UFR MATHÉMATIQUES
Université Clermont Auvergne

Licence de mathématiques
troisième année

Analyse complexe

Notes de cours de Yanick HEURTEAUX - année 2020-2021

CHAPITRE 1

Séries entières - fonctions analytiques

1.1 Définition - rayon de convergence

Définition 1.1.1. *On appelle série entière toute série du type* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *où* (a_n) *est une suite de nombres complexes et z une variable complexe. Les* a_n *sont appelés les coefficients de la série entière.*

La première question naturelle qui se pose est de savoir pour quels nombres complexes z la série est convergente. Voici trois premiers exemples élémentaires.

- $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$. Si $z \neq 0$, $\left|\frac{z^{n+1}/(n+1)!}{z^n/n!}\right| = \frac{|z|}{n+1}$ qui converge vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Ainsi, par la règle de d'Alembert, la série est absolument convergente. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on notera
$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} .$$
- $\sum_{n\geq 0} z^n$. Si $z \neq 1$,
$$\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} .$$
Ainsi, si $|z| < 1$, la série converge et
$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z} .$$
Si $|z| \geq 1$, la série diverge grossièrement.
- $\sum_{n\geq 0} n^n z^n$. La série diverge grossièrement dès que $z \neq 0$.

1.1.1 Rayon de convergence

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière. Observons que $|a_n z^n| = |a_n||z|^n$ et notons

$$\mathcal{A} = \left\{ r \geq 0 \; ; \; \sum_{n\geq 0} |a_n| r^n \text{ converge} \right\} .$$

L'ensemble $\mathcal{A}$ est évidemment non vide ($0 \in \mathcal{A}$). De plus, par des comparaisons élémentaires, c'est un intervalle de borne inférieure 0. Il s'écrit donc $[0;R]$ ou $[0;R[$, avec éventuellement $R = +\infty$. Cela nous amène naturellement à la définition suivante :

Définition 1.1.2. *On appelle rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ la quantité $R \in [0, +\infty]$ définie par*

$$R = \sup \left\{ r \geq 0 \; ; \; \sum_{n\geq 0} |a_n| r^n \textit{ converge} \right\} .$$

Proposition 1.1.3. *Le rayon de convergence R est caractérisée par les deux propriétés suivantes :*

- *Si $|z| < R$, alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument*
- *Si $|z| > R$, alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ diverge grossièrement. Plus précisément, son terme général n'est pas borné.*

Le disque ouvert $D(0,R)$ est appelé disque ouvert de convergence. Le cercle $S(0,R)$ de centre 0 et de rayon R est appelé cercle d'incertitude.

Preuve de la Proposition 1.1.3. On a vu que $\mathcal{A} = [0;R]$ ou $\mathcal{A} = [0;R[$, ce qui donne le premier point. Soit maintenant un nombre complexe z tel que $|z| > R$ et supposons que la suite $(|a_n z^n|)$ soit bornée. Prenons alors r tel que $R < r < |z|$. On a

$$|a_n| r^n = |a_n z^n| \times \left(\frac{r}{|z|} \right)^n \leq M \left(\frac{r}{|z|} \right)^n$$

qui est le terme général d'une série convergente. C'est absurde.

Quelques exemples :

- $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n!z^n$, $\quad R = 0$
- $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$, $\quad R = +\infty$
- $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a^n z^n$, $\quad R = \frac{1}{|a|}$
- $\displaystyle\sum_{n\geq 0} z^n$, $\quad R = 1$ et tout point de $S(0,1)$ est un point de divergence
- $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$, $\quad R = 1$ et tout point de $S(0,1)$ est un point d'absolue convergence
- $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$, $\quad R = 1$ et la série diverge en $z = 1$ et converge en $z = -1$.

1.1.2 Comment calculer le rayon de convergence

► *Le lemme d'Abel.*

Si la suite $(a_n r^n)$ est bornée et si $|z| < r$, alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente. Il suffit en effet d'écrire comme plus haut

$$|a_n z^n| = |a_n| r^n \times \left(\frac{|z|}{r}\right)^n \leq M \left(\frac{|z|}{r}\right)^n .$$

En conséquence :

$$R = \sup\{r \geq 0 \ ; \ (|a_n| r^n) \text{ est bornée } \} .$$

► *Utilisation de la règle de d'Alembert.*

Si a_n est non nul à partir d'un certain rang et si $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ converge vers ℓ, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ vaut $R = \frac{1}{\ell}$ (avec la convention $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$). En effet, si $z \neq 0$,

$$\frac{\left|a_{n+1} z^{n+1}\right|}{|a_n z^n|} \to \ell |z|$$

qui est strictement inférieur à 1 si $|z| < 1/\ell$ et strictement supérieur à 1 si $|z| > 1/\ell$.

► *La formule d'Hadamard.*

Pour toute série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, on a :

$$\boxed{R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}}}$$

avec la convention $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Preuve. Si $|z| < r < \dfrac{1}{\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}}$, alors $|a_n| < \frac{1}{r^n}$ à partir d'un certain rang. Il en résulte que $|a_n z^n| \leq \left(\frac{|z|}{r}\right)^n$ à partir d'un certain rang et la série converge absolument. Ainsi,

$$R \geq \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}} .$$

Inversement, si $|z| > r > \dfrac{1}{\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}}$, alors $|a_n| > \frac{1}{r^n}$ infiniment souvent. Il en résulte que $|a_n z^n| \geq \left(\frac{|z|}{r}\right)^n$ infiniment souvent et la série diverge grossièrement. Ainsi,

$$R \leq \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}} .$$

► *Règle de comparaison.*

Si $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ sont deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b et si $|a_n| \leq |b_n|$ à partir d'un certain rang, alors $R_a \geq R_b$.

1.2 Série dérivée - holomorphie de la somme d'une série entière

1.2.1 Série dérivée

Définition 1.2.1. *Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière. La série dérivée de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est la série entière*

$$\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1} .$$

Proposition 1.2.2. *Les séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$ ont même rayon de convergence.*

Preuve de la Proposition 1.2.2. Notons R le rayon de convergence de la série initiale et R' celui de la série dérivée. Si $z \neq 0$ et $n \geq 1$, on a

$$|a_n z^n| \leq |n a_n z^n| = |z| \left| n a_n z^{n-1} \right|,$$

ce qui prouve que $R' \leq R$. Réciproquement, supposons $|z| < R$ et prenons ρ tel que $|z| < \rho < R$. On a

$$\left| n a_n z^{n-1} \right| = n \times \left(\frac{|z|}{\rho} \right)^{n-1} \times \left| a_n \rho^n \right| \times \frac{1}{\rho} \leq C \times \left| a_n \rho^n \right|,$$

ce qui prouve que la série $\sum_n n a_n z^{z-1}$ converge et que $R' \geq R$.

1.2.2 Dérivation par rapport à la variable complexe

Définition 1.2.3. *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction définie sur l'ouvert non vide Ω de $\mathbb{C}$. On dit que f est holomorphe sur Ω si pour tout $z \in \Omega$, la limite*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe. On note alors $f'(z)$ cette limite et on note $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.

Remarque. Les formules de dérivation concernant les combinaisons linéaires, les produits, les quotients et les compositions, telles qu'on les connait pour les fonctions de la variable réelle s'étendent sans difficulté supplémentaire au contexte des fonctions de la variable complexe.

Exemple fondamental. Les polynômes sont des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$.

$$\text{Si } P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad \text{alors} \quad P'(z) = \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1} .$$

Il suffit de constater que la fonction $z \mapsto z^k$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Or

$$\begin{aligned} \frac{(z+h)^k - z^k}{h} &= \frac{((z+h)-z)((z+h)^{k-1} + (z+h)^{k-2}z + \cdots + z^{k-1})}{h} \\ &= (z+h)^{k-1} + (z+h)^{k-2}z + \cdots + z^{k-1} \\ &\to kz^{k-1} \end{aligned}$$

lorsque $h \to 0$.

Plus généralement, on a le théorème suivant :

Théorème 1.2.4. *Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Pour $z \in D(0,R)$, posons*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n .$$

La fonction f est holomorphe sur $D(0,R)$ et pour tout $z \in D(0,R)$,

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1} .$$

Remarque. On peut réitérer le théorème précédent. En particulier, f est infiniment dérivable et pour tout $n \geq 0$,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} .$$

Preuve du Théorème 1.2.4. Soir $z \in D(0,R)$ et ρ tel que $|z| < \rho < R$. Prenons ensuite h tel que $|h| < \rho - |z|$ de telle sorte que $|z+h| < \rho$. On a

$$\begin{aligned}\left|\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1}\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_0^1 nh(z+th)^{n-1}dt - nz^{n-1}\right| \\ &\leq \left|\int_0^1 (n(z+th)^{n-1}dt\right| + n|z|^{n-1} \\ &\leq \int_0^1 n|z+th|^{n-1}dt + n\rho^{n-1} \\ &\leq 2n\rho^{n-1}\ .\end{aligned}$$

On sait de plus que la série $\sum_n 2na_n\rho^{n-1}$ est absolument convergente. Si $\varepsilon > 0$, on peut alors trouver un entier n_0 tel que

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} 2n|a_n|\rho^{n-1} < \varepsilon\ .$$

Ainsi,

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \sum_{n=1}^{+\infty} aa_n z^{n-1}\right| \leq \left|\sum_{n=1}^{n_0-1} a_n\left(\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1}\right)\right| + \varepsilon\ .$$

Comme de plus (cf. le cas des polynômes) $\sum_{n=1}^{n_0-1} a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h}$ converge vers $\sum_{n=1}^{n_0-1} na_n z^{n-1}$
On conclut donc que

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \sum_{n=1}^{+\infty} na_n z^{n-1}\right| \leq 2\varepsilon$$

si $|h|$ est suffisamment petit, ce qui prouve le résultat.

1.3 Analyticité

Définition 1.3.1. *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction définie sur l'ouvert non vide Ω de $\mathbb{C}$ et soit $z_0 \in \Omega$. On dit que f est analytique en z_0 si il existe une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n h^n$ de rayon de convergence non nul et un nombre réel $r > 0$ tels que pour tout $h \in D(0,r)$,*

$$f(z_0+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n h^n,$$

ce qui revient encore à écrire que pour tout $z \in D(z_0,r)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n\ .$$

Remarque. En particulier, f est holomorphe dans $D(z_0, r)$ et pour tout $n \geq 0$,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} .$$

Définition 1.3.2. *On dit que f est analytique dans Ω si elle est analytique en tout point $z_0 \in \Omega$. On note $\mathcal{A}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions analytiques dans Ω.*

Proposition 1.3.3. *$\mathcal{A}(\Omega)$ est une algèbre sur $\mathbb{C}$.*

Preuve. La stabilité par combinaison linéaire est immédiate. Pour démontrer la stabilitṕar produit, , on s'appuie sur un résultat bien connu concernant les séries produit : si $\sum_n \alpha_n$ et $\sum_n \beta_n$ sont deux séries absolument convergentes de nombres complexes, alors la série de terme général $\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k}$ est absolument convergente et sa somme vérifie $\sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n$.

Supposons que f et g soient deux fonctions analytiques en un point $z_0 \in \Omega$. On peut alors trouver deux suite (a_n) et (b_n) de nombres complexes et un nombre réel $r > 0$ tels que pour tout $z \in D(z_0, r)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{et} \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n,$$

les deux séries étant absolument convergentes. Posons $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. On a alors

$$c_n (z - z_0)^n = \sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k b_{n-k} (z - z_0)^{n-k} .$$

Le résultat sur les séries produit nous assure alors que si $|z - z_0| < r$,

$$f(z) \times g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

ce qui prouve l'analyticité de $f \times g$ au point z_0.

Théorème 1.3.4. *Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Pour $z \in D(0, R)$, posons*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n .$$

Alors $f \in \mathcal{A}(D(0, R))$. Plus précisément, si $z_0 \in D(0, R)$, l'identité

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

est valide pour tout $z \in D(z_0, R - |z_0|)$.

Remarque. Il faut bien comprendre qu'il y a quelque chose à démontrer. Il faut ici justifier qu'autour du point z_0, f est somme d'une série entière **centrée en** z_0.

Esquisse de preuve du Théorème 1.3.4. On sait que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour tout $z \in D(0,R)$. Fixons $z_0 \in D(0,R)$. La série de Taylor de f en z_0 est

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k \qquad \text{ou} \qquad f^{(k)}(z_0) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} z_0^{n-k} .$$

Il s'agit de voir que la série de Taylor a un rayon de convergence non nul et que sa somme coincide avec f au voisinage de z_0. Il s'agit donc d'étudier la série double

$$\sum_{k\geq 0}\sum_{n\geq k} a_n \frac{n!}{(n-k)!} z_0^{n-k} \times \frac{1}{k!}(z-z_0)^k .$$

Sous réserve qu'on puisse échanger les deux signes sommes, on a grâce à la formule du binome de Newton

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} z_0^{n-k} \times \frac{1}{k!}(z-z_0)^k = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_0^{n-k}(z-z_0)^k = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n . \tag{1.1}$$

Un résultat sur les séries doubles nous dit que ce calcul est licite tant que

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty} \left| a_n \binom{n}{k} z_0^{n-k}(z-z_0)^k \right| < +\infty,$$

ce qui veut dire après échange, tant que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|(|z_0| + |z-z_0|)^n < +\infty .$$

(l'échange entre les deux séries est maintenant licite car la nouvelle série double est à termes positifs).
Finalement, la relation 1.1 est licite si $|z-z_0| < R - |z_0|$, ce qui est exactement le résultat annoncé dans le théorème 1.3.4

Corollaire 1.3.5. *Soit f une fonction définie sur Ω. L'ensemble des points de Ω où f est analytique est un ouvert de Ω.*

Preuve. Si z_0 est un point d'analyticité de f, on peut écrire $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ dans un disque $D(z_0,R)$. Si maintenant $z_1 \in D(z_0,R)$, le théorème 1.3.4 nous apprend que f se développe en série entière en z_1 (avec un rayon de convergence au moins égal à $R - |z_0 - z_1|$. La fonction f est donc analytique en tout point de $D(z_0,R)$, ce qui prouve bien que l'ensemble des points d'analycité de f est ouvert.

CHAPITRE 2

La fonction exponentielle

La fonction exponentielle est une des fonctions les plus importantes des mathématiques. Elle est définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ par la formule

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \,. \tag{2.1}$$

La fonction exponentielle vérifie la relation fonctionnelle

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b), \tag{2.2}$$

valable pour tout $a \in \mathbb{C}$ et tout $b \in \mathbb{C}$. Ceci justifie la notation

$$\exp(z) = e^z, \text{ où } \quad e = \exp(1) \approx 2,71828 \,.$$

Pour démontrer la relation (2.2), on s'appuie sur un résultat bien connu concernant les séries produit : si $\sum_n a_n$ et $\sum_n b_n$ sont deux séries absolument convergentes de nombres complexes, alors la série de terme général $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ est absolument convergente et sa somme vérifie $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Si on prend $a_n = \frac{a^n}{n!}$ et $b_n = \frac{b^n}{n!}$, on a alors, grâce à la formule du binôme de Newton,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \times \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \frac{(a+b)^n}{n!},$$

ce qui donne le résultat.

La fonction exponentielle possède un certain nombre de propriétés résumées dans le théorème qui suit.

Théorème 2.0.1. *La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes.*

1. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$.
2. *La fonction* exp *est holomorphe sur* $\mathbb{C}$ *et* $\exp' = \exp$.
3. *La restriction à* $\mathbb{R}$ *de la fonction* exp *est continue, strictement croissante et vérifie*
$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty\,.$$
C'est une bijection entre $\mathbb{R}$ *et* $]0;+\infty[$. *Sa bijection réciproque, notée* ln *est définie sur* $]0;+\infty[$ *et appelée logarithme néperien.*
4. *Il existe un nombre réel strictement positif noté* π *et caractérisé par*
$$e^{i\pi/2} = i \qquad \text{et} \qquad e^z = 1 \text{ si et seulement si } z \in 2i\pi\mathbb{Z}\,.$$
5. *La fonction* exp *est périodique de période* $2i\pi$.
6. *L'application* $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{it}$ *est une surjection sur le cercle unité*
$$S_1 = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = 1\}\,.$$
C'est un morphisme du groupe additif $(\mathbb{R},+)$ *sur le groupe multiplicatif* $(S_1,\times)$ *de noyau* $2\pi\mathbb{Z}$.
On définit $\cos t$ *et* $\sin t$ *respectivement comme la partie réelle et la partie imaginaire de* e^{it}, *ce qui donne*
$$e^{it} = \cos t + i\sin t, \quad \cos t = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin t = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}\,.$$
7. *Pour tout* $w \in \mathbb{C}^*$, *il existe* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $e^z = w$.
8. $e^a = e^b$ *si et seulement si il existe il existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $a = b + 2ik\pi$.
9. *On a* $\pi = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx \approx 3,14159$.

Preuve du Théorème 2.0.1.

1. Comme $e^z \times e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1$, la fonction exponentielle ne s'annule pas.
2. On a vu au chapitre précédent que la somme d'une série entière est holomorphe sur son disque ouvert de convergence et que sa dérivée complexe s'obtient en dérivant terme à terme la série entière. Ici, pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$\exp'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nz^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \exp(z)\,.$$

3. En particulier, exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$. La dérivée est clairement strictement positive sur $[0;+\infty[$ et même sur $\mathbb{R}$ dans la mesure où $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$. La restriction à $\mathbb{R}$ de la fonction exp est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a aussi pour tout $x \in [0,+\infty[$, $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \geq 1 + x$ ce qui assure que

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty\ .$$

Enfin, comme $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, on conclut que

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0\ .$$

Le théorème de la bijection assure donc que la restriction de la fonction exp à $\mathbb{R}$ est une bijection entre $\mathbb{R}$ et $]0;+\infty[$.

4. Regardons maintenant l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{it}$ et observons que

$$e^{it} \times \overline{e^{it}} = e^{it} \times e^{-it} = e^0 = 1\ .$$

Ainsi, $\left|e^{it}\right| = 1$ et $e^{it} \in S_1$. Notons alors $\cos t$ (resp. $\sin t$) la partie réelle (resp. imaginaire) de e^{it}. Comme $e^{it} \in S_1$, on trouve $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ et en séparant dans le développement en série entière la partie réelle et la partie imaginaire, on a aussi

$$\cos t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}\ . \tag{2.3}$$

Observons ensuite que la fonction cos s'annule. Pour cela, on constate que $\cos(0) = 1$ et que

$$\cos(2) = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} + \sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} = -\frac{1}{3} + \sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}\ .$$

Comme

$$\frac{2^{k+1}}{(2(k+1))!} \times \frac{(2k)!}{2^{2k}} = \frac{4}{(2k+1)(2k+2)} \leq 1 \quad \text{si } k \geq 1,$$

on conclut par le critère des séries alternées que $\cos(2) \leq -\frac{1}{3}$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous apprend alors que la fonction cos s'annule sur l'intervalle $[0;2]$.

Notons t_0 le plus petit réel strictement positif vérifiant $\cos t_0 = 0$, puis $\pi = 2t_0$. Comme $\cos^2 t_0 + \sin^2 t_0 = 1$, on a ainsi $\sin t_0 = \pm 1$. Enfin, pour tout $t \in [0;t_0]$, $\cos t = \sin'(t) \geq 0$, ce qui nous apprend que la fonction sinus est croissante sur l'intervalle $[0;t_0]$ et nous permet de dire que $\sin t_0 = 1$. Finalement,

$$e^{i\pi/2} = i \quad \text{et} \quad e^{2i\pi} = \left(e^{i\pi/2}\right)^4 = 1\ .$$

Résolvons ensuite l'équation $e^z = 1$. Si $z = x + iy$,

$$e^z = e^x \times e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y),$$

où $e^x > 0$ et $\left|e^{iy}\right| = 1$. Si $e^z = 1$, on a donc nécessairement $x = 0$ et $e^{iy} = 1$. Il s'agit donc d'établir que $e^{iy} = 1$ si et seulement si $y \in 2\pi\mathbb{Z}$. Il est clair que $e^{2in\pi} = \left(e^{2i\pi}\right)^n = 1$ et il faut donc observer que l'équation $e^{iy} = 1$ ne possède pas de solution sur l'intervalle ouvert $]0;2\pi[$. Soit donc $y \in]0;2\pi[$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $e^{iy} = 1$. Notons $u = \cos(y/4)$ et $v = \sin(y/4)$ qui sont deux nombres réels strictement positifs (car $y/4 \in]0;\pi/2[$). Si $e^{iy} = 1$, on a $(u+iv)^4 = 1$ ou encore en développant

$$u^4 - 6u^2v^2 + v^4 + 3iuv(u^2 - v^2) = 1 \ .$$

On a alors $u^2 = v^2$. Comme de plus $u^2 + v^2 = 1$, on conclut que $u = v = \frac{\sqrt{2}}{2}$ puis que $e^{iy} = (u+iv)^4 = -1 \neq 1$, ce qui fournit une contradiction.

5. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\exp(z + 2i\pi) = \exp(z) \times \exp(2i\pi) = \exp(z)$$

et la fonction exp est $2i\pi$ périodique.

6. On a déjà observé que les fonctions sinus et cosinus prennent des valeurs strictement positives sur l'intervalle $]0;\pi/2[$. Comme de plus $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$, on en déduit que la fonction sinus est strictement croissante sur $[0;\pi/2]$ et que la fonction cosinus est strictement décroissante sur ce même intervalle.

Prenons dans un premier temps $w = u + iv \in S_1$ tel que $u \geq 0$ et $v \geq 0$. Comme la fonction cos décroit sur $[0;\pi/2]$ entre les valeurs 1 et 0, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t \in [0;\pi/2]$ tel que $\cos t = u$. On a alors $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - u^2 = v^2$. Enfin, comme $\sin t \geq 0$, on conclut que $\sin t = v$ et $e^{it} = u + iv = w$.

Si $w = u + iv$ est tel que $u \leq 0$ et $v \geq 0$, alors $-iw = v - iu$ a ses deux coordonnées positives. Par le cas précédent, il existe $s \in [0;\pi/2]$ tel que $-iw = e^{is}$, ce qui donne $w = ie^{is} = e^{i(s+\pi/2)}$. Le réel $t = s + \pi/2 \in [\pi/2;\pi]$ et est tel que $e^{it} = w$.

Enfin, si $v \leq 0$ et u quelqonque, alors le nombre complexe $-w = -u - iv$ a sa partie imaginaire positive. Grace aux deux cas précédents, on peut trouver $s \in [0:\pi]$ tel que $-w = e^{is}$, ce qui donne $w = -e^{is} = e^{i(s+\pi)}$. Le réel $t = s + \pi \in [\pi;2\pi]$ et est tel que $e^{it} = w$.

On a bien montré la surjectivité de l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{it} \in S_1$. Enfin, $e^{it} = 1$ si et seulement si $it \in 2i\pi\mathbb{Z}$, c'est à dire $t \in 2\pi\mathbb{Z}$. Le noyau du morphisme est donc le sous-groupe $2\pi\mathbb{Z}$ du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$. En particulier, les fonctions cosinus et sinus sont aussi 2π périodiques sur $\mathbb{R}$.

7. On sait que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$. Soit maintenant $w \neq 0$ et cherchons $z = x + iy$ tel que $e^z = w$. On a nécessairement $|e^z| = e^x = |w|$. Comme $w \neq 0$, cette équation possède bien une (unique) solution x réelle (cf. le point 3). Le nombre complexe $\frac{w}{|w|}$ est ensuite de module 1. On peut donc trouver $y \in \mathbb{R}$ tel que $e^{iy} = \frac{w}{|w|}$ (cf. le point 6). Finalement

$$e^{x+iy} = e^x \times e^{iy} = |w| \times \frac{w}{|w|} = w \ .$$

8. $e^a = e^b$ signifie $e^{a-b} = 1$ ou encore $a - b \in 2i\pi\mathbb{Z}$ par le point 4.
9. Notons $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$. Cette fonction est bien définie sur $]-\pi/2;\pi/2[$ car $\cos t$ ne s'annule pas sur cet intervalle. Sa dérivée vaut $\tan'(t) = 1 + \tan^2(t)$ et est strictement positive. La fonction est donc strictement croissante sur l'intervalle $]-\pi/2;\pi/2[$ et en regardant les limites en $\pm\pi/2$, on conclut que c'est un C^1 difféomorphisme entre $]-\pi/2;\pi/2[$ et $\mathbb{R}$. Effectuons le changement de variable $x = \tan(t)$ dans l'intégrale convergente $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. On trouve
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\tan'(t)\,dt}{1+\tan^2(t)} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt = \pi \ .$$

On déduit immédiatement du théorème précédent le corollaire suivant.

Corollaire 2.0.2 (Frome trigonométrique d'un nombre complexe)**.** *Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que*
$$z = |z| \times e^{i\theta} \ .$$

- *θ est ce qu'on appelle une détermination de l'argument du nombre complexe z*
- *$z = |z| \times e^{i\theta}$ est appelée une forme trigonométrique du nombre complexe z*
- *Si $z = |z| \times e^{i\theta_1} = |z| \times e^{i\theta_2}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta_2 = \theta_1 + 2k\pi$.*

On peut aussi définir les fonctions cos et sin sur $\mathbb{C}$ tout entier par les formules
$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \ . \tag{2.4}$$

On a alors la proposition élémentaire suivante.

Proposition 2.0.3 (Propriétés des fonctions cosinus et sinus)**.**
- *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$*
- *Pour tout $z \in \mathbb{C}$,*
$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad et \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$
- *Les fonctions* cos *et* sin *sont holomorphes sur $\mathbb{C}$*
- *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\cos'(z) = -\sin(z)$ et $\sin'(z) = \cos(z)$*
- *Les fonctions* cos *et* sin *sont 2π périodiques sur $\mathbb{C}$*
- *Les fonctions* cos *et* sin *sont surjectives sur $\mathbb{C}$.*

Seul le dernier point mérite une explication. Montrons par exemple la surjectivité de la fonction cosinus. Si $w \in \mathbb{C}$, $\cos(z) = w$ signifie encore
$$e^{2iz} - 2we^{iz} + 1 = 0 \ .$$

Or, l'équation $X^2 - 2wX + 1 = 0$ (d'inconnue X) possède des solutions sur $\mathbb{C}$ et celles-ci sont non nulles. Notons w_1 une telle solution. Grâce au théorème 2.0.1, on sait alors trouver un nombre complexe z tel que $e^{iz} = w_1$ et on a $\cos(z) = w$.

CHAPITRE 3

Fonctions holomorphes - premières propriétés

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et f une fonction définie sur Ω à valeurs complexes.

- On dit que f est $\mathbb{C}$-dérivable en un point $z_0 \in \Omega$ si $\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ admet une limite lorsque h tend vers 0. On note alors cette limite $f'(z_0)$.
- On dit que f est holomorphe dans Ω lorsque $f'(z_0)$ existe en tout point de Ω.

On note $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes dans Ω.

Exemples et contre-exemples : les polynômes, les sommes de séries entières sur leur disque ouvert de convergence ; la fonction $z \mapsto \overline{z}$ n'est $\mathbb{C}$-dérivable en aucun point de $\mathbb{C}$. En effet, si $z \in \mathbb{C}$ et si $h = re^{i\theta}$, alors $\dfrac{\overline{z+h}-\overline{z}}{h} = \dfrac{\overline{h}}{h} = e^{-2i\theta}$ qui n'a pas de limite lorsque r tend vers 0.

3.1 Premières propriétés

Proposition 3.1.1. *Toute fonction $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 est continue en z_0.*

En effet, on peut écrire (par définition de la dérivabilité en z_0)

$$f(z_0+h) = f(z_0) + hf'(z_0) + h\varepsilon(h), \tag{3.1}$$

où $\varepsilon(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0. Il en résulte que $\lim\limits_{h\to 0} f(z_0+h) = f(z_0)$, ce qui prouve la continuité de f en z_0.

Proposition 3.1.2.

- *Si $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ et si $\lambda \in \mathbb{C}$, alors, $f+g$, λf et fg sont dans $\mathcal{H}(\Omega)$. Ainsi $\mathcal{H}(\Omega)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre.*

- *On a de plus les formules de dérivation suivantes*

$$(f+g)' = f' + g' \qquad (\lambda f)' = \lambda f'$$
$$(fg)' = f'g + fg' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2},$$

la dernière égalité ayant lieu en dehors des zéros de g.
- *Si* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $g \in \mathcal{H}(U)$ *et si* $f(\Omega) \subset U$, *alors* $g \circ f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *et*

$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f) .$$

Exemples : Les fractions rationnelles $f = \frac{P}{Q}$ sont holomorphes en dehors des zéros du dénominateur Q.

Je ne m'attarderai pas sur la preuve de ces propriétés en tous points identiques aux formules obtenues pour les fonctions de la variable réelle. Il faut noter tout de même que la façon la plus efficace d'établir les propriétés de dérivation des produits, quotients et composées de fonctions f et g, consiste à partir des développements limités pour les fonctions f et g tels qu'établis en (3.1).

3.2 Equations de Cauchy-Riemann

L'application canonique $z = x + iy \in \mathbb{C} \longmapsto (x,y) \in \mathbb{R}^2$ permet d'identifier les nombres complexes aux vecteurs du plan $\mathbb{R}^2$. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ peut alors aussi se voir (en séparant sa partie réelle et sa partie imaginaire) comme une fonction de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Il est alors naturel de se demander quel lien il peut y avoir entre les propriétés de $\mathbb{C}$-dérivabilité de f et les propriétés de différentiabilité de f lorsque celle ci est vue comme une fonction de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Proposition 3.2.1. *Soit* $f = P + iQ$ *une fonction définie sur l'ouvert* Ω, *où* P *et* Q *désignent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de* f *et* $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. *Il y a équivalence entre*

1. f *est* $\mathbb{C}$*-dérivable en* z_0
2. f *est différentiable en* $z_0 = x_0 + iy_0$ *et vérifie*

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0)$$
$$\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)$$

3. f *est différentiable en* $z_0 = x_0 + iy_0$ *et vérifie*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 .$$

Dans ce cas, on a alors

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,.$$

Les équations 2. *sont appelées* **équations de Cauchy-Riemann***.*

Remarque. Si f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0, la matrice jacobienne de f en z_0 s'écrit :

$$J_f(z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(z_0) & -\frac{\partial Q}{\partial x}(z_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial P}{\partial x}(z_0) \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Il s'agit d'une matrice de similitude directe (composée d'une homothétie de rapport r et d'une rotation d'angle θ). Son jacobien vaut :

$$\det(J_f(z_0)) = \left(\frac{\partial P}{\partial x}(z_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(z_0)\right)^2 = |f'(z_0)|^2\,.$$

Preuve du Théorème 3.2.

$1 \Rightarrow 2$ On identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$. Comme f est $\mathbb{C}$-dérivable en $z_0 = x_0 + iy_0$, on peut écrire

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)h + h\varepsilon(h)\,.$$

Si $f'(z_0) = a + ib$ et $h = h_1 + ih_2$, on a alors

$$f'(z_0)h = (ah_1 - bh_2) + i(ah_2 + bh_1)\,.$$

L'application $(h_1, h_2) \mapsto (ah_1 - bh_2, ah_2 + bh_1)$ est alors clairement linéaire et la fonction (vue comme une fonction de deux variables) est différentiable en (x_0, y_0). Sa matrice jacobienne s'écrit

$$J_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

ce qui donne les équations de Cauchy-Riemann.

$2 \Rightarrow 1$ On remonte les calculs. Supposons que la fonction (vue comme une fonction de deux variables) soit différentiable et que ses dérivées partielles vérifient les équations de Cauchy-Riemann. La matrice jacobienne de f au point (x_0, y_0) est donc de la forme $J = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ et on a

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ah_1 - bh_2 \\ bh_1 + ah_2 \end{pmatrix}.$$

On observe enfin que

$$(ah_1 - bh_2) + i(bh_1 + ah_2) = (a + ib)(h_1 + ih_2)\,.$$

Ainsi, si on pose $f'(z_0) = a + ib$ et $h = h_1 + ih_2$, le développement limité de f en écriture complexe s'écrit

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)h + h\varepsilon(h),$$

ce qui prouve que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0.

$2 \Leftrightarrow 3$ Comme

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} + i\left(\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

la relation 3. n'est qu'une façon condensée d'écrire les équations de Cauchy-Riemann décrites en 2.

Supposons enfin que f soit $\mathbb{C}$-dérivable en z_0. On a alors

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{x\to 0,\ x\in\mathbb{R}} \frac{f(z_0 + x) - f(z_0)}{x} = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)\ .$$

Enfin, par la propriété 3., on a finalement

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\ .$$

3.3 Premières applications des équations de Cauchy-Riemann

Proposition 3.3.1. *Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ où Ω est un ouvert connexe non vide de $\mathbb{C}$ et si $f' \equiv 0$, alors f est constante.*

Preuve. Cela vient du fait que sur un ouvert connexe, une fonction différentiable dont la difféntielle est partout nulle est constante (conséquence du théorème des accroissements finis).

Proposition 3.3.2 (Propriétés de rigidité)**.** *Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ où Ω est un ouvert connexe non vide de $\mathbb{C}$. Il y a équivalence entre :*

1. *f est constante*
2. *$\mathcal{R}e(f)$ est constante*
3. *$\mathcal{I}m(f)$ est constante*
4. *$|f|$ est constante*
5. *$\overline{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

En particulier, f et $\overline{f}$ ne peuvent être simultanément holomorphes sans que f soit constante.

Preuve de la Proposition 3.3.2. Notons $f = P + iQ$.

$2 \Rightarrow 1$ Si P est constant alors, $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0$. Par les équations de Cauchy-Riemann, on a donc aussi $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$. Finalement $f' \equiv 0$ et f est constante.

$3 \Rightarrow 1$ Se traite comme $2 \Rightarrow 1$.

$5 \Rightarrow 1$ Supposons $\overline{f}$ holomorphe. Dans ce cas, $P = \frac{1}{2}(f + \overline{f})$ est une fonction holomorphe dont la partie imaginaire est constante (et même nulle). Ainsi, comme $3 \Rightarrow 1$, f est constante.

$4 \Rightarrow 1$ Par hypothèse, il existe une constante C telle que $f\overline{f} = C$. Si $C = 0$, alors $f = 0$ et f est constante. Sinon, on peut écrire $\overline{f} = \frac{C}{f}$ qui est donc holomorphe sur Ω. Comme $5 \Rightarrow 1$, on en déduit que f est constante.

Corollaire 3.3.3. *Soit f une fonction définie sur un ouvert connexe non vide Ω de $\mathbb{C}$.*

1. *Si f est holomorphe à valeurs réelles, alors f est constante*
2. *Si f est holomorphe à valeurs imaginaires pures, alors f est constante*
3. *Si f est holomorphe et $\mathcal{R}e(f)$ est holomarphe, alors f est constante*
4. *Si f est holomorphe et $\mathcal{I}m(f)$ est holomarphe, alors f est constante*
5. *Si f est holomorphe et $|f|$ est holomarphe, alors f est constante.*

Preuve du Corollaire 3.3.3

1. Si f est holomorphe à valeurs réelles, alors f est holomorphe de partie imaginiare constante. Donc f est constante par la proposition 3.3.2
3. Si f et $\mathcal{R}e(f)$ sont simultanément holomorphes, alors $\overline{f} = 2\mathcal{R}e(f) - f$ est aussi holomorphe. Par la proposition 3.3.2, on conclut donc que f est constante.
5. Si $|f|$ est holomorphe, comme elle est à valeurs réelles, elle est constante. Ainsi, par la proposition 3.3.2, f est aussi constante.

3.4 Logarithme complexe : une première approche

Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ ne contenant pas 0 et $L : \Omega \to \mathbb{C}$. On dit que L est une représentation continue du logarithme dans Ω si L est continue et si pour tout $z \in \Omega$,

$$\exp(L(z)) = z .$$

Remarquons que si une telle représentation continue existe, alors $L + 2ik\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$ en est une autre. Lorsque Ω est connexe, on peut même dire que si L et $\tilde{L}$ sont deux représentations continues du logarithme, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $z \in \Omega$, $L(z) - \tilde{L}(z) = 2ik\pi$ (une fonction continue sur un ouvert connexe, à valeurs dans $2i\pi\mathbb{Z}$ est constante). Remarquons aussi qu'on ne peut en général pas espérer $L(\exp(z)) = z$. D'une part le premier membre peut ne pas avoir de sens et d'autre part, même si il en a un, il représente une fonction $2i\pi$ périodique.

Lorsque L est une détermination continue du logarithme on a $|z| = \left|e^{L(z)}\right| = e^{\mathcal{R}e(L(z))}$. Ainsi, $\mathcal{R}e(L(z)) = \ln(|z|)$. En séparant partie réelle et partie imaginaire, on peut donc écrire

$$L(z) = \ln(|z|) + i\theta(z) . \tag{3.2}$$

Comme

$$z = e^{L(z)} = e^{\ln(|z|)+i\theta(z)} = |z|e^{i\theta(z)},$$

on en déduit que $\theta(z)$ est une détermination continue de l'argument de z. Réciproquement, en remontant les calculs, si on sait construire une détermination continue de l'argument dans l'ouvert Ω notée θ, alors la fonction $L(z) = \ln(|z|) + i\theta(z)$ est une détermination continue du logarithme dans Ω.

On a de plus la proposition suivante :

Proposition 3.4.1. *Si L est une détermination continue du logarithme dans l'ouvert Ω, alors L est holomorphe dans Ω et pour tout $z \in \Omega$, $L'(z) = \frac{1}{z}$.*

Cette proposition est a priori surprenante : la simple continuité de la fonction L permet de montrer sa dérivabilité !

Preuve de la Proposition 3.4.1. Soit $z \in \Omega$. La continuité de L en z s'écrit

$$L(z+h) = L(z) + \varepsilon(h),$$

où $\varepsilon(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0. De plus,

$$\begin{aligned}
\exp(L(z+h)) &= z+h \\
&= \exp(L(z) + \varepsilon(h)) \\
&= \exp(L(z)) \times \exp(\varepsilon(h)) \\
&= z \times (1 + \varepsilon(h) + o(\varepsilon(h)) \\
&= z + z\varepsilon(h) + o(\varepsilon(h))
\end{aligned}$$

On a donc $h \sim z\varepsilon(h)$. Ainsi

$$\frac{L(z+h) - L(z)}{h} = \frac{\varepsilon(h)}{h} \sim \frac{1}{z} .$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire 3.4.2. *Il n'existe pas de détermination continue du logarithme dans $\mathbb{C}^*$.*

Preuve. On raisonne par l'absurde. Supposons qu'une telle détermination du logarithme L existe sur $\mathbb{C}^*$ et posons $\varphi(t) = L(e^{it})$ pour $t \in \mathbb{R}$. Cette fonction est alors 2π-périodique. Par ailleurs, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = ie^{it}L'(e^{it}) = i$ et donc $\varphi(t) = it + c$, ce qui est contradictoire.

Si il n'est pas possible de construire une détermination continue du logarithme dans $\mathbb{C}^*$, il suffit de retirer une demi-droite issue de 0 à $\mathbb{C}^*$ pour qu'une telle construction devienne possible. C'est l'objet du théorème qui suit.

Théorème 3.4.3. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Notons* $S_1 = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = 1\}$ *et* $\mathbb{C}_\alpha = \mathbb{C} \setminus \left\{te^{i\alpha}\ ;\ t \in \mathbb{R}^+\right\}$. *Les propriétés suivantes sont satisfaites :*

- *L'application*
$$t \in]\alpha;\alpha+2\pi[\mapsto e^{it} \in S_1 \setminus \{e^{i\alpha}\}$$
est un homéomorphisme. La bijection réciproque θ_α *est donc une représentation continue de l'argument dans* $S_1 \setminus \{e^{i\alpha}\}$.
- *L'application* L_α *définie sur* $\mathbb{C}_\alpha$ *par*
$$L_\alpha(z) = \ln(|z|) + i\theta_\alpha\left(\frac{z}{|z|}\right)$$
est une détermination continue du logarithme dans $\mathbb{C}_\alpha$. *Elle est donc aussi holomorphe dans* $\mathbb{C}_\alpha$ *de dérivée* $L'_\alpha(z) = \frac{1}{z}$.

