Université Paris-Sud

Présentation de travaux en vue de l'habilitation à diriger des recherches

Mathématiques

Yanick Heurteaux

Avant-propos

Ce texte constitue une synthèse des travaux de recherches dont la liste est proposée en fin de mémoire, page 47. Il ne s'agit pas de décrire de façon chronologique les travaux présentés mais plutôt de mettre en valeur ce qui fait leur unité et leur diversité. Ainsi, trois thèmes, différents mais complémentaires, sont développés.

1. L'étude des solutions positives d'opérateurs paraboliques et la recherche d'inégalités à la frontière
2. La description d'outils pour calculer ou estimer la dimension des mesures
3. L'étude géométrique, dans différents contextes, de la mesure calorique.

On s'efforce de montrer comment ces thèmes s'articulent entre eux et on tente d'expliquer, autant que faire se peut, les motivations, les idées qui donnent naissance aux preuves, les exemples ou contre-exemples qui nous ont permis de mieux comprendre tout ou partie de notre travail. On s'autorise aussi, par rapport aux travaux originaux, quelques résultats inédits, qui nous semblent importants pour une meilleure compréhension. Une esquisse de preuve est alors proposée.

Ce texte est découpé en quatre parties dont la première n'a pour ambition que de situer la recherche dans un cadre général et de présenter succintement le type de résultats obtenus. Les parties 2 et 3 peuvent ensuite se lire indépendamment l'une de l'autre. Enfin, c'est la dernière partie qui fournit l'unité à ce travail ; elle met en valeur les résultats des parties 2 et 3 en cherchant à mesurer, dans diverses situations, la taille des ensembles négligeables ou des ensembles pleins pour la mesure calorique.

Afin de mieux se repérer dans le texte, précisons enfin que les articles présentés sont référencés numériquement tandis que le reste de la bibliographie est codée de façon alphanumérique.

1 Introduction générale.

La théorie du potentiel est née de l'étude des fonctions harmoniques. Dans un ouvert de $\mathbb{R}^d$, il s'agit d'étudier les fonctions f vérifiant

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_d^2} = 0 \ .$$

L'ouvert le plus simple dans lequel on peut travailler est la boule unité de $\mathbb{R}^d$ qu'on notera D. Le noyau de Poisson $P_\xi(M) = \frac{1-\|M\|^2}{S_d\,\|\xi - M\|^d}$ y joue alors un rôle clé (ici, S_d désigne la surface de la sphère unité). Si f est une fonction continue sur le bord de D, elle se prolonge de façon unique en une fonction harmonique dans D et continue jusqu'au bord. Ce prolongement (encore noté f) s'exprime à l'aide du noyau de Poisson grâce à la formule de représentation intégrale suivante :

$$f(M) = \int_{\partial D} f(\xi) P_\xi(M)\, d\sigma(\xi) \ , \tag{1}$$

où σ est la mesure naturelle sur la sphère unité. La valeur $f(M)$ se lit donc comme l'intégrale sur la sphère de la fonction f contre la mesure $d\omega^M(\xi) = P_\xi(M)\, d\sigma(\xi)$. La mesure $d\omega^M(\xi)$ est communément appelée mesure harmonique dans l'ouvert D relativement au point M. Dans cette situation précise, elle possède une densité par rapport à la mesure de surface sur ∂D.

La mesure $d\omega^M(\xi)$ peut aussi se décrire de façon probabiliste. Si B_t est un mouvement Brownien issu de $M \in D$ et si T décrit le premier instant où B_t sort de D, on peut montrer que la mesure $d\omega^M(\xi)$ coïncide avec la loi de B_T. En d'autres termes, si $A \subset \partial D$,

$$\omega^M(A) = \mathbb{P}[B_T \in A] \ . \tag{2}$$

Si le noyau de Poisson joue un rôle important pour représenter les fonctions harmoniques dans D continues jusqu'au bord, il possède aussi une autre propriété caractéristique intéressante : à une normalisation près, les fonctions P_ξ constituent exactement les points extrémaux du cône convexe des fonctions harmoniques positives dans la boule D. Ce noyau permet alors aussi de représenter toutes les fonctions harmoniques positives dans D. Pour une telle fonction f, on peut trouver une mesure positive m portée par la frontière ∂D et telle que

$$f(M) = \int_{\partial D} P_\xi(M) dm(\xi) \ . \tag{3}$$

La famille des fonctions harmoniques positives extrémales sur un ouvert donné est appelée frontière de Martin de l'ouvert. Dans le cas de la boule unité de $\mathbb{R}^d$, il y a donc identification entre la frontière de Martin et la frontière naturelle. Par ailleurs, la formule (3) permet de comprendre le comportement au bord des fonctions harmoniques positives dans D : elles possèdent des limites non-tangentielles en presque tout point frontière (le presque tout étant relatif à la mesure σ).

Bien que faisant toutes deux intervenir le même noyau de Poisson, les formules (1) et (3) répondent en fin de compte à deux problèmes assez différents. Dans un cas, on s'intéresse à la représentation des fonctions harmoniques continues jusqu'au bord (plus généralement des fonctions harmoniques bornées) et dans l'autre à la représentation des fonctions harmoniques positives.

Intéressons-nous maintenant à un ouvert Ω quelconque de $\mathbb{R}^d$. La formule (2) permet de définir en toute généralité la mesure harmonique (ici T devient le premier temps de sortie de Ω). Par ailleurs, la théorie abstraite de Martin ([Mar41]) permet de compactifier l'ouvert Ω à l'aide de la frontière de Martin. Elle permet aussi de représenter les fonctions harmoniques positives à l'aide de l'intégrale d'un noyau contre une mesure portée par cette frontière. Les questions naturelles qui se posent sont alors les suivantes.

1. Que dire des ouverts pour lesquels toute fonction continue au bord se prolonge en une fonction continue jusqu'au bord et harmonique à l'intérieur ? (un tel ouvert est dit régulier et on parle alors de la résolution du problème de Dirichlet)
2. Quel est le comportement au bord de Ω de la fonction $M \mapsto \int f(\xi) d\omega^M(\xi)$?
3. Dans quels cas la mesure harmonique possède-t-elle une densité par rapport à la mesure de surface ?
4. D'une façon plus générale, lorsque la frontière est irrégulière, que peut-on dire (en termes de dimension de Hausdorff) de la taille des ensembles qui portent la mesure harmonique ?
5. Quel lien y-a-t'il entre la frontière naturelle et la frontière de Martin ?
6. Quel est le comportement au bord de Ω des fonctions harmoniques positives ?

Souvent, on cherchera à décrire des hypothèses géométriques qui permettent de répondre à l'une de ces questions. De nombreux auteurs ont travaillé dans cette direction. Citons par exemple et de façon non exhaustive, Hunt et Wheeden, Carleson, Dahlberg Ancona ou Wu. En particulier, dans un ouvert lipschitzien (c'est à dire bordé par le graphe d'une fonction lipschitzienne), tout se passe comme dans la boule unité. La mesure harmonique est équivalente à la mesure de surface, la frontière de Martin coïncide avec la frontière naturelle et on peut écrire des formules semblables à (1) et (3).

Au cours des années 60 et sous l'initiative de Brelot ([Bre69]), la théorie du potentiel a pris un aspect plus axiomatique. On s'est aperçu qu'on pouvait mettre dans un même moule les solutions d'un grand nombre d'opérateurs linéaires aux dérivées partielles, la caractéristique commune étant la possibilité de pouvoir résoudre de façon raisonnable le problème de Dirichlet. Parmi les opérateurs possibles, on peut citer une large classe d'opérateurs elliptiques, ainsi qu'une large classe d'opérateurs paraboliques contenant l'opérateur de la chaleur ($\mathcal{C} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\Delta_x$). Par contre, des équations hyperboliques comme l'équation des ondes ne peuvent pas rentrer dans ce moule ; on sait bien par exemple qu'il faut fournir non seulement la donnée initiale mais aussi la vitesse initiale pour prédire l'evolution de l'onde. En d'autres termes, on ne peut pas, pour ce type d'opérateurs, résoudre correctement le problème de Dirichlet.

L'étude de l'équation de la chaleur où plus géneralement d'opérateurs paraboliques constitue une grande partie de mon travail de recherche (parties 2 et 4 de ce mémoire). J'ai cherché, dans certaines situations, à donner des réponses aux questions 2, 3, 4, 5 et 6 décrites plus haut.

La partie 2 de ce mémoire, issue de mon travail de thèse, cherche à généraliser des travaux de Kemper à une large classe d'opérateurs paraboliques. De même que le laplacien est invariant par les homothéties, l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}^{d+1}$ est invariante par les affinités

$$(x,t) \in \mathbb{R}^{d+1} \longmapsto (\lambda x, \lambda^2 t) \in \mathbb{R}^{d+1} \ .$$

Imaginons alors qu'un ouvert de $\mathbb{R}^{d+1}$ soit localement délimité (à une rotation près des coordonnées d'espace) par un graphe $x_d = f(x', t)$ (ici, x' désigne les $d-1$ premières coordonnées d'espace, x_d la dernière et t la coordonnée temporelle). Si on veut conserver pour la classe d'ouverts ainsi décrite l'invariance par les affinités, la bonne condition de régularité à imposer à f est alors

$$|f(x',t) - f(y',s)| \leq K \sup(\|x'-y'\|, |t-s|^{1/2}) \ . \tag{4}$$

Les ouverts localement délimités par des fonctions possédant ce type de régularité jouent finalement le même rôle que celui joué par les ouverts lipschitziens lorsqu'on étudie le laplacien.

Pour ce type d'ouverts et pour l'équation de la chaleur, Kemper a prouvé dans [Kem72] qu'il y avait coïncidence entre la frontière naturelle et la frontière de Martin. Il a établi une formule similaire à (3) et a prouvé que les solutions positives de l'équation de la chaleur possédaient des limites "non tangentielles" en presque tout point frontière (le presque tout étant relatif à la mesure harmonique pour l'équation de la chaleur).

Dans [1], nous étendons à une large classe d'opérateurs paraboliques les résultats de Kemper. L'extension est loin d'être automatique, en particulier parce que les opérateurs considérés ne sont plus invariants par translations. Pour y parvenir, on met au point ce qu'on appelle de inégalités de Harnack à la frontière. Ancona avait déjà montré l'efficacité de tels outils pour étudier les opérateurs elliptiques. Dans ce contexte des équations paraboliques, le rôle particulier joué par la coordonnée temporelle ne permet pas d'établir des résultats aussi puissants que ceux concernant les équations elliptiques. Cependant, on dégage deux principes (appelés principe de Harnack faible et principe de Harnack fort à la frontière) qui permettent d'étendre les résultats de Kemper.

La partie 4 de ce mémoire est consacrée à l'étude de la mesure harmonique relative à l'équation de la chaleur (où à un opérateur parabolique). On parle alors de mesure calorique et on cherche à donner des réponses aux questions 3 et 4 décrites plus haut. Tout comme la mesure harmonique (liée au laplacien), la mesure calorique (liée à l'équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^{d+1}$) peut s'interpréter de façon probabiliste. Si B_t est un mouvement Brownien d-dimensionnel et si $M_0 = (x_0, t_0)$ est un point d'un ouvert Ω, la mesure calorique au point M_0 dans l'ouvert Ω peut être définie par la formule :

$$\omega^{M_0}(E) = \mathbb{P}_{x_0}[(B_T, t_0 - T) \in E],$$

où T est le temps de sortie de Ω du processus $(B_t, t_0 - t)$.

Dans diverses situations, on essaye de donner une analyse précise de la mesure calorique. La première situation étudiée est celle des ouverts localement délimités par le graphe d'une fonction vérifiant (4). Au cours des années 80, Kaufman et Wu ont obtenus des résultats sur ce sujet. Après avoir correctement défini la mesure de surface, ils ont prouvé que la mesure calorique pouvait être singulière par rapport à celle ci. En d'autres termes, l'analogue du théorème de Dahlberg concernant la mesure harmonique dans les ouverts lipschitziens est faux dans ce nouveau contexte. Nous montrons dans [1] qu'en renforçant légèrement l'hypothèse de régularité relative à la coordonnée temporelle (plus précisément, en supposant que la fonction f est de classe $C^{1/2+\varepsilon}$ par rapport à cette variable), cette pathologie disparait.

Dans un travail récent, en collaboration avec Thierry Bousch ([6]), nous revenons sur la situation critique des fonctions de classe $C^{1/2}$ par rapport à la coordonnée temporelle. Pour des ouverts auto-affines non triviaux du plan, nous montrons que la mesure calorique est toujours singulière par rapport à la mesure naturelle sur le graphe. Elle est même portée par un ensemble de petite dimension de Hausdorff. Par ailleurs, elle possède des propriétés d'homogénéité : c'est une mesure de type quasi-Bernoulli.

Notre dernière contribution à l'étude de la mesure calorique se trouve dans [2] et répond à une question posée par Kaufman et Wu. On se place maintenant dans un ouvert du plan $\Omega = \{(x,t)\ ;\ t > g(x)\}$ où g est une fonction continue. Il faut noter ici le rôle inversé joué par les variables x et t et imaginer notre ouvert comme une déformation du demi-plan $\{t > 0\}$. Kaufman et Wu avaient établi, que, même pour des fonctions g assez régulières, certains ensembles négligeables pour la mesure calorique pouvaient être de longueur strictement positive. Il ne savaient pas au contraire si tout ensemble de longueur nulle était automatiquement de mesure calorique nulle. Nous répondons positivement à cette question en prouvant un résultat se passant de toute hypothèse de régularité sur la fonction g.

Une partie des résultats obtenus sur la mesure calorique n'auraient pu voir le jour si nous n'avions cherché à développer des outils permettant de mesurer le degré de singularité ou le degré de régularité d'une mesure donnée à l'avance. C'est ce que nous faisons dans les travaux [3] [4] et [5]. Nous en rendons compte dans la partie 3 de ce mémoire. Contentons nous dans cette introduction de préciser la problématique et laissons au lecteur le soin de parcourir la partie 3 pour de plus amples précisions.

La notion de dimension de Hausdorff est un outil bien commode pour hiérarchiser la taille des sous-ensembles de l'espace $\mathbb{R}^d$; elle est utile pour classifier les ensembles négligeables pour la mesure de Lebesgue (les ensembles non-négligeables pour la mesure de Lebesgue sont de dimension d). Donnons nous alors une mesure m sur $\mathbb{R}^d$ singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. Si on cherche à mesurer son " degré de singularité", on peut le faire en essayant de mesurer la taille des ensembles qui la chargent ainsi que la taille des ensembles qui la portent. Une façon précise de quantifier ceci consiste à introduire les nombres

$$\dim_*(m) = \inf\{\dim(E)\ ;\ m(E) > 0\} \quad \text{et} \quad \dim^*(m) = \inf\{\dim(E)\ ;\ m(\mathbb{R}^d \setminus E) = 0\}\ .$$

Ces quantités sont appelées respectivement dimension inférieure et dimension supérieure de la mesure m. Bien qu'elles répondent à une définition abstraite, on peut malgré tout chercher des moyens concrets d'en fournir des estimations. C'est ce que nous faisons dans les travaux [3], [4] et [5]. En particulier, nous introduisons diverses fonctions (β et τ) dont les dérivées à droite et à gauche au point 1 se comparent aux nombres $\dim_*(m)$ et $\dim^*(m)$. Nous cherchons aussi à dire en quel sens ces estimations sont optimales en décrivant des cas d'égalité. L'intérêt de développer de tels outils apparait bien dans [6]. C'est en estimant les fonctions β et τ qu'on obtient des informations sur la dimension de la mesure calorique des ouverts auto-affines du plan.

