ce que nous ferons dans la suite), nous constatons qu'il apparaît dans le facteur $\max\{1, h(V)\}$ (intervenant dans le paramètre $\mathfrak{a}$), qui devient alors $\max\{1, h(V), \chi_H\}$. Autrement dit, il suffirait de montrer l'existence d'une constante c_{18} telle que $\chi_H \leqslant c_{18} \max\{1, h(V)\}$ pour obtenir *exactement* les mêmes énoncés que les théorèmes 1.2 et 1.3. Et cela est possible de manière élémentaire sans avoir recours au résultat de Raynaud. La démarche consiste à se ramener comme ci-dessus au cas abélien puis à comparer la structure entière sur t_B donnée par le modèle de Néron $\mathcal{B}$ de B et celle donnée par le module saturé $t_B \cap t_{\mathcal{A}}$, à partir duquel se calcule la norme des jets le long de t_B. Le calcul du quotient $(t_B \cap t_{\mathcal{A}})/t_{\mathcal{B}}$ (voir, par exemple, p. 33 de [7]) fournit alors une constante c_{19} telle que $\chi_H \leqslant c_{19} \max\{1, \log \deg B\}$ où le degré est relatif à un plongement (quelconque) de A dans un espace projectif. Il ne reste plus qu'à observer que $\log \deg B$ est du même ordre de grandeur que la hauteur de t_B (voir, par exemple, le lemme 4.8 de [16]), elle-même majorée par $c_{20} \max\{1, h(V)\}$ pour une certaine constante c_{20}.

4.2.2. Avant de passer aux estimations archimédiennes, nous aurons besoin d'une conséquence (qui en est aussi une généralisation en quelque sorte) du corollaire 4.5. Soit maintenant P un polynôme de l'espace E, considéré au §3.3 et $F := P \circ \exp_{(G_0 \times G)(\mathbf{C}_{v_0})}$ l'application associée à P en la place v_0, définie par (14). Soit $\ell \in \mathbf{N}$, z un vecteur de $\mathscr{T}_{v_0}$ d'exponentielle K-rationnelle et z_0 un élément de $t_{G_0}(K) \simeq K$ (le corps K est plongé dans K_{v_0}). Dans l'énoncé qui va suivre, nous supposerons que F s'annule à l'ordre ℓ le long de W au point (z_0, z), ou, en d'autres termes :

$$\forall \mathbf{i} = (i_0, \ldots, i_{g-t}) \in \mathbf{N}^{\dim W}, \ |\mathbf{i}| \leqslant \ell - 1, \quad \mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{i}} F(z_0, z) = 0 \tag{36}$$

(si $\ell = 0$ cette condition est vide). Pour chaque entier $i \in \{1, \ldots, n\}$, nous fixons un entier ε_i de l'ensemble $\{0, \ldots, N_i\}$ pour lequel $\theta_{v_0, i, \varepsilon_i}(z) \neq 0$.

Lemme 4.10. *Dans ces conditions, étant donné un multiplet $(\tau_0, \ldots, \tau_{g-t})$ de longueur ℓ, le coefficient de Taylor tordu*

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^n \theta_{v_0, i, \varepsilon_i}(z)^{D_i}} \frac{\mathcal{D}_{w_0}^{\tau_0} \cdots \mathcal{D}_{w_{g-t}}^{\tau_{g-t}}}{\tau_0! \cdots \tau_{g-t}!} F(z_0, z), \tag{37}$$

appartient à K.

Démonstration. Nous allons utiliser les formules de translations sur le groupe algébrique $G(K_{v_0})$ pour nous ramener en 0.[10] Soit $\widetilde{Q}$ le polynôme défini par

$$\widetilde{Q}(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}} p_{\boldsymbol{\lambda}} \frac{P_{\lambda_0}^{(\tau_0)}(z_0)}{\tau_0!} \prod_{i=1}^n A^{(i)} \big(\Psi_{v_0, i, \varepsilon_i}(z), \mathbf{X}_i\big)^{\lambda_i} \tag{38}$$

[10] Il s'agit de « l'astuce d'Anderson-Baker-Coates » (voir, par exemple, la démonstration du lemme 13 de [15]).

où $(A^{(i)})_{i=1\dots n}$ sont les multiplets de polynômes représentant les formules d'addition sur $G_{K_{v_0}}$ au voisinage de $x = \exp_{v_0}(z)$ (voir §3.1). La formule de Leibniz et l'hypothèse (36) montrent que le coefficient (37) égale

$$\frac{\mathcal{D}_{w_0}^{\tau_0}\cdots\mathcal{D}_{w_{g-t}}^{\tau_{g-t}}}{\tau_0!\cdots\tau_{g-t}!}\left(\frac{F(z_0+z_0', z+z')}{\prod_{i=1}^n \theta_{v_0,i,\varepsilon_i}(z+z')^{D_i}}\right)\bigg|_{(z_0',z')=(0,0)}. \tag{39}$$

Or, par définition,

$$\frac{\theta_{v_0,i,j}(z+z')}{\theta_{v_0,i,\varepsilon_i}(z+z')} = \frac{A_j^{(i)}(\Psi_{v_0,i,\varepsilon_i}(z), \Theta_{v_0,i}(z'))}{A_{\varepsilon_i}^{(i)}(\Psi_{v_0,i,\varepsilon_i}(z), \Theta_{v_0,i}(z'))}$$

pour z' proche de 0, donc

$$\frac{F(z_0+z_0', z+z')}{\prod_{i=1}^n \theta_{v_0,i,\varepsilon_i}(z+z')^{D_i}} = \left(\sum_{\boldsymbol{\lambda}} p_{\boldsymbol{\lambda}} P_{\lambda_0}\big(z_0+z_0'\big)\prod_{i=1}^n A^{(i)}\big(\Psi_{v_0,i,\varepsilon_i}(z), \Theta_{v_0,i}(z')\big)^{\lambda_i}\right) \times \frac{1}{\prod_{i=1}^n A_{\varepsilon_i}^{(i)}(\Psi_{v_0,i,\varepsilon_i}(z), \Theta_{v_0,i}(z'))^{D_i}}.$$

En dérivant par rapport à z_0', on a

$$\frac{\mathcal{D}_{w_0}^{\tau_0}}{\tau_0!}\left(\frac{F(z_0+z_0', z+z')}{\prod_{i=1}^n \theta_{v_0,i,\varepsilon_i}(z+z')^{D_i}}\right)\bigg|_{z_0'=0} = \frac{F_{\widetilde{Q},v_0}(z')}{\prod_{i=1}^n A_{\varepsilon_i}^{(i)}(\Psi_{v_0,i,\varepsilon_i}(z), \Theta_{v_0,i}(z'))^{D_i}}.$$

Cette égalité implique en particulier que les dérivées $\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{i}} F_{\widetilde{Q},v_0}(0)$ pour $|\mathbf{i}| < \ell - \tau_0$ sont toutes nulles. En appliquant alors l'opérateur

$$\mathcal{D}_{w_1}^{\tau_1}\cdots\mathcal{D}_{w_{g-t}}^{\tau_{g-t}}/(\tau_1!\cdots\tau_{g-t}!)$$

aux deux membres puis, à nouveau, la formule de Leibniz pour le second, on déduit l'égalité

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\prod_{i=1}^n \theta_{v_0,i,\varepsilon_i}(z)^{D_i}}\frac{\mathcal{D}_{w_0}^{\tau_0}\cdots\mathcal{D}_{w_{g-t}}^{\tau_{g-t}}}{\tau_0!\cdots\tau_{g-t}!}F_{P,v_0}(z_0,z)\\ &\quad= \frac{1}{\prod_{i=1}^n (A_{\varepsilon_i}^{(i)}(\Psi_{v_0,i,\varepsilon_i}(z), (1:0:\cdots:0)))^{D_i}}\frac{\mathcal{D}_{w_1}^{\tau_1}\cdots\mathcal{D}_{w_{g-t}}^{\tau_{g-t}}}{\tau_1!\cdots\tau_{g-t}!}F_{\widetilde{Q},v_0}(0).\end{aligned} \tag{40}$$

Maintenant, par choix de z, chacune des coordonnées de $\Psi_{v_0,i,\varepsilon_i}(z)$ appartient à K, ainsi bien sûr que les coefficients des polynômes $A_{\varepsilon_i}^{(i)}$ et des polynômes des formules différentielles vérifiées par les $\theta_{v_0,i,j}$ en 0 (rappelons que $\Theta_{v_0,i}(0) = (1, 0, \dots, 0)$). Par suite, le membre de droite de (40) est clairement un élément de K, ce qui démontre le lemme. □