Exemple. Lorsque $\alpha = -\pi$, l'application $L_{-\pi}$ est appelée détermination principale du logarithme. C'est un prolongement holomorphe de $x \mapsto \ln(x)$ à l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

Preuve du Théorème 3.4.3. On sait que la fonction $t \mapsto e^{it}$ est 2π périodique et surjective sur le cercle unité S_1. Ainsi, l'image de l'intervalle semi-ouvert $[\alpha;\alpha+2\pi[$ est le cercle S_1 tout entier et l'application $t \in]\alpha;\alpha+2\pi[\mapsto e^{it}$ a pour image $S_1 \setminus \{e^{i\alpha}\}$. De plus, si t_1 et t_2 sont deux points de $]\alpha;\alpha+2\pi[$ tels que $e^{it_1} = e^{it_2}$ on sait que $t_1 - t_2 = 2k\pi$ et finalement $t_1 = t_2$ (car $|t_1 - t_2| < 2\pi$). L'application $t \mapsto e^{it}$ est donc une bijection continue entre $]\alpha;\alpha+2\pi[$ et $S_1 \setminus \{e^{i\alpha}\}$. Il s'agit de montrer que c'est un homéomorphisme, c'est à dire que sa bijection réciproque θ_α est aussi continue. Soit (z_n) une suite de points de $S_1 \setminus \{e^{i\alpha}\}$ convergeant vers $z \in S_1 \setminus \{e^{i\alpha}\}$. Notons $t_n = \theta_\alpha(z_n)$ et $t = \theta_\alpha(z)$. On a aussi $e^{it_n} = z_n$, $e^{it} = z$ et il s'agit de montrer que $t_n \to t$. La suite (t_n) est bornée. Elle possède donc des valeurs d'adhérence. Soit s une telle valeur d'adhérence et (t_{n_k}) une sous-suite de (t_n) convergeant vers s. On a :

$$\lim_{k\to+\infty} e^{it_{n_k}} = e^{is} \qquad \text{et} \qquad \lim_{k\to+\infty} z_{n_k} = z = e^{it}\ .$$

Ainsi $e^{is} = e^{it}$. Comme de plus $t \in]\alpha;\alpha+2\pi[$ et $s \in [\alpha;\alpha+2\pi]$, on a nécessairement $|t-s| < 2\pi$ ce qui assure $t = s$. On vient donc de montrer que t est la seule valeur d'adhérence de la suite (t_n). Or, par un argument de compacité, une suite bornée possèdant une unique valeur d'adhérence est nécessairement convergente vers cette unique valeur d'adhérence. On conclut donc que le suite (t_n) converge vers t. C'est ce qu'il fallait démontrer pour obtenir que θ_α est continue en z.

Si $z \in \mathbb{C}_\alpha$, posons alors
$$L_\alpha(z) = \ln(|z|) + i\theta_\alpha\left(\frac{z}{|z|}\right),$$
qui est donc une fonction continue sur $\mathbb{C}_\alpha$. Pour tout $z \in \mathbb{C}_\alpha$, on a :

$$\exp(L_\alpha(z)) = \exp(\ln(|z|)) \times \exp\left(i\theta_\alpha\left(\frac{z}{|z|}\right)\right) = |z| \times \frac{z}{|z|} = z,$$

ce qui prouve que L_α est une détermination continue du logarithme dans $\mathbb{C}_\alpha$.

Remarque finale. Il est facile de voir que l'application $t \in [\alpha;\alpha+2\pi[\mapsto e^{it} \in S_1$ est encore bijective et continue. Cependant ce n'est plus un homéomorphisme car S_1 est compact mais $[\alpha;\alpha+2\pi[$ ne l'est pas.

CHAPITRE 4

Théorie locale des fonctions holomorphes

On rappelle qu'une fonction f définie sur un ouvert non vide Ω de $\mathbb{C}$ à valeurs complexes est dite holomorphe sur Ω si :

$$\forall z \in \Omega \,, \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \ \text{ existe} \,.$$

On note alors $f'(z)$ cette limite et on note $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.

On rappelle aussi qu'une fonction f définie sur un ouvert non vide Ω de $\mathbb{C}$ à valeurs complexes est dite analytique sur Ω si pour tout $z \in \Omega$ il existe une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n h^n$ de rayon de convergence non nul et un réel $r > 0$ tels que pour tout $h \in D(0, r)$,

$$f(z+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n h^n \,.$$

On note alors $\mathcal{A}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur Ω.

On sait que $\mathcal{A}(\Omega) \subset \mathcal{H}(\Omega)$ (voir chapitre 1). Un des objectifs de ce chapitre est de montrer l'inclusion inverse et d'en déduire un certain nombre de propriétés importantes vérifiées par les fonctions holomorphes.

4.1 Chemin - lacet - intégrale le long d'un chemin

On appelle chemin toute application $\gamma \,:\, [a, b] \to \mathbb{C}$ continue et C^1 par morceaux. Les nombres complexes $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ sont appelés origine et extrémité du chemin γ.

Un lacet est un chemin vérifiant $\gamma(a) = \gamma(b)$. On note $\gamma^* = \gamma([a,b])$, qu'on appelle la trajectoire.

Si f est une application continue sur γ^* on appelle intégrale curviligne de f le long de γ la quantité :

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt\,.$$

Deux chemins $\gamma\ :\ [a,b] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_1\ :\ [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ sont dits équivalents si il existe un C^1 difféomorphisme strictement croissant θ entre $[\alpha,\beta]$ et $[a,b]$ tel que $\gamma_1 = \gamma \circ \theta$ (on parle aussi de changement de paramétrisation).

A l'aide de la formule du changement de variables, on remarque que si deux chemins γ et γ_1 sont équivalents, alors $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$. C'est pour cela qu'en général, on ne précise pas le paramétrage de γ mais seulement sa trajectoire et son sens de parcours.

Deux exemples importants.

- Si γ est le segment $[z_1;z_2]$ parcouru de z_1 vers z_2,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 f(tz_2 + (1-t)z_1)(z_2 - z_1)\,dt\,.$$

- Si γ est le cercle de centre z_0 et de rayon r parcouru une fois dans le sens direct,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})rie^{it}\,dt\,.$$

Chemin parcouru en sens opposé. Si $\gamma\ :\ [a,b] \to \mathbb{C}$ est un chemin, le chemin parcouru en sens opposé est le chemin $\tilde{\gamma}\ :\ t \in [a,b] \mapsto \gamma(a+b-t)$. L'origine de $\tilde{\gamma}$ coïncide avec l'extrémité de γ et l'extrémité de $\tilde{\gamma}$ coïncide avec l'origine de γ. On a aussi

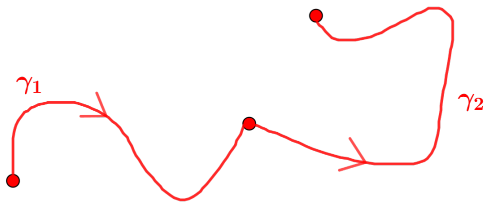
$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz\,.$$

Concaténation des chemins. Soient γ_1 et γ_2 deux chemins tels que l'extrémité de γ_1 coïncide avec l'origine de γ_2. Sans perte de généralité, on peut supposer que γ_1 et γ_2 sont tous deux définis sur $[0,1]$. Alors, la fonction γ définie par

$$\gamma(t) = \gamma_1(2t) \text{ si } x \in [0,1/2] \qquad \text{et} \qquad \gamma(t) = \gamma_2(2t-1) \text{ si } x \in [1/2,1]$$

est encore continue et de classe C^1 par morceaux. Le chemin γ est appelé concaténation des chmins γ_1 et γ_2 et on a

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz\,.$$



Longueur d'un chemin. Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ est un chemin, sa longueur se calcule par la formule

$$\ell(\gamma^*) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt\,.$$

Majoration d'une intégrale curliligne. Si f est une fonction continue sur γ^*, on a

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq \sup_{z\in\gamma^*}(|f(z)|) \times \ell(\gamma^*)\,.$$

4.2 Indice d'un point par rapport à un lacet

Si γ est un lacet et si $z_0 \notin \gamma^*$, on appelle indice de z_0 par rapport à γ la quantité :

$$\mathrm{Ind}(z_0,\gamma) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}\,.$$

Théorème 4.2.1. *La fonction $z_0 \mapsto \mathrm{Ind}(z_0,\gamma)$ est à valeurs entières et constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$. Elle vaut 0 sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$.*

Preuve.

- Montrons que $\mathrm{Ind}(z_0,\gamma) \in \mathbb{Z}$. Supposons, sans perte de généralité que γ est défini sur $[0,1]$. Alors,

$$\mathrm{Ind}(z_0,\gamma) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}\,dt\,.$$

Introduisons la fonction

$$\Phi(s) = (\gamma(s)-z_0)\times\exp\left(-\int_0^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}\,dt\right)\,.$$

On a

$$\Phi'(s) = \gamma'(s)\times\exp\left(-\int_0^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}\,dt\right) - (\gamma(s)-z_0)\times\frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z_0}\times\exp\left(-\int_0^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}\,dt\right) = 0\,.$$

Ainsi, Φ est constante et $\Phi(1) = \Phi(0)$. On en déduit que $\exp\left(-\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}\,dt\right) = 1$ ou encore

$$\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}\,dt \in 2i\pi\mathbb{Z}\,.$$

- Montrons que la fonction $z \notin \gamma^* \mapsto \mathrm{Ind}(z,\gamma)$ est continue. Si z et z_0 sont deux points n'appartenant pas à γ^*, on a

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{Ind}(z,\gamma) - \mathrm{Ind}(z_0,\gamma)\right| &= \left|\frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \left(\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} - \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}\right)dt\right| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \left|\frac{z-z_0}{(\gamma(t)-z)(\gamma(t)-z_0)}\right| |\gamma'(t)|\,dt \\
&\le |z-z_0| \times \frac{\ell(\gamma^*)}{2\pi \times d(z,\gamma^*)d(z_0,\gamma^*)}\,.
\end{aligned}$$

  Fixons alors $a > 0$ tel que $D(z_0, 2a) \subset \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ et supposons que $z \in D(z_0, a)$. On a alors

$$\left|\mathrm{Ind}(z,\gamma) - \mathrm{Ind}(z_0,\gamma)\right| \le \frac{\ell(\gamma^*)}{2\pi \times 2a^2} \times |z-z_0|,$$

  ce qui prouve la continuité de la fonction au point z_0. La fonction $z \mapsto \mathrm{Ind}(z,\gamma)$ étant continue à valeurs entières, elle est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.
- Soit R tel que $\gamma^* \subset \overline{D}(0,R)$ et z tel que $|z| \ge 2R$.On a :

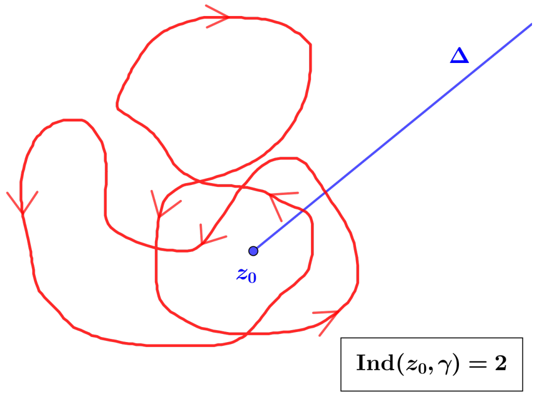
$$|\mathrm{Ind}(z,\gamma)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|\,dt}{|\gamma(t)-z|} \le \frac{\ell(\gamma^*)}{2\pi R} \le \frac{1}{2}$$

  si R est suffisamment grand. Comme la fonction Ind est à valeurs entières, on en déduit que $\mathrm{Ind}(z,\gamma)$ est nul si $|z|$ est suffisamment grand. Comme du plus la fonction Ind est constante sur toute la composante connexe non bornée de $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$, on en déduit qu'elle est identiquement nulle sur cette composante.

La fonction Ind compte le nombre de tours que fait le lacet γ autour du point z_0. Le théorème admis suivant donne un sens précis à cette phrase.

Théorème 4.2.2. *Soit Δ une demi-droite issue de z_0. Pour calculer* $\mathrm{Ind}(z_0,\gamma)$*, on compte le nombre de fois où le lacet traverse la demi-droite dans le sens trigonométrique et on soustrait à cette quantité le nombre de fois où le lacet traverse la demi-droite dans le sens rétrograde. Le nombre entier ainsi trouvé ne dépend pas de la demi-droite Δ choisie.*

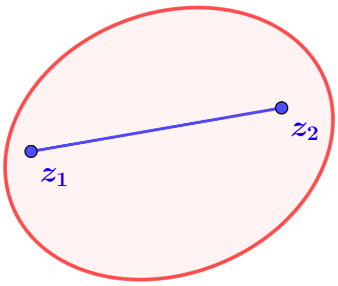
Voici une illustration du théorème 4.2.2.



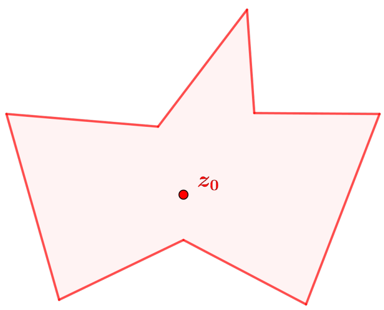
4.3 Ouverts étoilés - exemples

Définition 4.3.1. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$. On dit que l'ouvert Ω est étoilé par rapport au point z_0 si pour tout $z \in \Omega$, le segment $[z_0; z]$ est inclus dans Ω.*

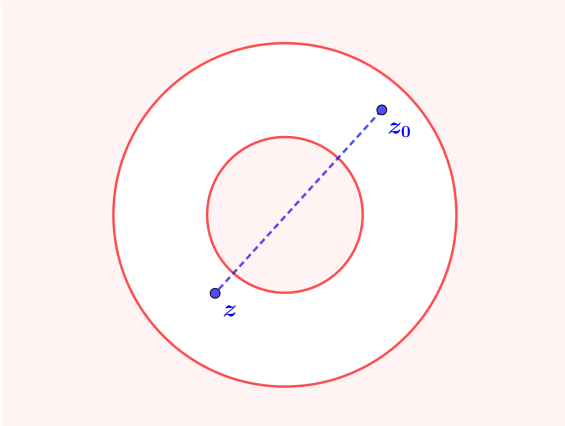
- En particulier, un ouvert convexe est étoilé par rapport à n'importe lequel de ses points.



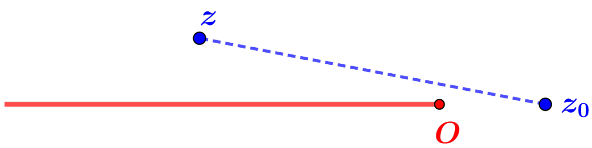
- Voici un exemple d'ouvert étoilé qui n'est pas convexe.



- $\mathbb{C}^*$ ou encore une couronne $\Omega = D(0,R) \setminus \overline{D}(0,r)$ sont des ouverts non étoilés.



- Les ouverts $\mathbb{C}_\alpha$ décrits en partie 3.4 sont étoilés.



L'ouvert $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ est étoilé par rapport à z_0

4.4 La formule de Cauchy locale et ses conséquences

4.4.1 Notion de primitive

On dit qu'une fonction f définie et continue sur un ouvert non vide connexe (i.e. un domaine) Ω de $\mathbb{C}$ est primitivable dans Ω s'il existe une fonction F holomorphe sur Ω telle que $F' = f$.

Théorème 4.4.1. *Soit Ω un ouvert connexe non vide de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue sur Ω.*

1. *La fonction f est primitivable dans Ω si et seulement si pour tout lacet γ dont l'image est incluse dans Ω, on a : $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.*
2. *Si Ω est étoilé par rapport à z_0 et si $\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$ pour tout triangle T inclus dans Ω dont un sommet est z_0, alors, f est primitivable dans Ω et on peut lui appliquer le point 1.*

Remarque 1. On a abusivement identifié le bord du triangle avec une paramétrisation de celui-ci.

Remarque 2. La condition $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ est une vraie contrainte. Par exemple, si γ est le cercle unité parcouru une fois dans le direct, alors $\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2i\pi$, ce qui interdit à la fonction $\frac{1}{z}$ de posséder une primitive sur $\mathbb{C}^*$. Il n'y a donc pas de détermination continue du logarithme dans $\mathbb{C}^*$. On a déjà fait cette observation au chapitre précédent.

Preuve du Théorème 4.4.1.

1. Si f possède une primitive F dans Ω et si γ est un lacet inscrit dans Ω, on a

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 F'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = 0\ .$$

Réciproquement, supposons que l'intégrale de f sur tout lacet soit nulle. Fixons $z_0 \in \Omega$. Notons γ_z un chemin reliant z_0 à z et posons

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\xi)\,d\xi\ . \tag{4.1}$$

Il faut d'abord observer que l'intégrale définie en 4.1 ne dépend pas du chemin choisi pour relier z_0 à z. En effet, si γ_z et $\tilde\gamma_z$ sont deux chemins reliant z_0 à z, et si γ est la concaténation de γ_z et de $\tilde\gamma_z$ parcouru dans le sens inverse, γ est un lacet et

$$\int_\gamma f(\xi)\,d\xi = \int_{\gamma_z} f(\xi)\,d\xi - \int_{\tilde\gamma_z} f(\xi)\,d\xi = 0,$$

ce qui signifie que

$$\int_{\gamma_z} f(\xi)\,d\xi = \int_{\tilde\gamma_z} f(\xi)\,d\xi\ .$$

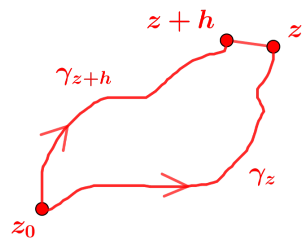
Ainsi, F est définie sans ambiguité. On veut alors montrer que F se dérive en f. Fixons $z \in \Omega$, $\varepsilon > 0$ et, par continuité de f en z, choisissons $\eta > 0$ tel que $D(z,\eta) \subset \Omega$ et tel que $|f(\xi) - f(z)| < \varepsilon$ si $|\xi - z| < \eta$. Si $|h| < \eta$, considérons le lacet constitué du chemin γ_z, suivi du segment $[z; z+h]$ et du chemin γ_{z+h} parcouru en sens inverse (voir le schéma ci-dessous). L'hypothèse faite sur f nous dit que $\int_\gamma f(\xi)\,d\xi = 0$, ce qui signifie encore que

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\gamma_{z+h}} f(\xi)\,d\xi - \int_{\gamma_z} f(\xi)\,d\xi = \int_{[z;z+h]} f(\xi)\,d\xi = \int_0^1 f(z+th)h\,dt\ .$$

On a alors

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)\right| &= \left|\int_0^1 f(z+th)\,dt - f(z)\right| \\ &= \left|\int_0^1 (f(z+th)-f(z))\,dt\right| \\ &\leq \int_0^1 |f(z+th)-f(z)|\,dt \\ &\leq \int_0^1 \varepsilon\,dt \\ &= \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Comme ε peut être aussi petit que l'on veut, on a ainsi montré que $F'(z) = f(z)$.



2. Si Ω est étoilé par rapport à z_0, le segment $[z_0;z]$ est alors un chemin naturel pour relier z_0 à z. Posons :

$$F(z) = \int_{[z_0;z]} f(\xi)\,d\xi\,.$$

Si h est proche de 0, comme l'intégrale de f sur le triangle $z_0, z, (z+h)$ est nulle, on a :

$$F(z+h)-F(z) = \int_{[z;z+h]} f(\xi)\,d\xi\,.$$

On conclut alors, comme lors du point 1. que F est dérivable en z et que $F'(z) = f(z)$. La fonction F est donc une primitive de f et, grâce au point 1., on a de façon plus générale

$$\int_\gamma f(\xi)\,d\xi,$$

pour tout lacet γ inclus dans Ω.

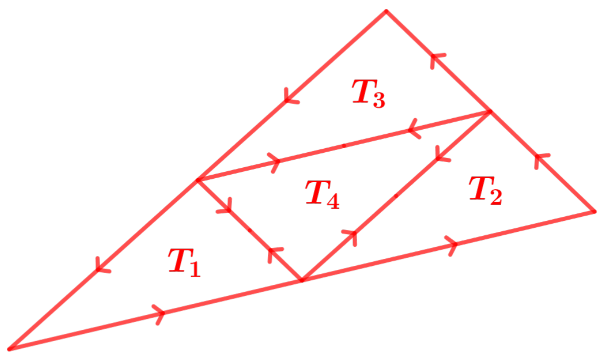
4.4.2 Théorème de Cauchy Goursat (résultat technique)

Théorème 4.4.2. *Soit T un triangle plein et Ω un ouvert contenant T. Si $z_0 \in \Omega$ et si f est continue dans Ω et holomorphe dans $\Omega \setminus \{z_0\}$, alors, $\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$.*

Remarque. Le théorème permet l'existence d'un point "irrégulier" où la fonction est continue mais n'est peut-être pas $\mathbb{C}$-dérivable. C'est un détail technique pour obtenir le théorème 4.4.5.