2 Inégalités de Harnack à la frontière.

Les résultats développés dans cette partie sont issus de ma thèse ([0]) et se trouvent aussi dans [1]. Essayons de motiver les inégalités décrites dans la partie 2.3. En 1972, Kemper décrit la frontière de Martin des ouverts “lipschitziens” relativement à l'équation de la chaleur (voir [Kem72]). Il montre qu'à une constante multiplicative près, chaque point frontière est associé à une unique fonction calorique (i.e. solution de l'équation de la chaleur) positive minimale. Il obtient ensuite un théorème de représentation des solutions positives ainsi que l'existence de limites “non-tangentielles” en presque tout point frontière (le presque tout étant relatif à la mesure calorique). Ses résultats fournissent donc, pour l'opérateur de la chaleur, l'analogue de résultats plus anciens dus à Hunt et Wheeden ([HW68] et [HW70]) concernant la compactification de Martin des ouverts lipschitziens de $\mathbb{R}^d$ en théorie classique du potentiel (i.e. pour le Laplacien). Le défaut du travail de Kemper est qu'il utilise de façon cruciale l'invariance par translations de l'opérateur de la chaleur ; il ne peut donc directement se généraliser à une classe d'opérateurs paraboliques ne bénéficiant plus de ces propriétés d'invariance.

Par ailleurs Ancona a montré comment la description de la frontière de Martin des ouverts lipschitziens de $\mathbb{R}^d$ pouvait s'obtenir en utilisant des inégalités de Harnack à la frontière (voir par exemple [Anc78], [Anc84] ou [Anc90]) et a ainsi étendu les résultats de Hunt et Wheeden à une large classe d'opérateurs elliptiques.

Un des objectifs recherchés est donc d'étendre le résultat de Kemper à une large classe d'opérateurs paraboliques en commençant par établir un principe de Harnack à la frontière. Lorsque L est un opérateur parabolique, on cherche à comparer deux L-solutions positives tendant vers 0 au voisinage d'un point frontière “régulier”. La difficulté vient du rôle particulier joué par la variable temporelle. Les inégalités de Harnack paraboliques ne permettent de contrôler la valeur $u(x,t)$ d'une L-solution positive à l'aide de $u(x_0,t_0)$ que lorsque le point (x_0,t_0) se situe dans le futur de (x,t). En particulier, une L-solution positive peut être identiquement nulle jusqu'à l'instant t_0 puis devenir ensuite strictement positive.

Malgré tout, nous démontrons deux principes de Harnack à la frontière pour des opérateurs paraboliques dans les ouverts “lipschitziens”. Le premier (appelé principe faible) fait intervenir deux points de référence. Il n'est pas suffisamment performant pour permettre de décrire la frontière de Martin de l'ouvert considéré. Cependant, il constitue une première étape pour établir un deuxième principe (appelé principe fort), qui permet d'étendre les travaux de Kemper. Notons que la méthode employée pour démontrer ce deuxième principe nous fournit au passage un théorème d'approximation (théorème 2.6) qui s'avérera précieux lorsqu'on cherchera dans la partie 4, à donner des estimations de la mesure calorique.

2.1 Une classe d'opérateurs paraboliques.

Fixons $d \geq 1$ et plaçons nous dans $\mathbb{R}^{d+1}$. Un point de $\mathbb{R}^{d+1}$ est noté (x,t) avec $x \in \mathbb{R}^d$ et $t \in \mathbb{R}$. Les d premières coordonnées de (x,t) sont appelées coordonnées d'espace, tandis que la coordonnée t est appelée coordonnée temporelle. Si μ est un réel > 1, on s'intéresse alors à la classe $\Lambda(\mu)$ des opérateurs L sur $\mathbb{R}^{d+1}$ s'écrivant :

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\operatorname{div}(A\nabla_x) \tag{5}$$

où $A = (A_{ij}(x,t))_{ij}$ est une matrice $d \times d$ symétrique vérifiant les propriétés :

(i) A est uniformément elliptique au sens où :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \frac{1}{\mu}\|\xi\|^2 \leq < A\xi \,|\, \xi > \leq \mu\, \|\xi\|^2$$

(ii) les fonctions A_{ij} vérifient la propriété de continuité suivante :

$$\forall (x,t)\,,\,(y,s) \in \mathbb{R}^{d+1}, \quad |A_{ij}(x,t) - A_{ij}(y,s)| \leq \mu\, \sup(\|x-y\|, |t-s|^{1/2})\ .$$

En particulier, lorsque $A = Id$, on obtient l'opérateur de la chaleur $\mathcal{C} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\Delta_x$.

Si on introduit sur $\mathbb{R}^{d+1}$, la distance anisotrope définie par

$$\delta((x,t),(y,s)) = \sup(\|x-y\|, |t-s|^{1/2}), \tag{6}$$

la condition (ii) signifie simplement que les fonctions A_{ij} sont lipschitziennes dans l'espace métrique $(\mathbb{R}^{d+1}, \delta)$. En fait, pour établir le principe de Harnack faible à la frontière (théorème 2.2), cette propriété de régularité n'est pas nécessaire et il suffit de supposer la matrice $A(x,t)$ à coefficients mesurables. Cependant, pour établir ce que nous appelons le principe de Harnack fort à la frontière (théorème 2.3), nous avons besoin de contrôler l'évolution de certaines L-solutions après perturbation de l'opérateur (voir paragraphe 2.4). Il devient alors nécessaire d'avoir des informations sur le module de continuité des coefficients de la matrice A.

D'après les travaux de Moser ([Mos64]), on sait que si $L \in \Lambda(\mu)$, toute L-solution faible dans un ouvert Ω possède un représentant continu. On note $H(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues sur Ω vérifiant $L f = 0$ au sens faible. Le faisceau $(H(\Omega))_\Omega$ définit alors une bonne théorie du potentiel pour laquelle des inégalités de Harnack paraboliques sont vérifiées (voir [Mos64]). Pour cette théorie du potentiel, les sur-solutions dans Ω sont les fonctions f localement intégrables, semi-continues inférieurement, vérifiant $L f \geq 0$ au sens faible et $f(P) = \liminf \mathrm{ess}_{\xi \to P} f(\xi)$. Rappelons aussi que les L-potentiels sur $\mathbb{R}^{d+1}$ s'écrivent $f(P) = \int \Gamma(Q,P)d\nu(Q)$ où $d\nu$ est une mesure positive et où Γ est la solution fondamentale de l'opérateur L. Les travaux d'Aronson ([Aro67]) permettent par ailleurs de comparer le noyau Γ à la solution fondamentale de l'équation de la chaleur.

2.2 Point frontière "lipschitzien".

Plaçons nous dans $\mathbb{R}^2$ et décrivons les propriétés de stabilité des classes d'opérateurs $\Lambda(\mu)$. On remarque que les affinités

$$(x,t) \in \mathbb{R}^{d+1} \longmapsto (\lambda x, \lambda^2 t) \in \mathbb{R}^{d+1} \tag{7}$$

laissent invariant l'opérateur de la chaleur. Plus généralement, si $\lambda \leq 1$, le pull-back de l'opérateur $L \in \Lambda(\mu)$ par l'affinité (7) est l'opérateur $\tilde{L}$ correspondant à la matrice $\tilde{A}(x,t) = A(\lambda x, \lambda^2 t)$. Ce nouvel opérateur est encore dans la classe $\Lambda(\mu)$.

Par ailleurs, imaginons qu'au voisinage d'un de ses points frontière Q, l'ouvert Ω soit délimité (à une rotation près des coordonnées d'espace) par un graphe d'équation $x_d = f(x', t)$

(on a noté $(x,t) = (x_1, \ldots, x_{d-1}, x_d, t) = (x', x_d, t)$). Alors, l'image réciproque de Ω par l'affinité (7) est délimitée au voisinage de l'image réciproque de Q par le graphe d'équation $x_d = \frac{1}{\lambda} f(\lambda\, x', \lambda^2 t)$. Cette nouvelle fonction conserve un module de continuité identique à celui de f si on suppose que

$$|f(x',t) - f(y',s)| \leq K\, \sup(\|x'-y'\|, |t-s|^{1/2}) = K\,\delta((x',t),(y',s)) \ . \tag{8}$$

En d'autres termes, pour des raisons d'homogénéité, une hypothèse naturelle sur f consiste à supposer qu'elle est lipschitzienne par rapport à la distance δ. Ce qui nous conduit aux définitions suivantes :

Définition 2.1 (Domaine "lipschitzien" canonique) *Soient r_0 et K deux réels > 0, $Q = (Y,S) = (Y', Y_d, S)$ un point de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction définie sur*

$$D = \{(x',t) \in \mathbb{R}^d \ ; \ \delta((x',t),(Y',S)) < r_0\}$$

et vérifiant

$$f(Y',S) = Y_d \quad et \quad \forall (x',t),(y',s) \in D, \quad |f(x',t) - f(y',s)| \leq K\,\delta((x',t),(y',s)) \ .$$

Le domaine

$$\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ (x',t) \in D \quad et \quad f(x',t) < x_d < Y_d + 10Kr_0\}$$

est alors appelé domaine "lipschitzien" canonique adapté au cylindre

$$T(Q,r_0,K) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \delta((x',t),(Y',S)) < r_0 \quad et \quad |x_n - Y_n| < 10Kr_0\} \ .$$

Définition 2.2 (Point frontière "lipschitzien") *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et Q un point frontière de Ω. On dit que Q est un point frontière "lipschitzien" de Ω adapté au cylindre $T(Q,r_0,K)$, si, à une rotation près des coordonnées d'espace, on peut trouver $r_0 > 0$ et $K > 0$ tels que $\Omega \cap T(Q,r_0,K)$ soit un domaine "lipschitzien" canonique adapté au cylindre $T(Q,r_0,K)$.*

Notation. Lorsque nous parlerons d'objets (ouverts, fonctions, points frontière) lipschitziens par rapport à la distance δ, nous utiliserons systématiquement des guillemets autour de l'adjectif lipschitzien et nous écrirons "lipschitzien".

2.3 Principes de Harnack à la frontière.

Les trois énoncés qui suivent décrivent le comportement des L-solutions positives au voisinage d'un point frontière "lipschitzien" d'un ouvert Ω.

Théorème 2.1 (Inégalité de type Carleson, [1])
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $r_0 > 0$ et L un opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$. On suppose que $Q \in \partial\Omega$ est un point frontière "lipschitzien" de Ω adapté au cylindre $T(Q,2r_0,K)$. On peut trouver une constante $C = C(d,K,\mu) > 0$ telle que pour toute L-solution positive u dans Ω tendant vers 0 en tout point de $\Delta(Q,2r_0) = \partial\Omega \cap T(Q,2r_0,K)$, on ait :

$$\forall P \in \Omega \cap T(Q,r_0,K), \qquad u(P) \leq C\,u(P_{r_0}) \ , \tag{9}$$

où $P_{r_0} = Q + (0, 10Kr_0, 2r_0^2)$.

C'est en 1963 qu'une inégalité de ce type apparait pour la première fois ; dans [Car63], Carleson l'établit dans le demi-espace et pour l'opérateur du Laplacien . C'est pourquoi, on parle d'inégalité de type Carleson. L'inégalité (9) est établie par Kemper dans [Kem72] lorsque L est l'opérateur de la chaleur. On la retrouve aussi chez Fabes et al. ([FGS86]) lorsque la fonction f délimitant Ω ne dépend pas du temps. Enfin, elle apparait dans un contexte très semblable au notre dans le récent travail de Nyström ([Nys97]). Pour démontrer l'inégalité (9), nous représentons la fonction u à l'aide de la fonction de Green de l'ouvert Ω. Les résultats d'Aronson sur la comparaison entre la fonction de Green et le noyau de la chaleur ([Aro67]) ainsi que la construction de barrières au voisinage des points du bord nous permettent ensuite de conclure.

En adaptant à notre situation la démarche qu'utilise Ancona dans [Anc78], on peut alors déduire du théorème 2.1 un premier principe de Harnack à la frontière que nous appelons principe de Harnack faible à la frontière.

Théorème 2.2 (Principe de Harnack faible à la frontière, [1])
On reprend les notations du théorème 2.1. On suppose de plus $0 < r_0 \leq 1$. *On peut trouver une constante* $C = C(d, K, \mu) > 0$ *telle que si* u *et* v *sont deux* L*-solutions positives dans* Ω*, tendant vers* 0 *en tout point de* $\Delta(Q, 2r_0) = \partial\Omega \cap T(Q, 2r_0, K)$*, alors,*

$$\forall P \in \Omega \cap T(Q, r_0, K), \qquad \frac{u(P)}{u(P_{r_0})} \leq C\,\frac{v(P)}{v(P^*_{r_0})} \ , \tag{10}$$

où $P_{r_0} = Q + (0, 10Kr_0, 2r_0^2)$ *et* $P^*_{r_0} = Q + (0, 10Kr_0, -2r_0^2)$.

La conclusion du théorème 2.2 fait intervenir deux points de référence (P_{r_0} et $P^*_{r_0}$). Elle est donc moins précise que celle obtenue par Ancona pour des opérateurs elliptiques. Sans hypothèses plus restrictives sur les fonctions u et v, on ne peut espérer l'améliorer : une L-solution positive peut rester identiquement nulle jusqu'à un instant t_0 puis devenir strictement positive. Notons là encore qu'un analogue du théorème 2.2 pour des ouverts cylindriques en temps se trouvait déjà dans [FGS86].

L'énoncé qui suit décrit un autre principe de Harnack à la frontière (appelé principe de Harnack fort à la frontière). Certes, il s'applique à une classe plus restrictive de fonctions, mais il a le mérite de ne plus faire intervenir qu'un seul point de normalisation.

Théorème 2.3 (Principe de Harnack fort à la frontière, [1])
On reprend les notations du théorème 2.2. On note aussi

$$\Gamma = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ t \geq \sup(\|x'\|^2, |x_d|^2/(10K)^2)\} \ .$$

On peut trouver une constante $C = C(d, K, \mu) > 0$ *telle que si* u *et* v *sont deux* L*-solutions positives dans* $\Omega\backslash\bar{T}(Q, r/2, K)$ *tendant vers* 0 *en tout point de* $\partial_p\Omega\backslash T(Q, r/2, K)$ *et dominées par un* L*-potentiel au voisinage de l'infini, alors,*

$$\forall P \in \Omega \cap [Q + \Gamma \cap \{(x,t) \ ; \ r^2 \leq t \leq r_0^2\}], \qquad \frac{u(P)}{u(M_r)} \leq C\,\frac{v(P)}{v(M_r)} \ , \tag{11}$$

où $M_r = Q + (0, 10Kr, r^2)$ *et* $r < r_0$.

Remarque. Dans un travail récent ([Nys97]), Nyström prouve que l'inégalité (11) reste valable lorsque la matrice A qui intervient dans l'opérateur L est seulement supposée à coefficients mesurables.

2.4 La clé du théorème 2.3 : une inégalité de Harnack à l'envers.

La preuve du théorème 2.3 est beaucoup plus subtile que celle du théorème 2.2. Elle nécessite de renverser une inégalité de Harnack. Cette idée apparaissait déjà dans [FGS86] pour des opérateurs L à coefficients indépendants du temps et pour des ouverts Ω cylindriques par rapport à la coordonnée temporelle. Les propiétés d'invariances par translations par rapport au temps rendaient alors sa preuve plus simple. On la retrouve aussi dans l'article récent de Nyström ([Nys97]).

