Quelques exercices complémentaires sur les séries de Fourier

1. Pour $n \geq 1$, on pose $g_n(x) = \varepsilon_n(1+\cos x)^n$ où ε_n est choisi de telle sorte que $\int_0^{2\pi} g_n(t)\,dt = 2\pi$. Montrer que pour toute fonction continue et 2π-périodique, la suite $g_n * f$ est une suite de polynômes trigonométriques convergeant uniformément vers f. Il s'agit donc d'une nouvelle preuve du théorème de Weierstrass.

2. Si g et h sont dans $\mathcal{L}^2_{2\pi}$, on pose $f = g * h$. Montrer que $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et que la série de Fourier de f converge normalement vers f. Montrer réciproquement que toute fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ dont la série de fourier converge normalement peut s'écrire $f = g * h$ avec g et h dans $\mathcal{L}^2_{2\pi}$.

3. Utiliser le théorème d'isomorphisme de Banach et le noyau de Dirichlet $(D_n)_{n\geq 1}$ pour prouver que l'application :
$$f \in \mathcal{L}^1_{2\pi} \longmapsto \left(\hat{f}(n)\right)_{n\in\mathbb{Z}} \in C_0(\mathbb{Z})$$
n'est pas surjective.

4. Soient f et g dans $\mathcal{L}^2_{2\pi}$ et $a \in \mathbb{R}$. Exprimer $< \tau_a f \mid g >$ à l'aide des coefficients de Fourier de f et g. En déduire que la famille $(\tau_a f)_{a\in\mathbb{R}}$ est totale dans $\mathcal{L}^2_{2\pi}$ si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\hat{f}(n) \neq 0$.

5. En faisant intervenir le noyau de Fejer $(K_p)_{p\geq 1}$, montrer que l'application linéaire :
$$f \in \mathcal{L}^1_{2\pi} \longmapsto S_n f \in \mathcal{L}^1_{2\pi}$$
est de norme $\|D_n\|_1$. En déduire qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{L}^1_{2\pi}$ telle que la suite $(S_n f)_{n\geq 0}$ ne converge pas vers f dans l'espace $\mathcal{L}^1_{2\pi}$.

6. Montrer que la suite d'applications $f \mapsto \hat{f}(n)$ converge uniformément vers 0 sur les compacts de $\mathcal{C}_{2\pi}$ lorsque $n \to \pm\infty$.

7. Soit f une fonction lipschitzienne et 2π-périodique. En évaluant de deux façons différentes la quantité $\|\tau_h f - f\|_2^2$, montrer que :
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 |\hat{f}(n)|^2 < \infty\ .$$

8. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{L}^2_{2\pi}$, la suite de terme général $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x + 2k\pi/n)$ converge vers $\hat{f}(0)$ dans $\mathcal{L}^2_{2\pi}$.

9. Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Q}$. Montrer que :

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(n\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)dt \ .$$

(commencer par le cas où f est un polynôme trigonométrique)

10. (a) Montrer que :

$$\forall x \in]0, 2\pi[, \quad \frac{\pi - x}{2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k} \ .$$

(b) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \geq 1, \quad \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} \right| \leq \frac{\pi}{2} + 1 \ .$$

(on pourra faire intervenir $f * K_n$ où K_n est le noyau de Fejer et f la fonction 2π-périodique sous-jascente).

(c) Construire à l'aide de ce qui précède une fonction continue et 2π-périodique dont la série de Fourier est uniformément convergente sans être normalement convergente.

11. On pose $f(x) = |\sin x|$. Calculer la série de Fourier de f. En déduire que :

$$\forall g \in \mathcal{L}^1_{2\pi}, \quad \lim_{\lambda \to +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) |\sin \lambda t| dt = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt \ .$$

12. *Inégalité de Bernstein* (Zuily-Queffélec p. 100).

(a) On note φ l'unique fonction continue 2π-périodique impaire telle que $\varphi(x) = \frac{\pi}{2} - \left| x - \frac{\pi}{2} \right|$ si $x \in [0, \pi]$. Calculer la série de Fourier de φ pour en déduire que si $|t| \leq n$,

$$t = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{4in(-1)^{k+1}}{\pi^2(2k+1)^2} e^{\frac{i\pi(2k+1)t}{2n}} \ .$$

(b) Soit P un polynôme trigonométrique de degré au plus n. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P'(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{4n(-1)^k}{\pi^2(2k+1)^2} P\left(x + \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right) \ .$$

En déduire que :

$$\|P'\|_\infty \leq n \|P\|_\infty \ .$$

Cette dernière inégalité est connue sous le nom d'inégalité de Bernstein.

13. On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré au plus n. On le voit comme un sous-espace de $(\mathcal{C}_{2\pi}, \| \|_\infty)$. On fixe $\alpha \in]0,1[$ et $F \in \mathcal{C}_{2\pi}$ vérifiant :

$$\exists c > 0 \; ; \quad \forall k \geq 1, \quad d(F, \mathcal{P}_k) \leq \frac{c}{k^\alpha} \; .$$

Montrer qu'il existe une suite $Q_n \in \mathcal{P}_{2^n}$ et une constante $C > 0$ telles que :

$$F = \sum_{n=0}^{+\infty} Q_n \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0, \; \|Q_n\|_\infty \leq C 2^{-n\alpha} \; .$$

En utilisant l'inégalité de Bernstein, en déduire que F est α-hölderienne (i.e. qu'elle vérifie $|F(t) - F(s)| \leq \text{cste}|t-s|^\alpha$).