Preuve du Théorème 4.4.2. Supposons dans un premier temps que $z_0 \notin T$. Ainsi, f est holomorphe au voisinage du triangle plein T. Imaginons pour fixer les idées que le bord du triangle ∂T est parcouru dans le sens direct et notons γ une paramétrisation de ∂T. Découpons comme ci-dessous le triangle T en quatre triangle T_1, T_2, T_3 et T_4, semblables à T dans un rapport de contraction 1/2. Notons γ_1, γ_2, γ_3 et γ_4 une paramétrisation du bord de chacun de ces quatre petits triangles, ∂T_4 étant parcouru dans le sens indirect. On a alors clairement

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3} f(z)\,dz + \int_{\gamma_4} f(z)\,dz\,.$$



Supposons que $\int_\gamma f(z)\,dz \neq 0$. On peut alors trouver $k \in \{1,2,3,4\}$ tel que

$$\left|\int_{\gamma_k} f(z)\,dz\right| \geq \frac{1}{4}\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right|,$$

ce qui s'écrit encore

$$\left|\int_{\partial T_k} f(z)\,dz\right| \geq \frac{1}{4}\left|\int_{\partial T} f(z)\,dz\right|.$$

On note alors $T^{(1)}$ le triangle T_k ainsi sélectionné. On a en particulier

$$\text{diam}\left(T^{(1)}\right) = \frac{1}{2} \times \text{diam}\,(T) \qquad \text{et} \qquad \ell\left(\partial T^{(1)}\right) = \frac{1}{2} \times \ell(\partial T)\,.$$

On peut réitéter le procédé et construire ainsi une suite de triangles pleins emboités

$(T^{(n)})$ vérifiant

$$\begin{cases} \left|\int_{\partial T^{(n+1)}} f(z)\,dz\right| \geq \frac{1}{4}\left|\int_{\partial T^{(n)}} f(z)\,dz\right| \\ \operatorname{diam}\left(T^{(n+1)}\right) = \frac{1}{2} \times \operatorname{diam}\left(T^{(n)}\right) \\ \ell\left(\partial T^{(n+1)}\right) = \frac{1}{2} \times \ell\left(\partial T^{(n)}\right). \end{cases}$$

En particulier,

$$\left|\int_{\partial T^{(n)}} f(z)\,dz\right| \geq \frac{1}{4^n}\left|\int_{\partial T} f(z)\,dz\right|. \tag{4.2}$$

Comme le diamètre de $T^{(n)}$ tend vers 0, l'intersection des $T^{(n)}$ est réduit à un point. Notons z_1 ce point. La fonction f est $\mathbb{C}$-dérivable au point z_1. Ainsi

$$f(z) = f(z_1) + (z - z_1)f'(z_1) + (z - z_1)\varepsilon(z),$$

avec $\lim_{z\to z_1} \varepsilon(z) = 0$. Observons ensuite que $z \mapsto f(z_1)+(z-z_1)f'(z_1)$ possède des primitives (c'est un polynôme). Son intégrale sur tout lacet est donc nulle. Ainsi,

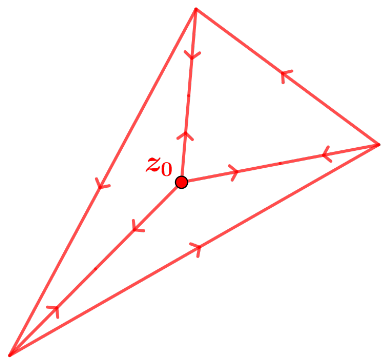
$$\int_{\partial T^{(n)}} f(z)\,dz = \int_{\partial T^{(n)}} (z - z_1)\varepsilon(z)\,dz,$$

ce qui permet de conclure que

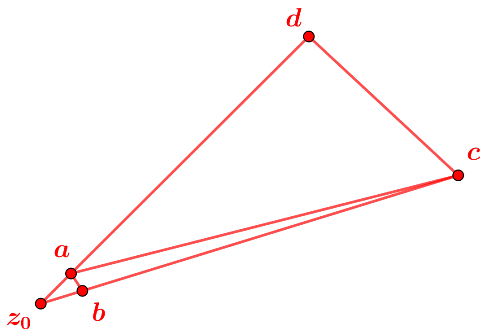
$$\begin{aligned} \left|\int_{\partial T^{(n)}} f(z)\,dz\right| &\leq \operatorname{diam}\left(T^{(n)}\right) \times \ell\left(\partial T^{(n)}\right) \times \sup_{z\in\partial T^{(n)}} |\varepsilon(z)| \\ &= \frac{1}{4^n} \times \operatorname{diam}(T) \times \ell(\partial T) \times \sup_{z\in\partial T^{(n)}} |\varepsilon(z)| \\ &= o\left(\frac{1}{4^n}\right), \end{aligned}$$

ce qui est en contradiction avec (4.2).

Supposons maintenant $z_0 \in T$. On se ramène dans un premier temps au cas où z_0 est un sommet du triangle T. En effet, si ce n'est pas le cas, découpons comme ci-dessous le triangle T en trois triangles ayant z_0 comme sommet. Comme plus haut, l'intégrale sur ∂T est la somme des intégrales sur les bords des trois triangles (orientés comme il se doit). Ainsi, si chacune d'entre elle est nulle, d'intégrale sur ∂T sera aussi nulle.



Traitons finalement le cas où z_0 est un sommet de T. Découpons le triangle T comme ci-dessous avec $|z_0 - a| = |z_0 - b| = \varepsilon$ et notons T_ε le triangle z_0ba.



Le point z_0 étant à l'extérieur des triangles abc et acd, l'intégrale sur le bord de chacun de ces triangles est nulle et on a

$$\int_{\partial T} f(z)\,dz = \int_{\partial T_\varepsilon} f(z)\,dz\,.$$

Enfin, comme $\ell(\partial T_\varepsilon) \leq 4\varepsilon$,

$$\left|\int_{\partial T_\varepsilon} f(z)\,dz\right| \leq 4\varepsilon \sup_{z\in\partial T_\varepsilon} |f(z)|\,.$$

La fonction f étant bornée au voisinage de z_0 (car continue en z_0), et ε étant arbitrairement petit, on en déduit que

$$\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0\,.$$

4.4.3 Existence de primitives dans les ouverts étoilés

La conjonction des théorèmes 4.4.1 et 4.4.2 nous donne immédiatement les deux énoncés suivants.

Théorème 4.4.3. *Soit Ω un ouvert étoilé et soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Alors, f est primitivable dans Ω, ce qui revient à dire que pour tout lacet γ, tracé dans Ω, on a*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0\,. \tag{4.3}$$

Corollaire 4.4.4. *Si f est holomorphe dans un ouvert non vide quelconque Ω, le théorème 4.4.3 s'applique dans tout disque inclus dans Ω. C'est pour cela qu'on parle de théorie locale.*

4.4.4 Formule de Cauchy pour un ouvert étoilé

En appliquant les théorèmes 4.4.1 et 4.4.2 à la fonction $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$, on obtient aussi la conséquence fondamentale suivante :

Théorème 4.4.5. *Soit Ω un ouvert étoilé et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Pour tout lacet γ tracé dans Ω et pour tout point $z_0 \in \Omega \setminus \gamma^*$ on a :*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = f(z_0)\,\mathrm{Ind}(z_0,\gamma)\,. \tag{4.4}$$

Preuve. Posons $g(z) = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ pour $z \neq z_0$ et prolongeons g en posant $g(z_0) = f'(z_0)$. La fonction g est continue dans Ω et holomorphe dans $\Omega\setminus\{z_0\}$. Ainsi, par le théorème 4.4.2, on sait que pour tout triangle T inclus dans Ω, $\int_{\partial T} g(z)\,dz = 0$. On peut alors appliquer le théoréme 4.4.1. Si γ est un lacet inscrit dans Ω, on a

$$\int_\gamma g(z)\,dz = 0\,.$$

Si $z_0 \notin \gamma^*$, on trouve alors

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_\gamma \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz = f(z_0)\times 2i\pi\times \mathrm{Ind}(z_0,\gamma)\,.$$

4.4.5 Analyticité des fonctions holomorphes

Le théorème 4.4.5 permet d'étabir que $\mathcal{H}(\Omega) = \mathcal{A}(\Omega)$.

Théorème 4.4.6. *Si Ω est un ouvert non vide, alors $\mathcal{H}(\Omega) = \mathcal{A}(\Omega)$. Plus précisément, si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et si $z_0 \in \Omega$, le rayon de convergence de la série de Taylor de f en z_0 est au moins égal à la distance de z_0 au complémentaire de Ω et on a :*

$$\forall z \in D\left(z_0, d(z_0,\mathbb{C}\setminus\Omega)\right), \quad f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n\,,$$

où pour $r < d(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega)$,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz\,,$$

le cercle étant parcouru une fois dans le sens direct.

Remarque. pour retrouver ces formules, on peut imaginer le développement, diviser par $(z-z_0)^{n+1}$ et intégrer terme à terme...

Corollaire 4.4.7. *Si f est holomorphe, f est indéfiniment dérivable au sens complexe.*

Preuve du Théorème 4.4.6. Soit $z_0 \in \Omega$ et R tel que $D(z_0, R) \subset \Omega$ (c'est à dire $R \leq d(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega)$). Le disque $D(z_0, R)$ est un ouvert étoilé. La formule de Cauchy s'applique donc dans ce disque. Si $r < R$ et si $z \in D(z_0, r)$ on a donc

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = f(z),$$

le bord du cercle étant parcouru dans le sens direct. De plus,

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0)\left(1 - \frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)} = \frac{1}{\xi - z_0} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n, \tag{4.5}$$

la série étant convergente pour tout $\xi \in \partial D(z_0, r)$. On peut même dire que si $\xi \in \partial D(z_0, r)$,

$$\left|\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n\right| = \frac{|z-z_0|^n}{r^n},$$

qui est le terme général d'une série géométrique convergente et indépendante de ξ. Ainsi, la série de fonctions converge normalement sur le cercle $\partial D(z_0, r)$ et on peut échanger série et intégrale. On trouve alors

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \times (z - z_0)^n\,.$$

On a ainsi développé f en série entière au voisinage de z_0. On a de plus

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi,$$

ce qui prouve que l'intégrale ne dépend pas de r.

Enfin, le calcul est licite pour tout $r < R \leq d(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega)$, ce qui prouve que le rayon de convergence de la série $\sum_n a_n h^n$ est au moins égal à la distance de z_0 au complémentaire de Ω.

Un exemple d'utilisation. Prenons $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ qui est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$. Prenons $x_0 \in \mathbb{R}$. Comme $d(x_0, \{\pm i\}) = \sqrt{1+x_0^2}$, on peut trouver des coefficients (a_n) tels que

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-x_0)^n, \tag{4.6}$$

la série entière ayant un rayon de convergence $R \geq \sqrt{1+x_0^2}$ et l'égalité (4.6) étant vraie dans le disque $D\left(x_0, \sqrt{1+x_0^2}\right)$. On peut même affirmer ici que $R = \sqrt{1+x_0^2}$. En effet $f(z)$ est non borné au voisinage de $\pm i$, même si z reste dans le disque de rayon $\sqrt{1+x_0^2}$. D'un autre coté, si la série entière avait un rayon de convergence $R > \sqrt{1+x_0^2}$, sa somme resterait bornée dans le disque de rayon $\sqrt{1+x_0^2}$.

4.5 Premières conséquences de l'égalité $\mathcal{H}(\Omega) = \mathcal{A}(\Omega)$

4.5.1 Principe des zéros isolés

Théorème 4.5.1. *Soit Ω un ouvert connexe non vide de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ non identiquement nulle. Notons $\mathcal{Z}(f) = \{a \in \Omega\ ;\ f(a) = 0\}$. On a :*

1. *Pour tout $a \in \mathcal{Z}(f)$, il existe un entier $k \geq 1$ et une fonction $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que*

$$f(z) = (z-a)^k g(z) \qquad \text{avec } g(a) \neq 0\ .$$

   L'entier k est unique et est appelé l'ordre de multiplicité du zéro a.

2. *L'ensemble $\mathcal{Z}(f)$ est au plus dénombrable et constitué de points isolés dans Ω.*

Remarque 1. L'identité $f(z) = (z-a)^k g(z)$ avec g ne s'annulant pas au voisinage de a entraine que f ne possède pas, au voisinage de a, d'autre zéro que a. Ainsi a est un zéro isolé. Le théorème nous dit donc bien que lorsque $f \not\equiv 0$, tous les zéros de f sont isolés. C'est pourquoi il est appelé le « principe des zéros isolés ».

Remarque 2. L'ordre de multiplicité k est caractérisé par

$$\forall j < k,\ f^{(j)}(a) = 0 \qquad \text{et} \qquad f^{(k)}(a) \neq 0\ .$$

Preuve du Théorème 5.1.1. Soit $a \in \mathcal{Z}(f)$. On peut trouver $r > 0$ et une série entière $\sum_n a_n h^n$ tels que pour tout $z \in D(a,r)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n\ .$$

Observons tout d'abord le phénomène suivant :

— Soit tous les a_n sont nuls, auquel cas f est identiquement nulle au voisinage de a
— Sinon, on peut trouver un premier coefficient non nul a_k et, en mettant en facteur $a_k(z-a)^k$ constater que a est le seul zéro de f dans tout un petit disque autour de a (on dit alors que a est un zéro isolé).

Imaginons alors que tous les a_n soient nuls. On va établir de façon encore plus forte que f est identiquement nulle dans Ω. Prenons pour cela un point b quelconque dans Ω et notons $\gamma : [0,1] \to \Omega$ un chemin reliant a à b dans Ω (un ouvert connexe est toujours connexe par arcs). Regardons alors

$$t_0 = \max\{t \in [0,1] \; ; \; f(\gamma(s)) = 0 \text{ pour tout } s \in [0,t]\} \, .$$

Par hypothèse sur f, $t_0 > 0$. Si t_0 était différent de 1, en développant f en série entière au point $\gamma(t_0)$, et en appliquant l'observation initiale en ce point, on trouverait que f est identiquement nulle au voisinage de $\gamma(t_0)$ (car $\gamma(t_0)$ n'est pas un zéro isolé de f) et donc que $f(\gamma(s))$ serait encore nulle sur un petit intervalle au delà de t_0. C'est absurde. Ainsi $f(\gamma(1)) = f(b) = 0$.

On vient donc de prouver que si tous les a_n sont nuls, alors f est identiquement nulle. Dans le cas contraire, en introduisant le premier coefficient non nul a_k, on a pour tout $z \in D(a,r)$

$$f(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n(z-a)^n = (z-a)^k \times \left(a_k + \sum_{j=1}^{+\infty} a_{k+j}(z-a)^j \right) = (z-a)^k g(z)$$

où g est une fonction holomorphe au voisinage de a ne s'annulant pas en a. La fonction g est même définie et holomorphe dans Ω tout entier (en dehors de a, $g(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^k}$).

Montrons enfin l'unicité de l'entier k. Imaginons qu'on ait deux entiers k_1 et k_2 (avec pour fixer les idées $k_2 \geq k_1$) et deux fonctions g_1 et g_2 continues et ne s'annulant pas en a tels que

$$f(z) = (z-a)^{k_1} g_1(z) = (z-a)^{k_2} g_2(z)$$

au voisinage de a. On peut alors écrire

$$(z-a)^{k_2-k_1} = \frac{g_1(z)}{g_2(z)},$$

ce qui entraine que $k_1 = k_2$ car g_1/g_2 ne s'annule pas au voisinage de a. Ainsi, l'entier k est parfaitement déterminé et appelé ordre de multiplicité du zéro a.

Il reste à comprendre que $\mathcal{Z}(f)$ est fini ou dénombrable lorsque $f \not\equiv 0$. Pour tout $a \in \mathcal{Z}(f)$, on peut trouver $r_a > 0$ tel que

$$D(a, r_a) \cap \mathcal{Z}(f) = \{a\} \, .$$

Les disques $D(a, r_a/2)$ sont alors clairement deux à deux disjoints. Pour chaque $a \in \mathcal{Z}(f)$, choisissons $q_a \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \cap D(a, r_a/2)$. C'est possible car $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{C}$. L'application

$$a \in \mathcal{Z}(f) \longmapsto q_a \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$$

est injective et est à valeurs dans un ensemble dénombrable, ce qui prouve que $\mathcal{Z}(f)$ est fini ou dénombrable.

4.5.2 Principe du prolongement analytique

En appliquant le théorème 5.1.1 à la fonction $f - g$, on obtient immédiatement le corollaire suivant.

Théorème 4.5.2. *Soit Ω un ouvert connexe non vide de $\mathbb{C}$ et soient f et g deux fonctions holomorphes sur Ω qui coïncident sur une partie E de Ω qui possède un point d'accumulation dans Ω. Alors $f = g$. En particulier, si f et g coïncident sur un ouvert non vide de Ω, elles sont égales.*

Exemples d'utilisation.

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\cos(z + 2\pi) = \cos(z)$ (car la relation est vraie pour tout $z \in \mathbb{R}$).
- $L_{-\pi}(z) = \ln(|z|) + i\theta_{-\pi}(z)$ est l'unique prolongement holomorphe à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ de la fonction logarithme néperien initialement définie sur $]0; +\infty[$.

Remarque. Il faut bien comprendre que ce théorème est un théorème d'unicité et non pas un théorème d'existence. Si Ω est un ouvert connexe contenant l'ouvert non vide U et si $f \in \mathcal{H}(U)$, alors f possède **au plus** un prolongement en une fonction holomorphe sur Ω.

4.5.3 Théorème de Liouville

Théorème 4.5.3. *Toute fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ et bornée est constante.*

Preuve. Soit f une fonction holomorphe bornée sur $\mathbb{C}$. Par le théorème 4.4.6, f se développe en série entière sur $\mathbb{C}$. On peut trouver des coefficients (a_n) tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \ .$$

On sait de plus que pour tout $n \geq 0$ et tout $R > 0$,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0, R)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it})}{R^n e^{nit}} dt \ .$$

Soit $M > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq M$. On a alors

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f(Re^{it})}{R^n e^{int}} \right| dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M}{R^n} dt = \frac{M}{R^n} \ .$$

En faisant tendre R vers $+\infty$, on en déduit que pour tout $n \geq 1$, $a_n = 0$. Finalement, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = a_0$ et la fonction f est constante.

Corollaire 4.5.4 (Théorème de d'Alembert-Gauss)**.** *$\mathbb{C}$ est algébriquement clos. En d'autres termes, tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant est scindé sur $\mathbb{C}$.*

Preuve. Il suffit de montrer que tout polynôme non constant possède une racine complexe. On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant et ne s'annulant pas. Considérons alors $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ qui est donc holomorphe sur $\mathbb{C}$. On a

$$\lim_{|z| \to +\infty} f(z) = 0 .$$

Ainsi, on peut trouver $R > 0$ tel que $|f(z)| \leq 1$ dès que $|z| > R$. Par ailleurs, le disque $\overline{D}(0, R)$ étant compact, la fonction continue f est bornée sur ce disque. Finalement, f est bornée sur $\mathbb{C}$. Elle est donc constante. Il en est de même de P, ce qui est absurde.

4.5.4 Principe du maximum

Théorème 4.5.5. *Soit Ω un ouvert connexe non vide de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur Ω non constante. Alors $|f|$ n'a pas de maximum local.*

Preuve. Soit f une fonction holomorphe dans Ω. Supposons que $|f|$ possède un maximum local au point $z_0 \in \Omega$. On peut alors trouver un disque $\overline{D}(z_0, r)$ centré en z_0 tel que pour tout $z \in \overline{D}(z_0, r)$, $|f(z)| \leq |f(z_0)|$. Soit $\rho \leq r$ et γ_ρ le cercle de centre z_0 et de rayon ρ parcouru une fois dans le sens direct. La formule de Cauchy nous donne :

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) \, dt .$$

Ainsi, compte tenu de l'hypothèse faite sur le point z_0, on trouve

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{it})| \, dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)| \, dt = |f(z_0)| .$$

Toutes ces inégalités sont donc des égalités et on peut alors réecrire de façon un peu différente :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|f(z_0)| - |f(z_0 + \rho e^{it}|) \, dt = 0 .$$

On est en présence d'une fonction continue et positive sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ dont l'intégrale est nulle. On sait alors que la fonction $t \mapsto (|f(z_0)| - |f(z_0 + \rho e^{it}|)$ est identiquement nulle. Ceci étant vrai pour tout $\rho \leq r$, on en déduit que pour tout $z \in \overline{D}(z_0, r)$, $|f(z)| = |f(z_0)|$. Le module de la fonction holomorphe f est constant sur le connexe $D(z_0, r)$. On sait alors que f est constante sur ce disque (voir chapitre 3). Enfin, par le principe des zéros isolés, f est constante sur l'ouvert connexe Ω (car $z \mapsto f(z) - f(z_0)$ est une fonction holomorphe nulle sur tout un petit disque).

Le principe du maximum permet de donner une nouvelle preuve du théorème de d'Alembert Gauss. Supposons qu'un polynôme P de degré au moins 1 ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$. La fonction $1/P$ est alors holomorphe sur $\mathbb{C}$ et tend vers 0 à l'infini. Un argument de compacité permet alors de montrer que $|1/P|$ atteint son maximum. Ainsi $1/P$ est constant et P aussi, c'est absurde.

Corollaire 4.5.6. *Soit Ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ et holomorphe sur Ω. Alors, pour tout $z \in \Omega$,*

$$|f(z)| \leq \max_{\xi \in \partial\Omega} |f(\xi)| .$$

En d'autres termes, $|f|$ atteint son maximum sur le bord de Ω.