Notons $G_M(\cdot)$ la L-fonction de Green dans Ω de pôle M. Lorsque $P \in \Omega \setminus T(Q,r,K)$, des arguments de comparaison assez standards ainsi que l'utilisation du théorème 2.1 nous permettent d'écrire que

$$u(P) \leq Cr^{-d}u(M_r)G_{M^*_{2r/3}}(P)$$

où $M^*_\rho = Q + (0, 10K\rho, -\rho^2)$. Par ailleurs, grâce au principe du maximum et au théorème 2.1, on a :

$$r^{-d}G_{M_{2r/3}}(P) \leq C\frac{v(P)}{v(M_r)}$$

dès que P est à l'extérieur d'un voisinage de $M_{2r/3}$. Comme la fonction $M \mapsto G_M(P)$ est une L^*-solution positive (L^* désigne l'opérateur adjoint $-\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\operatorname{div}(A\nabla_x)$), il s'agit donc de démontrer, si on veut aboutir à la conclusion du théorème 2.3, une inégalité de Harnack à l'envers pour cette L^*-solution. Notons φ^* la L^*-mesure calorique de $\partial T(Q, 2r_0, K)$ dans $\tilde{\Omega} = \Omega \cap T(Q, 2r_0, K)$, c'est à dire la solution au problème de Dirichlet dans $\tilde{\Omega}$ pour l'opérateur L^* avec donnée frontière 1 sur $\partial\tilde{\Omega} \cap \partial T(Q, 2r_0, K)$ et 0 sur $\partial\tilde{\Omega} \cap T(Q, 2r_0, K)$. En utilisant l'analogue du théorème 2.2 pour l'opérateur adjoint L^*, on est donc ramené à montrer que :

$$\varphi^*(M^*_\rho) \leq C\varphi^*(M_\rho) \quad \text{si } \rho \leq r_0 \ . \tag{12}$$

La fonction φ^* étant une L^*-solution positive, cette inégalité constitue bien une inégalité de Harnack à l'envers.

Renversons le temps (où ce qui revient au même, travaillons à nouveau avec l'opérateur L). On établit effectivement le :

Théorème 2.4 ([1]) *Soient $r_0 \leq 1$ et Ω un domaine "lipschitzien" canonique adapté au cylindre $T(Q, 2r_0, K)$. Si φ désigne la L-mesure calorique de $\partial T(Q, 2r_0, K)$ dans Ω, on a :*

$$\forall \rho \leq r_0, \quad \varphi(M_\rho) \leq C\varphi(M^*_\rho) \ , \tag{13}$$

où $C = C(d, K, \mu)$.

La preuve du théorème 2.4 se fait par un argument d'approximation. Grâce au principe du maximum, on constate tout d'abord qu'il est satisfait lorsque la matrice A est à coefficients constants (il suffit même que $A(x,t)$ ne dépende pas des coordonnées x_d et t). On cherche alors à comparer les fonctions φ pour deux opérateurs coïncidant au point Q. C'est ici que les hypothèses de régularité de la matrice A deviennent importantes. On obtient le :

Théorème 2.5 ([1]) *On reprend les notations du théorème 2.4. Il existe $C = C(d, K, \mu) > 0$ tel que si L_1 et L_2 sont deux opérateurs de la classe $\Lambda(\mu)$ dont les matrices coïncident au point Q, alors, pour tout $\rho \leq r_0$,*

$$\frac{1}{C}\,\varphi_1(M_\rho) \leq \varphi_2(M_\rho) \leq C\,\varphi_1(M_\rho) \quad \textit{et} \quad \frac{1}{C}\,\varphi_1(M_\rho^*) \leq \varphi_2(M_\rho^*) \leq C\,\varphi_1(M_\rho^*)\ ,$$

où φ_i est la L_i-mesure calorique de $\partial T(Q, 2r_0, K)$ dans Ω.

La preuve du théorème 2.5 passe elle-même par un autre argument d'approximation où on cherche cette fois-ci à voir comment évolue la fonction φ lorsqu'on effectue de petites perturbations de la frontière. C'est l'objet du théorème qui suit.

Théorème 2.6 ([1]) *Pour simplifier les notations, on suppose $Q = 0$. Soient $L \in \Lambda(\mu)$ et $\varepsilon > 0$. Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts "lipschitziens" canoniques adaptés au cylindre $T(0, 2r_0, K)$. On suppose que les fonctions f_1 et f_2 dont les graphes délimitent Ω_1 et Ω_2 sont "tangentes" au sens où*

$$\forall (x', t), \quad |f_1(x', t) - f_2(x', t)| \leq C\,\delta((x', t), 0)^{1+\varepsilon}\ .$$

Pour tout $\rho \leq r_0$, on a alors

$$\frac{1}{C}\,\varphi_1(M_\rho) \leq \varphi_2(M_\rho) \leq C\,\varphi_1(M_\rho) \quad \textit{et} \quad \frac{1}{C}\,\varphi_1(M_\rho^*) \leq \varphi_2(M_\rho^*) \leq C\,\varphi_1(M_\rho^*)\ ,$$

où $C = C(d, K, \mu, \varepsilon)$ et où φ_i désigne ici la L-mesure calorique de $\partial T(0, 2r_0, K)$ dans Ω_i.

Remarque. La conclusion du théorème 2.6 traduit une propriété d'effilement de la zone située entre les graphes de f_1 et f_2. C'est un résultat intéressant en soit. En particulier, il constituera un outil clé dans l'étude de la mesure calorique dans les domaines "lipschitziens" (théorèmes 4.4 et 4.6).

Enchainement des preuves. Essayons de décrire de façon précise l'articulation des preuves des théorèmes 2.4, 2.5 et 2.6.

Comme on l'a déjà signalé, on commence par prouver le théorème 2.4 lorsque l'opérateur L est à coefficients constants.

On est alors en mesure de démontrer le théorème 2.6 lorsque L est à coefficients constants.

Le théorème 2.6 étant acquis pour les opérateurs à coefficients constants, on peut démontrer le théorème 2.5. Pour y parvenir, on reprend une technique préalablement exploitée par Ancona dans [Anc82]. La difficulté, par rapport aux arguments de [Anc82] vient de ce que les matrices A_1 et A_2 des opérateurs L_1 et L_2 ne coïncident qu'au point Q. Décrivons par exemple comment on obtient une majoration de φ_2. On suppose L_1 à coefficients constants. On perturbe l'ouvert Ω (en l'agrandissant) dans les limites des contraintes décrites lors du théorème 2.6. On obtient alors un nouvel ouvert $\tilde{\Omega}$ et une nouvelle fonction $\tilde{\varphi}_1$ comparable à φ_1. On cherche g telle que $L_2(g(\tilde{\varphi}_1))(M) \geq 0$ dans Ω. Grâce au principe du maximum, on peut alors minorer dans Ω la fonction $g(\tilde{\varphi}_1)$ par un multiple de φ_2. Si de plus $g(x) \approx x$ au voisinage de 0, on obtient bien la majoration de φ_2 par un multiple de φ_1 lors d'une approche "non-tangentielle" du point Q. Une fonction g répondant au problème est la solution de l'équation $g''(x) = -\lambda x^{-\alpha} g'(x)$ (λ et α correctement choisis) telle que $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$.

Finalement, le théorème 2.5 permet de prouver le théorème 2.4 lorsque l'opérateur L ne possède plus de propriétés d'invariance par translations.

Enfin, une fois qu'on sait le théorème 2.4 valable en toute généralité, on peut conclure que le théorème 2.6 est aussi vérifié lorsque L est un opérateur quelconque de la classe $\Lambda(\mu)$.

2.5 La L-mesure calorique est doublante.

Une conséquence importante du théorème 2.3 concerne la L-mesure calorique. Rappelons comment on la définit. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et φ une fonction continue sur $\partial\Omega$, on sait résoudre dans l'ouvert Ω la problème de Dirichlet (au sens de Perron-Wiener-Brelot) avec la donnée frontière φ. Si H_φ désigne la solution, la linéarité et la positivité de $\varphi \mapsto H_\varphi$ nous permettent de trouver une famille de mesures positives ω^P telles que :

$$\forall P \in \Omega, \quad H_\varphi(P) = \int_{\partial\Omega} \varphi(\xi)\, d\omega^P(\xi) \ .$$

La mesure $d\omega^P$ est appelée la L-mesure calorique au point P dans l'ouvert Ω (pour plus de détail, on peut se reporter à la partie 4).

Au voisinage d'un point frontière "lipschitzien", il est facile de déduire du théorème 2.3 que la L-mesure calorique est doublante. Plus précisément, on a :

Théorème 2.7 ([2],[6]) *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $r_0 \in]0,1]$ et L un opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$. On suppose que $Q \in \partial\Omega$ est un point frontière "lipschitzien" de Ω adapté au cylindre $T(Q, 2r_0, K)$. Notons $P_{r_0} = Q + (0, 10Kr_0, 2r_0^2)$ et $\Delta(\xi, r) = \partial\Omega \cap T(\xi, r, K)$. On peut trouver une constante $C = C(d, K, \mu) > 0$ telle que si $\Delta(\xi, 2r) \subset \Delta(Q, r_0)$,*

$$\omega^{P_{r_0}}(\Delta(\xi, 2r)) \leq C\, \omega^{P_{r_0}}(\Delta(\xi, r)) \ .$$

Remarque. En fait, les énoncés 2.3 et 2.7 sont très proches l'un de l'autre. Fabes et al. ainsi que Nyström prennent plutôt le parti de commencer par prouver que la L-mesure calorique est doublante pour ensuite obtenir des énoncés comparables au théorèmes 2.3 ou 2.4. Pour notre part, nous avons suivi la démarche inverse. Rappelons aussi qu'en 1979, Jang-Mei Wu avait déjà établi cette propriété de doublement pour l'équation de la chaleur ([Wu79]). Sa preuve utilisait alors les propriétés d'invariance par translations de cet opérateur.

2.6 Frontière de Martin ; représentation des solutions positives.

Les résultats du parapraphe 2.3, et plus précisément le théorème 2.3 permettent maintenant d'étendre sans difficultés aux opérateurs de la classe $\Lambda(\mu)$ le théorème de Kemper sur la représentation des fonctions caloriques positives. Afin d'éviter d'introduire de nouvelles notations, nous nous contenterons de donner une version locale de ce théorème. Pour un énoncé plus global, on peut consulter la partie 5 de [1].

Théorème 2.8 ([1]) *Soient Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^2$, $r_0 \in]0,1]$ et L un opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$. On suppose que $Q \in \partial\Omega$ est un point frontière "lipschitzien" de Ω adapté au cylindre $T(Q, 2r_0, K)$. On note $P_{r_0} = Q + (0, 10Kr_0, 2r_0^2)$ et $\Delta(Q, r_0) = \partial\Omega \cap T(Q, r_0, K)$. Alors*

(i) *Pour tout point $\xi \in \Delta(Q, r_0)$, il existe une unique L-solution positive K_ξ dans Ω vérifiant :*

  (a) $K_\xi(M)$ converge vers 0 en tout point frontière de $\partial_p\Omega$ différent de ξ

  (b) $K_\xi(M)$ est dominée par un potentiel au voisinage de l'infini

  (c) $K_\xi(P_{r_0}) = 1$

  De plus, si G_P désigne la fonction de Green de pôle P dans Ω, on a :

$$K_\xi(M) = \lim_{P \to \xi} \frac{G_P(M)}{G_P(P_{r_0})} \ .$$

(ii) *Pour tout point M, la fonction $\xi \in \Delta(Q, r_0) \mapsto K_\xi(M)$ est continue*

(iii) *Pour toute L-solution positive u dans Ω convergeant vers 0 en tout point de $\partial_p\Omega \setminus \Delta(Q, r_0)$ et dominée au voisinage de l'infini par un potentiel, il existe une unique mesure de Radon positive ν portée par $\Delta(Q, r_0)$ et telle que :*

$$\forall M \in \Omega, \quad u(M) = \int_{\Delta(Q,r_0)} K_\xi(M)\, d\nu(\xi) \ .$$

Le théorème de Fatou abstrait sur l'existence de limites fines (voir par exemple [Sib68]) trouve alors dans ce contexte l'interprétation concrète suivante :

Corollaire 2.9 ([1]) *Reprenons les notations de l'énoncé précédent. Notons $\omega^{P_{r_0}}$ la L-mesure calorique au point P_{r_0} dans Ω. Si $\varepsilon > 0$ et $\xi \in \Delta(Q, r_0)$, désignons par $\Gamma(\xi)$ le "cône"*

$$\Gamma(\xi) = \{P \in \Omega \ ; \ \delta(P, \partial\Omega) \geq \varepsilon\delta(P, Q)\} \ .$$

Soit u une L-solution positive dans Ω. Alors, pour $d\omega^{P_{r_0}}$ presque tout point $\xi \in \Delta(Q, r_0)$, la limite

$$\lim_{P \to \xi\,,\, P \in \Gamma(\xi)} u(P)$$

existe et est finie. On dit encore que u admet une limite "non-tangentielle" finie en $d\omega^{P_{r_0}}$ presque tout point de $\Delta(Q, r_0)$.

3 Sur la dimension des mesures.

3.1 Dimension inférieure et dimension supérieure des mesures.

On cherche à mesurer le degré de singularité ou le degré de régularité des mesures. Ceux-ci peuvent être quantifiés en estimant la taille des ensembles négligeables ou la taille des ensembles qui portent la mesure. Essayons de préciser notre pensée. Fixons une mesure borélienne m sur $\mathbb{R}^d$ et notons $\mathcal{H}^\alpha$ la mesure de Hausdorff dans la dimension α. On définit alors la dimension inférieure et la dimension supérieure de la mesure m par

$$\dim_*(m) = \sup\{\alpha \geq 0 \ ; \ m \ll \mathcal{H}^\alpha\} \quad \text{et} \quad \dim^*(m) = \inf\{\alpha \geq 0 \ ; \ m \perp \mathcal{H}^\alpha\} \ .$$

En d'autres termes, $\dim_*(m)$ mesure la taille minimale des ensembles qui chargent la mesure m tandis que $\dim^*(m)$ mesure la taille minimale des ensembles qui portent la mesure et on montre aisément que

$$\dim_*(m) = \inf\{\dim(E) \ ; \ m(E) > 0\} \quad \text{et} \quad \dim^*(m) = \inf\{\dim(E) \ ; \ m(\mathbb{R}^d \setminus E) = 0\} \ .$$

Bien sûr, on a toujours $\dim_*(m) \leq \dim^*(m)$, mais en général, cette inégalité est stricte. Lorsque les deux quantités coïncident, on dit que la mesure est unidimensionnelle et on note alors plus simplement $\dim(m) = \dim_*(m) = \dim^*(m)$.

Il est connu depuis quelques années que les quantités $\dim_*(m)$ et $\dim^*(m)$ sont reliées au comportement asymptotique des fonctions

$$\Phi_r(x) = \frac{\log m(B(x,r))}{\log r} \ .$$

Plus précisément, Fan a établi dans [Fan94] que

$$\dim_*(m) = \inf\mathrm{ess}\left(\liminf_{r\to 0} \Phi_r(x)\right) \quad \text{et} \quad \dim^*(m) = \sup\mathrm{ess}\left(\liminf_{r\to 0} \Phi_r(x)\right) \ , \tag{14}$$

le supremum essentiel et l'infimum essentiel étant relatifs à la mesure m.