En chemin, nous avons montré que le polynôme $\widetilde{Q}$ satisfaisait aux hypothèses du corollaire 4.5. De l'égalité (40) et d'une estimation immédiate des coefficients de $\widetilde{Q}$ découle alors la

Proposition 4.11. *Avec les notations et hypothèses ci-dessus et si $v \nmid m$, la valeur absolue v-adique du coefficient* (37) *est majorée par*

$$\max\{|p_{\boldsymbol{\lambda}}|_v\}\prod_{i=1}^{n}\max_{0\leqslant j\leqslant N_i}\left\{\left|\frac{\theta_{v_0,i,j}}{\theta_{v_0,i,\varepsilon_i}}(z)\right|_v\right\}^{c_8D_i}\max_{\lambda_0}\left\{\left|\frac{1}{\tau_0!}P_{\lambda_0}^{(\tau_0)}(z_0)\right|_v\right\}$$
$$\times\prod_{i=1}^{g-t}\|w_i\|_v^{\tau_i}\times R_{\mathcal{G},v}(\widehat{H}_v)^{-\ell}\times\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{|A_{\varepsilon_i}^{(i)}(\Psi_{v_0,i,\varepsilon_i}(z),(1,0,\dots,0))|_v^{D_i}}. \tag{41}$$

Si $v \mid m$ la majoration ci-dessus reste vraie en remplaçant $R_{\mathcal{G},v}(\widehat{H}_v)^{-\ell}$ par $c_{21}^{\ell+D_1+\cdots+D_n}$ où c_{21} est une constante $\geqslant 1$.

Des estimations du même type aux places archimédiennes sont plus rudimentaires et font l'objet du paragraphe suivant.

4.3. Estimations archimédiennes de coefficients de Taylor

Dans tout ce paragraphe, v est une place archimédienne de K. Nous voulons obtenir ici une majoration du coefficient tordu (37) en la place v. Commençons tout d'abord par noter le

Lemme 4.12. *Il existe une constante c_{22} telle que soit vérifiée la propriété suivante. Soit $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbf{N}^{N_1+1}\times\cdots\times\mathbf{N}^{N_n+1}$, $z=(z_1,\dots,z_n)$ un vecteur de $t_G(\mathbf{C}_v)$, $\mathbf{f}=(f_1,\dots,f_g)$ une base de $t_G(\mathbf{C}_v)$ et $\boldsymbol{\tau}=(\tau_1,\dots,\tau_g)\in\mathbf{N}^g$. Pour chaque entier $i\in\{1,\dots,n\}$, considérons $\varepsilon_i\in\{0,\dots,N_i\}$ un entier pour lequel $\theta_{v,i,\varepsilon_i}(z)\neq 0$. Alors la valeur absolue du coefficient de Taylor*

$$\frac{\mathcal{D}_{\mathbf{f}}^{\boldsymbol{\tau}}}{\boldsymbol{\tau}!}\left(\prod_{i=1}^{n}\Psi_{v,i,\varepsilon_i}^{\lambda_i}\right)(z)$$

est majorée par

$$c_{22}^{|\boldsymbol{\tau}|+|\boldsymbol{\lambda}|}\left(\prod_{j=1}^{g}\|f_j\|_v^{\tau_j}\right)\prod_{i=1}^{n}\max_{0\leqslant j\leqslant N_i}\left\{\left|\frac{\theta_{v,i,j}}{\theta_{v,i,\varepsilon_i}}(z)\right|_v\right\}^{c_{22}|\lambda_i|}.$$

Ce résultat quoique technique ne pose aucune difficulté particulière lorsque l'on se rappelle que pour chaque $i\in\{1,\dots,n\}$ l'anneau

$$k[\Psi_{v,i,\varepsilon_i}]:=k\big[(\theta_{v,i,j}/\theta_{v,i,\varepsilon_i})_{0\leqslant j\leqslant N_i}\big]$$

est stable par dérivation le long d'un vecteur de $t_G(k)$. Il faut cependant observer que la constante c_{22} est bien indépendante de la base $\mathbf{f}$ choisie. Mais cela se voit immédiatement en écrivant les vecteurs $f_j/\|f_j\|_v$ dans une base orthonormée quelconque de $t_G(\mathbf{C}_v)$ (qui, elle, ne dépend que G et de la norme sur $t_G(\mathbf{C}_v)$) et en majorant leurs composantes par 1.

Maintenant, considérons une situation semblable à celle du dernier énoncé du paragraphe précédent. Étant donné un polynôme $P\in E$, un entier $\ell\in\mathbf{N}$ et un vecteur $(z_0,z)\in t_{G_0\times G}(\mathbf{C}_{v_0})$

d'exponentielle K-rationnelle, il s'agit, sous l'hypothèse d'annulation (36) de donner une borne du coefficient de Taylor tordu (37). La réponse se trouve aussitôt dans l'égalité (40) (qui repose sur les formules d'addition « explicites » de G) et le lemme 4.12, ce qui conduit à la

Proposition 4.13. *Il existe une constante $c_{23} \geqslant 1$ ayant la propriété suivante. Pour toute place archimédienne v et avec les notations et hypothèses ci-dessus, la valeur absolue v-adique du nombre* (37) *($|\boldsymbol{\tau}| = \ell$) est majorée par*

$$c_{23}^{T+\log D_0+D_1+\cdots+D_n}\left(\prod_{i=1}^{g-t}\|w_i\|_v^{\tau_i}\right)\max_{\boldsymbol{\lambda}}\{|p_{\boldsymbol{\lambda}}|_v\}\max_{\lambda_0}\left\{\left|\frac{1}{\tau_0!}P_{\lambda_0}^{(\tau_0)}(z_0)\right|_v\right\}$$
$$\times\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{|A_{\varepsilon_i}^{(i)}(\Psi_{v_0,i,\varepsilon_i}(z),(1:0:\cdots:0))|_v^{D_i}}\prod_{i=1}^{n}\max_{0\leqslant j\leqslant N_i}\left\{\left|\frac{\theta_{v_0,i,j}}{\theta_{v_0,i,\varepsilon_i}}(z)\right|_v\right\}^{c_{23}D_i}.$$

Remarque 4.14. Le logarithme de D_0 qui apparaît en exposant de c_{23} provient simplement de la dimension de E (qui vaut $H(G_0 \times G; D_0, \ldots, D_n)$).

4.4. Construction du polynôme auxiliaire

Soit Υ l'ensemble défini au début du §4.1. Soit E l'espace vectoriel quotient $(k[\mathbf{P}]/I(G_0 \times G))_{\mathbf{D}}$ introduit au §3.3 et F le sous-espace de $\overline{\mathbf{Q}}^{\dim E}$ défini par

$$F := \left\{(p_{\boldsymbol{\lambda}})_{\boldsymbol{\lambda}} \in \overline{\mathbf{Q}}^{\dim E};\ \forall (s,\mathbf{t}) \in \Upsilon,\ \sum_{\boldsymbol{\lambda}} p_{\boldsymbol{\lambda}}\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{t}}\big(\Theta^{\boldsymbol{\lambda}}\big)\big(s(1,u)\big) = 0\right\} \tag{42}$$

où $\Theta^{\boldsymbol{\lambda}}$ est une notation abrégée pour

$$P_{\lambda_0}\prod_{i=1}^{n}\Theta_{v_0,i}^{\lambda_i} = P_{\lambda_0}\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{N_i}\theta_{v_0,i,j}^{\lambda_{i,j}} \tag{43}$$

($\lambda_i = (\lambda_{i,0}, \ldots, \lambda_{i,N_i})$ est un multiplet de longueur D_i). En d'autres termes, cet espace s'identifie à l'ensemble des polynômes P de $E \otimes_{v_0} \overline{\mathbf{Q}}$ tel que, pour tout $(s,\mathbf{t}) \in \Upsilon$, la dérivée $\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{t}} F_{P,v_0}(s, su)$ est nulle. Nous savons que F n'est pas réduit à $\{0\}$. En effet, le système linéaire d'équations définissant F a été étudié au §3.3 et nous avons vu que son rang ρ était majoré par $C_0^{3/2}\frac{S_0}{S}\mathscr{H}(G_0 \times G; D_0', \ldots, D_n')$. Or, d'une part, le rapport S_0/S est inférieur à $1/C_0^2$ (choix des paramètres) et, d'autre part, comme les paramètres D_i, $0 \leqslant i \leqslant n$, ne sont pas tous nuls, il existe une constante c_{24} telle que $\mathscr{H}(G_0 \times G; D_0', \ldots, D_n') \leqslant c_{24} \dim E$. Nous en déduisons que $\rho \leqslant (\dim E)/2$ (pourvu que C_0 soit assez grand) et donc $\dim F \geqslant (\dim E)/2$. Dans ces conditions, le lemme de Siegel absolu énoncé au §3.7 fournit naturellement un élément de $F \setminus \{0\}$ de « petite » hauteur, et, plus précisément, on a la

