Convolution - Approximations de l'unité

1. On pose $\theta_n(x) = c_n(1-x^2)^n \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$ où c_n est choisi de telle sorte que $\int \theta_n = 1$. Montrer que θ_n est une approximation de l'unité. Utiliser la suite θ_n pour montrer que toute fonction continue sur $[-1/3, 1/3]$ est limite uniforme de polynômes (théorème de Weierstrass). On commencera par prolonger la dite fonction en une fonction continue à support compact dans $[-1/2, 1/2]$.

2. Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on pose pour $t > 0$,
$$F_t(x) = \frac{1}{2t}\int_{-t}^{t} f(x+u)du \ .$$
Montrer que F_t converge vers f dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. En déduire que si g est localement intégrable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\int_0^x g(t)dt = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors g est nulle presque partout.

3. Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ avec $1 < p < +\infty$, montrer que $f * g$ est défini presque partout et représente un élément de $L^p(\mathbb{R}^d)$ tel que $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1 \, \|g\|_p$. *Indication :* écrire $f(x-y)g(y) = f(x-y)^{1/p}g(y)f(x-y)^{1/q}$ et utiliser l'inégalité de Hölder.

4. Retrouver que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^p(\mathbb{R})$ alors $f * g \in L^p(\mathbb{R})$ en testant contre les fonctions de $L^q(\mathbb{R})$.

5. Soient p, q et r trois réels tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. On cherche à montrer que si $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^d)$, alors, $f * g$ est définie presque partout et représente un élément de $L^r(\mathbb{R}^d)$ tel que :
$$\|f*g\|_r \leq \|f\|_p \, \|g\|_q \ .$$
   (a) Montrer que si $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1$ et si ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3 sont trois fonctions mesurables positives, on a l'inégalité de Hölder généralisée :
$$\int \phi_1\phi_2\phi_3 \leq \|\phi_1\|_{p_1}\|\phi_2\|_{p_2}\|\phi_3\|_{p_3} \leq +\infty \ .$$
   (b) Montrer que si ϕ et ψ sont mesurables positives et si p, q et r vérifient la relation décrite plus haut, on a :
$$\left(\int \phi\,\psi\right)^r \leq \left(\int \phi^p\psi^q\right) \, \|\phi\|_p^{r-p} \, \|\psi\|_q^{r-q} \ .$$

(c) Conclure. Retrouver en particulier le cas où $p = q = 1$, le cas où $q = 1$ et p est quelconque et enfin le cas où p et q sont deux exposants conjugués.

6. Soit θ une fonction positive d'intégrale 1, de classe C^∞ à support compact dans la boule unité de $\mathbb{R}^d$. On pose :

$$\theta_n(x) = n^d \theta(nx) \ .$$

Soient K un compact de $\mathbb{R}^d$ et O un ouvert contenant K. On note

$$K_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^d \ ; \ d(x, K) \leq \varepsilon\} \ .$$

Montrer que pour un choix correct des paramètres n et ε, la fonction $\phi = \theta_n * 1\!\!1_{K_\varepsilon}$ est un élément de $\mathcal{D}$ vérifiant $1\!\!1_K \leq \phi \leq 1\!\!1_O$. En déduire une nouvelle preuve de la densité de $\mathcal{D}$ dans les espaces L^p.

7. Soit $1 < p < +\infty$. Montrer que si θ_n est une approximation de l'unité et si $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$, la suite $\theta_n * g$ converge vers g dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$.

8. Soit $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $1 \leq p < +\infty$. Calculer la norme de l'application linéaire continue $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \mapsto f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

9. Décrire les fonctions $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que $\|f * g\|_\infty = \|f\|_1 \, \|g\|_\infty$.

10. Soit f une fonction intégrable à support compact et g une fonction localement intégrable. Montrer que la convolée $f * g$ est définie presque partout et représente une fonction localement intégrable.

11. Soient p et q deux exposants conjugués. Montrer que si f est localement dans $\mathcal{L}^p$ et si g est dans $\mathcal{L}^q$ et à support compact, la convolée $f * g$ est définie partout et est continue.

12. Soit A un borélien tel que $0 < m(A) < +\infty$. En utilisant $1\!\!1_A * 1\!\!1_{-A}$, montrer que $A - A$ est un voisinage de l'origine. En déduire que toute fonction f mesurable et vérifiant $f(x + y) = f(x) + f(y)$ s'écrit $f(x) =< x \mid a >$ pour un certain $a \in \mathbb{R}^d$ (on montrera que f est bornée au voisinage de 0 puis qu'elle est continue).

13. Montrer proprement l'associativité de la convolution dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$.