La dimension de Hausdorff pouvant aussi se calculer en ne faisant intervenir que des cubes ℓ-adiques, on peut établir une version discrète de (14). Fixons un entier $\ell \geq 2$, notons $\mathcal{F}_n$ la famille des cubes ℓ-adiques de la $n^{\text{ème}}$ génération et supposons que la mesure m soit une mesure de probabilité sur $X = [0,1[^d$. Si $I_n(x)$ désigne l'unique élément de $\mathcal{F}_n$ qui contient x et si $\log_\ell$ désigne le logarithme en base ℓ, on peut introduire la suite de variables aléatoires X_n définies par

$$X_n(x) = -\log_\ell\left(\frac{m(I_n(x))}{m(I_{n-1}(x))}\right) \ . \tag{15}$$

Si $|I_n(x)| = \ell^{-n}$ désigne la "longueur" du cube $I_n(x)$, on a alors

$$\frac{S_n(x)}{n} = \frac{X_1(x) + \ldots + X_n(x)}{n} = \frac{\log m(I_n(x))}{\log |I_n(x)|}$$

et les quantités $\dim_*(m)$ et $\dim^*(m)$ sont reliées au comportement asymptotique de la suite $\frac{S_n}{n}$. Plus précisément, on constate dans [4] que

$$\dim_*(m) = \inf\mathrm{ess}\left(\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}\right) \quad \text{et} \quad \dim^*(m) = \sup\mathrm{ess}\left(\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}\right) \ . \tag{16}$$

Il est alors naturel de se demander quelle est l'interprétation en termes de dimensions, des quantités

$$\inf\text{ess}\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}\right)\quad\text{et}\quad\sup\text{ess}\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}\right)\ .$$

A ma connaissance, à l'époque où j'ai écrit [4], cette interprétation n'avait pas été mise en valeur. Elle fait intervenir la dimension de packing. Si on introduit les mesures $\hat{\mathcal{P}}^\alpha(E)$ définies à l'aide des packing de E constitués d'éléments des ensembles $\mathcal{F}_n$ (voir [4] ou encore l'article originel de Tricot ([Tri82]) pour une définition complète) et si on note Dim la notion de dimension qui s'y rattache, on peut définir les quantités

$$\mathrm{Dim}_*(m)=\inf\{\mathrm{Dim}\,(E)\ ;\ m(E)>0\}\quad\text{et}\quad\mathrm{Dim}^*(m)=\inf\{\mathrm{Dim}\,(E)\ ;\ m(\mathbb{R}^d\setminus E)=0\}$$

et il est aisé d'établir que

$$\mathrm{Dim}_*(m)=\inf\text{ess}\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}\right)\quad\text{et}\quad\mathrm{Dim}^*(m)=\sup\text{ess}\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}\right)\ . \tag{17}$$

Signalons que, dans son récent ouvrage ([Fal97]), Falconer donne les versions non discrètes des relations (17). Elles font intervenir les bornes essentielles de la fonction $\limsup\Phi_r$.

3.2 La fonction τ, son interprétation probabiliste, ses liens avec l'entropie.

Les identités (16) et (17) ne sont évidemment guère utiles pour fournir des estimations de la dimension inférieure et de la dimension supérieure de la mesure m. Dans les travaux [3], [4] et [5], nous avons cherché à établir des majorations et des minorations des quantités $\dim_*(m)$, $\dim^*(m)$, $\mathrm{Dim}_*(m)$ et $\mathrm{Dim}^*(m)$. Nous avons aussi cherché à voir comment ces estimations pouvaient concrètement être exploitées. Enfin, nous avons décrit ou précisé certains cas d'égalité.

Supposons comme plus haut que la mesure m soit une mesure de probabilité sur $X=[0,1[^d$. Introduisons la fonction τ, bien connue des multifractalistes. Elle est définie par

$$\tau(t)=\limsup_{n\to+\infty}\tau_n(t)\quad\text{avec}\quad\tau_n(t)=\frac{1}{n\log\ell}\log\left(\sum_{I\in\mathcal{F}_n}m(I)^t\right)\ . \tag{18}$$

La fonction τ est finie sur $\mathbb{R}^+$. Elle est convexe et décroissante sur cet intervalle. Dans l'espace X muni de ses boréliens et de la probabilité m, on peut de plus écrire :

$$\tau_n(1-t)=\frac{1}{n}\log_\ell\mathbb{E}\left[\ell^{tS_n}\right]\quad\text{et}\quad\tau(1-t)=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log_\ell\mathbb{E}\left[\ell^{tS_n}\right]\ .$$

En dérivant, on obtient aussi :

$$-\tau_n'(1)=\mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right]=\frac{-1}{n}\sum_{I\in\mathcal{F}_n}m(I)\log_\ell m(I)\ .$$

Cette quantité n'est autre que l'entropie de la mesure m relativement à la partition $\mathcal{F}_n$. Nous la noterons $h_n(m)$. Pour une mesure générale, la suite $h_n(m)$ ne converge pas. Cependant, on peut toujours définir l'entropie inférieure et l'entropie supérieure de la mesure m par les formules

$$h_*(m) = \liminf_{n\to\infty} h_n(m) \quad \text{et} \quad h^*(m) = \limsup_{n\to\infty} h_n(m) \ . \tag{19}$$

Lorsque les quantités $h_*(m)$ et $h^*(m)$ coïncident, la valeur commune est notée plus simplement $h(m)$. Il s'agit alors de l'entropie de la mesure m.

Pour finir ce parapraphe, remarquons enfin que les propriétés de convexité des fonctions τ_n entrainent les inégalités :

$$-\tau'_+(1) \leq h_*(m) \leq h^*(m) \leq -\tau'_-(1) \ , \tag{20}$$

où τ'_- et τ'_+ sont les dérivées à gauche et à droite de la fonction τ.

3.3 Des estimations générales.

Théorème 3.1 ([4] et [5]). *Soit m une mesure de probabilité sur $[0,1[^d$. On a ;*

$$-\tau'_+(1) \leq \dim_*(m) \leq h_*(m) \leq h^*(m) \leq \mathrm{Dim}^*(m) \leq -\tau'_-(1) \ . \tag{21}$$

Remarques. 1. En particulier, grâce à (16) et (17), l'égalité $\dim_*(m) = \mathrm{Dim}^*(m)$ est équivalente à

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\log_\ell m(I_n(x))}{n} = h(m), \qquad dm\text{-presque partout} \ .$$

On obtient alors une conclusion "de type Shannon-McMillan" dans un contexte non dynamique.

2. Dans [Nga97], S.M. Ngai établit des inégalités similaires à $-\tau'_+(1) \leq \dim_*(m)$ et $\mathrm{Dim}^*(m) \leq -\tau'_-(1)$. Il s'intéresse ensuite surtout au cas où $\tau'(1)$ existe. Ici, notre propos consiste plutôt à étudier le cas où τ n'est pas dérivable eu point 1 (voir parties 3.4 et 3.6) puis à trouver des conditions suffisantes assurant que $\tau'(1)$ existe (voir partie 3.7).

Le fait d'avoir relié les quantités $\dim_*(m)$ et $\mathrm{Dim}^*(m)$ au comportement asymptotique de la suite S_n/n nous permet de donner une preuve très simple du théorème 3.1. Les inégalités $\dim_*(m) \leq h_*(m)$ et $h^*(m) \leq \mathrm{Dim}^*(m)$ sont des conséquences immédiates du lemme de Fatou (voir [5]). Quant aux inégalités $-\tau'_-(1) \leq \dim_*(m)$ et $\mathrm{Dim}^*(m) \leq -\tau'_+(1)$, on peut les voir comme des conséquences de l'inégalité de Cramer-Chernoff. Ce n'est pas la démarche suivie dans [4], mais on peut par exemple isoler la proposition élémentaire suivante.

Proposition 3.1 *Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que la fonction*

$$L(t) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log_\ell \mathbb{E}\left[\ell^{tS_n}\right]$$

est finie sur un voisinage I de l'origine. On a alors :

$$L'_-(0) \leq \inf\mathrm{ess}\left(\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}\right) \quad \textit{et} \quad \sup\mathrm{ess}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}\right) \leq L'_+(0) \ .$$

Preuve. Contentons nous d'ébaucher la preuve de la première inégalité. Soit $\alpha < L'_-(0)$. L'inégalité de Cramer-Chernoff nous assure que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log_\ell \left(\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \le \alpha \right) \right) \le - \sup_{t<0\,,\,t\in I} (t\alpha - L(t)) \ .$$

Le choix de α et la convexité de la fonction L montrent que le nombre

$$\beta = \sup_{t<0\,,\,t\in I} (t\alpha - L(t))$$

est strictement positif. Ainsi, par le lemme de Borel-Cantelli, on obtient

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{S_n}{n} \le \alpha \right\} \right) = 0 \ .$$

Finalement, pour presque tout $\omega \in \Omega$, $S_n(\omega) > n\alpha$ à partir d'un certain rang et la conclusion en découle. •

3.4 Comment exploiter le théorème 3.1.

Dans la pratique, il est difficile de calculer explicitement la fonction τ (et donc les nombres $\tau'_-(1)$ et $\tau'_+(1)$). Cependant, si on sait majorer au voisinage du point 1 la fonction τ par une fonction χ dérivable à gauche et à droite au point 1 et vérifiant $\chi(1) = 0$, on obtient :

$$\dim_*(m) \ge -\chi'_+(1) \quad \text{et} \quad \mathrm{Dim}^*(m) \le -\chi'_-(1) \ .$$

En particulier, cette remarque s'applique en prenant $\chi = \log_\ell(\beta)$ où

$$\beta(t) = \limsup_{n\to+\infty} \beta_n(t) \quad \text{et} \quad \beta_n(t) = \sup_{I\in\mathcal{F}_n} \left(\sum_{J\subset I,\ J\in\mathcal{F}_{n+1}} \left(\frac{m(J)}{m(I)} \right)^t \right) \ .$$

On a alors :

Corollaire 3.2 ([3], [4]) *En toute généralité, on a aussi*

$$\dim_*(m) \ge -\frac{\beta'_+(1)}{\log \ell} \quad \textit{et} \quad \mathrm{Dim}^*(m) \le -\frac{\beta'_-(1)}{\log \ell} \ .$$

La fonction β_n estime les contrastes qui existent entre la masse d'un cube I et la masse de ses fils. Dans de nombreuses situations, ceux-ci sont controlés. Ce sera par exemple le cas lors des corollaires 3.7 et 4.7. On peut alors obtenir des estimations de la dimension de la mesure.

Décrivons un exemple élémentaire où cette démarche s'applique. Supposons $d = 1$ et $\ell = 2$. Fixons $p \ge 1/2$ et imaginons que tout cube $I \in \cup_n \mathcal{F}_n$ possède un fils J tel que $m(J) \ge p\, m(I)$. Par ce qui précède, on peut aisément mesurer le degré de singularité de m et prouver que

$$\dim^*(m) \le \mathrm{Dim}^*(m) \le -(p \log_2(p) + (1-p) \log_2(1-p)) \ .$$

La situation extrémale est obtenue lorsque chaque cube possède un fils dont la masse relative vaut exactement p. La mesure m est alors un produit de Bernoulli. Elle est unidimensionnelle de dimension $-(p\ \log_2(p) + (1-p)\ \log_2(1-p))$. Cet exemple est connu depuis fort longtemps (voir par exemple [Bes35], [Egg49], [You82] ou [Fal90]).

Signalons pour terminer que Bourgain dans [Bou87] et Batakis dans [Bat96] utilisent les quantités $\beta_n(2)$ pour donner, dans certains contextes, des estimations de la dimension de la mesure harmonique.

3.5 Caractérisation des mesures vérifiant $\dim_*(m) = h_*(m)$.

Ce paragraphe reprend le travail [5], écrit en collaboration avec Batakis. Commençons par décrire une exemple élémentaire et bien connu (voir par exemple [BK90] ou [Bis95]) qui illustre le cas d'égalité $\dim_*(m) = h_*(m)$. Supposons $d = 1$ et fixons une suite $(p_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels tels que $0 < p_n < 1$, considérons une suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes telles que

$$\mathbb{P}(Y_n = 1) = p_n \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y_n = 0) = 1 - p_n$$

et notons m la loi de $\sum_{n\geq 1} 2^{-n} Y_n$. Les variables X_n, définies comme en (15), sont dans ce cas indépendantes et bornées dans L^2. La loi forte des grands nombres assure alors la convergence presque-sûre vers 0 de

$$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n} \tag{22}$$

et on conclut aisément que pour dm-presque tout $x \in [0, 1[$,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\log m(I_n(x))}{\log |I_n(x)|} = \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right] = h_*(m) \ .$$

En particulier, la mesure est unidimensionnelle de dimension

$$\dim(m) = h_*(m) = \liminf_{n\to\infty} \frac{-1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_k \log_2 p_k + (1-p_k) \log_2(1-p_k) \ .$$

De façon plus précise, on déduit en fait de (22) l'existence d'une sous-suite n_k telle que pour dm-presque tout $x \in [0, 1[$,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\log m(I_{n_k}(x))}{\log |I_{n_k}(x)|} = h_*(m) \ .$$

Cette dernière observation n'est pas surprenante et est typique des mesures m vérifiant $\dim_*(m) = h_*(m)$. En effet, nous avons démontré le théorème suivant.

Théorème 3.3 ([5]) *Soit m une mesure de probabilité sur $[0,1[^d$. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) $\dim_*(m) = h_*(m)$

(ii) $\dim_*(m) = \dim^*(m) = h_*(m)$

(iii) *Il existe une sous-suite $(n_k)_{k\geq 1}$ telle que pour dm-presque tout $x \in [0,1[^d$,*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\log m(I_{n_k}(x))}{\log |I_{n_k}(x)|} = \lim_{k\to+\infty} \frac{S_{n_k}(x)}{n_k} = \dim_*(m) \ .$$

Remarques. 1. En particulier, les mesures dont la dimension se calcule à l'aide d'une formule d'entropie sont unidimensionnelles. Cependant, l'égalité $\dim_*(m) = h_*(m)$ traduit une propriété d'homogénéité plus forte et correspond à une intervertion de quantificateurs ; la mesure m est unidimensionnelle si et seulement si pour dm-presque tout x, il existe une sous-suite n_k telle que $S_{n_k}(x)/n_k$ converge vers $\dim_*(m)$ tandis qu'elle vérifie $\dim_*(m) = h_*(m)$ si et seulement si il existe une sous-suite n_k telle que pour dm-presque tout x, $S_{n_k}(x)/n_k$ converge vers $\dim_*(m)$.

2. Les propriétés équivalentes du théorème 3.3 sont entre autres satisfaites lorsque $\tau'(1)$ existe. Cependant, l'exemple décrit en début de paragraphe prouve que cette hypothèse n'est pas nécessaire.

3. La conclusion (iii) peut se voir comme une version faible d'un résultat "de type Shannon-McMillan" obtenu dans un contexte où il n'y a pas de système dynamique sous-jacent.

4. On peut évidemment aussi établir qu'il y a équivalence entre

(i) $\mathrm{Dim}^*(m) = h^*(m)$

(ii) $\mathrm{Dim}_*(m) = \mathrm{Dim}^*(m) = h^*(m)$

(iii) Il existe une sous-suite $(n_k)_{k\geq 1}$ telle que pour dm-presque tout $x \in [0,1[^d$,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\log m(I_{n_k}(x))}{\log |I_{n_k}|} = \lim_{k\to+\infty} \frac{S_{n_k}(x)}{n_k} = \mathrm{Dim}^*(m) \ .$$

La conclusion du théorème 3.3 suggère qu'on puisse construire des mesures unidimensionnelles dont la dimension ne se calcule pas à l'aide d'une formule d'entropie. C'est aussi ce que nous proposons dans [5].

Proposition 3.2 ([5]) *On peut trouver deux nombres $0 < d_* < d^* < 1$ et construire une mesure m sur $[0,1[$ possèdant une entropie $h(m)$ et telle que pour dm-presque tout x, on ait :*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\log m(I_n(x))}{\log |I_n(x)|} = d_* < h(m) < d^* = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log m(I_n(x))}{\log |I_n(x)|} \ .$$

3.6 Une condition suffisante assurant $-\tau'_+(1) = \dim_*(m)$ et $-\tau'_-(1) = \mathrm{Dim}^*(m)$.

En général, les inégalités $-\tau'_+(1) \le \dim_*(m)$ et $-\tau'_-(1) \ge \mathrm{Dim}^*(m)$ sont strictes. Par exemple, Olsen propose dans [Ols00] un exemple de mesure discrète telle que $-\tau'_-(1) = 1$ et $-\tau'_+(1) = 0$. Nous allons décrire ici un exemple encore plus convaincant.