Proposition 4.15. *Il existe une constante $c_{25} \geqslant 1$ et une famille $(p_{\boldsymbol{\lambda}})_{\boldsymbol{\lambda}} \in F \setminus \{0\}$ de hauteur* (*logarithmique absolue*) L^2 *majorée par*

$$c_{25}\left(\log D_0 + \max_{1\leqslant i\leqslant n}\{D_i\} + \aleph\big((P_{\lambda_0})\big) + \sum_{i=1}^{n} D_i \max_{0\leqslant s\leqslant (g+1)S}\big\{h(sp_i)\big\}\right.$$
$$\left. + T\big(1+\chi_H + h_{\mathrm{L}^2}(w_1)+\cdots+h_{\mathrm{L}^2}(w_{g-t})\big)\right).$$

L'élément $(p_{\boldsymbol\lambda})_{\boldsymbol\lambda}$ représente les coefficients du polynôme auxiliaire P que l'on cherchait à construire (ainsi les notations $(p_{\boldsymbol\lambda})_{\boldsymbol\lambda}$ et P sont-elles désormais fixées jusqu'à la fin de la preuve des théorèmes 1.2 et 1.3). Par la suite nous supposerons qu'un des coefficients $p_{\boldsymbol\lambda}$ vaut 1 (ce qui est loisible puisque la hauteur L^2 est projective), si bien que chacun des termes locaux intervenant dans $h_{\mathrm{L}^2}((p_{\boldsymbol\lambda}))$ est positif.

Démonstration de la proposition 4.15. Comme nous l'avons mentionné ci-dessus, c'est le lemme 3.12 qui fournit l'élément $(p_{\boldsymbol\lambda})_{\boldsymbol\lambda}$ de $F\setminus\{0\}$ recherché. Sa hauteur est majorée par $h(F)/(\dim F)+\log(\dim F)$ (en prenant le vecteur de hauteur minimale parmi ceux de la base apportée par ce lemme). La principale difficulté est d'évaluer soigneusement la hauteur de F pour ne pas faire apparaître un terme en $T\log(T)$.

Pour un multi-indice $\boldsymbol\lambda$ comme ci-dessus et $(s,\mathbf{t})\in\Upsilon$, considérons un entier $\varepsilon_{i,s}\in\{0,\dots,N_i\}$ pour lequel $\theta_{v_0,i,\varepsilon_{i,s}}(su)\neq 0$. Posons $\varepsilon_s := (\varepsilon_{1,s},\dots,\varepsilon_{n,s})$ et désignons par $a_{\boldsymbol\lambda,(s,\mathbf{t})}$ le nombre algébrique (élément de $K\subseteq K_{v_0}$)

$$a_{\boldsymbol\lambda,(s,\mathbf{t})} := \frac{1}{\mathbf{t}!}\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{t}}\big(\Psi^{\boldsymbol\lambda}_{v_0,\varepsilon_s}\big)(s,su)$$

où $\Psi^{\boldsymbol\lambda}_{v_0,\varepsilon_s}$ est une notation condensée pour $P_{\lambda_0}\prod_{i=1}^{n}\Psi^{\lambda_i}_{v_0,i,\varepsilon_{i,s}}$. L'égalité

$$\Theta^{\boldsymbol\lambda}_{v_0} = \left(\prod_{i=1}^{n}\theta^{D_i}_{v_0,i,\varepsilon_{i,s}}\right)\times\Psi^{\boldsymbol\lambda}_{v_0,\varepsilon_s}, \tag{44}$$

la formule de Leibniz et le fait que Υ contienne à $(s,\mathbf{t})$ fixé tous les $(s,\mathbf{t}')$ avec $|\mathbf{t}'|<|\mathbf{t}|$ permettent de décrire F avec les équations

$$\forall(s,\mathbf{t})\in\Upsilon,\quad \sum_{\boldsymbol\lambda} p_{\boldsymbol\lambda}a_{\boldsymbol\lambda,(s,\mathbf{t})}=0.$$

Parmi ces équations, choisissons-en $\operatorname{codim}F=\dim E-\dim F$ linéairement indépendantes et formons alors la matrice F à $\dim E$ lignes et $\operatorname{codim}F$ colonnes constituée des $a_{\boldsymbol\lambda,(s,\mathbf{t})}$ correspondants. De la sorte, F est de rang maximal et les vecteurs colonnes $C_1,\dots,C_{\operatorname{codim}F}$ de F forment une base de l'orthogonal $F^{\perp}$ de F (pour le produit scalaire usuel). La formule de dualité de Schmidt[11] $h(F)=h(F^{\perp})$ permet alors de calculer la hauteur de F au moyen de ces vecteurs colonnes. Les coordonnées de Plücker (dans la base canonique de $\overline{\mathbf{Q}}^{\dim E}$) des produits extérieurs $C_1\wedge\cdots\wedge C_{\operatorname{codim}F}$ conduisent à l'égalité

[11] Voir [29].

$$h(F) = \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \sum_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}} [K_\sigma : \mathbf{R}] \log\biggl(\sum_{\mathsf{F}_0} |\det \mathsf{F}_0|_\sigma^2\biggr)^{1/2} + \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \sum_{v \nmid \infty} [K_v : \mathbf{Q}_p] \log \max_{\mathsf{F}_0} \bigl\{ |\det \mathsf{F}_0|_v \bigr\}$$

où F_0 parcourt les mineurs maximaux $(\operatorname{codim} F \times \operatorname{codim} F)$ de la matrice F. Nous appellerons $h_\infty(F)$ (*resp.* $h_f(F)$) la première (*resp.* la seconde) somme du membre de droite de cette égalité.

Étant donné une place archimédienne σ de K et un tel mineur F_0, l'inégalité de Hadamard entraîne

$$|\det \mathsf{F}_0|_\sigma \leqslant \prod_{i=1}^{\operatorname{codim} F} \|C_i\|_\sigma$$

(les colonnes de F_0 étant en norme plus petites que celles de F). Comme il y a $\binom{\dim E}{\dim F}$ mineurs maximaux possibles pour F, on obtient

$$h_\infty(F) \leqslant \sum_{(s,\mathbf{t})} h_{\infty,\mathrm{L}^2}\bigl((a_{\boldsymbol{\lambda},(s,\mathbf{t})})_{\boldsymbol{\lambda}}\bigr) + \frac{1}{2} \log \binom{\dim E}{\dim F} \tag{45}$$

(la notation h_{∞,L^2} signifie que nous n'avons pris que la somme portant sur les places archimédiennes de K des normes L^2 des vecteurs $(a_{\boldsymbol{\lambda},(s,\mathbf{t})})_{\boldsymbol{\lambda}}$). Le lemme 4.12 fournit un majorant de chacun des $|a_{\boldsymbol{\lambda},(s,\mathbf{t})}|_\sigma$ et donc une estimation de la somme ci-dessus.

En ce qui concerne l'estimation du déterminant $\det \mathsf{F}_0$ en une place ultramétrique v, nous constatons qu'il n'est pas possible d'utiliser en l'état la proposition 4.11 puisque les coefficients de la matrice F_0 ne proviennent pas (*a priori*) de polynômes qui s'annulent aux ordres de dérivations précédents. Nous allons donc faire apparaître de tels polynômes en procédant de la manière suivante. Considérons une colonne $(s,\mathbf{t})$ de F_0 telle que la longueur de $\mathbf{t}$ soit maximale et notons $L_1, \ldots, L_{\operatorname{codim} F}$ les lignes du mineur F_0, qui, elles-mêmes, correspondent (respectivement) aux lignes $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_{\operatorname{codim} F}}$ de F. Si nous supprimons la colonne $(s,\mathbf{t})$ de F_0, les lignes $\widetilde{L}_j$ de la matrice restante (j est un entier compris entre 1 et $\operatorname{codim} F$, et $\widetilde{L}_j := (a_{\lambda_{i_j},(s,\mathbf{t}')})_{\mathbf{t}' \neq \mathbf{t}}$) sont liées sur $\overline{\mathbf{Q}}$ et il est possible de trouver une relation de dépendance linéaire entre ces lignes sur $K \cap \mathcal{O}_v$ avec au moins un des coefficients égal à 1. Pour cela, il suffit de considérer une relation sur $\mathcal{O}_K$ puis de diviser par le coefficient dont la valeur absolue v-adique est minimale (non nulle). Autrement dit, il existe $j_0 \in \{1, \ldots, \operatorname{codim} F\}$ et $(\alpha_j)_{j \neq j_0} \in (K \cap \mathcal{O}_v)^{\operatorname{codim} F - 1}$ tels que

$$\widetilde{L}_{j_0} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{\operatorname{codim} F} \alpha_j \widetilde{L}_j.$$