Preuve. Supposons d'abord Ω connexe. L'ensemble $\overline{\Omega}$ est fermé et borné donc compact. La fonction $|f|$ est continue sur le compact $\overline{\Omega}$. Elle atteint donc son maximum. Il y a deux cas possibles. Soit ce maximum est atteint en un point du bord $\partial\Omega$ et le résultat est alors vrai. Sinon, le maximum est atteint en un point de Ω et la fonction $|f|$ possède un maximum local dans Ω. Elle est alors constante dans Ω et par continuité elle reste constante dans $\overline{\Omega}$. La conclusion du corollaire est alors encore trivialement vérifiée.

Dans le cas général on peut écrire Ω comme réunion de ses composantes connexes notées Ω_i. La frontière de chaque composante connexe Ω_i est incluse dans la frontière de Ω. Si $z \in \Omega$, il existe i tel que $z \in \Omega_i$. Comme Ω_i est connexe, on a alors :

$$|f(z)| \leq \max_{\xi \in \partial\Omega_i} |f(\xi)| \leq \max_{\xi \in \partial\Omega} |f(\xi)| .$$

4.5.5 Lemme de Schwarz

Une application importante du principe du maximum est la suivante.

Lemme 4.5.7 (Lemme de Schwarz)**.** *Soit $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ telle que $f(0) = 0$. On suppose que pour tout $z \in D(0,1)$, $|f(z)| \leq 1$. Alors*

1. *Pour tout $z \in D(0,1)$, $|f(z)| \leq |z|$.*
2. *Si de plus on a égalité en un point $z_0 \neq 0$ ou si $|f'(0)| = 1$, alors, il existe un nombre réel θ tel que pour tout $z \in D(0,1)$, $f(z) = e^{i\theta} z$.*

Preuve. La fonction f se développe en série entière sur $D(0,1)$. Comme $f(0) = 0$, on a ainsi pour tout $z \in D(0,1)$,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n = z \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{n-1} = zg(z) .$$

La fonction g ainsi définie est holomorphe dans $D(0,1)$ et vérifie $g(0) = a_1 = f'(0)$. Regardons dans un premier temps la fonction g dans le disque $\overline{D}(0,r)$ où $r < 1$. Elle est continue dans ce disque fermé et holomorphe dans le disque ouvert $D(0,r)$. de plus, si $|z| = r$, $|g(z)| = \left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq \frac{1}{|z|} = \frac{1}{r}$. Par le principe du maximum, on a donc

$$\text{pour tout } z \in \overline{D}(0,r), \quad |g(z)| \leq \frac{1}{r} \; .$$

Prenons maintenant $z \in D(0,1)$. Si r est suffisamment proche de 1, $z \in D(0,r)$. On a alors $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$. En faisant tendre r vers 1 on trouve finalement $|g(z)| \leq 1$. En revenant à f, on trouve

$$|f(z)| \leq |z| \qquad \text{et} \qquad |f'(0)| \leq 1 \; .$$

Supposons que pour un certain $z_0 \neq 0$, $|f(z_0)| = |z_0|$ ou que $|f'(0)| = 1$, ce qui signifie encore $|g(z_0)| = 1$ ou $|g(0)| = 1$. La fonction g possède alors un maximum local dans $D(0,1)$. Par le principe du maximum, la fonction g est constante. Cette constante est un nombre complexe de module 1. Ainsi, on trouve un nombre réel θ tel que pour tout $z \in D(0,1)$, $f(z) = e^{i\theta} z$.

4.5.6 Principe de l'application ouverte

Théorème 4.5.8. *Soit Ω un ouvert connexe non vide de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur Ω non constante. Alors, f est ouverte. C'est à dire que l'image par f de tout ouvert $U \subset \Omega$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.*

Nous pouvons admettre ce théorème. Proposons tout de même une preuve succincte. Fixons $z_0 \in \Omega$. Il s'agit de voir que l'image par f d'un disque $D(z_0,r) \subset \Omega$ contient un voisinage de $f(z_0)$. Comme f est non constante, on peut écrire, en développant en série entière la fonction f dans le disque $D(z_0,r)$:

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^{n_0} \sum_{k=n_0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^{k-n_0} = (b(z - z_0))^{n_0} \left(1 + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{a_k}{a_{n_0}} (z - z_0)^{k-n_0} \right)$$

où $n_0 = \inf(k \geq 1 \; ; \; a_k \neq 0)$ et b est tel que $b^{n_0} = a_{n_0}$. On peut alors, en utilisant un logarithme, construire une racine n_0 de la fonction $\left(1 + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{a_k}{a_{n_0}} (z - z_0)^{k-n_0}\right)$ et ainsi trouver une fonction holomorphe g définie sur $D(z_0,r)$ telle que

$$f(z) - f(z_0) = (b(z - z_0) g(z))^{n_0} := h(z)^{n_0} \; .$$

On a $h(z_0) = 0$ et $h'(z_0) = b \neq 0$ ce qui permet de montrer par inversion locale que $h(D(z_0,r))$ est un voisinage de 0. Il en est alors encore de même de $h^{n_0}(D(z_0,r))$.

Il faut surtout comprendre le sens de ce théorème. Il permet de fournir une nouvelle preuve d'un certain nombre de propriétés déjà vues auparavant. Comme $f(\Omega)$ est ouvert si f est non constante, $f(\Omega)$ ne peut en particulier pas être d'intérieur vide. C'est pourquoi $f(\Omega)$ ne peut par exemple pas être inclus dans $\mathbb{R}$ (ce qui signifie que f ne peut pas être à valeurs réelles) où inclus dans un cercle centré en 0 (ce qui signifie que f ne peut être de module constant).

CHAPITRE 5

Singularités isolées - développement en série de Laurent

On dit dit qu'une fonction f possède une singularité isolée en un point $z_0 \in \mathbb{C}$ si elle est holomorphe au voisinage de z_0 sauf éventuellement au point z_0. Concrètement, cela veut dire qu'il existe un rayon $r > 0$ tel que $f \in \mathcal{H}(D(z_0, r) \setminus \{z_0\})$.

Par exemple la fonction $f_1(z) = \frac{1}{\sin z}$ possède des singularités isolées aux points $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ qui sont les zéros de la fonction sinus. Au voisinage de chacun de ces points la fonction f_1 est non bornée. on peut même dire que $\lim_{z \to k\pi} |f_1(z)| = +\infty$. On dira alors que les points $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sont des pôles pour la fonction f_1.

Un autre exemple très différent est celui de la fonction $f_2(z) = \frac{\sin z}{z}$. Le point 0 n'est pas dans le domaine de définition de f_2 mais, pour tout $z \neq 0$,

$$\frac{\sin z}{z} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}$$

ce qui prouve que la fonction f_2 se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier. On dira dans ce cas que la singularité est une singularité effaçable : elle n'existe pas vraiment.

Enfin, il existe un autre phénomème qui peut se produire comme le montre l'exemple de la fonction $f_3(z) = \exp(1/z)$ qui n'est évidemment pas définie en 0 mais holomorphe sur $\mathbb{C}^*$. Prenons $w \neq 0$ et choisissons un complexe v tel que $w = \exp(v)$. On sait alors que $\exp(1/z) = \exp(v)$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $1/z = v + 2ik\pi$, ce qui donne

$$z = \frac{1}{v + 2ik\pi} .$$

L'équation $f_3(z) = w$ possède donc des solutions aussi proches que l'on veut de 0 (il suffit de choisir k suffisamment grand). Comme w est quelconque non nul, on obtient donc que pour tout $r > 0$, aussi petit soit-il, $f_3(D(0,r)\setminus\{0\}) = \mathbb{C}^*$. En particulier $f_3(D(0,r)\setminus\{0\})$ est dense dans $\mathbb{C}$. On dit alors que 0 est une singularité essentielle.

5.1 Classification des singularités isolées

Nous allons voir que les trois exemples qui précèdent décrivent les trois situations possibles pour les singularités isolées. C'est l'objet du théorème qui suit.

Théorème 5.1.1 (Description des singularités isolées)**.** *Soit f une fonction holomorphe dans $\Omega \setminus \{z_0\}$. Seulement trois cas, mutuellement exclusifs, peuvent se présenter :*

1. *f est bornée au voisinage de z_0 . Alors, f se prolonge en une fonction holomorphe dans Ω . On dit alors que f possède une* **singularité effaçable** *au point z_0.*
2. *$|f(z)|$ tend vers $+\infty$ lorsque $z \to z_0$. On peut alors trouver un entier m strictement positif et une fonction $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ vérifiant $g(z_0) \neq 0$ tels que pour tout $z \neq z_0$*
$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m} .$$
L'entier m est unique et on dit que f possède un **pôle d'ordre** *m au point z_0 .*
3. *L'image de tout voisinage de z_0 par f est dense dans $\mathbb{C}$. On dit alors que f possède une* **singularité essentielle** *au point z_0 .*

Remarque 1. Faisons une remarque de forme sur la façon d'aborder cette notion de singularité isolée. Lorsque lors du Théorème 5.1.1 on exprime le fait que la fonction f possède une singularité isolée en z_0 en disant $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$ c'est pour focaliser sur ce qui se passe au point z_0 (en considérant un ouvert Ω où il n'y a qu'une seule singularité). Ainsi par exemple, si on revient à la fonction f_1 décrite plus haut, lorsqu'on s'intéresse à la singularité $k\pi$ et pas aux autres, on peut prendre comme ouvert $\Omega = D(k\pi, \pi)$ dans lequel $k\pi$ est la seule singularité de la fonction f_1.

Remarque 2. Dans le cas d'un pôle, en utilisant le développement en série entière de g au point z_0, on peut aussi trouver des coefficients $a_{-1},\ldots,a_{-m}$ avec $a_{-m} \neq 0$ tels que la fonction
$$f(z) - \sum_{n=1}^{m} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$$
soit holomorphe au voisinage de z_0 . On dit que $\sum_{n=1}^{m} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ est la partie principale de f en z_0.

Donnons maintenant une preuve du Théorème 5.1.1. Prenons $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$.

Premier cas. Supposons f bornée au voisinage de z_0. Introduisons la fonction
$$g(z) = (z-z_0)^2 f(z) \text{ si } z \neq z_0 \qquad \text{et} \qquad g(z_0) = 0 .$$

Comme f est bornée au voisinage de z_0, $\lim_{z\to z_0} g(z) = 0$ et la fonction g est continue en z_0. On peut même dire plus. Comme $\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} = (z-z_0)f(z)$, on peut aussi dire que la fonction g est dérivable z_0 et telle que $g'(z_0) = 0$. La fonction g est donc holomorphe sur Ω. Elle se développe en série entière au voisinage de z_0. De plus, comme $g(z_0) = g'(z_0) = 0$, elle possède un zéro d'ordre au moins 2 en z_0 et on peut écrire au voisinage de z_0,

$$g(z) = \sum_{k=2}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k .$$

On trouve alors pour $z \neq z_0$ et voisin de z_0

$$f(z) = \sum_{k=2}^{+\infty} a_k (z-z_0)^{k-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} (z-z_0)^n .$$

La fonction f se prolonge donc en une fonction holomorphe sur Ω en posant $f(z_0) = a_2$.

Deuxième cas. Supposons que $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$. En particulier, il existe $r > 0$ tel que pour tout $z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, $f(z) \neq 0$. Posons alors $h(z) = \frac{1}{f(z)}$ pour $z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. L'hypothèse faite sur f entraine que h possède une singularité effaçable en z_0. De plus, $\lim_{z\to z_0} h(z) = 0$. Ainsi, la fonction h possède un zéro en z_0 . Notons m l'ordre de multiplicité de ce zéro. On peut écrire $h(z) = (z-z_0)^m k(z)$ avec k holomorphe et $k(z_0) \neq 0$. La fonction holomorphe k ne s'annule pas au voisinage de z_0 et en revenant à f,

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m} \times \frac{1}{k(z)} .$$

Il suffit donc de poser $g(z) = \frac{1}{k(z)}$ qui est une fonction holomorphe au voisinage de z_0 ne s'annulant pas en z_0. Constatons enfin que l'entier m ainsi déterminé est unique. Supposons en effet

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m} g(z) = \frac{1}{(z-z_0)^{\tilde{m}}} \tilde{g}(z)$$

avec par exemple $\tilde{m} > m$. On pourrait alors écrire $(z-z_0)^{\tilde{m}-m} g(z) = \tilde{g}(z)$, ce qui est contradictoire avec $\tilde{g}(z_0) \neq 0$. Cet entier m est appelé « ordre du pôle ».

Troisième cas. Supposons qu'on n'est ni dans le premier cas, ni dans le second cas. Il s'agit de voir que pour tout $\varepsilon > 0$, $f(D(z_0,\varepsilon) \setminus \{z_0\})$ est dense dans $\mathbb{C}$. On procède par contraposition. Supposons qu'on puisse trouver un $\varepsilon > 0$ tel que $f(D(z_0,\varepsilon) \setminus \{z_0\})$ soit non dense dans $\mathbb{C}$. Montrons qu'on est alors dans l'un des deux premiers cas. Par hypothèse, il existe $b \in \mathbb{C}$ et $\eta > 0$ tels que

$$D(b,\eta) \cap (f(D(z_0,\varepsilon) \setminus \{z_0\})) = \emptyset .$$

Posons

$$h(z) = \frac{1}{f(z)-b} \qquad \text{si } z \in D(z_0,\varepsilon) \setminus \{z_0\} .$$

Comme $|f(z)-b| \geq \eta$ si $z \in D(z_0,\varepsilon) \setminus \{z_0\}$, la fonction h est bornée au voisinage de z_0. Elle possède donc une singularité effaçable en ce point. Regardons alors ce qui se passe selon la valeur du prolongement en z_0.

— Si $h(z_0) = 0$, alors $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$ et f possède un pôle en z_0.
— Si $h(z_0) \neq 0$, alors $f(z_0) = b + \frac{1}{h(z_0)}$ et f possède une singularité effaçable en z_0 (f se prolonge par continuité en z_0).

Remarque. On peut montrer de façon beaucoup plus précise, qu'en fait, dans ce troisième cas, $f(D(z_0,\varepsilon) \setminus \{z_0\})$ évite au plus un point de $\mathbb{C}$. C'est le grand théorème de Picard, très difficile à démontrer. Citons simplement deux exemples qui illustrent cet énoncé. Si on prend $f(z) = \exp(1/z)$, on a vu plus haut que $f(D(0,\varepsilon) \setminus \{0\}) = \mathbb{C}^*$. Si on prenait $f(z) = \cos(1/z)$, on pourrait montrer de même que $f(D(0,\varepsilon) \setminus \{0\}) = \mathbb{C}$.

Venons en à un exemple fondamental. Supposons Ω connexe et considérons deux fonctions holomorphes sur Ω non identiquement nulles. Introduisons $h = \frac{f}{g}$ qui possède des singularités isolées aux zéros de la fonction g. Considérons z_0 tel que $g(z_0) = 0$ avec multiplicité m. On peut écrire $g(z) = (z-z_0)^m \tilde{g}(z)$ où $\tilde{g}$ est holomorphe et $\tilde{g}(z_0) \neq 0$. On peut aussi trouver un entier n et une fonction $\tilde{f}$ holomorphe qui ne s'annule pas en z_0 tels que $f(z) = (z-z_0)^n \tilde{f}(z)$ ($n = 0$ si $f(z_0) \neq 0$ et n est l'ordre de multiplicité du zéro z_0 pour la fonction f sinon). On a alors

$$h(z) = (z-z_0)^{n-m} \times \frac{\tilde{f}(z)}{\tilde{g}(z)} .$$

On peut alors distinguer trois cas :

— Si $n = m$, h possède une singularité effaçable en z_0 qui n'est pas un zéro de h ;
— Si $n > m$, h possède une singularité effaçable en z_0 qui de plus est un zéro de multiplicité $n-m$;
— Si $n < m$, h possède un pôle de multiplicité $m-n$ en z_0.

Un cas particulier important est celui des fractions rationnelles $F = \frac{P}{Q}$. On peut supposer que les polynômes P et Q sont premiers entre eux. Ainsi, ils n'ont pas de zéros communs. Les singularités de F sont les zéros de Q. Ce sont des pôles et si z_0 est un zéro de multiplicité n de Q, alors z_0 est un pôle de F de multiplicité n.

5.2 Développement de Laurent autour d'une singularité isolée

Comme pour les fonctions holomorphes, les fonctions qui possèdent une singularité isolée en un point z_0 se développent autour de ce point. Un tel développement est appelé **développement en série de Laurent** et la nature de ce développement permet de repérer le type de singularité que possède la fonction au point z_0. C'est l'objet du théorème qui suit.

Théorème 5.2.1 (Développement en série de Laurent). *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ et f une fonction holomorphe dans $\Omega \setminus \{z_0\}$. On peut trouver des coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tels que si $0 < |z - z_0| < d(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega)$ on ait :*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n . \tag{5.1}$$

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est unique et les trois types de singularités se comprennent comme ceci :

- *Lorsque les $(a_n)_{n<0}$ sont tous nuls, z_0 est une singularité effaçable de f*
- *Lorsque les coefficients $(a_n)_{n<-m}$ sont tous nuls et $a_{-m} \neq 0$, la fonction f possède un pôle d'ordre m au point z_0*
- *Lorsqu'il y a parmi les $(a_n)_{n<0}$ une infinité de coefficients non nuls, la singularité de f au point z_0 est essentielle.*

De plus, les coefficents $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ peuvent se calculer à l'aide des formules de Cauchy suivantes :

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

où $r < d(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega)$ et où le cercle est parcouru une fois dans le sens direct. Le développement (5.1) *est appelé* **développement en série de Laurent** *de la fonction f au point z_0.*

Remarque. Comme lors du développement des fonctions holomorphes en séries entières, la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n \zeta^n$ a un rayon de convergence au moins égal à la distance de z_0 au complémentaire de Ω. Par contre, la série entière $\sum_{k\geq 1} a_{-k} \zeta^k$ a toujours un rayon de convergence infini.

Avant de donner une preuve du Théorème 5.2.1, regardons trois exemples élémentaires qui permettent de comprendre ce théorème. Dans chacun des cas, $z_0 = 0$.

- $f_1(z) = \frac{\sin(z)}{z}$. On sait que 0 est une singularité effaçable : la fonction f_1 se prolonge en une fonction holomophe sur $\mathbb{C}$. On peut la développer en série entière. Plus précisément,
$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} .$$
- $f_2(z) = \frac{\exp(z)}{z^2}$. On sait que 0 est un pôle d'ordre 2 pour la fonction f_2 (voir la caractérisation des pôles dans le Théorème 1.1). En utilisant le développement en série entière de la fonction exp, on obtient pour tout $z \neq 0$,
$$f_2(z) = \sum_{n=-2}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+2)!} .$$
On voit apparaître un développement avec des puissances négatives de z. La plus petite puissance négative correspond à un terme en z^{-2}. Ce n'est pas un hasard, 0 étant un pôle d'ordre 2.

- $f_3(z) = \exp(1/z)+\exp(z)-1$. La fonction f_3 est la somme d'une fonction possèdant une singularité essentielle en 0 ($\exp(1/z)$) et d'une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ ($\exp(z)-1$)). Il est facile de comprendre que 0 est alors une singularité essentielle pour f_3. En utilisant le développement en série entière de la fonction exp, un petit calcul donne facilement pour $z \neq 0$,

$$f_3(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{z^n}{|n|!}\,.$$

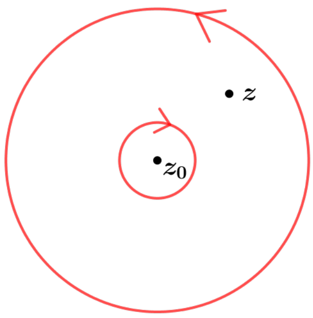
  On voit ici un développement autour de 0 qui contient une infinité de puissances négatives de z : c'est ce qui caractérise les singularités essentielles.

Venons en maintenant à la preuve du Théorème 5.2.1. On va se baser sur le lemme suivant, qui généralise la formule de Cauchy.

Lemme 5.2.2. *Notons γ_r le cercle de centre z_0 et de rayon r parcouru une fois dans le sens direct. Soient r et R tels que $0 < r < R < d(z_0, \mathbb{C}\setminus\Omega)$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $r < |z - z_0| < R$. On a alors*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi - \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi\,.$$

La situation peut se résumer dans le dessin suivant :



Le signe moins devant la deuxième intégrale peut s'interpréter en disant que le petit cercle est parcouru dans le sens indirect.