Proposition 3.3 *Supposons $d = 1$, $\ell = 2$ et fixons $h \in]0,1[$. On peut construire une mesure de probabilité m sur $[0,1[$ telle que*

$$\tau(t) = \sup(1-t, 0) \ \textit{si } t > 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\log m(I_n(x))}{\log |I_n(x)|} = h \ \textit{dm-presque-sûrement} .$$

Preuve. La construction de la mesure m se fait en deux étapes. Fixons pour commencer une mesure μ diffuse sur $[0,1[$ et telle que :

$$\dim_*(\mu) = \mathrm{Dim}^*(\mu) = h .$$

(on peut par exemple partir d'un produit de Bernoulli dont le paramètre p vérifie $-(p\ \log_2(p) + (1-p)\ \log_2(1-p)) = h$). Pour $n \ge 1$, notons $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des nombres dyadiques de $[0,1[$ qui s'écrivent $x = (2k+1)/2^n$. Ainsi, l'ensemble $\mathcal{D}_n$ possède 2^{n-1} points. Fixons c de telle sorte que $\sum_{n\ge1} cn^{-2} = 1$. Enfin, si $a \in \mathcal{D}_n$ notons μ_a l'image de μ par la contraction naturelle entre les intervalles $[0,1[$ et $[a, a+2^{-n}[$. On définit dans un premier temps la mesure m_1 par la formule

$$m_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{a\in\mathcal{D}_n} cn^{-2} 2^{-(n-1)} \mu_a .$$

La mesure m_1 est une combinaison linéaire des mesures μ_a qui vérifient toutes

$$\dim_*(\mu_a) = \mathrm{Dim}^*(\mu_a) = h .$$

On a donc aussi $\dim_*(m_1) = \mathrm{Dim}^*(m_1) = h$. Par ailleurs, si $a \in \mathcal{D}_n$ et $I = [a, a+2^{-n}[$, on constate que

$$m_1(I) \ge cn^{-2} 2^{-(n-1)} .$$

Comme $\mathcal{D}_n$ contient 2^{n-1} points, on en déduit que pour tout $t \in]0,1[$,

$$\sum_{I\in\mathcal{F}_n} m_1(I)^t \ge 2^{n-1} \left[cn^{-2} 2^{-(n-1)} \right]^t .$$

Avec des notations évidentes, on trouve alors $\tau_1(t) \ge 1-t$ si $t \in]0,1[$. Par ailleurs, l'inégalité $\tau_1(t) \le 1-t$, est toujours vérifiée en dimension 1 lorsque $t \in]0,1[$. Ainsi,

$$\forall t \in]0,1[, \quad \tau_1(t) = 1-t .$$

On va alors rechercher la mesure m sous la forme $dm = f\ dm_1$ où f est une fonction mesurable positive et minorée dans $\mathbb{R}_+^*$. Les mesures m et m_1 étant équivalentes, on a encore

$$\dim_*(m) = \mathrm{Dim}^*(m) = h .$$

Par ailleurs, comme f est minorée, on trouve (avec des notations qui se comprennent) $\tau \geq \tau_1$ et il en résulte que $\tau(t) = 1 - t$ si $t \in]0,1[$. Il suffit donc de construire f de telle sorte qu'on ait aussi $\tau(t) = 0$ si $t > 1$. Pour cela, on va chercher à augmenter sensiblement la masse des intervalles d'extrémité 0. Notons, pour $k \geq 1$, $J_k = [2^{-k}, 2^{-k+1}[$. Posons

$$\beta_k = \sup\left(\frac{1}{k(k+1)m_1(J_k)}, 1\right) \quad \text{et} \quad \alpha_k = \frac{\beta_k}{\sum_j \beta_j m_1(J_j)}$$

et introduisons

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mathbb{1}_{J_k} .$$

Par construction, la fonction f est minorée et la mesure $dm = f\, dm_1$ est une mesure de probabilité. Enfin, si on note c^{-1} la quantité $\sum_j \beta_j m_1(J_j)$, on trouve :

$$\forall n \geq 0, \quad m([0, 2^{-n}[) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k m_1(J_k) \geq \sum_{k=n+1}^{\infty} c \frac{1}{k(k+1)} = \frac{c}{n+1} .$$

Il en résulte que

$$\sum_{I \in \mathcal{F}_n} m(I)^t \geq \left[\frac{c}{n+1}\right]^t ,$$

puis que $\tau(t)$ est positif pour $t > 1$. Finalement, on a

$$\forall t \in]1, +\infty[, \quad \tau(t) = 0 .$$

C'est ce qu'il restait à établir. •

La proposition 3.3 prouve qu'on doit ajouter des hypothèses d'homogénéité sur la mesure m pour espérer obtenir les égalités

$$\tau'_+(1) = \dim_*(m) \quad \text{et} \quad \tau'_-(1) = \mathrm{Dim}^*(m) .$$

Une hypothèse possible pour y parvenir est la suivante. Appelons $\mathcal{M}$ l'ensemble des mots finis construits avec l'alphabet $\{0, \ldots, \ell^d - 1\}$. Notons ab la concaténation des mots a et b et imaginons qu'on ait codé les éléments de $\mathcal{F}_n$ sous la forme I_a, où a parcoure l'ensemble des mots de longueur n, de telle sorte que les inclusions $I_{ab} \subset I_a$ soient satisfaites. Supposons enfin qu'il existe une constante $C \geq 1$ telle que :

$$\forall a, b \in \mathcal{M}, \quad m(I_{ab}) \leq C\, m(I_a)\, m(I_b) . \tag{23}$$

On a alors :

Théorème 3.4 ([4]) *Sous l'hypothèse* (23),

$$\dim_*(m) = -\tau'_+(1) \quad \textit{et} \quad \mathrm{Dim}^*(m) = -\tau'_-(1) .$$

Remarque. L'hypothèse (23) est en particulier vérifiée lorsque m est une mesure quasi-Bernoulli (voir paragraphe 3.7). Cependant, il existe des mesures vérifiant (23) qui ne sont pas quasi-Bernoulli. En particulier tout barycentre de deux mesures quasi-Bernoulli continue de vérifier (23) mais n'est en général plus quasi-Bernoulli (pour plus de détails, voir l'exemple développé page 333 dans [4]).

3.7 Le cas des mesures quasi-Bernoulli.

Reprenons les notations du paragraphe 3.6. On dit que la mesure de probabilité m est une mesure quasi-Bernoulli si on peut trouver un réel $C \geq 1$ tel que

$$\forall a, b \in \mathcal{M}, \quad \frac{1}{C} m(I_a)\, m(I_b) \leq m(I_{ab}) \leq C\, m(I_a)\, m(I_b)\ . \tag{24}$$

Afin de rendre le propos plus simple à la lecture, faisons l'hypothèse supplémentaire $d = 1$ et introduisons les applications naturelles (liées au codage) entre $[0,1[$ et l'ensemble de Cantor $\mathcal{C} = \{0, \ldots, \ell - 1\}^{\mathbb{N}^*}$:

$$J \ : \ [0,1[\longrightarrow \mathcal{C} \quad \text{et} \quad S \ : \ \mathcal{C} \longrightarrow [0,1]\ .$$

Elles sont définies par :

$$J(x) = (\varepsilon_i)_{i \geq 1} \text{ si } \{x\} = \bigcap_n I_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n} \quad \text{et} \quad S((\varepsilon_i)_{i \geq 1}) = \bigcap_n \bar{I}_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}\ .$$

L'application J est une bijection entre $[0,1[$ et le complémentaire d'un ensemble dénombrable de $\mathcal{C}$. Comme une mesure quasi-Bernoulli ne charge pas les points (sauf si c'est une masse de Dirac), on peut alors transporter la mesure m par l'application J et travailler sur l'ensemble de Cantor. Nous appelerons encore m cette nouvelle mesure. Si on identifie les mots de $\mathcal{M}$ et les cylindres de $\mathcal{C}$, la propriété (24) devient

$$\forall a, b \in \mathcal{M}, \quad \frac{1}{C} m(a) m(b) \leq m(ab) \leq C\, m(a) m(b)\ .$$

Enfin, on notera $\mathcal{M}_n$ l'ensemble des cylindres de $\mathcal{C}$ correspondant aux mots de longueur n et $I_n(x)$ l'unique cylindre de $\mathcal{M}_n$ contenant x. L'intérêt de travailler sur $\mathcal{C}$ est que maintenant on est dans un contexte dynamique grâce au shift

$$T \ : \ (\varepsilon_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{C} \longmapsto (\varepsilon_n)_{n \geq 2} \in \mathcal{C}\ .$$

En particulier, si $a \in \mathcal{M}_n$, le cylindre ab se lit aussi $a \cap T^{-n}(b)$.

3.7.1 Quelques remarques générales.

Les propriétés décrites dans ce paragraphe reprennent en les complétant des remarques faites par Carleson dans [Car85].

Proposition 3.4 *Soit m une mesure quasi-Bernoulli sur $\mathcal{C}$. Notons B_0 la tribu des boréliens, $B_n = T^{-n}(B_0)$ et $B_\infty = \bigcap_n B_n$.*

(i) *Pout tout $E \in B_\infty$, $\quad m(E) = 0$ ou $m(E) = 1$. (loi du 0-1)*

(ii) *Si de plus m est T-invariante, elle est fortement mélangeante. C'est à dire*

$$\forall A, B \in B_0, \quad \lim_{n \to \infty} m\left(A \cap T^{-n}(B)\right) = m(A)\, m(B)\ .$$

En particulier, m est ergodique.

Preuve. Fixons un borélien $E \in B_\infty$ de mesure > 0. Pour tout entier n, on peut trouver un borélien F tel que $E = T^{-n}(F)$. On peut aussi trouver un cylindre $a_0 \in \mathcal{M}_n$ tel que

$$\frac{m(a_0 \cap E)}{m(a_0)} \geq \frac{1}{2} m(E) .$$

Comme m est une mesure quasi-Bernoulli, on a de plus

$$\forall a \in \mathcal{M}_n,\ \forall b \in \mathcal{M}, \quad \frac{m(a \cap T^{-n}(b))}{m(a)} \geq \frac{1}{C^2} \frac{m(a_0 \cap T^{-n}(b))}{m(a_0)} .$$

Si cette inégalité est vraie pour tous les cylindres b, elle est en fait vraie pour tous les ouverts, puis par régularité pour tous les boréliens. En remplaçant b par F, on trouve donc

$$\forall a \in \mathcal{M}_n, \quad \frac{m(a \cap E)}{m(a)} \geq \frac{1}{C^2} \frac{m(a_0 \cap E)}{m(a_0)} \geq \frac{1}{2C^2} m(E) .$$

Par un raisonnement similaire au précédent, l'inégalité $m(a \cap E) \geq \tilde{c}\, m(E)\, m(a)$, vraie pour tout cylindre a est aussi vraie pour tout borélien. En particulier, $m((\mathcal{C} - E) \cap E) \geq \tilde{c}\, m(E)\, m(\mathcal{C} - E)$. On obtient donc $m(\mathcal{C} - E) = 0$. C'est ce qu'on voulait établir.

La preuve de (ii) est alors classique. C'est une conséquence immédiate de ce que la martingale renversée $Z_n = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A | B_n)$ converge presque-sûrement et dans L^2 vers $Z_\infty = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A | B_\infty) = m(A)$. •

Si deux mesures m_1 et m_2, telles qu'on puisse trouver une constante $c > 0$ vérifiant $\frac{1}{c} m_1 \leq m_2 \leq c\, m_1$, sont qualifiées de fortement équivalentes, on peut dégager le corollaire suivant :

Corollaire 3.5 *Soit m une mesure quasi-Bernoulli sur $\mathcal{C}$. Il existe une unique mesure de probabilité, quasi-Bernoulli, T-invariante et fortement équivalente à m. Elle s'obtient comme limite faible de la suite m_n définie par*

$$m_n(E) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} m\left(T^{-k}(E)\right) .$$

Preuve. Toute mesure fortement équivalente à une mesure quasi-Bernoulli est encore quasi-Bernoulli. De plus, deux mesures de probabilité ergodiques et équivalentes sont égales. D'où, l'unicité. Par ailleurs, on vérifie aisément que toute valeur d'adhérence de la suite m_n est fortement équivalente à m, T-invariante et quasi-Bernoulli. D'où, l'existence. Enfin, comme la suite m_n ne possède qu'une seule valeur d'adhérence, elle est convergente. •

3.7.2 La fonction τ est dérivable au point 1.

Le corollaire 3.5, le théorème de Shannon-McMillan et le théorème 3.4 nous permettent aisément de démontrer le :

Théorème 3.6 ([4]) *Si m est une mesure quasi-Bernoulli sur $\mathcal{C}$, les quantités $\tau'(1)$ et $h(m)$ existent. On a alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\log_\ell m(I_n(x))}{n} = -\tau'(1) = h(m) \quad dm\text{-}presque\text{-}sûrement .$$

Remarque. Dans ce nouveau contexte, la fonction τ est définie avec une formule similaire à (18) (ici, on somme sur $\mathcal{M}_n$). De plus, la suite $\tau_n(t)$ converge pour tout réel t. Si on munit le Cantor $\mathcal{C}$ de l'ultra métrique donnant le diamètre ℓ^{-n} aux cylindres de $\mathcal{M}_n$, on peut à nouveau introduire une notion de dimension de Hausdorff et de dimension des mesures. La quantité $\frac{-\log_\ell m(I_n(x))}{n}$ se lit encore comme le rapport entre le logarithme de la masse de $I_n(x)$ et le logarithme de son diamètre. Ainsi, la mesure m est unidimensionnelle de dimension $\dim(m) = -\tau'(1) = h(m)$.

Si on introduit les ensembles

$$E_\alpha = \left\{ x \in \mathcal{C} \; ; \; \lim_{n\to\infty} \frac{-\log_\ell m(I_n(x))}{n} = \alpha \right\} \; , \tag{25}$$

et si on utilise le théorème de Billingsley (cf [Fal90]), le théorème 3.6 nous apprend donc que

$$\dim(E_{-\tau'(1)}) = -\tau'(1) \; . \tag{26}$$

C'est un premier pas vers l'analyse multifractale de la mesure m.

Notons enfin que le théorème 3.6 et le corollaire 3.2 nous permettent de déduire le :

Corollaire 3.7 ([6]) *Soit m une mesure quasi-Bernoulli sur $\mathcal{C}$. Notons σ la mesure de probabilité homogéne sur $\mathcal{C}$ (caractérisée par le fait que tout cylindre de $\mathcal{M}_n$ porte la masse ℓ^{-n}). On a alors :*

$$\dim(m) = 1 \iff \tau'(1) = -1 \iff m \textit{ est fortement équivalente à } \sigma \; .$$

3.7.3 Le théorème de Brown Michon et Peyrière.

Brown, Michon et Peyrière ont prouvé dans [BMP92] que le formalisme multifractal fonctionnait pour les mesures quasi-Bernoulli. Plus précisément, ils ont établi le théorème suivant.

Théorème 3.8 ([BMP92]) *Soit m une mesure quasi-Bernoulli sur $\mathcal{C}$. Si τ est dérivable en u et si $\alpha = -\tau'(u)$, on a :*

$$dim(E_\alpha) = \tau^*(\alpha)$$

où $\tau^*(\alpha) = \inf_t(\alpha t + \tau(t))$ est la transformée de Legendre de la fonction τ.

La preuve repose sur la construction, due à Michon ([Mic83])), d'une mesure annexe m_u telle que pour tout cylindre a, $m_u(a) \approx m(a)^u |a|^{\tau(u)}$ (on note $|a| = \ell^{-n}$ si $a \in \mathcal{M}_n$).