Ainsi, en soustrayant $\sum_{j \neq j_0} \alpha_j L_j$ à la $j_0^{\text{ème}}$ ligne de F_0, nous obtenons une matrice de même déterminant que F_0 et dont la $j_0^{\text{ème}}$ ligne est composée de zéros sauf à la position $(s,\mathbf{t})$ où le coefficient est

$$\xi_{(s,\mathbf{t})} := a_{\lambda_{i_{j_0}},(s,\mathbf{t})} - \sum_{j \neq j_0} \alpha_j a_{\lambda_{i_j},(s,\mathbf{t})}.$$

Par conséquent, la valeur absolue v-adique de $\det \mathsf{F}_0$ est égale à $|\xi_{(s,\mathbf{t})}|_v$ multiplié par la valeur absolue du déterminant d'un mineur $\widetilde{\mathsf{F}_0}$ de taille $\operatorname{codim} F - 1$ de la matrice F à laquelle on a retiré la colonne $(s,\mathbf{t})$ et la ligne j_0. Soit $(q_{\boldsymbol{\lambda}})_{\boldsymbol{\lambda}}$ l'élément de $K^{\dim E}$ défini par $q_{\lambda_{i_{j_0}}} = 1$, $q_{\lambda_{i_j}} = -\alpha_j$ si $j \in \{1, \ldots, \operatorname{codim} F\} \setminus \{j_0\}$ et $q_{\boldsymbol{\lambda}} = 0$ si $L_{\boldsymbol{\lambda}}$ n'est pas une ligne de F_0. Le polynôme Q correspondant à ces coordonnées vérifie

$$\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{t}'}\left(\sum_{\boldsymbol{\lambda}} q_{\boldsymbol{\lambda}} \Psi_{v_0,\varepsilon_s}^{\boldsymbol{\lambda}}\right)(s, su) = 0$$

pour tout $\mathbf{t}' \in \mathbf{N}^{\dim W}$ de longueur strictement inférieure à $|\mathbf{t}|$ (puisque $|\mathbf{t}|$ a été choisi maximal). En particulier l'égalité (44) et la formule de Leibniz entraînent, pour tout $|\mathbf{t}'| < |\mathbf{t}|$, $\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{t}'} F_{Q,v_0}(s, su) = 0$ et

$$\xi_{(s,\mathbf{t})} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} \theta_{v_0,i,\varepsilon_{i,s}}(su)^{D_i}} \frac{\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{t}}}{\mathbf{t}!} F_{Q,v_0}(s, su).$$

La proposition 4.11 peut donc s'appliquer à $\xi_{(s,\mathbf{t})}$, ce qui fournit une majoration de $|\xi_{(s,\mathbf{t})}|_v$ (indépendante de la taille v-adique des coefficients de Q). En opérant de la même manière pour $\widetilde{\mathsf{F}_0}$, nous déduisons par récurrence immédiate que $|\det \mathsf{F}_0|_v$ s'écrit comme un produit $\prod_{i=1}^{\operatorname{codim} F} |\xi_{(s_i,\mathbf{t}_i)}|_v$ où chacun des $\xi_{(s_i,\mathbf{t}_i)}$ est borné comme dans la formule (41) de la proposition 4.11. La majoration du logarithme de $\max_{\mathsf{F}_0}\{|\det \mathsf{F}_0|_v\}$ qui en découle (valable pour toute place ultramétrique v) et l'inégalité archimédienne (45) entraînent alors la proposition 4.15. □

4.5. Extrapolation

Étant donné $(s, \boldsymbol{\tau}) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^{\dim W}$ et P le polynôme construit au paragraphe précédent, nous disposons d'un coefficient de Taylor tordu

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} \theta_{v_0,i,\varepsilon_i}(su)^{D_i}} \frac{\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}}}{\boldsymbol{\tau}!}\left(P \circ \exp_{(G_0 \times G)(\mathbf{C}_{v_0})}\right)(s, su) \quad \big(\text{voir (37)}\big). \tag{46}$$

Pour une raison technique qui apparaîtra à la fin de la preuve de la proposition 4.19 (p. 254), nous supposerons que $\varepsilon_i \in \{0, \ldots, N_i\}$ est choisi de telle sorte que

$$\left|\theta_{v_0,i,\varepsilon_i}(su)\right|_{v_0} = \max_{0 \leqslant j \leqslant N_i}\left\{\left|\theta_{v_0,i,j}(su)\right|_{v_0}\right\}.$$

En particulier $\theta_{v_0,i,\varepsilon_i}(su) \neq 0$. D'après le lemme 3.7 et le choix des paramètres (voir l'inégalité ② du lemme 4.1), il existe un couple $(s, \boldsymbol{\tau})$ avec $0 \leqslant s \leqslant (g+1)S$ et $|\boldsymbol{\tau}| \leqslant (g+1)T$ pour lequel le nombre (46) est non nul. Parmi ces couples, choisissons-en un tel que $(s, |\boldsymbol{\tau}|)$ soit minimal pour l'ordre lexicographique dans $\mathbf{N}^2$, et notons α le terme (46) correspondant. On notera que par construction de P on a nécessairement $s \geqslant S_0 + 1$ et $\alpha \in K$ (lemme 4.10). Les propositions 4.11 et 4.13 apportent des estimations de $|\alpha|_v$ en toutes les places v de K et, par suite, de la hauteur de Weil de α.

Considérons une place *quelconque* de K au-dessus de v_0, place que nous noterons encore v_0. Nous allons donner ici une majoration de $|\alpha|_{v_0}$ qui dépend de la distance $\mathrm{d}_{v_0}(u, V)$ de sorte que si celle-ci est « trop petite », il y aura une contradiction avec la formule du produit.

Inventée par A. Baker, la démarche consiste à déplacer la question sur une droite de W. Plus précisément, si $\tilde{u}$ est un élément de $V \otimes \mathbf{C}_{v_0}$ tel que $\mathrm{d}_{v_0}(u, V) = \|u - \tilde{u}\|_{v_0}$, il revient au même — modulo un terme d'erreur linéaire en $\mathrm{d}_{v_0}(u, V)$ — de majorer (46) avec $(s, s\tilde{u})$ au lieu de (s, su) (sous réserve, dans le cas p-adique, d'avoir vérifié que $\tilde{u}$ appartenait bien à $\mathscr{T}_{v_0}$). Le point remarquable est alors le suivant. La fonction analytique définie dans le disque unité de $\mathbf{C}_{v_0}$ par

$$f_{\boldsymbol{\tau}}(z) = \frac{\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}}}{\boldsymbol{\tau}!}(P \circ \exp_{(G_0 \times G)(\mathbf{C}_{v_0})})(z, z\tilde{u})$$

admet des dérivées (divisées) qui sont elles-mêmes des combinaisons linéaires très simples des $f_{\boldsymbol{\tau}'}$, avec $|\boldsymbol{\tau}'| = |\boldsymbol{\tau}| +$ ordre de dérivation, car $(1, \tilde{u}) \in W \otimes \mathbf{C}_{v_0}$. Un lemme d'interpolation permet alors de majorer aisément $|f_{\boldsymbol{\tau}}(s)|_{v_0}$ en fonction des valeurs $|f_{\boldsymbol{\tau}'}(s_0)|_{v_0}$ pour $0 \leqslant s_0 \leqslant S_0$ et $|\boldsymbol{\tau}'| \leqslant 2(g+1)T$.

Ce schéma de démonstration ne dépend pas vraiment de la nature, archimédienne ou p-adique, de la place v_0. Néanmoins, il me semble préférable dans un souci de clarté pour la présentation de distinguer ces deux cas.

4.5.1. v_0 archimédienne

Avant d'énoncer la proposition principale, commençons par quelques résultats préliminaires usuels dans ce contexte.

Lemme 4.16. *Il existe une constante $c_{26} \geqslant 1$ ayant la propriété suivante. Soit $\mathbf{z} = (z_0, \ldots, z_n) \in t_{G_0}(\mathbf{C}_{v_0}) \oplus t_G(\mathbf{C}_{v_0})$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{N} \times \prod_{i=1}^{n} \mathbf{N}^{N_i+1}$ et $\mathbf{h} = (h_0, \ldots, h_{g-t}) \in \mathbf{N}^{\dim W}$. Alors la valeur absolue du coefficient $\frac{1}{\mathbf{h}!}\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{h}}\Theta^{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{z})$ est majorée par*

$$c_{26}^{|\mathbf{h}|+|\boldsymbol{\lambda}|}\left(\prod_{j=1}^{g-t}\|w_j\|_{v_0}^{h_j}\right)\max_{\lambda_0}\left\{\left|\frac{1}{h_0!}P_{\lambda_0}^{(h_0)}(z_0)\right|\right\}\exp\left\{c_{26}\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|\bigl(1+\|z_i\|_{v_0}\bigr)^{\rho_i}\right\}$$

(*voir* (43) *pour la définition de* $\Theta^{\boldsymbol{\lambda}}$).