Supposons dans un premier temps que le lemme soit satisfait. Si $|\xi - z_0| = R$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\frac{f(\xi)}{\xi - z} &= \frac{f(\xi)}{\xi - z_0 - (z - z_0)} \\
&= \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \times \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} \\
&= f(\xi) \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}\,.
\end{aligned}$$

La convergence de la série étant normale par rapport à la variable ξ, on peut échanger l'intégrale sur le grand cercle et la série pour obtenir

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_R}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_R}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\,d\xi\right)(z-z_0)^n\ .$$

Ce raisonnement est identique à celui qu'on avait effectué pour montrer que les fonctions holomorphes sont développables en séries entières. Il nous fournit ici les puissance positives de $(z-z_0)$. En traitant de même l'intégrale sur le petit cercle, on va obtenir les termes correspondant aux puissances négatives de $(z-z_0)$.

Si $|\xi-z_0|=r$, on peut aussi écrire

$$\begin{aligned}-\frac{f(\xi)}{\xi-z}&=\frac{-f(\xi)}{\xi-z_0-(z-z_0)}\\&=\frac{f(\xi)}{z-z_0}\times\frac{1}{1-\frac{\xi-z_0}{z-z_0}}\\&=f(\xi)\times\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\xi-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}\ .\end{aligned}$$

Là encore,

$$\left|\frac{(\xi-z_0)}{(z-z_0)}\right|=\frac{r}{|z-z_0|}$$

et la convergence est normale sur le cercle γ_r. On peut donc encore échanger intégrale et série pour obtenir

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r}f(\xi)(\xi-z_0)^n\,d\xi\right)\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\\&=\sum_{m=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{m+1}}\,d\xi\right)(z-z_0)^m\end{aligned}$$

en posant $m=-(n+1)$. Pour cette deuxième partie, la seule contrainte pour effectuer le calcul est $0<r<|z-z_0|$, r pouvant du reste être arbitrairement petit.

Posons alors pour tout $n\in\mathbb{Z}$,

$$a_n=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\,d\xi\ .$$

On peut (comme dans le contexte des fonctions holomorphes) montrer que ces coefficients ne dépendent pas de r et, en regroupant les deux calculs précédents, on obtient si $0<|z-z_0|<d(z_0,\mathbb{C}\setminus\Omega)$,

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n\ .$$

Remarque 1. Les observations faites plus haut sur la validité des calculs nous apprennent que :

- La partie « positive » $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge au moins si $|z-z_0| < d(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega)$, comme pour les fonctions holomorphes
- La partie « négative » $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$ converge pour tout $z \neq z_0$.

Remarque 2. Il y a unicité d'un tel développement. En effet, si

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(z-z_0)^n$$

au voisinage de z_0, on peut encore une fois échanger série et intégrale pour obtenir :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n_0+1}} \, d\xi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \times \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} (\xi - z_0)^{n-(n_0+1)} \, d\xi \, .$$

Par ailleurs, on a déjà vu à plusieurs reprises que $\int_{\gamma_r} (\xi - z_0)^k \, d\xi = 0$ sauf lorsque $k = -1$ (pour les autres valeurs de k, la fonction $\xi \mapsto (\xi - z_0)^k$ possède des primitives). On trouve donc

$$b_{n_0} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n_0+1}} \, d\xi = a_{n_0} \, .$$

Voyons maintenant comment s'interprètent les trois types de singularités.

- Si pour tout $n < 0$, $a_n = 0$ on a

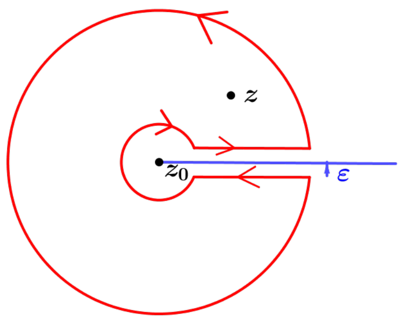
  $$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$$

  et la singularité est effaçable. La réciproque est aussi vraie par unicité des coefficients dans le développement en série de Laurent.
- Si il existe $n_0 > 0$ tel que $a_{-n_0} \neq 0$ et pour tout $n < -n_0$, $a_n = 0$, on peut écrire

  $$f(z) = \sum_{n=-n_0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = \frac{1}{(z-z_0)^{n_0}} \times \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k-n_0}(z-z_0)^k := \frac{1}{(z-z_0)^{n_0}} \times g(z)$$

  où g est une fonction holomorphe au voisinage de z_0 ne s'annulant pas en z_0. La singularité z_0 est alors un pôle d'ordre n_0. Là encore, la réciproque est vraie par unicité des coefficients dans le développement en série de Laurent.
- Enfin, si on n'est pas dans l'un des deux cas précédents, c'est qu'une infinité de coefficients a_n avec $n < 0$ sont non nuls. D'un autre coté, si la singularité n'est ni effaçable, ni un pôle, c'est que la singularité est essentielle. Ainsi, la fonction f possède une singularité essentielle en z_0 si et seulement si une infinité de coefficients $(a_n)_{n<0}$ sont non nuls.

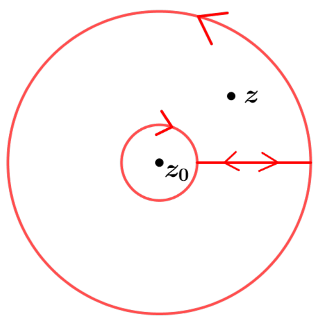
Il nous reste à dire un mot sur la preuve du lemme 5.2.2. On suppose fixés r et R et, pour $\varepsilon < r$, on considère le lacet φ_ε décrit ci-dessous.



Considérons l'ouvert étoilé formé d'un disque de rayon un peu supérieur à R auquel on a retiré la demi droite bleue sur le dessin. La fonction f est holomorphe dans cet ouvert étoilé (z_0 n'est pas dans l'ouvert puisqu'il est sur la demi droite). Comme $\mathrm{Ind}(z, \varphi_\varepsilon) = 1$, la formule de Cauchy (licite dans l'ouvert étoilé considéré) donne :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\varphi_\varepsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi .$$

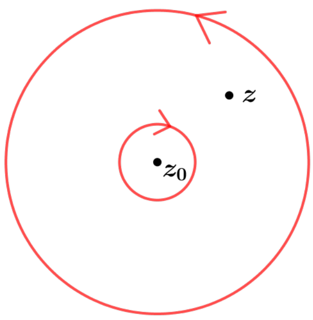
Lorsqu'on fait tendre ε vers 0, le lacet φ_ε devient le lacet φ décrit ci-dessous.



On peut passer à la limite pour obtrenir

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\varphi} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi .$$

Enfin, les intégrales sur le segment se neutralisent. L'intégrale calculée coïncide donc avec la somme des intégrales sur les deux lacets représentés ci-dessous. C'est ce qu'il fallait démontrer.



5.3 Notion de résidu

Considérons une fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$. On sait alors que f se développe en série de Laurent au voisinage de z_0. Plus précisément, si $0 < |z - z_0| < d(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega)$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

où

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

et γ_r est un cercle de centre z_0 et de rayon r parcouru une fois dans le sens direct.

Définition 5.3.1. *On appelle résidu de la fonction f au point z_0, le coefficient a_{-1} dans le développement en série de Laurent de f au point z_0. Il est noté* $\mathrm{Res}(f, z_0)$ *et peut se calculer à l'aide de l'intégrale suivante :*

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} f(z) dz$$

où le petit cercle γ_r est parcouru une fois dans le sens direct.

Revenons sur le développement en série de Laurent de f. On peut partager la somme en trois morceaux :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-2} a_n (z - z_0)^n + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n := f_1(z) + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + f_2(z) \,.$$

Comme nous l'avons vu, la série définissant f_1 converge pour tout $z \neq z_0$. On peut alors en trouver une primitive sur $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ en primitivant terme à terme. Cela donne :

$$F_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{-2} \frac{a_n (z - z_0)^{n+1}}{n+1} \,.$$

De même, on peut trouver une primitive à f_2 dans le disque $D(z_0, d(z_0, \mathbb{C}\setminus\Omega))$ qui s'écrit

$$F_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n(z-z_0)^{n+1}}{n+1} .$$

Par contre, si le résidu a_{-1} est non nul, le dernier terme $\frac{a_{-1}}{z-z_0}$ ne possède pas de primitives au voisinage de z_0. On peut aussi dire que si γ est un lacet tracé dans le disque $D(z_0, d(z_0, \mathbb{C}\setminus\Omega))$ qui évite le point z_0,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,dz = a_{-1} \times \mathrm{Ind}(z_0,\gamma) = \mathrm{Res}(f, z_0) \times \mathrm{Ind}(z_0,\gamma) .$$

C'est pour cela que l'on parle de résidu : c'est ce qui reste après intégration. Le théorème des résidus généralisera cette formule.

Voyons maintenant comment on calcule un résidu. C'est très facile lorsque le pôle est d'ordre 1 (on parle encore de pôle simple). Supposons que f possède un pôle simple en z_0. On peut écrire au voisinage de z_0 :

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n .$$

Ainsi

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) .$$

Lorsque la fonction f s'écrit $f = \frac{g}{h}$ où $g(z_0) \neq 0$ et où z_0 est un zéro simple de h on a alors

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{g(z)}{\frac{h(z)}{z-z_0}} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} .$$

Ainsi

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} .$$

Regardons quelques exemples :

- $f(z) = \dfrac{1}{\sin(z)}$ et $z_0 = k\pi$. $\mathrm{Res}(f, k\pi) = \dfrac{1}{\cos(k\pi)} = (-1)^k$.
- $f(z) = \tan(z) = \dfrac{\sin(z)}{\cos(z)}$ et $z_0 = \pi/2+k\pi$. $\mathrm{Res}(f, \pi/2+k\pi) = \dfrac{\sin(\pi/2+k\pi)}{-\sin(\pi/2+k\pi)} = -1$.
- $f(z) = \dfrac{1}{z^2+a^2}$ et $z_0 = ia$. $\mathrm{Res}(f, ia) = \dfrac{1}{2ia} = -\dfrac{i}{2a}$.

Regardons maintenant le cas d'un pôle d'ordre p où $p \geq 2$. On peut écrire

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^p} \times g(z)$$

où g est holomorphe au voisinage de z_0. Si

$$f(z) = \sum_{n=-p}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

alors

$$g(z) = \sum_{n=-p}^{+\infty} a_n (z-z_0)^{n+p} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k-p} (z-z_0)^k \ .$$

Ainsi

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{g^{(p-1)}(z_0)}{(p-1)!} \ .$$

C'est rarement la bonne façon de calculer. Le calcul des dérivées est souvent fastidieux et à la fin, il faut en plus souvent lever une indétermination. La bonne façon de voir les choses est d'écrire

$$g(z) = a_{-p} + a_{-p+1}(z-z_0). \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{p-1} + o((z-z_0)^{p-1}) \ .$$

Il s'agit donc d'écrire un développement limité à l'ordre $p-1$ au point z_0 pour la fonction g et de repérer le terme en $(z-z_0)^{p-1}$.

Regardons là encore deux exemples.

- $f(z) = \dfrac{1}{\sin^2(z)}$ et $z_0 = 0$. On a $f(z) \sim \frac{1}{z^2}$, ce qui assure que 0 est un pôle d'ordre 2. Il n'y a aucun calcul pour trouver le résidu. En effet, la fonction g est paire. Son développement limité à l'ordre 1 en 0 s'écrit donc

  $$g(z) = 1 + 0 \times z + o(z)$$

  et

  $$\mathrm{Res}(f, 0) = 0 \ .$$

- $f(z) = \dfrac{1}{\sin^3(z)}$ et $z_0 = 0$. On a $f(z) \sim \frac{1}{z^3}$, ce qui assure que 0 est un pôle d'ordre 3. La fonction g s'écrit ici

  $$g(z) = \frac{z^3}{\sin^3(z)} \ .$$

  On a alors

  $$\begin{aligned} g(z) &= \frac{z^3}{\left(z - \frac{z^3}{6} + o(z^3)\right)^3} \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{z^2}{6} + o(z^2)\right)^3} \\ &= 1 - 3\left(\frac{-z^2}{6}\right) + o(z^2) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \times z^2 + o(z^2) \ . \end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathrm{Res}(f,0) = \frac{1}{2} .$$

Les observations faites au cours de cette section peuvent se résumer dans la proposition qui suit.

Proposition 5.3.2 (Calcul des résidus). *Soit f une fonction possèdant une singularité isolée en z_0.*

- *Si z_0 est un pôle simple, on a* $\mathrm{Res}(f,z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$.
- *Si $f = \frac{g}{h}$ où $g(z_0) \neq 0$ et où z_0 est un zéro simple de h, on a* $\mathrm{Res}(f,z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$
- *Si f possède un pôle d'ordre n en z_0 et si $g(z) = (z-z_0)^n f(z)$, on a* $\mathrm{Res}(f,z_0) = \frac{g^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}$ *qui s'interprète aussi comme le coefficient d'ordre $n-1$ dans le développement limité de g en z_0.*

5.4 Fonctions méromorphes

Introduisons tout d'abord sur la notion de fonction holomorphe à singularités isolées, qui sera aussi au cœur du chapitre suivant sur le théorème des résidus.

Définition 5.4.1. *Soit Ω un ouvert non vide. On dit qu'une fonction f est holomorphe à singularités isolées dans Ω si il existe $P \subset \Omega$ constitué de points isolés tel que f soit holomorphe sur $\Omega \setminus P$. Rappelons de plus que dire que P est constitué de points isolés signifie que pour tout $p \in P$, il existe $r > 0$ tel que le disque $D(p,r)$ ne rencontre pas de point de P autre que p.*

Quelques remarques importantes s'imposent alors à cette définition.

- Il est sous entendu dans la définition que l'ensemble $\Omega \setminus P$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ car une fonction holomorphe est toujours définie sur un ouvert.
- Si $K \subset \Omega$ est un compact, alors $P \cap K$ est fini (éventuellement vide). On dit que P est localement fini. En effet, supposons que $P \cap K$ soit infini. On pourrait alors construire une suite (z_n) constituée de points de $P \cap K$. K étant compact, cette suite possèderait une sous suite (z_{n_k}) convergeant vers un point $z \in K$. En particulier ce point z serait dans Ω (car $K \subset \Omega$) et forcément dans P (car $\Omega \setminus P$ est ouvert). Il y a contradiction car z serait un point de P non isolé.
- Il résulte du point précédent que P est fini ou dénombrable. En effet, On peut trouver une suite croissante de compacts $K_n \subset \Omega$ tels que $\Omega = \bigcup_n K_n$. Il suffit de prendre par exemple

$$K_n = \{z \in \mathbb{C} \; ; \; d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq 1/n\} \cap \overline{D}(0,n) .$$

(la présence de $\overline{D}(0,n)$ dans la définition de K_n est là pour s'assurer que K_n est borné). On a alors

$$P = \bigcup_n P \cap K_n$$

qui est donc une réunion dénombrable d'ensembles finis (éventuellement vides). Ainsi, P est fini ou dénombrable.

Pour comprendre la notion, proposons quelques exemples de situations possibles ou impossibles pour les ensembles P et Ω.

— $\Omega = \mathbb{C}$ et $P = \{k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Ces ensembles répondent évidemment à la définition. Du reste, la fonction $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ est bien une fonction holomorphe à singularités isolées sur $\mathbb{C}$ dont l'ensemble des singularités est P.

— $\Omega = \mathbb{C}$ et $P = \{1/k\ ;\ k \in \mathbb{N}^*\}$. L'ensemble P est bien constitué de points isolés. En effet, si $k \in \mathbb{N}^*$, le disque $D(1/k, 1/(3k))$ ne roncontre pas d'autres points de P que le point $1/k$. Cependant, cette situation n'est pas envisageable car $\mathbb{C} \setminus P$ n'est pas ouvert. En effet, $0 \in \mathbb{C} \setminus P$ et pour tout $r > 0$, $D(0, r)$ rencontre P. Il faudrait rajouter 0 à P pour que $\mathbb{C} \setminus P$ devienne ouvert, mais alors P ne serait plus constitué uniquement de points isolés !

— $\Omega = D(1, 1)$ et $P = \{1/k\ ;\ k \in \mathbb{N}^*\}$. Ces deux ensembles répondent aux exigences. Dans cette situation, les points $1/k$ s'accumulent en 0 qui n'est plus dans Ω ! Du reste, la fonction $f(z) = \frac{1}{\exp(2i\pi/z)-1}$ est une fonction holomorphe à singularités isolés dans Ω dont l'ensemble des singularités est P.

Définition 5.4.2. *On dit qu'une fonction f est* **méromorphe** *dans Ω si f est une fonction holomorphe à singularités isolées dans Ω dont toutes les singularités non effaçables sont des pôles. On note $\mathcal{M}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions méromorphes dans Ω. On a bien évidemment $\mathcal{H}(\Omega) \subset \mathcal{M}(\Omega)$.*

L'exemple le plus simple de fonction méromorphe est donné par les fractions rationnelles. Si $F = \frac{P}{Q}$ où P et Q sont deux polynômes premiers entre eux, alors $F \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$. Ses singularités sont en nombre fini. Ce sont les zéros de Q et tout zéro de Q, est un pôle de F dont l'ordre est égal à l'ordre de multiplicité du zéro (voir Partie 5.1). Plus généralement, il est établi dans la partie 5.1 que si Ω est connexe, le quotient de deux fonctions holomorphes sur Ω est une fonction méromorphe sur Ω.

Proposition 5.4.3. *L'ensemble $\mathcal{M}(\Omega)$ des fonctions méromorphes sur Ω est stable par addition, multiplication externe par un scalaire, multiplication interne et dérivation. Lorsque Ω est connexe, l'inverse d'une fonction méromorphe non nulle est encore méromorphe. Ainsi, dans ce cas, $\mathcal{M}(\Omega)$ est un corps.*

Preuve.

- **Stabilité par somme.** Soient f et g deux fonctions méromorphes sur Ω. Notons respectivement $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ l'ensemble des pôles de f et g. Alors, $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ est encore constitué de points isolés et $f + g$ est holomorphe sur $\Omega \setminus (\mathcal{P} \cup \mathcal{Q})$.
  Soit $z_0 \in \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$. On peut trouver deux entiers n et m tels que $(z - z_0)^n f(z)$ et $(z - z_0)^m g(z)$ soient holomorphes au voisinage de z_0. On a éventuellement $n = 0$ (resp. $m = 0$) si $z_0 \notin \mathcal{P}$ (resp $z_0 \notin Q$). Notons $k = \max(n, m)$. Il est clair alors que $(z - z_0)^k (f(z) + g(z))$ est holomorphe au voisinage de z_0. Ainsi, $f + g$ possède un

pôle d'ordre au plus k en z_0. Cette preuve permet de ne pas distinguer de cas, mais de façon plus précise, on a trois cas différents :

1 si $n > m$, $f+g$ possède un pôle d'ordre exactement n en z_0

2 si $m > n$, $f+g$ possède un pôle d'ordre exactement m en z_0

3 si $n = m$, il peut y avoir des compensations. Prenons par exemple $f(z) = \frac{1}{z}$, $g(z) = -\frac{1}{\sin z}$, et $z_0 = 0$. On a

$$f(z)+g(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{\sin z} = \frac{\sin z - z}{z \times \sin z} \sim \frac{-\frac{z^3}{6}}{z^2} \sim -\frac{z}{6}$$

et $f+g$ possède une singularité effaçable en 0 et même un zéro de multiplicité 1.

- **Stabilité par produit.** Les notations sont les mêmes que dans le point précédent. On trouve ici que $(z-z_0)^{n+m} f(z)g(z)$ est holomorphe au voisinage de z_0, ce qui signifie que z_0 est un pôle d'ordre au plus $n+m$ pour le produit fg. Là encore, il peut y avoir des compensations. Par exemple si $f(z) = \frac{1}{\sin^3 z}$, $g(z) = z^5$ et $z_0 = 0$, alors, f possède un pôle triple en 0, g un zéro de multiplicité 5 et fg un zéro de multiplicité 2.
- **Stabilité par dérivation.** Soit $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $\mathcal{P}$ l'ensemble de ses pôles. La dérivée f' est alors encore holomorphe dans $\Omega \setminus \mathcal{P}$. Si $z_0 \in \mathcal{P}$ est un pôle d'ordre n de f, on peut trouver une fonction g, holomorphe au voisinage de z_0, vérifiant $g(z_0) \neq 0$ et telle que $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^n} \times g(z)$. On a alors pour $z \neq z_0$ et voisin de z_0,

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{-n}{(z-z_0)^{n+1}} \times g(z) + \frac{1}{(z-z_0)^n} \times g'(z) \\ &= \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \times \left(-ng(z) + (z-z_0)g'(z)\right). \end{aligned}$$

  La fonction $h(z) = -ng(z)+(z-z_0)g'(z)$ est holomorphe au voisinage de z_0 et vérifie $h(z_0) = -ng(z_0) \neq 0$. La fonction f' possède donc un pôle d'ordre $n+1$ en z_0.
- **Passage à l'inverse lorsque Ω est connexe.** Supposons Ω connexe et f non identiquement nulle. Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des pôles de f et $\mathcal{Z}$ l'ensemble de ses zéros. Ces deux ensembles sont constitués de points isolés et il est clair que $\frac{1}{f}$ est holomorphe sur $\Omega \setminus (\mathcal{P} \cup \mathcal{Z})$. De plus

  1 si $z_0 \in \mathcal{P}$ est un pôle d'ordre n de f, on peut trouver une fonction g, holomorphe au voisinage de z_0, vérifiant $g(z_0) \neq 0$ et telle que

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^n} \times g(z).$$

  On a alors

$$\frac{1}{f(z)} = (z-z_0)^n \times \frac{1}{g(z)}$$

  et z_0 est un zéro de multiplicité n pour $\frac{1}{f}$. En particulier, z_0 est une singularité effaçable pour $\frac{1}{f}$.