Le défaut du théorème 3.8 est qu'il ne s'applique qu'aux points où $\tau'(u)$ existe. Nous sommes maintenant en mesure de prouver que la fonction τ est partout dérivable.

3.7.4 Comment améliorer le théorème de Brown Michon et Peyrière.

Théorème 3.9 ([4]) *Soit m une mesure quasi-Bernoulli sur $\mathcal{C}$. La fonction τ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $\alpha \in]-\tau'(+\infty), -\tau'(-\infty)[$,*

$$\dim(E_\alpha) = \tau^*(\alpha) \; .$$

Ebauche de preuve. En fait, nous pouvons donner une preuve de ce théorème qui n'utilise pas le résultat de Brown Michon et Peyrière et qui simplifie sensiblement leur argument. Ce n'est pas la démarche utilisée dans [4] mais elle nous semble intéressante en soi.

On commence par construire la mesure m_u. La démarche de Michon peut du reste être simplifiée. Pour fixer les idées, supposons par exemple $u > 0$. On constate tout d'abord que $\ell^{(n+p)\tau_{n+p}(u)} \approx \ell^{n\tau_n(u)}\,\ell^{p\tau_p(u)}$. Appelons μ_n la mesure qui porte le cylindre $a \in \mathcal{M}_n$ à la masse $m(a)^u|a|^{\tau_n(u)}$ et qui est homogène sur les cylindres de $\mathcal{M}_n$. C'est une mesure de probabilité et il est facile de voir (en utilisant que m est quasi-Bernoulli) que toute valeur d'adhérence m_u de la suite μ_n satisfait un encadrement du type

$$\forall a \in \mathcal{M}, \quad \frac{1}{c}\, m(a)^u|a|^{\tau(u)} \leq m_u(a) \leq c\, m(a)^u|a|^{\tau(u)}\ . \tag{27}$$

Un calcul élémentaire nous assure alors que la fonction τ associée à la mesure m_u (que nous noterons τ_u) vérifie :

$$\tau_u(t) = \tau(ut) - t\tau(u)\ .$$

De plus, la mesure m_u est encore quasi-Bernoulli. La dérivabilité de τ_u au point 1 entraîne alors la dérivabilité de τ au point u et la relation

$$-\tau_u'(1) = -u\tau'(u) + \tau(u) = \tau^*(-\tau'(u))\ .$$

Posons $\alpha = -\tau'(u)$. L'encadrement (27) nous permet de dire que

$$E_\alpha = \left\{ x \in \mathcal{C}\ ;\ \lim_{n\to\infty} \frac{-\log_\ell m_u(I_n(x))}{n} = -\tau_u'(1) \right\}\ .$$

La relation (26), écrite pour m_u, nous donne finalement

$$\dim(E_\alpha) = -\tau_u'(1) = \tau^*(\alpha)\ .$$

C'est ce qu'on voulait démontrer. •

4 Estimations de la mesure calorique.

Pour simplifier la situation, nous nous contenterons dans cette section d'évoquer des résultats concernant la mesure calorique, c'est à dire la mesure harmonique associée à l'opérateur de la chaleur $\mathcal{C} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\Delta_x$. Tous les résultats présentés, exceptés ceux du paragraphe 4.3 se généralisent au cas où l'opérateur regardé appartient à la classe $\Lambda(\mu)$ introduite lors de la partie 2.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{d+1}$ et $M_0 = (x_0, t_0)$ une point de Ω. La mesure calorique au point M_0 dans l'ouvert Ω est portée par la frontière de Ω et peut être définie par

$$\omega^{M_0}(E) = \mathbb{P}_{x_0}\,[\ (B_T, t_0 - T) \in E\ ]\,,$$

où B_s est un mouvement Brownien d-dimensionnel et T est le temps de sortie de Ω du processus $(B_s, t_0 - s)$. D'un point de vue potentialiste, si h est une fonction mesurable bornée sur $\partial\Omega$, la fonction

$$H(x,t) = \int_{\partial\Omega} h(\xi,\tau)\, d\omega^{(x,t)}(\xi,\tau) = \mathbb{E}_x\,[\ h(B_T, t-T)\ ]$$

est la solution au problème de Dirichlet (au sens de Perron-Wiener-Brelot) dans l'ouvert Ω, pour l'équation de la chaleur et pour la donnée frontière h. Remarquons tout de suite que la mesure ω^{M_0} est portée par l'ensemble des points de la frontière de Ω directement joignables à M_0 par une courbe tracée dans Ω et strictement croissante par rapport à la coordonnée temporelle. C'est une conséquence immédiate de la définition probabiliste de la mesure. On peut aussi dire que ce phénomène est une conséquence du principe du maximum.

Dans diverses situations, on cherche à décrire le degré de régularité ou de singularité de la mesure ω^{M_0}. On se demande si, sur son support, elle est équivalente à la mesure "naturelle" sur $\partial\Omega$. Dans le cas contraire, on essaye de mesurer la taille des ensembles négligeables pour ω^{M_0} et la taille des ensembles qui portent la mesure ω^{M_0}. Par taille d'un ensemble, on peut comprendre dimension de Hausdorff. Cependant, l'opérateur de la chaleur possède des homogénéités qui font qu'il sera parfois plus naturel de mesurer la taille à l'aide d'une autre notion de dimension. On a déjà remarqué que l'opérateur $\mathcal{C}$ est invariant par les affinités $(x,t) \mapsto (\lambda x, \lambda^2 t)$. Notons alors δ la distance anisotrope definie sur $\mathbb{R}^{d+1}$ par

$$\delta((x,t),(y,s)) = \sup(\|x-y\|, |t-s|^{1/2})\ .$$

Pour cette distance, les boules se déduisent les unes des autres par les affinités décrites plus haut. Comme dans tout espace métrique, on peut dans cette situation définir des mesures de Hausdorff en posant pour $\alpha > 0$:

$$\Lambda_\alpha(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\inf \left(\sum_i r_i^\alpha,\ E \subset \bigcup_i D(a_i, r_i) \text{ et } r_i \leq \varepsilon \right) \right)\ ,$$

où les $D(a_i, r_i)$ sont des boules pour la distance δ. Si $\alpha = \inf\{\beta\ ;\ \Lambda_\beta(E) = 0\}$, on dit que E est de dimension parabolique α et on note $\alpha = \mathrm{P.dim}\,(E)$. Cette notion de dimension tient compte du rôle particulier joué par la coordonnée temporelle. Par exemple, un hyperplan "horizontal" de $\mathbb{R}^{d+1}$ (tel que $\{t = 0\}$) est de dimension parabolique d tandis qu'un hyperplan "non-horizontal" est de dimension parabolique $d+1$. Quant à l'espace $\mathbb{R}^{d+1}$ tout entier, sa dimension parabolique vaut $d+2$. Taylor et Watson ont prouvé dans [TW85] l'importance de cette notion de dimension vis à vis de l'équation de la chaleur. En particulier, ils ont prouvé que tout ensemble E vérifiant $\mathrm{P.dim}\,(E) < d$ est polaire pour l'équation de la chaleur (c'est à dire n'est presque-sûrement jamais visité par le processus $(B_t, t_0 - t)$) tandis qu'au contraire tout ensemble tel que $\mathrm{P.dim}\,(E) > d$ est non polaire. En reprenant des notations similaires à celles de la partie 3, il en résulte que, pour un ouvert Ω quelconque,

$$\mathrm{P.dim}^*(\omega^{M_0}) \geq \mathrm{P.dim}_*(\omega^{M_0}) \geq d \ .$$

Cependant, cette estimation est en général grossière.

Pour nous familiariser avec la dimension parabolique, regardons deux exemples simples.

Si $\Omega = \{t > 0\}$, la mesure calorique ω^{M_0} possède une densité par rapport à la mesure de Lebesgue d-dimensionnelle (donnée par le noyau de la chaleur). On a :

$$\mathrm{P.dim}^*(\omega^{M_0}) = \mathrm{P.dim}_*(\omega^{M_0}) = \dim^*(\omega^{M_0}) = \dim_*(\omega^{M_0}) = d \ .$$

Par ailleurs, il y a coïncidence entre les ensembles polaires inclus dans $\partial\Omega$ et les ensembles négligeables pour la mesure calorique (partant d'un point de Ω, si le processus $(B_s, -s)$ rencontre $E \subset \partial\Omega$, ce sera toujours à l'instant où il sortira de Ω).

Considérons maintenant l'ouvert $\Omega = \{x_d > 0\}$. Là encore, la mesure calorique a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue et on a :

$$\mathrm{P.dim}^*(\omega^{M_0}) = \mathrm{P.dim}_*(\omega^{M_0}) = d+1 \quad \text{et} \quad \dim^*(\omega^{M_0}) = \dim_*(\omega^{M_0}) = d \ .$$

Dans cette situation, on peut trouver des ensembles négligeables pour la mesure calorique qui sont non-polaires.

On peut donc voir la dimension parabolique comme une notion plus fine de dimension. Elle nous donnera parfois des informations plus précises que la dimension de Hausdorff sur la géométrie de la mesure calorique. Ceci sera particulièrement visible lors de la section 4.4 (voir théorème 4.15).

4.1 Mesure calorique dans les domaines "lipschitziens" : les résultats de R. Kaufman et J.M. Wu.

Donnons nous, comme lors de la partie 2, un ouvert Ω et un point frontière "lipschitzien" Q adapté au cylindre $T(Q, 2r_0, K)$. Notons $\Delta = \partial\Omega \cap T(Q, r_0, K)$, $M_0 = Q + (0, 10Kr_0, 2r_0^2)$ et $M_0^* = Q + (0, 10Kr_0, -2r_0^2)$. Les points M_0 et M_0^* sont placés de telle sorte que la mesure calorique ω^{M_0} et la mesure co-calorique ${}^*\omega^{M_0^*}$ (correspondant à l'opérateur adjoint $\mathcal{C}^*$) sont diffuses sur Δ. Par ailleurs, il est facile de constater que Δ est de dimension parabolique $d+1$ et que $0 < \Lambda_{d+1}(\Delta) < +\infty$ (le graphe de la fonction f se comporte vis à vis de la dimension parabolique comme l'hyperplan $\{x_d = 0\}$). Notons alors σ la restriction à Δ de la mesure Λ_{d+1}. Elle constitue la mesure naturelle de surface sur Δ. Si on n'est pas familier avec les mesures Λ_α, on peut aussi décrire d'une autre façon la mesure σ ; à une constante multiplicative près, elle peut se lire comme l'image de la mesure de Lebesgue par l'application $(x', t) \mapsto (x', f(x', t), t)$, où f est la fonction dont le graphe décrit la frontière de Ω au voisinage du point Q.

Il est alors naturel de se poser les questions suivantes :

(i) Les mesures ω^{M_0}, ${}^*\omega^{M_0^*}$ et σ sont-elles équivalentes sur Δ ?

(ii) Si non, quelle hypothèse de régularité doit-on rajouter sur f pour qu'elles le deviennent ?

Robert Kaufman et Jang-Mei Wu ont répondu à la première question et ont obtenu les deux résultats suivants.

Théorème 4.1 ([Wu79]) *Soit E un Borélien de Δ. On suppose que $\sigma(E) = 0$. On peut alors trouver F et F^* tels que*

$$E = F \cup F^*, \quad \omega^{M_0}(F) = 0 \quad et \quad {}^*\omega^{M_0^*}(F^*) = 0 \ .$$

Théorème 4.2 ([KW80] et [KW88]) *Ici, $d = 1$. On peut trouver une fonction f "lipschitzienne" (c'est à dire ici de classe $C^{1/2}$ par rapport à la variable t) telle que les restrictions à Δ des mesures σ, ω^{M_0} et ${}^*\omega^{M_0^*}$ soient deux à deux étrangères. On peut même construire la fonction f de telle sorte que les mesures ω^{M_0} et ${}^*\omega^{M_0^*}$ soient portées par des ensembles de dimension parabolique strictement inférieure à 2.*

Remarques. 1. La mesure σ joue le même rôle sur Δ que la mesure de surface sur le bord d'un ouvert lipschitzien traditionnel de $\mathbb{R}^d$. Dans [Dah77], Dahlberg a démontré que dans les ouverts lipschitziens de $\mathbb{R}^d$, la mesure harmonique est équivalente à la mesure de surface. Ainsi, l'analogue de ce théorème est faux dans le contexte des opérateurs paraboliques.

2. Les conclusions du théorème 4.2 nous ont incité à réfléchir à la question (ii) posée plus haut. Dans le paragraphe 4.2, nous décrivons une condition suffisante, portant sur le module de continuité de f, qui assure que les mesures σ, ω^{M_0} et ${}^*\omega^{M_0^*}$ sont équivalentes.

3. Nous avons aussi cherché à analyser de façon plus fine le cas de la régularité critique, c'est à dire le cas des ouverts délimités dans $\mathbb{R}^2$ par le graphe d'une fonction de classe $C^{1/2}$. L'exemple décrit par Kaufman et Wu est-il exceptionnel où au contraire, est-ce la situation courante ? dans le paragraphe 4.3, nous montrons que lorsque f est une fonction "à la Weierstrass" (voir (34)), on a en fait une dichotomie ; soit la mesure calorique est fortement équivalente à la mesure σ, soit elle est portée par un ensemble de dimension parabolique strictement inférieure à 2. De plus, le premier cas est exceptionnel.

4.2 Lorsque f est un peu plus régulière, ω^{M_0} et σ sont équivalentes.

Afin de mieux comprendre les théorèmes 4.3 et 4.4 que nous allons développer dans ce paragraphe, revenons tout d'abord sur le théorème 4.1 et sur l'argument de Jang-Mei Wu. Le principe de Harnack à la frontière nous en donne un éclairage nouveau et nous permet de simplifier cet argument.

Si $\xi \in \Delta$ et si r est petit, notons $\Delta(\xi, r) = \partial\Omega \cap T(\xi, r, K)$. Grâce au principe de Harnack fort à la frontière, on peut trouver une constante $C = C(d, K) > 0$ telle que si $\Delta(\xi, r) \subset \Delta$,

$$\frac{1}{C}\,\omega^{M_0}(\Delta(\xi, r)) \le r^d G_{\xi_r}(M_0) \le C\,\omega^{M_0}(\Delta(\xi, r)) \ , \tag{28}$$

où $\xi_r = \xi + (0, r, 0)$ et où $G_P(\cdot)$ désigne la fonction de Green dans Ω de pôle P.

Si on note, comme lors de la première partie, φ^* la mesure co-calorique de $\partial T(Q, 2r_0, K)$ dans $\Omega \cap T(Q, 2r_0, K)$, et si on utilise le principe de Harnack faible au bord, l'inégalité (28) devient :

$$\frac{1}{C}\,\frac{\omega^{M_0}(\Delta(\xi, r))}{\sigma(\Delta(\xi, r))} \leq \frac{\varphi^*(\xi_r)}{r} \leq C\,\frac{\omega^{M_0}(\Delta(\xi, r))}{\sigma(\Delta(\xi, r))}\ . \tag{29}$$

On voit bien apparaître la dualité entre l'opérateur $\mathcal{C}$ et l'opérateur $\mathcal{C}^*$. La quantité $\varphi^*(\xi_r)/r$ est de l'ordre de grandeur de $\frac{\partial \varphi^*}{\partial x_d}(\xi_r)$ et, grâce au principe du maximum, la fonction $\frac{\partial \varphi^*}{\partial x_d}$ est co-calorique positive. Elle possède donc des limites radiales finies en ${}^*\omega^{M_0^*}$-presque tout point de Δ. La preuve du théorème 4.1 se termine alors sans difficultés. •

Remarque. En utilisant le théorème 2.5 pour se ramener à un opérateur ne dépendant pas de x_d, on peut étendre le théorème de Wu à tout opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$ (voir aussi le lemme 7.5, page 643 de [1]).