La preuve de ce lemme est essentiellement la même que celle du lemme 4.12 en tenant compte de l'inégalité (12).

Soit $m \in \mathbf{N}$, $\mathbf{h} \in \mathbf{N}^{\dim W}$ et $F = F_{P,v_0}$ la fonction associée à P. Soit également (comme dans l'introduction) $\tilde{u}$ un vecteur de $V \otimes_{v_0} \mathbf{C}$ pour lequel $\mathrm{d}_{v_0}(u, V) = \|u - \tilde{u}\|_{v_0}$. Le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction

$$x \longmapsto \frac{1}{\mathbf{h}!}\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{h}}F\bigl(m, mu + xm(\tilde{u} - u)\bigr)$$

de la variable réelle $x \in [0, 1]$ entraîne alors immédiatement le

Lemme 4.17. *(Comparer avec le lemme 8 de [15].) Il existe une constante $c_{27} \geqslant 1$ ayant la propriété suivante. Avec les notations ci-dessus, la valeur absolue de la différence*

$$\frac{1}{\mathbf{h}!}\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{h}}F(m, mu) - \frac{1}{\mathbf{h}!}\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{h}}F(m, m\tilde{u})$$

est majorée par

$$c_{27}^{T+\log(D_0)} \max_{\boldsymbol{\lambda}}\{|p_{\boldsymbol{\lambda}}|_{v_0}\}\left(\prod_{j=1}^{g-t}\|w_j\|_{v_0}^{h_j}\right) m\, \mathrm{d}_{v_0}(u,V)$$

$$\times \max_{\lambda_0}\left\{\left|\frac{1}{h_0!}P_{\lambda_0}^{(h_0)}(m)\right|\right\} \times \exp\left\{c_{27}\sum_{i=1}^{n} D_i\big(1+m\|u_i\|_{v_0}\big)^{\rho_i}\right\}$$

pourvu que $\mathrm{d}_{v_0}(u,V) \leqslant 1$.

Nous aurons aussi besoin du lemme d'interpolation suivant, dû à Waldschmidt [32]. Si x est un nombre réel positif et f une fonction définie sur le disque fermé $\overline{D}(0,x) = \{z \in \mathbf{C};\ |z| \leqslant x\}$, on note $|f|_x$ la borne supérieure des $|f(z)|$, $z \in \overline{D}(0,x)$.

Lemme 4.18. *Soit S_1, T_1 des entiers naturels strictement positifs et $\mathsf{R} \geqslant \mathsf{r} \geqslant 2S_1$ des nombres réels. Soit f une fonction analytique* (*d'une variable complexe*) *dans le disque $\overline{D}(0,\mathsf{R})$. Alors on a*

$$|f|_{\mathsf{r}} \leqslant 2|f|_{\mathsf{R}}\left(\frac{2\mathsf{r}}{\mathsf{R}}\right)^{T_1S_1} + 5\left(\frac{9\mathsf{r}}{S_1}\right)^{T_1S_1} \times \max_{\substack{0\leqslant h<T_1\\ 0\leqslant m<S_1}}\left\{\left|\frac{1}{h!}f^{(h)}(m)\right|\right\}.$$

De la sorte, pour $m \leqslant S$ et au moyen des inégalités du lemme 4.1, le majorant du lemme 4.17 s'écrit plus simplement

$$\max_{\boldsymbol{\lambda}}\{|p_{\boldsymbol{\lambda}}|_{v_0}\}\max_{j}\{1,\|w_j\|_{v_0}\}^{c_{28}T} e^{c_{28}U}\mathrm{d}_{v_0}(u,V)$$

pour une certaine constante $c_{28} \geqslant 1$ et où j parcourt l'ensemble $\{1,\ldots,g-t\}$.

Le résultat central de ce paragraphe est le suivant.

Proposition 4.19. *Supposons que* $\log \mathrm{d}_{v_0}(u,V) \leqslant -C_0^3U$. *Alors*

$$|\alpha|_{v_0} \leqslant e^{-U}\max_{\boldsymbol{\lambda}}\{|p_{\boldsymbol{\lambda}}|_{v_0}\}\max\{1,\|w_1\|_{v_0},\ldots,\|w_{g-t}\|_{v_0}\}^{C_0T}.$$

Démonstration. Soit $\mathrm{f}:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ la fonction entière définie par

$$\mathrm{f}(z) = \frac{1}{\boldsymbol{\tau}!}\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}}F(z,z\tilde{u}).$$

Soit $\mathbf{x} := (x_0 = 1, x_1, \dots, x_{g-t})$ les coordonnées de $(1, \tilde{u})$ dans la base $\mathbf{w}$. La hauteur L^2 de w_i est projective et quitte à multiplier w_i par un entier assez grand[12] (pour $1 \leqslant i \leqslant g-t$), nous pouvons supposer que $|x_i| \leqslant 1$. Pour tout entier $\ell \geqslant 0$, la dérivée $\ell^{\text{ème}}$ de f vérifie la formule

$$\frac{\mathrm{f}^{(\ell)}(z)}{\ell!} = \sum_{\substack{\mathbf{j} \in \mathbf{N}^{\dim W} \\ |\mathbf{j}| = \ell}} \binom{\boldsymbol{\tau} + \mathbf{j}}{\mathbf{j}} \mathbf{x}^{\mathbf{j}} \frac{\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}+\mathbf{j}}}{(\boldsymbol{\tau} + \mathbf{j})!} F(z, z\tilde{u})$$

et donc il existe une constante $c_{29} \geqslant 1$ telle que

$$\max_{\substack{\ell \leqslant (g+1)T \\ s_0 \leqslant S_0}} \left\{ \left| \frac{\mathrm{f}^{(\ell)}(s_0)}{\ell!} \right| \right\} \leqslant c_{29}^T \max_{(s_0, \mathbf{j}) \in \Upsilon} \left| \frac{\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{j}}}{\mathbf{j}!} F(s_0, s_0\tilde{u}) \right|. \tag{47}$$

Si l'on remplace $\tilde{u}$ par u dans le membre de droite de cette inégalité, le terme obtenu est nul par construction de F. Par conséquent, le lemme de comparaison 4.17 entraîne la majoration

$$\max_{\substack{\ell \leqslant (g+1)T \\ s_0 \leqslant S_0}} \left\{ \left| \frac{\mathrm{f}^{(\ell)}(s_0)}{\ell!} \right| \right\} \leqslant e^{-C_0^2 U} \max_{\boldsymbol{\lambda}} \left\{ |p_{\boldsymbol{\lambda}}|_{v_0} \right\} \max_{j} \left\{ 1, \|w_j\|_{v_0} \right\}^{c_{30} T}.$$

De même, le lemme 4.16 conduit à la majoration

$$\begin{aligned} |\mathrm{f}|_{\mathsf{R}} \leqslant{}& \max_{\boldsymbol{\lambda}} \left\{ |p_{\boldsymbol{\lambda}}|_{v_0} \right\} e^{(U/2 + \sum_{i=1}^n C_0 D_i (1 + \mathsf{R}\|u_i\|_{v_0})^{\rho_i})} \times \max_{\substack{\lambda_0 \\ |z_0| \leqslant \mathsf{R}}} \left\{ \left| \frac{1}{\tau_0!} P_{\lambda_0}^{(\tau_0)}(z_0) \right| \right\} \\ &\times \max_{j} \left\{ \|w_j\|_{v_0} \right\}^{c_{31} T} \end{aligned} \tag{48}$$

valide pour tout nombre réel $\mathsf{R} \in [1, \mathrm{d}_{v_0}(u, V)^{-1}]$. En prenant $\mathsf{R} := 2\mathfrak{e}(g+1)S$, nous constatons que le produit des deux dernières quantités de la première ligne du membre de droite de (48) est inférieure à e^U, ce qui fournit la majoration plus simple

$$|\mathrm{f}|_{\mathsf{R}} \leqslant \max_{\boldsymbol{\lambda}} \left\{ |p_{\boldsymbol{\lambda}}|_{v_0} \right\} \max_{j} \left\{ 1, \|w_j\|_{v_0} \right\}^{c_{31} T} e^U.$$

Mentionnons que pour cela nous avons utilisé les inégalités ④ et ⑥ du lemme 4.1. Choisissons $T_1 := (g+1)T$, $S_1 := S_0$, $\mathsf{r} := s$ et appliquons le lemme d'interpolation 4.18 à ces données et à la fonction f. Il vient

$$\left| \mathrm{f}(s) \right| \leqslant e^{-C_0 U} \max_{\boldsymbol{\lambda}} \left\{ |p_{\boldsymbol{\lambda}}| \right\} \max_{j} \left\{ 1, \|w_j\|_{v_0} \right\}^{c_{32} T}$$

[12] Par exemple, $2\max\{1, [|x_1|], \dots, [|x_{g-t}|]\}$ convient. Cette astuce ne dépend que de la place v_0 sur k (et non du choix de la place de K au-dessus de v_0).