2 si $z_0 \in \mathcal{Z}$ est un zéro de multiplicité n de f, on peut trouver une fonction g, holomorphe au voisinage de z_0, vérifiant $g(z_0) \neq 0$ et telle que

$$f(z) = (z - z_0)^n \times g(z) .$$

On a alors

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^n} \times \frac{1}{g(z)}$$

et z_0 est un pôle d'ordre n pour $\frac{1}{f}$.

Pour résumer la proposition 5.4.3, on peut dire que $\mathcal{M}(\Omega)$ a une structure d'algèbre (espace vectoriel et anneau) pour les opérations usuelles. Si de plus Ω est connexe, toute fonction différente de la fonction nulle possède un inverse et $\mathcal{M}(\Omega)$ a alors aussi une structure de corps. On pourrait montrer qu'il s'identifie aux corps des fractions de l'anneau $\mathcal{H}(\Omega)$. L'hypothèse de connexité est de plus essentielle pour pouvoir inverser les fonctions non nulles. Imaginons que Ω soit réunion de deux ouverts disjoints non vides notés Ω_1 et Ω_2. Prenons la fonction f qui vaut 1 sur Ω_1 et 0 sur Ω_2. Elle est non identiquement nulle mais $\frac{1}{f}$ n'a pas de sens (non définie dans Ω_2).

Théorème 5.4.4 (Principe de l'argument)**.** *Soit $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $\overline{D(z_0, r)}$ un disque fermé inclus dans Ω. On suppose que f n'a ni zéro, ni pôle sur le cercle $|z - z_0| = r$. On note γ_r le cercle de centre z_0 et de rayon r parcouru une fois dans le sens direct. On a :*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \mathcal{Z}(f) - \mathcal{P}(f)$$

où $\mathcal{Z}(f)$ et $\mathcal{P}(f)$ désignent respectivement le nombre de zéros et le nombre de pôles de f dans $D(z_0, r)$ comptés avec multiplicité.

Preuve. La fonction $\frac{f'}{f}$ est méromorphe dans Ω et l'ensemble de ses singularités est constitué des zéros et des pôles de f. Cet ensemble $\mathcal{S}$ est constitué de points isolés et ne rencontre pas le cercle γ_r. Ainsi, l'intégrale qu'on cherche à évaluer est bien définie. Notons $\mathcal{S}_r = \mathcal{S} \cap \overline{D}(z_0, r)$. C'est la trace sur un compact d'un ensemble constitué de points isolés. L'ensemble $\mathcal{S}_r$ est donc fini. Pour chaque point $s \in \mathcal{S}_r$ décrivons la fonction $\frac{f'}{f}$ au voisinage de s. Distinguons deux cas :

1 Si s est un zéro de f de multiplicité n, on peut trouver une fonction g, holomorphe au voisinage de p, ne s'annulant pas en p et telle que

$$f(z) = (z - s)^n \times g(z) .$$

On a alors

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-s} + \frac{g'(z)}{g(z)} .$$

La fonction $\frac{g'}{g}$ étant holomorphe au voisinage de s, $\frac{f'}{f}$ possède un pôle simple en s et $\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}, s\right) = n$.

2 Si maintenant s est un pôle de f d'ordre n, on peut trouver une fonction g, holomorphe au voisinage de p, ne s'annulant pas en s et telle que

$$f(z) = \frac{1}{(z-s)^n} \times g(z) \ .$$

On a alors

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-n}{z-s} + \frac{g'(z)}{g(z)} \ .$$

La fonction $\frac{g'}{g}$ étant holomorphe au voisinage de s, $\frac{f'}{f}$ possède un pôle simple en s et $\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}, s\right) = -n$.

Pour chaque $s \in \mathcal{S}_r$, notons $m(s) = \mathrm{Res}(f'/f, s)$. De façon concrète, par ce qui précède, $m(s)$ est égal à l'ordre de multiplicité de s si s est un zéro de f et à l'opposé de l'ordre de s si s est un pôle de f. Posons alors

$$h(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} - \sum_{s \in \mathcal{S}_r} \frac{m(s)}{z-s} \ .$$

On a déjà remarqué que $\mathcal{S}_r$ est un ensemble fini et ce correctif cherche à compenser les singularités de f'/f. Plus précisément, l'allure locale décrite plus haut au voisinage de chaque $s \in \mathcal{S}_r$ nous assure que la fonction h est holomorphe au voisinage de chaque $s \in \mathcal{S}_r$.

Fixons alors $R > r$ tel que le disque $D(z_0, R)$ soit inclus dans Ω et tel que f'/f ne possède par d'autre singularité dans $D(z_0, R)$ que les points de $\mathcal{S}_r$. Tout se passe dans $D(z_0, R)$ qui est maintenant un ouvert étoilé dans lequel les résultats du chapitre 4 peuvent s'appliquer (j'entends par là, la formule de Cauchy, l'existence de primitives,...).

La fonction h est holomorphe dans l'ouvert étoilé $D(z_0, R)$. On sait alors que

$$\int_{\gamma_r} h(z)\, dz = 0 \ .$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \sum_{s \in \mathcal{S}_r} \frac{m(s)}{z-s} dz \\
&= \sum_{s \in \mathcal{S}_r} \frac{m(s)}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z-s} \\
&= \sum_{s \in \mathcal{S}_r} m(s) \times \mathrm{Ind}(s, \gamma_r) \\
&= \sum_{s \in \mathcal{S}_r} m(s) \\
&= \mathcal{Z}(f) - \mathcal{P}(f)
\end{aligned}$$

où $\mathcal{Z}(f)$ et $\mathcal{P}(f)$ désignent respectivement le nombre de zéros et le nombre de pôles de f dans $D(z_0, r)$ comptés avec multiplicité.

CHAPITRE 6

Théorème des résidus - applications

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$. On dit que la fonction f est une fonction holomorphe à singularités isolées dans Ω si il existe un ensemble $P \subset \Omega$ constitué de points isolés tel que f soit holomorphe dans $\Omega \setminus P$. En particulier, toute fonction méromorphe dans Ω est une fonction holomorphe à singularités isolées dans Ω.

Remarque. La définition sous entend que $\Omega \setminus P$ est ouvert. Il en résulte que pour tout compact $K \subset \Omega$, $K \cap P$ est fini (on dit alors que P est localement fini). En particulier, comme Ω est réunion croissante d'une suite de compacts, P est fini ou dénombrable (voir le chapitre précédent pour plus de détails).

6.1 Le théorème des résidus dans un ouvert étoilé

Théorème 6.1.1 (Théorème des résidus)**.** *Soit Ω un ouvert étoilé non vide et f une fonction holomorphe à singularités isolées dans Ω. Notons P l'ensemble des singularités de f. Soit γ un lacet tracé dans Ω ne rencontrant pas P. Alors*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)dz = \sum_{p\in P} \mathrm{Ind}(p,\gamma)\,\mathrm{Res}(f,p)\,.$$

Remarque 1. Il n'existe qu'un nombre fini de points $p \in P$ pour lesquels $\mathrm{Ind}(p,\gamma) \neq 0$. Ainsi la somme de droite dans l'égalité précédente ne contient toujours qu'un nombre fini de termes non nuls.

Remarque 2.. Dans la pratique, la fonction f sera très souvent une fonction méromorphe dans Ω ; c'est dans ce contexte que les résidus seront faciles à calculer.

Remarque 3. Le théorème des résidus généralise et uniformise certaines formules vues auparavant. Citons cinq exemples :

- Si $\Omega = \mathbb{C}$ et si $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$, on retrouve la formule définissant l'indice
$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz = \mathrm{Ind}(z_0,\gamma)\,. \tag{6.1}$$
En effet, $\mathrm{Res}(f,z_0) = 1$.
- Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, où Ω est un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$, on retrouve la formule
$$\int_\gamma f(z)dz = 0\,. \tag{6.2}$$
En effet dans ce cas P est vide et, par convention, la somme apparaissant dans la formule est nulle.
- Si Ω est un ouvert étoilé, si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et si $z_0 \in \Omega$ est tel que $z_0 \notin \gamma^*$, on retrouve la formule de Cauchy
$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \mathrm{Ind}(z_0,\gamma)f(z_0)\,. \tag{6.3}$$
En effet, la fonction $g(z) = \frac{f(z)}{z-z_0}$ possède une unique singularité au point z_0 (eventuellement effaçable si $f(z_0) = 0$). On a aussi $\mathrm{Res}(g,z_0) = f(z_0)$, que la singularité soit effaçable ou non. En appliquant le théorème des résidus à la fonction g, on retrouve la formule 6.3.
- Plus généralement, si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, si $z_0 \in \Omega$ est tel que $z_0 \notin \gamma^*$ et si n est un entier positif, posons
$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,.$$
La fonction g possède à nouveau une unique singularité au point z_0 qui est un pôle d'ordre au plus $n+1$. On a de plus
$$\mathrm{Res}(g,z_0) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$
et le théorème des résidus appliqué à g nous donne
$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \mathrm{Ind}(z_0,\gamma)\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\,. \tag{6.4}$$
La formule 6.4 généralise une formule déjà établie précédemment lorsque γ est un cercle centré en z_0, inscrit dans Ω et parcouru une fois dans le sens direct.
- Plus généralement encore, si Ω est un ouvert non vide, non nécessairement étoilé, si $z_0 \in \Omega$ et si $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$, on sait que f se développe en série de Laurent au point z_0. C'est à dire qu'on peut écrire
$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(z-z_0)^k,$$

l'égalité ayant lieu au moins dans le disque $D(z_0,R)$ où $R = d(z_0,\mathbb{C}\setminus\Omega)$. On sait aussi que pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

où γ_r désigne le cercle de centre z_0 et de rayon r parcouru une fois dans le sens direct avec $r < R$.
En appliquant le théorème des résidus à la fonction $g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$, on trouve aussi pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \mathrm{Ind}(z_0,\gamma)c_n\,. \tag{6.5}$$

où γ est maintenant un lacet quelconque inscrit dans l'ouvert étoilé $D(z_0,R)$, ne passant pas par z_0.

Remarque 4. Il existe d'autres versions du théorème des résidus. Elles consistent alors à affaiblir l'hypothèse sur Ω (Ω n'a plus besoin d'être étoilé), et à renforcer les hypothèses sur le lacet (γ ne peut plus être quelconque). Dans la pratique, le théorème 6.1.1 est déjà largement suffisant pour bien des applications.

Preuve du Théorème 6.1.1. Revenons tout d'abord sur l'allure locale de la fonction f au voisinage d'une singularité. Si $p \in P$, on sait qu'il existe une fonction g holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{p\}$, possèdant des primitives, et une fonction h holomorphe au voisinage de p telles que

$$f(z) = g(z) + \frac{\mathrm{Res}(f,p)}{z-p} + h(z)\,.$$

Pour rappel, si $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(z-p)^k$ est le développement en série de Laurent de f autour de p, alors,

$$g(z) = \sum_{k=-\infty}^{-2} c_k(z-p)^k \qquad \text{et} \qquad h(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(z-p)^k$$

(voir la partie 5.3 sur la notion de résidu). Une autre façon de lire cette décomposition consiste à dire que la fonction $f(z) - g(z) - \frac{\mathrm{Res}(f,p)}{z-p}$ (qui est définie sur $\Omega\setminus P$) possède maintenant une singularité effaçable en p.
Etape 1. Le cas où P est fini. Notons dans ce cas $p_1,\dots,p_n$ les singularités de f. Au vu de la remarque précédente, pour chaque $k \in \{1,\dots,n\}$, on peut trouver une fonction g_k holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{p_k\}$, possédant des primitives, et telle que

$$f(z) - g_k(z) - \frac{\mathrm{Res}(f,p_k)}{z-p_k}$$

soit holomorphe au voisinage de z_k. On pose alors

$$F(z) = f(z) - \sum_{k=1}^{n} g_k(z) - \frac{\operatorname{Res}(f,p_k)}{z-p_k} \, .$$

La fonction F est alors holomorphe dans l'ouvert étoilé Ω. On sait donc que

$$\int_\gamma F(z)\,dz = 0 \, .$$

Comme les fonctions g_k possèdent des primitives, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,dz &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma g_k(z)\,dz + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f,p_k) \times \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-p_k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f,p_k) \times \operatorname{Ind}(p_k,\gamma) \\
&= \sum_{p\in P} \operatorname{Res}(f,p) \times \operatorname{Ind}(p,\gamma) \, .
\end{aligned}$$

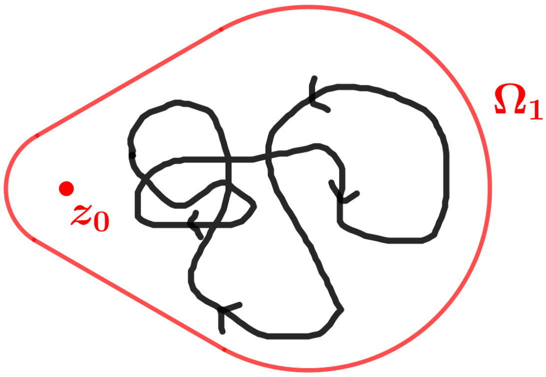
Etape 2. Le cas général. La clé de la preuve du théorème 6.1.1 consiste à se ramener au cas où l'ensemble P est fini. On utilise pour cela le lemme suivant qu'on appelle encore lemme de l'enclos étoilé.

Lemme 6.1.2. (Lemme de l'enclos étoilé) *Soit Ω un ouvert étoilé en z_0 et K un compact inclus dans Ω. Alors, il existe un ouvert borné Ω_1, étoilé en z_0, contenant K, et dont l'adhérence est incluse dans Ω.*

Supposons ce lemme acquis. Notons O la composante connexe non bornée de $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$. Ainsi, $K = \mathbb{C}\setminus O$ est compact car fermé et borné. De façon présise, K est la réunion du lacet γ^* et de toutes les composantes connexes bornées de $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$. Afin de pouvoir utiliser le lemme de l'enclos étoilé, montrons que $K\subset\Omega$, ou encore que $\mathbb{C}\setminus\Omega\subset\mathbb{C}\setminus K$. Si $z\notin\Omega$, considérons la demi-droite Δ issue de z_0 et contenant z. La demi-droite Δ est réunion disjointe du segment semi-ouvert $[z_0,z)$ et d'une demi-droite Δ_1. L'ouvert Ω étant étoilé en z_0, aucun point $z_1\in\Delta_1$ n'est dans Ω (sinon, le point $z\in[z_0,z_1]$ serait dans Ω). Finalement, la demi-droite Δ_1 ne rencontre pas Ω et donc ne rencontre pas γ^*. Elle est donc incluse dans la composante non bornée de $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$. En particulier, $z\in O=\mathbb{C}\setminus K$.

Le lemme de l'enclos étoilé nous permet donc de considérer un ouvert borné Ω_1, étoilé en z_0, tel que

$$\gamma^*\subset K\subset\Omega_1\subset\overline{\Omega}_1\subset\Omega \, .$$



Le lacet γ et son enclos étoilé

Notons alors f_1 la restriction de f à Ω_1. L'ensemble $\overline{\Omega}_1$ étant compact, $P\cap\overline{\Omega}_1$ (et a fortiori $P\cap\Omega_1$) est fini. On peut alors appliquer à la fonction f_1 l'étape 1 de la preuve. Ainsi

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f_1(z)\,dz = \sum_{p\in P\cap\Omega_1} \mathrm{Ind}(p,\gamma)\mathrm{Res}(f_1,p)\,. \tag{6.6}$$

Enfin, si p est une singularité de f qui n'est pas dans Ω_1, alors $p\in O$ et $\mathrm{Ind}(p,\gamma)=0$. On peut alors réécrire l'égalité (1) sous la forme

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)dz = \sum_{p\in P}\mathrm{Ind}(p,\gamma)\mathrm{Res}(f,p)\,.$$

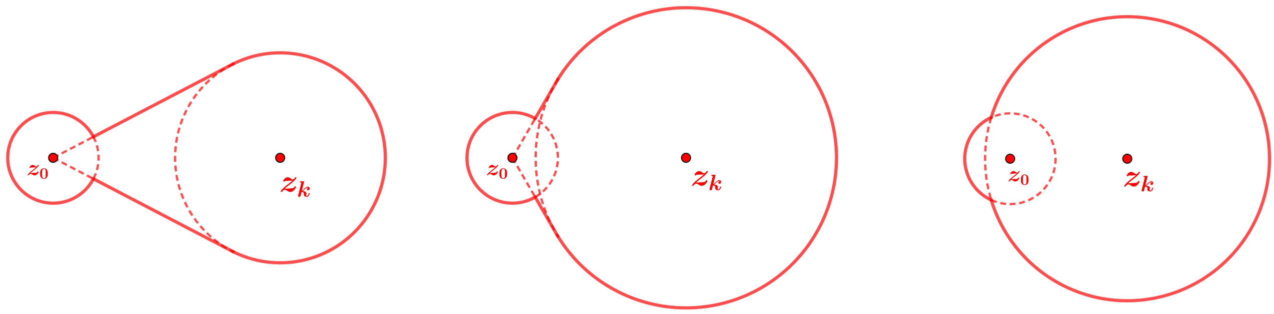
C'est ce qu'il fallait démontrer.

Preuve du lemme de l'enclos étoilé.

L'ensemble Ω étant ouvert, pour tout $z\in K$, il existe $r(z)>0$ tel que $D(z,2r(z))\subset\Omega$. Le compact K est ainsi recouvert par l'ensemble des disque ouverts $(D(z,r(z)))_{z\in K}$. Par compacité, on peut extraire de ce recouvrement un sous recouvrement fini de K qu'on écrira $D(z_1,r_1),\ldots,D(z_n,r_n)$. Rappelons que l'ouvert Ω est étoilé en z_0 et considérons un réel $r>0$ tel que $D(z_0,2r)\subset\Omega$.

Fixons dans un premier temps $k\in\{1,\cdots,n\}$. On peut construire aisément un ouvert borné U_k, étoilé en z_0, qui contient à la fois $D(z_0,r)$ et $D(z_k,r_k)$. Les dessins ci-dessous montrent l'ouvert U_k (délimités par les contours rouges non pointillés) dans les trois situations complémentaires

$$D(z_0,r)\cap D(z_k,r_k)=\emptyset,\quad D(z_0,r)\cap D(z_k,r_k)\neq\emptyset \text{ et } z_0\notin D(z_k,r_k),\quad z_0\in D(z_k,r_k)\,.$$



Comme Ω est étoilé en z_0 et contient les disques $D(z_0, r)$ et $D(z_k, r_k)$, il est clair que $U_k \subset \Omega$. On peut même dire que $\overline{U}_k \subset \Omega$ car $D(z_0, 2r) \subset \Omega$ et $D(z_k, 2r_k) \subset \Omega$.

On considère alors

$$\Omega_1 = \bigcup_{k=1}^{n} U_k \, .$$

On a encore $\Omega_1 \subset \overline{\Omega}_1 \subset \Omega$. De plus, Ω_1 est borné et étoilé en z_0 comme réunion finie d'ouverts bornés et étoilés en z_0. Enfin,

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{n} D(z_k, r_k) \subset \Omega_1 \, .$$

L'ouvert Ω_1 répond donc à la question.

6.2 Quelques applications du théorème des résidus

6.2.1 Existence de primitives dans les ouverts étoilés

Une conséquence élémentaire du théorème des résidus est la suivante.

Corollaire 6.2.1. *Soit Ω un ouvert étoilé non vide et f une fonction holomorphe à singularités isolées dans Ω. Notons P l'ensemble des singularités de f. La fonction f possède des primitives dans $\Omega \setminus P$ si et seulement si pour tout $p \in P$,*

$$\mathrm{Res}(f, p) = 0 \, .$$

Preuve.

$\Leftarrow$ Si tous les résidus de f sont nuls et si γ est un lacet inscrit dans Ω ne rencontrant pas les pôles de f, le théorème des résidus nous apprend que

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0 \, .$$

Par le théorème 4.4.1, on conclut donc que f possède des primitives dans $\Omega \setminus P$.