En observant (29), on imagine facilement qu'on aura fait un grand pas dans la preuve de l'équivalence entre ω^{M_0} et σ si on peut remplacer φ^* par φ, où φ est la mesure calorique de $\partial T(Q, 2r_0, K)$ dans $\Omega \cap T(Q, 2r_0, K)$. Bien sûr, à cause du théorème 4.2, remplacer φ^* par φ nécessite plus de régularité sur la fonction f qui borde l'ouvert Ω.

Si l'ouvert Ω est cylindrique en temps au voisinage du point Q, c'est à dire si la fonction f ne dépend pas de t, les fonctions φ et φ^* sont effectivement du même ordre de grandeur. Plus précisément, notons U la projection de $\Omega \cap T(Q, 2r_0, K)$ sur $\mathbb{R}^d$ parallèlement à l'axe des temps, et fixons une fonction $h(x)$ harmonique positive sur U (i.e. telle que $\Delta h = 0$) et nulle sur la partie de ∂U qui correspond au graphe de f. Grâce au principe de Harnack faible au bord, les fonctions $\varphi(x, t)$ et $\varphi^*(x, t)$ sont en fait toutes deux comparables à $\psi(x, t) = h(x)$ (qui est à la fois calorique et co-calorique).

Le théorème 2.6 nous permet ensuite de relaxer cette hypothèse et d'obtenir dans un premier temps le résultat suivant :

Théorème 4.3 ([1]) *Reprenons les notations du paragraphe précédent et supposons de plus qu'on puisse trouver $\varepsilon \in]0, 1]$ tel que*

$$\forall (x', t), (y', s), \quad |f(x', t) - f(y', s)| \leq K\ \sup(\|x' - y'\|, |t - s|^{(1+\varepsilon)/2})\ . \tag{30}$$

Alors, il existe une constante $C = C(d, K, \varepsilon) > 0$ telle que :

(i) *Pout tout point $M \in \Omega \cap T(Q, r_0, K)$,* $\quad \frac{1}{C}\,\varphi^*(M) \leq \varphi(M) \leq C\,\varphi^*(M)$

(ii) *Pour tout Borélien $E \subset \Delta$,* $\quad \frac{1}{C}\,\omega^{M_0}(E) \leq {}^*\omega^{M_0^*}(E) \leq C\,\omega^{M_0}(E)$.

En reprenant alors les idées de Dahlberg ([Dah77]), l'inégalité (29) (dans laquelle φ^* a maintenant été remplacée par φ) nous permet enfin d'établir le :

Théorème 4.4 ([1]) *Supposons à nouveau que la fonction f vérifie* (30). *On peut trouver deux constantes $C = C(d, K, \varepsilon)$ et $\alpha = \alpha(d, K, \varepsilon)$ strictement positives telles que pour tout $\Delta(\xi, r) \subset \Delta$ et pour tout Borélien $E \subset \Delta(\xi, r)$, on ait*

$$\frac{1}{C}\left(\frac{\sigma(E)}{\sigma(\Delta(\xi,r))}\right)^{\alpha} \leq \frac{\omega^{M_0}(E)}{\omega^{M_0}(\Delta(\xi,r))} \leq C\left(\frac{\sigma(E)}{\sigma(\Delta(\xi,r))}\right)^{1/2} .$$

Remarques. 1. Seule l'inégalité de droite est à justifier. Elle prouve en fait que $\omega^{M_0} \in A^{\infty}(\sigma)$. L'inégalité de gauche s'en déduit alors grâce à la théorie des poids de Mückenhoupt (voir par exemple [Tor86]). L'inégalité de droite est une façon de quantifier l'absolue continuité de la mesure calorique par rapport à la mesure de surface et s'obtient en contrôlant dans L^2 la densité $\frac{d\omega^{M_0}}{d\sigma}$.

2. Si on suppose de façon plus forte que la fonction f est de classe $C^{1,\varepsilon}$ par rapport à x' et de classe $C^{(1+\varepsilon)/2}$ par rapport à t, le théorème 2.6 nous permet de montrer que $\varphi^*(\xi_r) \approx r$. Ainsi, l'encadrement (29) nous assure que, dans cette situation, les mesures ω^{M_0} et σ sont fortement équivalentes.

3. Par souci de simplicité, nous avons présenté les théorèmes 4.3 et 4.4 dans le cadre où l'opérateur L est l'opérateur de la chaleur. Bien évidemment, ils se généralisent au cas où L est un opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$.

Essayons de situer les théorèmes 4.3 et 4.4 par rapport aux travaux de John Lewis et de ses co-auteurs sur ce sujet. Tout d'abord, avec Judy Silver, il s'intéresse au cas $d = 1$. En 88, ils prouvent dans [LS88] que si Ω est bordé par le graphe d'une fonction f dont le module de continuité ψ vérifie $\int_0^1 \frac{\psi^2(t)}{t^2} dt < +\infty$, la mesure calorique est équivalente à la mesure σ. Ils prouvent aussi que cette condition sur le module de continuité est optimale. Evidemment, si f est de classe $C^{(1+\varepsilon)/2}$, la condition sur le module de continuité est vérifiée. Cependant, leur travail ne traite que le cas $d = 1$ et utilise beaucoup les homogénéités de l'opérateur de la chaleur.

Lewis colabore ensuite avec Margaret Murray. Leurs travaux ([LM91] et [LM92]) prennent une forme finale dans un mémoire publié par l'A.M.S. ([LM95]). En utilisant la méthode de potentiel double couche et des techniques d'intégrales singulières, ils montrent que les mesures ω^{M_0} et σ restent équivalentes lorsque la fonction f est lipschitzienne par rapport à x' et vérifie

$$f(x', t) = \int_{\mathbb{R}} |s - t|^{-1/2} b(x', s) ds$$

avec $b(x', \cdot)$ uniformément bornée dans BMO (on dit encore que f possède une demi dérivée en t dans BMO). Ce résultat semble maintenant optimal.

Enfin, dans[HL96], Steve Hofmann et John Lewis affinent les résultats de [LM95]. En particulier, ils prouvent la résolubilité du problème de Dirichlet et du problème de Neumann lorsque la condition frontière est dans L^2.

Pour compléter notre propos et terminer ce paragraphe, signalons aussi le résultat suivant, non publié, et qui précise le travail de Lewis et Silver.

Proposition 4.1 *On suppose que $d = 1$ et que le module de continuité ψ de la fonction f vérifie :*

$$\int_0^1 \frac{\psi(t)}{t^{3/2}} dt < \infty \ . \tag{31}$$

Alors, il existe une constante $C > 0$, telle que pour tout Borélien $E \subset \Delta$,

$$\frac{1}{C}\, \sigma(E) \leq \omega^{M_0}(E) \leq C\, \sigma(E) \ .$$

Remarque. Dans [LS88], Lewis et Sylver obtiennent que la densité de ω^{M_0} par rapport à σ est dans tous les L^p, $p < +\infty$ et contrôlent à toutes les échelles sa norme p. Ici, sous une hypothèse légèrement plus forte, on prouve que cette densité est bornée inférieurement et supérieurement.

Ebauche de preuve. On peut supposer la fonction ψ concave et croissante. On peut de plus supposer que $\psi(h) \leq |h|^{1/2}$. La condition (31) est alors équivalente à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n/2} \psi(2^{-n}) < +\infty \ , \tag{32}$$

où à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n/2} \psi'(2^{-n}) < +\infty \ . \tag{33}$$

Grâce à l'encadrement (29), il s'agit de montrer que $\varphi^*(\xi_r) \approx r$. Nous allons établir (ce qui revient au même par dualité) que $\varphi(\xi_r) \approx r$. En utilisant le principe du maximum et les propriétés d'homogénéité de l'opérateur de la chaleur, on se ramène au lemme suivant :

Lemme 4.5 *Notons*

$$U^+ = T(0,1,10) \cap \{x > -\psi(|t|)\} \quad et \quad U^- = T(0,1,10) \cap \{x > \psi(|t|)\} \ .$$

Il existe une constante $C > 0$ telle que si φ^+ et φ^- désignent la mesure calorique de $\partial T(0,1,10)$ dans U^+ et U^-, alors

$$\frac{1}{C}\, x \leq \varphi^+((x,0)) \leq C\, x \quad et \quad \frac{1}{C}\, x \leq \varphi^-((x,0)) \leq C\, x \ .$$

Preuve. On se contentera de prouver le premier encadrement qui est un peu plus subtil. On introduit $U = T(0,1,10) \cap \{x > 0\}$ et on note φ la mesure calorique de $\partial T(0,1,10)$ dans U. Il s'agit donc de comparer φ et φ^+ lors d'un accés radial du point frontière 0.

Evidemment, par le principe du maximum, $\varphi(x,0) \leq \varphi^+(x,0)$. Concentrons nous alors sur l'autre inégalité. On reprend la démarche de la preuve du théorème 2.6 (voir [1] page 617). Si ω^M désigne la mesure calorique au point M dans U, on a

$$\varphi(x,0) = \varphi^+(x,0) - \int_T \varphi^+(P) d\omega^{(x,0)}(P) \ ,$$

où $T=\{P=(0,t)\in\mathbb{R}^2\ ;\ -1\le t\le 0\}$. On découpe T en tranches T_n correspondant aux points P tels que $t\in[-2^{-n},-2^{-(n+1)}[$ et on note $\varphi_n(M)=\int_{T_n}\varphi(P)d\omega^M(P)$. Enfin, on introduit $M_n=(10\,2^{-n/2},2\,2^{-n})$. En utilisant les théorèmes 2.2 et 2.4 ainsi que le principe du maximum, on trouve une constante $C>0$, telle que

$$\forall x\le 2^{-n/2},\quad \frac{\varphi_n(x,0)}{\varphi_n(M_n)}\le C\,\frac{\varphi(x,0)}{\varphi((2^{-n/2},0))}\quad \text{et}\quad \frac{\varphi(x,0)}{\varphi((2^{-n/2},0))}\le C\,\frac{\varphi^+(x,0)}{\varphi^+((2^{-n/2},0))}\ .$$

Par ailleurs, grâce au théorème 2.1 et au principe du maximum, $\frac{\varphi_n(x,0)}{\varphi_n(M_n)}$ est majoré par une constante lorsque $x>2^{-n/2}$. Comme $\varphi^+(x,0)$ est croissante en x, on trouve donc une nouvelle constante $C>0$ telle que pour tout x,

$$\frac{\varphi_n(x,0)}{\varphi_n(M_n)}\le C\,\frac{\varphi^+(x,0)}{\varphi^+((2^{-n/2},0))}\ .$$

Evaluons maintenant la quantité $\varphi_n(M_n)$. Le graphe de $t\mapsto -\psi(|t|)$, $t\in[-2^{-n},-2^{-(n+1)}[$ est lipschitzien (au sens usuel du terme), de constante de Lipschitz $\psi'(2^{-(n+1)})$. Grâce à (33), la constante de Lipschitz est donc contrôlée par $2^{n/2}$. Lorsque P tend vers un point de $\partial U^+\cap\{(x,t)\ ;\ t\in[-2^{-n},-2^{-(n+1)}[\}$, la régularité du graphe assure que $\varphi^+(P)$ converge vers 0 à une vitesse qui est de l'ordre de la distance au bord. De façon plus précise, si $P\in T_n$ la distance de P au bord de U^+ est de l'ordre de $\psi(2^{-n})$ et, pour des raisons d'homogénéité, on trouve une constante C qui ne dépend pas de n telle que

$$\frac{\varphi^+(P)}{\varphi^+((2^{-n/2},0))}\le C\,\frac{\psi(2^{-n})}{2^{-n/2}}\ .$$

Pour s'en convaincre, il suffit de faire subir l'affinité $(x,t)\mapsto(2^{n/2}x,2^nt)$ à la situation. Comme $\omega^{M_n}(T_n)\approx 1$, on trouve après intégration

$$\frac{\varphi_n(M_n)}{\varphi^+((2^{-n/2},0))}\le C\,2^{n/2}\psi(2^{-n})\ .$$

La fin de la preuve est alors simple. Comme la série $\sum 2^{n/2}\psi(2^{-n})$ converge, on peut trouver un entier n_0 tel que

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty}\varphi_n(x,0)\le\frac{1}{2}\varphi^+(x,0)\ .$$

L'inégalité non triviale entre φ et φ^+ s'en déduit alors facilement. (voir [1] page 619 pour un argument similaire). •

4.3 Mesure calorique dans les domaines de type-Weierstrass.

Les résultats décrits dans ce paragraphe se trouvent dans [6] et ont été écrits en collaboration avec Thierry Bousch. Ils utilisent de façon essentielle l'invariance de l'opérateur de la chaleur par les affinités $(x,t)\mapsto(\lambda x,\lambda^2t)$. Ainsi, comme nous l'avons signalé en introduction de la partie 4, ils ne se généralisent pas aux opérateurs de la classe $\Lambda(\mu)$. On suppose $d=1$

et on cherche à décrire de façon plus précise la mesure calorique dans le cas critique d'une fonction f de classe $C^{1/2}$. On cherche à se rendre compte si le contre-exemple décrit par Kaufman et Wu (théorème 4.2) est exceptionnel ou non. Au vu des résultats du paragraphe précédent, on est amené à penser que la fonction f doit posséder des oscillations de l'ordre de $|h|^{1/2}$ en beaucoup de points, si on veut espérer prouver que la mesure calorique est étrangère à la mesure de surface.

Une façon de créer des fonctions peu régulières consiste à former des séries lacunaires. On s'intéresse donc aux ouverts

$$\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x > f(t)\}$$

où f est une fonction "de type-Weierstrass". Plus précisément, on fixe un entier $\ell \geq 2$ et une fonction g, lipschitzienne (au sens usuel du terme), périodique de période 1. On définit f par la formule

$$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ell^{-k/2} g\left(\ell^k t\right) \ . \tag{34}$$

Il est bien connu que, dans ces conditions, la fonction f est de classe $C^{1/2}$. De plus, la constante de Hölder K de f ne dépend que de la constante de Lipschitz de f. L'ouvert Ω est alors appelé un ouvert de type-Weierstrass et son bord une courbe de type-Weierstrass.

Fixons comme dans le paragraphe précédent $M_0 = (f(0), 0) + (20K, 8)$ et cherchons à décrire la mesure calorique sur $\Delta = \partial\Omega \cap \{(x,t) \ ; \ 0 \leq t < 1\}$. La mesure de surface naturelle sur Δ est ici la mesure Λ_2. On cherche donc à comparer la mesure ω^{M_0} avec la mesure Λ_2 ou, de façon plus générale, avec les mesures Λ_α (voir le début de la partie 3 pour une définition des mesures Λ_α). Pour une meilleure lisibilité des résultats, projettons toutes ces mesures sur l'axe réel par la projection

$$\Pi \ : \ (f(t), t) \in \partial\Omega \longmapsto t \in \mathbb{R} \ ,$$

et notons ω et σ les images respectives des mesures ω^{M_0} et Λ_2. La mesure σ n'est autre que la mesure de Lebesgue sur $[0,1[$. Plus généralement, la mesure Λ_α (restreinte à Δ) se projette par l'application Π sur la mesure de Hausdorff traditionnelle $\mathcal{H}^{\alpha/2}$. Mesurer le degré de singularité de la mesure ω^{M_0} au sens de la dimension parabolique équivaut donc à mesurer le degré de singularité de ω au sens de la dimension des mesures (voir partie 3 pour les définitions de la dimension inférieure et de la dimension supérieure de la mesure ω).