(rappelons que $\mathsf{r}/S_1 = s/S_0 \leqslant S/S_0 \leqslant C_0^4$), puis, par une seconde application du lemme de comparaison 4.17, nous obtenons

$$\left|\frac{1}{\boldsymbol{\tau}!}\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}} F(s, su)\right| \leqslant 2e^{-C_0 U} \max_{\boldsymbol{\lambda}}\{|p_{\boldsymbol{\lambda}}|\} \max_{j}\{1, \|w_j\|_{v_0}\}^{c_{33}T}.$$

La borne pour $|\alpha|_{v_0}$ se déduit de cette inégalité *via* la minoration de $|\theta_{v_0,i,\varepsilon_i}(su)|$ donnée par l'inégalité (12) (p. 230) et grâce au choix de ε_i. $\square$

4.5.2. v_0 ultramétrique

Considérons le nombre algébrique α introduit au début du paragraphe 4.5. La condition de minimalité sur $(s, |\boldsymbol{\tau}|)$ implique que α est aussi égal à

$$\frac{\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}}}{\boldsymbol{\tau}!}\left(\sum_{\boldsymbol{\lambda}} p_{\boldsymbol{\lambda}} \Psi_{v_0,0}^{\boldsymbol{\lambda}}\right)(s, su) \tag{49}$$

où, comme dans la démonstration de la proposition 4.15, $\Psi_{v_0,0}^{\boldsymbol{\lambda}}$ désigne

$$P_{\lambda_0}(z_0)\prod_{i=1}^{n}\Psi_{v_0,i,0}^{\lambda_i}.$$

Dans la suite, nous noterons $\widetilde{F}$ la somme des $p_{\boldsymbol{\lambda}}\Psi_{v_0,0}^{\boldsymbol{\lambda}}$. L'écriture (49) pour α s'avère plus commode dans le cas ultramétrique car l'on connaît un développement en série de $\Psi_{v_0,0}^{\boldsymbol{\lambda}}$, qui converge sur le disque ouvert $D(0, r_p)$:

$$\forall \boldsymbol{\lambda},\ \exists (a_{\mathbf{i},\boldsymbol{\lambda}})_{\mathbf{i}} \in \mathcal{O}_{v_0}^{\mathbf{N}^g}; \quad \Psi_{v_0,0}^{\boldsymbol{\lambda}}(z) = P_{\lambda_0}(z_0)\left(\sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{N}^g}\frac{a_{\mathbf{i},\boldsymbol{\lambda}}}{\mathbf{i}!}\mathbf{z}^{\mathbf{i}}\right)$$

lorsque $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_g)$ désigne les coordonnées de $z \in D(0, r_p)$ dans la base $\mathbf{e}$ (rappelons que c'est précisément le choix de cette base qui assure l'intégralité des coefficients $a_{\mathbf{i},\boldsymbol{\lambda}}$, voir §1.1). Nous avons conservé $P_{\lambda_0}(z_0)$ intact dans ce développement pour des raisons pratiques afin de ne pas mélanger les coefficients de P_{λ_0} (qui n'appartiennent pas nécessairement à $\mathcal{O}_{v_0}$) avec les $a_{\mathbf{i},\boldsymbol{\lambda}} \in \mathcal{O}_{v_0}$. Pour tout multiplet $\mathbf{h} = (h_0, \mathbf{h}') \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^g$ et tout élément $(z_0, z) \in t_{G_0}(\mathbf{C}_{v_0}) \times D(0, r_p)$, nous obtenons alors

$$\frac{\mathcal{D}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{h}}}{\mathbf{h}!}\widetilde{F}(z_0, z) = \sum_{\boldsymbol{\lambda},\mathbf{i}} p_{\boldsymbol{\lambda}}\frac{P_{\lambda_0}^{(h_0)}(z_0)}{h_0!}\frac{a_{\mathbf{i},\boldsymbol{\lambda}}}{(\mathbf{i}-\mathbf{h}')!}\mathbf{z}^{\mathbf{i}-\mathbf{h}'} \tag{50}$$

($\mathbf{i}$ parcourt $\{(i_1, \ldots, i_g) \in \mathbf{N}^g;\ \forall j \in \{1, \ldots, g\},\ i_j \geqslant h'_j\}$). Pour j un entier naturel, notons $\sigma_p(j)$ la somme des chiffres de j écrit en base p (le nombre premier p est la caractéristique résiduelle de v_0). On sait que la valuation p-adique de $j!$ est $(j - \sigma_p(j))/(p-1)$ ce qui entraîne $|j!|_{v_0} \geqslant r_p^j$

et, plus généralement, pour $\mathbf{i} \in \mathbf{N}^g$, $|\mathbf{i}!|_{v_0} \geqslant r_p^{|\mathbf{i}|}$ si bien que $|\mathbf{z}^{\mathbf{i}}/\mathbf{i}!|_{v_0} \leqslant 1$ pour $z \in D(0, r_p)$. De l'égalité (50) et de l'inégalité ultramétrique se déduit la majoration

$$\left|\frac{\mathcal{D}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{h}}}{\mathbf{h}!}\widetilde{F}(z_0, z)\right|_{v_0} \leqslant \max_{\boldsymbol{\lambda}}\bigl\{|p_{\boldsymbol{\lambda}}|_{v_0}\bigr\} \max_{\lambda_0}\left\{\left|\frac{P_{\lambda_0}^{(h_0)}(z_0)}{h_0!}\right|_{v_0}\right\} \tag{51}$$

valide pour tout $(z_0, z) \in t_{G_0}(\mathbf{C}_{v_0}) \times D(0, r_p)$. Cette inégalité se généralise immédiatement à une base quelconque $\mathbf{e}' = (e'_0, \ldots, e'_g)$ de $t_{G_0 \times G}(\mathbf{C}_{v_0})$ en multipliant le membre de droite par $\prod_{j=0}^{g} \|e'_j\|_{v_0}^{h_j}$. De la même façon, l'estimation

$$\bigl|\mathbf{z}^{\mathbf{i}} - \mathbf{z}'^{\mathbf{i}}\bigr| \leqslant \|z - z'\|_{v_0} \max\bigl\{\|z\|_{v_0}, \|z'\|_{v_0}\bigr\}^{|\mathbf{i}|-1}$$

conduit au lemme de comparaison suivant.

Lemme 4.20. *Supposons que* $\mathrm{d}_{v_0}(u, V) = \|u - \tilde{u}\|_{v_0}$ *est strictement inférieur à* r_p. *Alors, pour tout couple* $(m, \mathbf{h}) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^{\dim W}$, *la valeur absolue de la différence* $\frac{\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{h}}}{\mathbf{h}!}\widetilde{F}(m, mu) - \frac{\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{h}}}{\mathbf{h}!}\widetilde{F}(m, m\tilde{u})$ *est majorée par*

$$\max_{\boldsymbol{\lambda}}\bigl\{|p_{\boldsymbol{\lambda}}|_{v_0}\bigr\} \max_{\lambda_0}\left\{\left|\frac{P_{\lambda_0}^{(h_0)}(m)}{h_0!}\right|_{v_0}\right\} \prod_{j=1}^{g-t} \|w_j\|_{v_0}^{h_j} \times \mathrm{d}_{v_0}(u, V).$$

La condition $\|u - \tilde{u}\|_{v_0} < r_p$ équivaut à $\|\tilde{u}\|_{v_0} < r_p$ (puisque $\|u\|_{v_0} < r_p$) et assure de la sorte la cohérence de l'énoncé.

Enfin, comme dans le cas archimédien, nous aurons besoin d'un lemme d'interpolation (en une variable), dû à Roy [26].