$\Rightarrow$ Réciproquement supposons qu'il existe $p_0 \in P$ tel que $\mathrm{Res}(f, p_0) \neq 0$. Soit $r > 0$ tel que p_0 soit l'unique singularité de f dans le disque $D(p_0, 2r)$. Par le théorème des résidus, on a

$$\int_{\partial D(p_0,r)} f(z)\,dz = 2i\pi \times \mathrm{Res}(f, p_0) \neq 0$$

ce qui interdit (toujours à l'aide du théorème 4.4.1) à la fonction f de posséder des primitives.

6.2.2 Dénombrement des zéros et des pôles

Le résultat suivant généralise le théorème de l'argument vu au chapitre précédent.

Théorème 6.2.2 (Théorème de l'argument). *Soit Ω un ouvert étoilé et $f \in \mathcal{M}(\Omega)$. Notons $\mathcal{Z}$ l'ensemble des zéros de f et $\mathcal{P}$ l'ensemble des pôles de f. Pour chaque pôle ou zéro a de f, notons $m(a)$ son ordre de multiplicité. Enfin, soit γ un lacet dans Ω qui évite tous les points de $\mathcal{Z}$ et de $\mathcal{P}$. On a l'égalité suivante*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{z\in\mathcal{Z}} m(z)\,\mathrm{Ind}(z,\gamma) - \sum_{p\in\mathcal{P}} m(p)\,\mathrm{Ind}(p,\gamma)\,.$$

Preuve. On a vu lors du théorème 5.4.4 que la fonction $\frac{f'}{f}$ ne possédait que des pôles simples. De plus, si $z \in \mathcal{Z}$, $\mathrm{Res}(f'/f, z) = m(z)$ et si $p \in \mathcal{P}$, $\mathrm{Res}(f'/f, p) = -m(p)$. La conclusion du théorème 6.2.2 n'est alors autre qu'une simple application du théorème des résidus.

6.2.3 Le théorème de Rouché

Le résultat suivant permet de comparer le nombre de zéros de deux fonctions holomorphes f et $f+g$.

Théorème 6.2.3. *Soit Ω un ouvert étoilé et γ un lacet tracé dans Ω tel que pour tout point $z \notin \gamma^*$, $\mathrm{Ind}(z,\gamma) = 0$ ou $\mathrm{Ind}(z,\gamma) = 1$ (penser par exemple à un cercle parcouru dans le sens direct). Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{H}(\Omega)$ vérifiant la condition suivante*

$$\textit{pour tout } z \in \gamma^*, \quad |g(z)| < |f(z)|\,.$$

Alors, f et $f+g$ ne s'annulent pas sur γ^* et ont même nombre de zéros à l'intérieur de γ, chacun étant compté avec son ordre de multiplicité.

Remarque 1. Il faut comprendre dans cet énoncé que $f+g$ est une perturbation de f.

Remarque 2. Si $|g| < |f|$ sur γ^*, nécessairement f ne s'annule pas sur γ^*. De plus, sur γ^*, $|f+g| \geq |f| - |g| > 0$. Ainsi, la fonction $f+g$ ne s'annule pas non plus sur γ^*.

Un exemple d'utilisation. Posons $P(z) = z^8 - 5z^3 + z - 2$.

- Le polynôme possède exactement 3 zéros dans le disque unité.

  En effet, si $f(z) = -5z^3$ et $g(z) = z^8 + z - 2$ on a $P = f + g$. La fonction f possède exactement 3 zéros dans le disque unité et, si $|z| = 1$ on a

$$|f(z)| = 5 \quad \text{et} \quad |g(z)| \leq |z|^8 + |z| + 2 = 4 < |f(z)| \,.$$

- Tous les zéros du polynôme $P(z) = z^8 - 5z^3 + z - 2$ sont situés dans $D(0, 3/2)$.

  Ici on pose $f(z) = z^8$ qui possède exactement 8 zéros dans $D(0, 3/2)$.
  Si $g(z) = -5z^3 + z - 2$ et si $|z| = 3/2$ on a

$$|f(z)| = \left(\frac{3}{2}\right)^8 = \frac{6561}{256} \quad \text{et} \quad |g(z)| \leq 5 \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \frac{3}{2} + 2 = \frac{163}{8} < |f(z)| \,.$$

  Comme $P = f + g$, P possède 8 zéros dans $D(0, 3/2)$.
  P étant un polynôme de degré 8, tous ses zéros sont dans le disque $D(0, 3/2)$.

Preuve du Théorème 6.2.3. On sait que le nombre de zéros de f et de $f + g$ à l'intérieur de la courbe γ se calculent par :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad \text{et} \quad \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(z) + g'(z)}{f(z) + g(z)} dz \,.$$

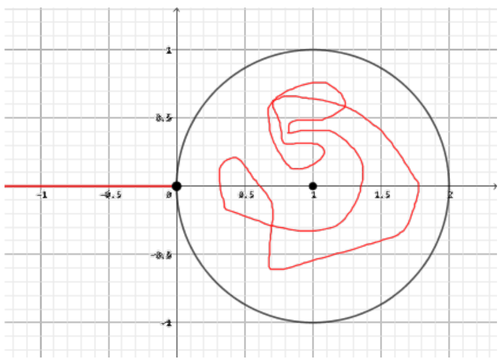
Sur γ^* on peut écrire $f + g = f \times \delta$. On a donc

$$\frac{f' + g'}{f + g} = \frac{f'}{f} + \frac{\delta'}{\delta} \,.$$

De plus, sur γ^*,

$$|1 - \delta| = \left|1 - \frac{f + g}{f}\right| = \left|\frac{g}{f}\right| < 1 \,.$$

On est donc dans la situation suivante pour le lacet $\delta \circ \gamma$:



et on conclut que

$$\int_\gamma \frac{\delta'(z)}{\delta(z)} dz = \int_0^1 \frac{\delta'(\gamma(t))}{\delta(\gamma(t))} \gamma'(t) \, dt = \int_{\delta \circ \gamma} \frac{dz}{z} = 2i\pi \, \mathrm{Ind}(0, \delta \circ \gamma) = 0 \,.$$

Finalement
$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)+g'(z)}{f(z)+g(z)}\,dz\,.$$
C'est ce qu'il fallait démontrer.

6.2.4 Application au calcul de quelques intégrales

Fractions rationnelles

Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle. On suppose que F ne possède pas de pôle réel et que $\lim\limits_{|z|\to\infty} zF(z) = 0$. On note P^+ l'ensemble des pôles de F situés dans le demi-plan $\{\mathcal{I}m(z) > 0\}$. Alors
$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dx = 2i\pi \sum_{p\in P^+} \mathrm{Res}(F,p)}$$

Méthode. On introduit le lacet γ_R^+ constitué du segment $[-R,R]$ et du demi-cercle paramétré par Re^{it}, $t\in[0,\pi]$. Pour R assez grand, le théorème des résidus donne
$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_R^+} F(z)\,dz = \sum_{p\in P^+} \mathrm{Res}(F,p)\,.$$

On fait ensuite tendre R vers $+\infty$ et on constate que l'intégrale sur le demi-cercle converge vers 0.

Remarque. On a aussi $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dx = -2i\pi\sum_{p\in P^-}\mathrm{Res}(F,p)$ où P^- est l'ensemble des pôles de F situés dans le demi-plan $\{\mathcal{I}m(z) < 0\}$. Il suffit pour cela d'intégrer sur le lacet γ_R^- constitué du segment $[-R,R]$ et du demi-cercle paramétré par Re^{-it}, $t\in[0,\pi]$. On observera que ce nouveau lacet est parcouru dans le sens indirect, ce qui justifie la présence du signe moins.

Intégrales du type $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,dt$

Soit $R(X,Y)$ une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur le cercle $X^2+Y^2=1$. Souvenons nous que si $z = e^{it}$, alors $\cos t = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ et $\sin t = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$. Introduisons la fraction rationnelle
$$f(z) = R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{iz}\,.$$

Si on note γ le cercle unité parcouru une fois dans le sens direct, on a :
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} R(\cos t,\sin t)\,dt\,.$$

Le théorème des résidus nous donne alors

$$\boxed{\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt = 2i\pi \sum_{p \in P_1} \mathrm{Res}(f, p)}$$

où P_1 désigne l'ensemble des pôles de f situés dans le disque $D(0,1)$.

Transformée de Fourier des fractions rationnelles

Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle à coefficients complexes. On suppose que F ne possède pas de pôle réel et que $\lim\limits_{|z|\to\infty} zF(z) = 0$. On pose pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{F}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{itx}\, dx\,.$$

$\widehat{F}$ est appelée la transformée de Fourier de F. On a :

$$\boxed{\forall t \geq 0, \widehat{F}(t) = 2i\pi \sum_{p \in P^+} \mathrm{Res}(F(z)e^{itz}, p) \quad \text{et} \quad \forall t \leq 0, \widehat{F}(t) = -2i\pi \sum_{p \in P^-} \mathrm{Res}(F(z)e^{itz}, p)}$$

où P^+ et P^- désignent respectivement l'ensemble des pôles de F situés dans le demi-plan $\{\mathcal{I}m(z) > 0\}$ et $\{\mathcal{I}m(z) < 0\}$.

Méthode. On procède comme pour le calcul de l'intégrale d'une fraction rationnelle. On intègre sur γ_R^+ ou γ_R^- selon que t est positif ou négatif.

Intégrales du type $\int_0^{+\infty} F(x) \ln(x)\, dx$

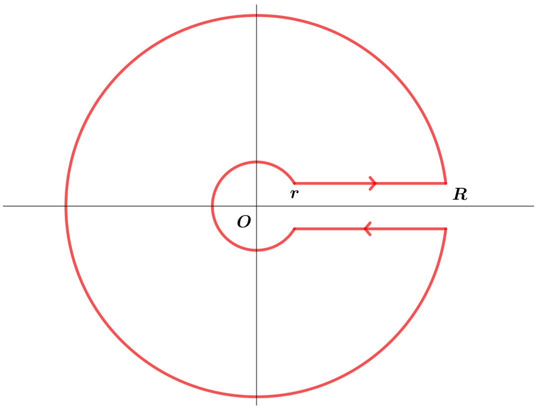
Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle à coefficients complexes. On suppose que F ne possède pas de pôles dans l'intervalle $[0, +\infty[$ et que $\lim\limits_{|z|\to\infty} zF(z) = 0$. On note $L(z)$ la détermination du logarithme dans $\mathbb{C}\setminus[0, +\infty[$ pour laquelle l'argument varie dans l'intervalle $]0, 2\pi[$ et P l'ensemble des pôles de F. On a :

$$\boxed{i\pi \int_0^{+\infty} F(x)\, dx + \int_0^{+\infty} F(x) \ln(x)\, dx = -\frac{1}{2} \sum_{p \in P} \mathrm{Res}(F(z) L^2(z), p)}$$

En particulier, si F est à coefficients réels,

$$\boxed{\int_0^{+\infty} F(x) \ln(x)\, dx = -\frac{1}{2} \mathcal{R}e \left(\sum_{p \in P} \mathrm{Res}(F(z) L^2(z), p) \right)}$$

Méthode. On intégre la fonction $F(z)L^2(z)$ sur le contour suivant



puis on fait tendre r vers 0 et R vers $+\infty$.

6.2.5 Développements eulériens

Nous allons ici proposer une nouvelle application du théorème des résidus et démontrer la formule suivante :

$$\boxed{\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2}}$$

valable pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Cette formule est appelée **développement eulerien de la fonction cotangente**.

Remarque. Observons que

$$\frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2} = \frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{z + k\pi}$$

de telle sorte qu'on peut aussi écrire

$$\cot z = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{z - k\pi} . \tag{6.7}$$

Cette nouvelle formule permet d'observer facilement que le second membre est π-périodique avec pour singularités $z_k = k\pi$, ces singularités étant des pôles simples de résidu 1. On évitera cependant d'écrire $\cot z = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z-k\pi}$ dans la mesure ou les deux séries $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{z-k\pi}$ et $\sum_{k=-\infty}^{0} \frac{1}{z-k\pi}$ sont divergentes. Le passage à la limite dans (6.7) est possible pour des raisons de symétrie.

Posons

$$F(z) = \cot z - \frac{1}{z} = \frac{\cos z}{\sin z} - \frac{1}{z}$$

et observons que la fonction F possède une singularité effaçable en 0. En effet :

$$F(z) = \frac{z\cos z - \sin z}{z\sin z} = \frac{z\left(1-\frac{z^2}{2}\right) - \left(z - \frac{z^3}{6}\right) + o(z^3)}{z^2 + o(z^2)} = \frac{-\frac{z}{3} + o(z)}{1 + o(1)} = -\frac{z}{3} + o(z)\,.$$

On peut donc même dire que F possède un zéro simple en 0. On sera amené à utiliser la relation $F(0) = 0$ en cours de démonstration.

Si maintenant, $k \in \mathbb{Z}^*$,

$$F(k\pi + h) \sim \cot(k\pi + h) = \cot(h) \sim \frac{1}{h}\,.$$

Ainsi, $k\pi$ est un pôle simple de F lorsque $k \neq 0$ et $\operatorname{Res}(F, k\pi) = 1$.

Fixons $u \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}^*$ et introduisons

$$G(z) = \frac{F(z)}{z-u} = \frac{\cot z - \frac{1}{z}}{z-u}\,.$$

La fonction G est méromorphe sur $\mathbb{C}$. Ses singularités sont les $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}^*$ ainsi que le nombre complexe u. Ce sont tous des pôles simples en on a

$$\operatorname{Res}(G, u) = F(u) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Res}(G, k\pi) = \frac{1}{k\pi - u} \quad \text{pour } k \in \mathbb{Z}^*\,.$$

Concernant la singularité u, on peut dire de façon plus précise que si $F(u) = 0$, la singularité devient effaçable pour la fonction G. La relation $\operatorname{Res}(G,u) = F(u)$ reste alors valide.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, considérons maintenant le lacet γ_n constitué des segments $[A_n, B_n]$, $[B_n, C_n]$, $[C_n, D_n]$ et $[D_n, A_n]$ où

$$\begin{aligned} A_n &= -\tfrac{\pi}{2} - n\pi - i\left(\tfrac{\pi}{2} + n\pi\right) & B_n &= \tfrac{\pi}{2} + n\pi - i\left(\tfrac{\pi}{2} + n\pi\right) \\ C_n &= \tfrac{\pi}{2} + n\pi + i\left(\tfrac{\pi}{2} + n\pi\right) & D_n &= -\tfrac{\pi}{2} - n\pi + i\left(\tfrac{\pi}{2} + n\pi\right). \end{aligned}$$

Si n est suffisamment grand, le pôle u est à l'intérieur du carré $A_nB_nC_nD_n$. Ainsi, par le théorème des résidus,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_n} G(z)\,dz &= \operatorname{Res}(G,u) + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(G, -k\pi) + \operatorname{Res}(G, k\pi) \\ &= F(u) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{-k\pi - u} + \frac{1}{k\pi - u} \\ &= F(u) - \sum_{k=1}^{n} \frac{2u}{u^2 - k^2\pi^2}\,. \end{aligned}$$

En particulier, lorsque $u = 0$, la relation pécédente donne

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_n}\frac{F(z)}{z}\,dz = 0\,. \tag{6.8}$$

Cette relation sera exploitée plus tard.

Il suffit alors de montrer que $\int_{\gamma_n} G(z)\,dz$ converge vers 0 lorsque n tend vers l'infini pour obtenir, par passage à la limite, la relation

$$\cot u = \frac{1}{u} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2u}{u^2 - k^2\pi^2}\,.$$

Ce dernier point est une conséquence de l'estimation suivante.

Lemme 6.2.4. *Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}\setminus \pi\mathbb{Z}$. On a*

$$|\cot z|^2 = \frac{\cos^2 x + \sinh^2 y}{\sin^2 x + \sinh^2 y}\,.$$

Supposons pour l'instant le lemme acquis. On constate alors que la fonction cotangente reste bornée (indépendamment de n) sur le lacet γ_n^*. En effet :

— Sur les bords horizontaux de γ_n^*, $y = \pm\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ et

$$|\cot z|^2 \le \frac{1+\sinh^2 y}{0+\sinh^2 y} = \frac{\cosh^2 y}{\sinh^2 y} \le \frac{\cosh^2(\pi/2)}{\sinh^2(\pi/2)}\,.$$

(on utilise la décroissance de la fonction $\coth y = \frac{\cosh y}{\sinh y}$ sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$).

— Sur les bords verticaux de γ_n^*, $x = \pm\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ et

$$|\cot z|^2 = \frac{0+\sinh^2 y}{1+\sinh^2 y} \le 1\,.$$

Comme de plus $\left|\frac{1}{z}\right| \le \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$ si $z \in \gamma_n^*$, on peut donc aussi dire que la fonction F reste bornée sur les lacets γ_n^*. Ainsi, il existe $C > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \gamma_n^*$,

$$|F(z)| \le C\,.$$

Cette propriété ne suffit pas à montrer que l'intégrale de la fonction $G(z) = \frac{F(z)}{z-u}$ sur γ_n converge vers 0 (cela vient du fait que la longueur du lacet γ_n^* vaut $4\times(2n+1)\pi$). Pour y parvenir, on va s'appuyer sur la relation (6.8) et écrire

$$\int_{\gamma_n} G(z)\,dz = \int_{\gamma_n} G(z)\,dz - \int_{\gamma_n}\frac{F(z)}{z}\,dz = \int_{\gamma_n}\frac{uF(z)}{z(z-u)}\,dz\,. \tag{6.9}$$

On peut alors maintenant écrire pour $z \in \gamma_n^*$

$$\left|\frac{uF(z)}{z(z-u)}\right| \leq \frac{C|u|}{|z|(|z|-|u|)} \leq \frac{C|u|}{\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)\left(\frac{\pi}{2}+n\pi-|u|\right)} \leq \frac{C|u|}{n\pi(n\pi-|u|)} \ .$$

Il faut retenir de cette majoration qu'elle est en $1/n^2$, alors qu'auparavant, on pouvait simplement écrire que $|G(z)| = O(1/n)$. On a ainsi gagné quelque chose en utilisant le correctif décrit en (3). Ainsi par exemple

$$\begin{aligned}
\left|\int_{[B_n,C_n]} \frac{uF(z)}{z(z-u)}\,dz\right| &= \left|\int_{-\frac{\pi}{2}-n\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} \frac{uF\left(\frac{\pi}{2}+n\pi+iy\right)}{\left(\frac{\pi}{2}+n\pi+iy\right)\left(\frac{\pi}{2}+n\pi-u\right)} i\,dy\right| \\
&\leq \int_{-\frac{\pi}{2}-n\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} \frac{C|u|}{n\pi(n\pi-|u|)}\,dy \\
&= \frac{C|u|(2n+1)\pi}{n\pi(n\pi-|u|)} \\
&\to 0
\end{aligned}$$

lorsque n tend vers $+\infty$. On traite de même les intégrales sur les autres segments et on obtient comme attendu

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\gamma_n} G(z)\,dz = \lim_{n\to+\infty} \int_{\gamma_n} \frac{uF(z)}{z(z-u)}\,dz = 0 \ .$$

Il reste à démontrer le lemme 6.2.4. Si $z = x + iy$, on a

$$\begin{aligned}
|\cot z|^2 &= \left|\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}\right|^2 \\
&= \frac{(e^{iz}+e^{-iz})(e^{-i\bar{z}}+e^{i\bar{z}})}{(e^{iz}-e^{-iz})(e^{-i\bar{z}}-e^{i\bar{z}})} \\
&= \frac{e^{i(z-\bar{z})}+e^{i(z+\bar{z})}+e^{-i(z+\bar{z})}+e^{-i(z-\bar{z})}}{e^{i(z-\bar{z})}-e^{i(z+\bar{z})}-e^{-i(z+\bar{z})}+e^{-i(z-\bar{z})}} \\
&= \frac{e^{-2y}+e^{2ix}+e^{-2ix}+e^{2y}}{e^{-2y}-e^{2ix}-e^{-2ix}+e^{2y}} \\
&= \frac{2\cosh(2y)+2\cos(2x)}{2\cosh(2y)-2\cos(2x)} \ .
\end{aligned}$$

Il suffit ensuite d'utiliser les relations trigonométriques

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) \qquad \text{et} \qquad \cosh(2y) = 2\sinh^2(y) + 1 \ .$$

Remarque. On peut montrer qu'on peut dériver terme à terme la relation

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2} \ .$$

On trouve alors

$$\boxed{\frac{1}{\sin^2 z} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-k\pi)^2}}$$

Ici, il n'y a plus de problème de convergence, les deux séries $\sum_{k=-\infty}^{0} \frac{1}{(z-k\pi)^2}$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-k\pi)^2}$ étant absolument convergentes.

Sommaire