14. *Formule sommatoire de Poisson* (Zuily-Queffélec p. 93).
Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et telle qu'il existe des constantes $C > 0$ et $\alpha > 0$ avec $|f(x)| \leq C|x|^{-(1+\alpha)}$ et $|f'(x)| \leq C|x|^{-(1+\alpha)}$ pour x assez grand.

   (a) Montrer que $g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x + 2n\pi)$ définit une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique.

   (b) On note $\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-itx} dx$ la transformée de Fourier de f. Calculer les coefficients de Fourier de g à l'aide de $\hat{f}$. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x + 2n\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx} \; .$$

   (c) *Application.* On pose pour $a > 0$, $\theta(a) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 a}$. Montrer que :

$$\theta(a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \theta(1/a) \; .$$

15. *Exemple de fonction continue f telle que $S_n f(0)$ diverge* (Zuily-Queffélec p. 79).
On note $\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k}$ et on se souvient de l'exercice 10, question (b). On considère une suite de nombres positifs α_k telle que $\sum_k \alpha_k$ converge ainsi qu'une suite d'entier n_k vérifiant $n_{k+1} > 3n_k$. On pose

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k e^{2in_k x} \varphi_{n_k}(x) \; .$$

   (a) Montrer que f est continue et 2π périodique. Décrire les coefficients de Fourier de f.

   (b) Montrer que
$$S_{2n_k} f(0) \sim \alpha_k \ln n_k \; .$$

   (c) Décrire alors deux suite α_k et n_k telles que $\sup_n S_n f(0) = +\infty$.

16. *Inégalité isopérimétrique* (Zuily-Queffélec p. 101).
Soit $\gamma = x + iy \ : \ [a,b] \to \mathbb{C}$ une courbe fermée, sans point double continue et C^1 par morceaux. On note $L = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$ sa longueur et S la surface enfermée par la courbe. On cherche à montrer l'inégalité
$$L^2 \geq 4\pi S$$
avec égalité si et seulement si γ est un cercle.

   (a) On suppose que γ est orientée dans le sens direct. Rappeler pourquoi S est donnée par la formule
   $$S = \frac{1}{2}\mathrm{Im} \int_a^b \gamma'(t)\bar{\gamma}(t)dt \ .$$

   (b) Expliquer pourquoi on peut supposer $L = 1$, $a = 0$, $b = 1$ et $|\gamma'(t)| = 1$ pour tout $t \in [0,1]$. Expliquer aussi pourquoi on peut supposer la courbe parcourue dans le sens direct. On se place dorénavant dans cette situation. On note $c_n = \int_0^1 \gamma(t)e^{-2i\pi nt}dt$ le $n$ème coefficient de Fourier de γ.

   (c) Montrer que S et L sont donnés par les formules
   $$L^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 4\pi^2 n^2 |c_n|^2 \quad \text{et} \quad S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \pi n |c_n|^2 \ .$$

   (d) Conclure.

17. *Théorème de Bernstein* (Katznelson, an introduction to Harmonic Analysis).
Soient f une fonction continue 2π-périodique et $\alpha > 1/2$. On suppose que f est α-höldérienne (c'est à dire vérifie $|f(x) - f(y)| \leq cste|x - y|^\alpha$). On cherche à montrer que la série de Fourier de f converge normalement.

   (a) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|\tau_h f - f\|_2^2 \leq C|h|^{2\alpha}$. En déduire que pour tout $n \geq 1$,
   $$\sum_{2^n \leq |k| < 2^{n+1}} \left|\hat{f}(k)(1 - e^{ikh})\right|^2 \leq C|h|^{2\alpha} \ .$$

   (b) En choisissant correctement h, conclure que
   $$\sum_{2^n \leq |k| < 2^{n+1}} \left|\hat{f}(k)\right|^2 \leq C2^{-2n\alpha} \ .$$
   (la constante C a pu changer).

(c) Montrer que

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(k)\right| < +\infty \ .$$

18. *Un exemple de fonction de classe $C^{1/2}$ dont la série de Fourier n'est pas normalement convergente.*
On introduit les polynômes P_n et Q_n dits de Rudin Shapiro (voir Zuily Queffélec p. 47) :

$$\begin{cases} P_0(z) = Q_0(z) = 1 \\ P_{n+1}(z) = P_n(z) + z^{2^n} Q_n(z) \\ Q_{n+1}(z) = P_n(z) - z^{2^n} Q_n(z) \ . \end{cases}$$

(a) Montrer que P_n et Q_n sont des polynômes de degré $2^n - 1$, à coefficients ± 1.

(b) Etablir que

$$|P_{n+1}(z)|^2 + |Q_{n+1}(z)|^2 = 2(|P_n(z)|^2 + |z|^{4n}|Q_n(z)|^2) \ .$$

En déduire que si $|z| \leq 1$,

$$|P_n(z)| \leq 2^{(n+1)/2} \ .$$

On pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}(P_{n+1}(e^{ix}) - P_n(e^{ix})) \ .$$

(c) Montrer que f est continue 2π-périodique. Calculer ses coefficients de Fourier et montrer que la série de Fourier de f n'est pas normalement convergente.

(d) On pose $f_n(x) = 2^{-n}(P_{n+1}(e^{ix}) - P_n(e^{ix}))$ et on se souvient des conclusions de l'exercice 12. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout x et pour tout h,

$$|f_n(x+h) - f_n(x)| \leq C2^{n/2}|h| \quad \text{et} \quad |f_n(x+h) - f_n(x)| \leq C2^{-n/2} \ .$$

En déduire que la fonction f est $1/2$-höldérienne.