Lemme 4.21. *Soit* S_1, T_1 *des entiers* $\geqslant 1$ *et* $\mathsf{R} \geqslant \mathsf{r} \geqslant 1$ *des nombres réels. Posons*

$$\kappa := \frac{S_1 - \sigma_p(S_1)}{p - 1} + \left[\frac{\log S_1}{\log p}\right].$$

Soit $f : \overline{D}(0, \mathsf{R}) \to \mathbf{C}_p$ *une fonction analytique. Alors*

$$\frac{|f|_{\mathsf{r}}}{\mathsf{r}^{(S_1+1)T_1}} \leqslant p^{\kappa T_1} \max\left\{\max_{\substack{0 \leqslant m < S_1 \\ 0 \leqslant h < T_1}}\left\{\left|\frac{f^{(h)}(m)}{h!}\right|\right\}, \left(\frac{1}{\mathsf{R}}\right)^{(S_1+1)T_1} |f|_{\mathsf{R}}\right\}.$$

Démonstration. Il s'agit d'un cas très particulier du corollaire 1.2 de [26] qui avait été conjecturé par P. Robba en 1978. Avec les notations de cet article, choisissons $K = \mathbf{C}_p$, $n = \rho = 1$, $E = \Omega = \{0, \ldots, S_1\}$, $L = M = (S_1 + 1)T_1$. L'énoncé de Roy donne le résultat avec $\Delta(E)\delta(E)$ à la place de $p^{-\kappa}$, où $\Delta(E) = \min_{x \in E} \prod_{y \in E \setminus \{x\}} |y - x|_{v_0}$ et $\delta(E) = \min_{x \neq y \in E} |y - x|_{v_0}$. En observant que

$$\Delta(E) = |S_1!|_{v_0} = |p|_{v_0}^{\frac{S_1 - \sigma_p(S_1)}{p-1}} \quad \text{et} \quad \delta(E) = |p|_{v_0}^{[\frac{\log S_1}{\log p}]},$$

on a $\Delta(E)\delta(E) = |p|_{v_0}^{\kappa} = p^{-\kappa}$. $\square$

Ces préliminaires à l'extrapolation étant acquis, nous allons être en mesure de démontrer la

Proposition 4.22. *Supposons que* $\log \mathrm{d}_{v_0}(u, V) \leqslant -C_0^3(1 + (\log r_p^{-1})/\log \mathfrak{r})U$. *Alors*

$$|\alpha|_{v_0} \leqslant e^{-U} \max_{\boldsymbol{\lambda}}\bigl\{|p_{\boldsymbol{\lambda}}|_{v_0}\bigr\} \max_j \bigl\{1, \|w_j\|_{v_0}\bigr\}^{C_0T}.$$

Démonstration. Elle suit d'assez près celle de la proposition 4.19 en comportant néanmoins quelques variantes liées, en particulier, à la finitude du rayon de convergence de l'exponentielle p-adique. Soit $D_u = \{z \in \mathbf{C}_p,\ zu \in \mathscr{T}_{v_0}\}$ et $\mathrm{f}: D_u \to \mathbf{C}_p$ la fonction définie par $\mathrm{f}(z) = \frac{1}{\boldsymbol{\tau}!}\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}}\widetilde{F}(z, z\tilde{u})$. L'hypothèse $\log \mathrm{d}_{v_0}(u, V) \leqslant -C_0^3 U$ entraîne la majoration $\|u - \tilde{u}\|_{v_0} < \|u\|_{v_0}$ et donc $\|u\|_{v_0} = \|\tilde{u}\|_{v_0}$, ce qui assure l'analycité de f sur D_u. Les dérivées de cette application vérifient la même formule que dans le cas archimédien et la majoration (47) est vraie avec $c_{29} = 1$. Le lemme 4.20 entraîne alors

$$\begin{aligned}
\max_{\substack{0\leqslant s_0\leqslant S_0\\ 0\leqslant \ell\leqslant (g+1)T}} \left\{\left|\frac{\mathrm{f}^{(\ell)}(s_0)}{\ell!}\right|_{v_0}\right\} &\leqslant \max\bigl\{|p_{\boldsymbol{\lambda}}|_{v_0}\bigr\} \max_{\substack{\lambda_0\\ h_0\leqslant (g+1)T\\ s_0\leqslant S_0}} \left\{\left|\frac{P_{\lambda_0}^{(h_0)}(s_0)}{h_0!}\right|_{v_0}\right\} \mathrm{d}_{v_0}(u, V)\\
&\quad \times \max\bigl\{1, \|w_1\|_{v_0}, \dots, \|w_{g-t}\|_{v_0}\bigr\}^{2(g+1)T}\\
&\leqslant \max\bigl\{|p_{\boldsymbol{\lambda}}|_{v_0}\bigr\} \max_j\bigl\{1, \|w_j\|_{v_0}\bigr\}^{2(g+1)T}\\
&\quad \times \exp\bigl\{-C_0^2\bigl(1 + \bigl(\log r_p^{-1}\bigr)/\log \mathfrak{r}\bigr)U\bigr\}. \qquad (52)
\end{aligned}$$

En outre, de l'inégalité (51) et de la remarque qui suit, nous déduisons la majoration

$$|\mathrm{f}|_{\mathsf{R}} \leqslant \max\bigl\{|p_{\boldsymbol{\lambda}}|_{v_0}\bigr\} \max_{\substack{\lambda_0\\ |z_0|\leqslant \mathsf{R}}} \left\{\left|\frac{P_{\lambda_0}^{(\tau_0)}(z_0)}{\tau_0!}\right|_{v_0}\right\} \prod_{j=1}^{g-t} \|w_j\|_{v_0}^{\tau_j}$$

valide pour tout R dans l'intervalle $[0, \frac{r_p}{\|u\|_{v_0}}[$. En appliquant le lemme d'interpolation 4.21 avec $S_1 := S_0$, $T_1 := (g+1)T$, $\mathsf{r} := 1$ et $\mathsf{R} := \mathfrak{r} r_p^{-1}$ à la fonction $f := \mathrm{f}$. Le nombre $\kappa = (S_0 - \sigma_p(S_0))/(p-1) + [\log S_0/\log p]$ de ce lemme est naturellement majoré par $S_0/(p-1) + (\log S_0)/\log p$ et le choix des paramètres entraîne

$$p^{\kappa(g+1)T} \leqslant \bigl(r_p^{-1}\bigr)^{(g+1)TS_0} e^U \leqslant \exp\bigl\{C_0^{3/2}\bigl(1 + \bigl(\log r_p^{-1}\bigr)/\log \mathfrak{r}\bigr)U\bigr\}.$$

De la sorte, et grâce à l'estimation (52), nous obtenons

$$\begin{aligned}
p^{\kappa(g+1)T} &\max_{\substack{0\leqslant s_0\leqslant S_0\\ 0\leqslant \ell\leqslant (g+1)T}} \left\{\left|\frac{\mathrm{f}^{(\ell)}(s_0)}{\ell!}\right|_{v_0}\right\}\\
&\leqslant \max\bigl\{|p_{\boldsymbol{\lambda}}|_{v_0}\bigr\} \max_j\bigl\{1, \|w_j\|_{v_0}\bigr\}^{2(g+1)T} e^{-C_0U}.
\end{aligned}$$

Et par ailleurs nous avons

$$p^{\kappa(g+1)T}\left(\frac{1}{\mathsf{R}}\right)^{(S_0+1)(g+1)T}|f|_{\mathsf{R}}$$
$$\leqslant \max\{|p_{\boldsymbol{\lambda}}|_{v_0}\}\max_j\{1,\|w_j\|_{v_0}\}^{2(g+1)T}e^{-C_0^{1/2}U}.$$

Le lemme 4.21 implique alors

$$|\mathrm{f}(s)| \leqslant |\mathrm{f}|_1 \leqslant \max_{\boldsymbol{\lambda}}\{|p_{\boldsymbol{\lambda}}|_{v_0}\}\max_j\{\|w_j\|_{v_0}\}^{c_{34}T}e^{-C_0^{1/2}U}$$

et nous concluons avec le lemme 4.20. □

4.6. Fin de la démonstration

Comme nous l'avons vu, le nombre algébrique α introduit au paragraphe précédent est non nul et satisfait donc à la formule (du produit) :

$$\sum_{\substack{v \text{ place de } K\\ v\nmid v_0}}\frac{[K_v:\mathbf{Q}_v]}{[K:\mathbf{Q}]}\log|\alpha|_v = -\sum_{v|v_0}\frac{[K_v:\mathbf{Q}_v]}{[K:\mathbf{Q}]}\log|\alpha|_v. \tag{53}$$

D'après les propositions 4.11 et 4.13 (appliquées avec $(z_0,z)=(s,su)$), il existe une constante c_{35} telle que le membre de gauche soit majoré par

$$c_{35}\left(T\left(\chi_H+\sum_{i=1}^{g-t}h_{\mathrm{L}^2}(w_i)\right)+h(P)+\sum_{i=1}^{n}D_ih(sp_i)+\aleph\big((P_{\lambda_0})\big)\right). \tag{54}$$

Au passage, il faut noter qu'apparaît dans le majorant du membre de gauche de (53) la quantité

$$\frac{1}{[K:\mathbf{Q}]}\sum_{\substack{v\nmid v_0\\ i\in\{1,\dots,m\}}}\log\frac{1}{|A_{\varepsilon_i}^{(i)}(\psi_{v_0,i,\varepsilon_i}(su),(1:0:\dots:0))|_v^{D_i}} \tag{55}$$

qui, en vertu de la formule du produit, vaut

$$\frac{1}{[k:\mathbf{Q}]}\sum_{i=1}^{m}\log\big|A_{\varepsilon_i}^{(i)}(\psi_{v_0,i,\varepsilon_i}(su),(1:0:\dots:0))\big|_{v_0}^{D_i},$$

expression qui elle-même est plus petite que $c_{36}\sum_{i=1}^m D_i(h(sp_i)+1)$ pour une certaine constante $c_{36}\geqslant 1$. La somme (55) ci-dessus est donc bien comprise dans le majorant (54). Par construction, nous disposons d'une majoration de la somme des $h_{\mathrm{L}^2}(w_j)$ (voir §4.1.3) ainsi que de la hauteur de P, donnée par la proposition 4.15. En vertu du lemme 4.6, la quantité χ_H est bornée. Les lemmes 4.1 et 4.2 montrent alors que la quantité (54) est majorée par $U/(C_0D)$. Quant au membre de droite de l'égalité (53), il est minoré par $U/D-h(P)-C_0\sum_j h_{\mathrm{L}^2}(w_j)\geqslant U/(2D)$ dès lors que $\log \mathrm{d}_{v_0}(u,V)\leqslant -C_0^3U$ (*resp.* $\log \mathrm{d}_{v_0}(u,V)\leqslant -C_0^3(1+(\log r_p^{-1})/\log\mathfrak{r})U)$ si v_0 est archimédienne (*resp.* ultramétrique). Nous constatons alors une contradiction avec le majorant

$U/(C_0 D)$. Ce qui conclut la démonstration des théorèmes 1.2 et 1.3 (en observant pour ce dernier que le terme $1 + (\log r_p^{-1})/\log \mathfrak{r}$ est majoré par $c_{37} \log(\mathfrak{r}+1)/\log \mathfrak{r}$ pour une certaine constante absolue c_{37}).

Remerciements

Je remercie G. Diaz et G. Rémond pour leurs remarques et commentaires sur une première version de ce texte, qui m'ont permis d'améliorer la présentation générale et de corriger de nombreux détails. Je remercie également J.-B. Bost à double titre, à la fois pour ses éclaircissements à propos du lemme 4.6 et du théorème de Raynaud sous-jacent, et aussi pour sa lecture critique qui a permis d'alléger ce texte.

Références

[1] M. Ably, É. Gaudron, Approximation diophantienne sur les courbes elliptiques à multiplication complexe, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 337 (2003) 629–634.
[2] A. Baker, G. Wüstholz, Logarithmic forms and group varieties, J. Reine Angew. Math. 442 (1993) 19–62.
[3] D. Bertrand, Sous-groupes à un paramètre p-adique de variétés de groupe, Invent. Math. 40 (2) (1977) 171–193.
[4] D. Bertrand, Approximations diophantiennes p-adiques sur les courbes elliptiques admettant une multiplication complexe, Compos. Math. 37 (1) (1978) 21–50.
[5] D. Bertrand, Yu. Flicker, Linear forms on abelian varieties over local fields, Acta Arith. 38 (1) (1980) 47–61.
[6] S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud, Néron Models, Ergeb. Math. Grenzgeb., vol. 21, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
[7] J.-B. Bost, Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres (d'après D. Masser et G. Wüstholz), in : Séminaire Bourbaki, Astérisque 237 (1996) 115–161.
[8] J.-B. Bost, Algebraic leaves of algebraic foliations over number fields, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 93 (2001) 161–221.
[9] N. Bourbaki, Groupes et Algèbres de Lie, Hermann, Paris, 1972, Fascicule XXXVII.
[10] S. David, Minorations de formes linéaires de logarithmes elliptiques, Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) 62 (1995), iv+143 pp.
[11] S. David, N. Hirata-Kohno, Recent progress on linear forms in elliptic logarithms, in: G. Wüstholz (Ed.), A Panorama of Number Theory or the View from Baker's Garden, Zürich, 1999, Cambridge Univ. Press, Septembre 2002, pp. 26–37.
[12] S. David, P. Philippon, Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés des tores, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. XXVIII (4) (1999) 489–543.
[13] M. Demazure, P. Gabriel, Groupes Algébriques. Tome 1, Masson & Cie, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1970. Avec un appendice Corps de classes local par M. Hazewinkel.
[14] P. Dong, Minorations de combinaisons linéaires de logarithmes p-adiques de nombres algébriques, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 343 (1995), 97 pp.
[15] É. Gaudron, Mesures d'indépendance linéaire de logarithmes dans un groupe algébrique commutatif, Invent. Math. 162 (2005) 137–188.
[16] É. Gaudron, Formes linéaires de logarithmes effectives sur les variétés abéliennes, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 39 (5) (2006) 699–773.
[17] P. Graftieaux, Formal subgroups of abelian varieties, Invent. Math. 145 (2001) 1–17.
[18] N. Hirata-Kohno, Formes linéaires de logarithmes de points algébriques sur les groupes algébriques, Invent. Math. 104 (1991) 401–433.
[19] E.M. Matveev, An explicit lower bound for a homogeneous rational linear form in logarithms of algebraic numbers I (II), Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. 62 (4) (1998) 81–136; Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. 64 (6) (2000) 125–180.
[20] Yu.V. Nesterenko, Estimates for the characteristic function of a prime ideal, Math. Sb. (N.S.) 123 (165) (1984) 11–34; Math. USSR Sbornik 51 (1985) 9–32.
[21] P. Philippon, Nouveaux lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs, Rocky Mountain J. Math. 26 (3) (1996) 1069–1088.
[22] P. Philippon, M. Waldschmidt, Formes linéaires de logarithmes sur les groupes algébriques commutatifs, Illinois J. Math. 32 (2) (1988) 281–314.

[23] P. Philippon, M. Waldschmidt, Lower bounds for linear forms in logarithms, in: New Advances in Transcendence Theory, Durham, 1986, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988, pp. 280–312.
[24] P. Philippon, M. Waldschmidt, Formes linéaires de logarithmes simultanées sur les groupes algébriques commutatifs, in: Catherine Goldstein (Ed.), Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1986–87, in: Progress in Mathematics, vol. 75, Birkhäuser Boston, Inc., 1989, pp. 313–347.
[25] G. Rémond, F. Urfels, Approximation diophantienne de logarithmes elliptiques p-adiques, J. Number Theory 57 (1) (1996) 133–169.
[26] D. Roy, Interpolation sur des perturbations d'ensembles produits, Bull. Soc. Math. France 130 (2) (2002) 387–408.
[27] D. Roy, J.L. Thunder, An absolute Siegel's lemma, J. Reine Angew. Math. 476 (1996) 1–26.
[28] D. Roy, J.L. Thunder, Bases of number fields with small height, in: Symposium on Diophantine Problems, Boulder, CO, 1994, Rocky Mountain J. Math. 26 (3) (1996) 1089–1098.
[29] W.M. Schmidt, On heights of algebraic subspaces and diophantine approximations, Ann. of Math. (2) 85 (1967) 430–472.
[30] J.-P. Serre, Quelques propriétés des groupes algébriques commutatifs, Astérisque (1979) 191–202, Appendice II de [31].
[31] M. Waldschmidt, Nombres transcendants et groupes algébriques, Astérisque 69/70 (1979), 218 pp.
[32] M. Waldschmidt, A lower bound for linear forms in logarithms, Acta Arith. 37 (1980) 257–283.
[33] M. Waldschmidt, Diophantine Approximation On Linear Algebraic Groups, Grundlehren Math. Wiss., vol. 326, Springer-Verlag, 2000.
[34] G. Wüstholz, A new approach to Baker's theorem on linear forms in logarithms. III, in: New Advances in Transcendence Theory, Durham, 1986, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988, pp. 399–410.
[35] K. Yu, p-Adic logarithmic forms and group varieties. I, J. Reine Angew. Math. 502 (1998) 29–92.
[36] K. Yu, p-Adic logarithmic forms and group varieties. II, Acta Arith. 89 (4) (1999) 337–378.
[37] K. Yu, p-Adic logarithmic forms and group varieties. III, Forum Math. 19 (2) (2007) 187–280.