4.3.1 La mesure ω est quasi-Bernoulli.

L'étude géométrique de la mesure calorique se fait en exploitant les propriétés d'homogénéité de la fonction f. Si n est un entier positif fixé, elle vérifie :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \ell^{-k/2} g(\ell^k t) + \ell^{-n/2} f(\ell^n t) \ . \tag{35}$$

Ainsi, si on note $\hat{f}(t) = \ell^{-n/2} f(\ell^n t)$, la fonction $\hat{f}$ est une pertubée lipschitzienne de la fonction f (la constante de Lipschitz de la perturbation étant contrôlée par $\ell^{n/2}$). Appelons alors $\hat{\Omega}$ l'ouvert du plan délimité par le graphe de la fonction $\hat{f}$. L'ouvert $\hat{\Omega}$ est l'image de Ω par l'affinité $(x,t)\mapsto(\ell^{-n/2}x,\ell^{-n}t)$. Le théorème 2.6 et l'encadrement (29) nous permettent alors de comparer la mesure calorique dans les ouverts Ω et $\hat{\Omega}$. Plus précisément, en utilisant aussi l'invariance par affinités de l'opérateur de la chaleur et le principe de Harnack au bord, on peut montrer que la mesure ω est une mesure quasi-Bernoulli sur $[0,1[$. C'est ce qui est traduit dans le théorème qui suit.

Théorème 4.6 ([6]) *Notons $\mathcal{M}$ l'ensemble des mots construits sur l'alphabet $\{0,\cdots,\ell-1\}$. Si $a=\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n\in\mathcal{M}$, appelons*

$$t_a=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\ell^{-i}\quad et\quad I_a=[t_a,t_a+\ell^{-n}[\ .$$

Enfin, notons ab la concaténation des mots a et b. Il existe une constante $C=C(K)>0$ telle que

$$\forall a,b\in\mathcal{M},\quad \frac{1}{C}\omega(I_a)\,\omega(I_b)\le\omega(I_{ab})\le C\omega(I_a)\,\omega(I_b)\ . \tag{36}$$

En utilisant les résultats du paragraphe 3.7, on peut ensuite déduire le corollaire suivant:

Corollaire 4.7 ([6]) *Notons $\mathcal{F}_n$ la famille des intervalles ℓ-adics de la $n^{\text{ème}}$ génération et $I_n(t)$ l'unique élément de $\mathcal{F}_n$ qui contient t. Alors*

(i) *Il existe un réel $d\in]0,1]$ tel que pour $d\omega$-presque tout $t\in[0,1[$,*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\omega(I_n(t))}{\log|I_n(t)|}=d\ .$$

En particulier, la mesure ω est unidimensionnelle de dimension $\dim(\omega)=d$.

(ii) $\dim(\omega)=1$ *si et seulement si elle est fortement équivalente à σ.*

Remarque. Le cas $\dim(\omega)=1$ ne peut évidemment pas être exclu. Si γ est une fonction lipschitzienne et si $g(t)=\gamma(t)-\ell^{-1/2}\gamma(\ell t)$, alors, $f=\gamma$. Ainsi, f est lipschitzienne et la mesure ω est fortement équivalente à la mesure σ. En fait, comme nous allons le voir, c'est la seule situation où le cas (ii) se produit.

4.3.2 Le cas $\dim(\omega)<1$ est générique.

On s'intéresse maintenant à décrire l'ensemble des fonctions g et l'ensemble des fonctions f telles que la dimension de ω soit strictement inférieure à 1. Grâce au corollaire 4.7, pour montrer que $\dim(\omega)<1$, il suffit de trouver un point t_0 en lequel le rapport

$$\frac{\omega(I_n(t_0))}{|I_n(t_0)|}$$

soit non borné inférieurement ou non borné supérieurement lorsque $n \to \infty$. En d'autres termes, si $\Delta_s(\xi_0)$ désigne "l'intervalle" tracé sur $\partial\Omega$ centré en ξ_0 et de "longueur" $2s$, il suffit de trouver un point $\xi_0 \in \partial\Omega$ tel que la quantité

$$\frac{\omega^{M_0}(\Delta_s(\xi_0))}{s}$$

soit non bornée inférieurement ou non bornée supérieurement lorsque $s \to 0$.

Imaginons par exemple qu'au voisinage d'un point t_0, la fonction f vérifie

$$f(t_0+h) \geq f(t_0) \quad \text{si} \quad h \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \limsup_{h \to 0^+} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h^{1/2}} > 0\ . \tag{37}$$

On peut alors montrer que, dans l'ouvert $U = \{(x,t)\ ;\ x > f(t_0)\}$, la partie $U \backslash \Omega$ est non-effilée par rapport à l'unique fonction calorique positive minimale associée au point $\xi_0 = (f(t_0), t_0)$ (voir [1] page 629). En d'autre termes, le processus $(B_t, -t)$, partant de M_0 et conditionné à sortir de U par ξ_0, rencontre presque-sûrement $U \setminus \Omega$ avant de sortir. Reprenant une vieille idee de Naïm ([Naï57]), on en déduit que les minimales correspondant au point ξ_0 dans les ouverts U et Ω ne sont pas du même ordre de grandeur. Finalement, grâce au principe de Harnack à la frontière, on peut conclure que $\omega^{M_0}(\Delta_s(\xi_0))$ est infiniment petit devant s lorsque s tend vers 0 (la quantité s est de l'ordre de grandeur de la mesure calorique de l'intervalle $f(t_0) \times [t_0 - s, t_0 + s]$ dans l'ouvert U).

L'hypothèse (37), si elle est vérifiée en un point, est donc suffisante pour entrainer que $\dim(\omega) < 1$. Ceci peut sembler surprenant mais se produit en fait parce que la fonction f n'est pas quelconque : les propiétés d'homogénéité de f font que si (37) est vérifiée en un point t_0, elle est aussi vérifiée en de nombreux autres points !

Grâce à se qui précède, décrire les fonctions g telles que $\dim(\omega) < 1$ revient donc à décrire les fonctions g telles qu'en un point t_0, la fonction f associée vérifie (37). Il s'agit donc d'essayer de minorer les oscillations de la fonction f. En fait, on montre qu'il n'y a pas de situation intermédiaire pour la régularité de la fonction f. Soit elle est partout très régulière (i.e. elle est lipschitzienne), soit elle est partout très irrégulière (i.e. elle a des oscillations autour de chaque point de l'ordre de $|h|^{1/2}$). Il semble que cette dichotomie n'ait jamais été mise en valeur. Décrivons de façon précise le résultat que nous obtenons sur la fonction f.

Théorème 4.8 ([6]) *Soient ℓ un entier ≥ 2, g une fonction lipschitzienne et 1-périodique. Si f est définie par* (34)*, on a la dichotomie suivante :*

(i) *La fonction f est lipschitzienne. En d'autres termes, $g(t) = f(t) - \ell^{-1/2} f(\ell t)$ avec f lipschitzienne.*

ou

(ii) *Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout intervalle I de longueur $|I| \leq 1$, on ait*

$$\operatorname{osc}(f, I) \geq c\,|I|^{1/2}\ .$$

Il est clair que, lorsque (ii) est vérifiée, et lorsque t_0 est le minimum absolu de la fonction f, l'hypothèse (37) est satisfaite. On obtient donc le corollaire suivant :

Corollaire 4.9 ([6]) *Il y a équivalence entre*

(i) $\dim(\omega) = 1$

(ii) ω *est fortement équivalente à* σ

(iii) f *est lipschitzienne.*

On peut aussi s'intéresser à l'ensemble des fonctions g telles que $\dim(\omega) = 1$, c'est à dire à l'ensemble des fonctions g telles que f soit lipschitzienne. On obtient le résultat suivant :

Corollaire 4.10 ([6]) *L'ensemble des fonctions g telles que f soit lipschitzienne est un sous-espace vectoriel fermé de codimension infinie de l'espace des fonctions g lipschitziennes et 1-périodiques (muni de sa norme naturelle $\|g\| = \|g\|_\infty + \|g'\|_\infty$). En conséquence, l'ensemble des fonctions g telles que* $\dim(\omega) < 1$ *est un ouvert dense de l'espace des fonctions g lipschitziennes et 1-périodiques.*

Pour être tout à fait précis, on propose en fait un test, portant sur les coefficients de Fourier de g, qui permet de décider si f est ou n'est pas lipschitzienne. On trouve que f est lipschitzienne si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad \ell \not| n \implies \sum_{k=0}^{+\infty} \ell^{k/2} \hat{g}(\ell^k n) = 0 \ . \tag{38}$$

Par exemple, si g est un polynôme trigonométrique non identiquement nul et dont toutes les fréquences sont dans $\mathbb{Z} \setminus \ell\mathbb{Z}$, la fonction f correspondante n'est pas lipschitzienne ; elle est donc, grâce au théorème 4.8, très irrégulière. Dans [KMPY84], Kaplan et al. obtiennent des formules similaires à (38). Cependant, ils ont besoin d'utiliser des hypothèses plus restrictives sur la fonction g.

Remarque finale. Carleson dans [Car85] ainsi que Makarov et Volberg dans [MV86] ont étudié la mesure harmonique de certains Cantor auto-similaires du plan. Carleson a d'abord établi que la dimension de la mesure harmonique était toujours strictement inférieure à 1. Puis, Makarov et Volberg ont prouvé qu'elle était strictement inférieure à la dimension de l'ensemble de Cantor considéré. Dans [6], on montre en fait un phénomène similaire pour les graphes de type-Weierstrass et pour l'équation de la chaleur.

4.4 Mesure calorique dans les sur-graphes $\{t > g(x)\}$ du plan.

Dans ce dernier paragraphe, nous nous intéressons à la mesure calorique dans l'ouvert

$$\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ t > g(x)\} \ , \tag{39}$$

où g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Il faut bien remarquer le rôle inversé des variables x et t par rapport aux résultats décrits dans les précédentes parties. Ici, il faut voir l'ouvert Ω comme une déformation du demi-plan $\{t > 0\}$. Du reste, dans l'ouvert $\{t > 0\}$, la mesure calorique est bien connue. C'est la loi de sortie du processus $(B_s, -s)$. Elle est équivalente à la mesure de Lebesgue. Plus précisément, si $M_0 = (x_0, t_0) \in \{t > 0\}$, on a :

$$d\omega^{M_0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t_0}} e^{-(x-x_0)^2/2t_0} dx \ . \tag{40}$$

Il est alors naturel de se demander jusqu'à quelle hypothèse de régularité on peut descendre sur la fonction g pour conserver une formule similaire à (40). Robert Kaufman et Jang-Mei Wu ont travaillé sur cette question et ont obtenu les résultats suivants.

Théorème 4.11 ([KW89]) *Soient g une fonction de classe $C^{1,1}$ sur $\mathbb{R}$ et Ω l'ouvert correspondant. Notons σ la mesure de longueur sur $\partial\Omega$ (c'est à dire la restriction de la mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^1$ à $\partial\Omega$). Sur son support, la mesure ω^{M_0} est équivalente à σ.*

Théorème 4.12 ([KW82]) *Il existe une fonction g sur $\mathbb{R}$, de classe $C^{1,\alpha}$ pour tout $\alpha < 1$, et une partie $E \subset \partial\Omega$ vérifiant :*

$$\sigma(E) > 0 \quad et \quad \forall M_0 \in \Omega, \quad \omega^{M_0}(E) = 0 \ .$$

Plus précisément, E est même polaire pour l'équation de la chaleur ; c'est à dire qu'il vérifie

$$\forall (x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{P}_{x_0} [\ \exists s > 0 \ ; \ (B_s, t_0 - s) \in E\ ] = 0 \ .$$

La question posée par Kaufman et Wu est alors la suivante :

Question. Si g est de classe $C^{1,\alpha}$ avec $\alpha < 1$, conserve-t-on malgré tout l'absolue continuité de la mesure ω^{M_0} par rapport à la mesure de longueur σ ?

Nous répondons positivement à cette question et proposons même dans [2] un énoncé se passant de toute hypothèse de régularité sur g.

Théorème 4.13 ([2]) *Soient g une fonction continue sur $\mathbb{R}$, $\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ t > g(x)\}$ et $M_0 \in \Omega$. Pour tout borélien $E \subset \partial\Omega$, on a :*

$$\mathcal{H}^1(E) = 0 \Longrightarrow \omega^{M_0}(E) = 0 \ ,$$

où $\mathcal{H}^1$ désigne la mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle.

On en déduit alors le corollaire suivant.

Corollaire 4.14 ([2]) *Si de plus, $\partial\Omega$ est rectifiable, il existe une fonction $f^{M_0} \in L^1_{\mathrm{loc}}(d\sigma)$ telle que :*

$$d\omega^{M_0} = f^{M_0} d\sigma \ ,$$

où $d\sigma$ désigne la mesure de longueur sur $\partial\Omega$.

Ainsi, sous la seule hypothèse que g est continue et localement à variations bornées, la mesure calorique se décrit avec des formules similaires à (40).

Quelques idées sur la preuve de théorème 4.13. La démarche utilise de façon essentielle que le bord de Ω est le graphe d'une fonction d'<u>une</u> variable réelle. Nous ne savons pas démontrer un résultat similaire dans $\mathbb{R}^{d+1}$. En particulier, l'ordre sur $\mathbb{R}$ et les éventuelles monotonies de g vont jouer un rôle important.

Si on sait prouver le résultat lorsque g est monotone, on peut ensuite, en utilisant le principe du soleil levant et le principe du maximum, épuiser petit à petit les zones de monotonies de g et finalement conclure dans le cas général. On se concentre donc sur le cas où g est monotone. Pour fixer les idées, on la supposera décroissante.

Afin de mieux comprendre la démarche suivie pour traiter le cas des fonctions monotones, je crois qu'il est bon de s'attarder un instant sur la preuve que donnent Kaufman et Wu des théorèmes 4.11 et 4.12.

Pour prouver le théorème 4.11, on sépare les points où $g' = 0$ des points où $g' \neq 0$. Sur l'ensemble $\{g' \neq 0\}$, les estimations sont possibles en approximant le graphe par sa tangente (qui est non-horizontale). En un point x_0 où $g'(x_0) = 0$, la mesure calorique s'estime bien car la fonction g "oscille peu". Plus précisément, comme la fonction g est de classe $C^{1,1}$, l'inégalité

$$|g(x) - g(x_0)| \leq C\,|x - x_0|^2$$

est vérifiée au voisinage de x_0. Elle permet d'estimer la mesure calorique en la comparant avec le noyau de la chaleur.

Le contre-exemple du théorème 4.12 peut être construit de la façon suivante. On introduit tout d'abord la fonction γ définie sur $[0, 1[$ par

$$\gamma(x) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n 4^{-n} \qquad \text{si} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n 2^{-n} \text{ est le développement dyadique propre de } x\,.$$

La fonction γ est décroissante et possède des sauts aux points dyadiques. On constate que son graphe G est polaire. Intuitivement, partant d'un point (x_0, t_0), quelconque, le processus $(B_s, -s)$ va éviter G en passant systématiquement à travers les sauts de la fonction γ. Bien sûr, la fonction γ n'est pas régulière, mais on peut la "lisser" autour des points dyadiques pour la régulariser. Plus précisément, on peut construire une fonction g, de classe $C^{1,\alpha}$ pour tout $\alpha < 1$, telle que l'ensemble $\tilde{E} = \{g(x) = \gamma(x)\}$ soit de mesure de Lebesgue strictement positive. Si E est la partie correspondante du graphe, E répond à la question posée. On peut alors constater que si $x_0 \in \tilde{E}$, la fonction g "oscille beaucoup"autour de x_0. En d'autres termes, $\lim_{x \to x_0} \frac{|g(x) - g(x_0)|}{|x - x_0|^2} = +\infty$. On peut aussi remarquer que la projection de E sur l'axe des t est minuscule. Elle est incluse dans un ensemble de Cantor de dimension $1/2$. Ceci suggère qu'en des points de "grandes oscillations", la mesure calorique se laisse mieux comparer à l'image de la mesure de Lebesgue par l'application $t \mapsto (g^{-1}(t), t)$.

Forts de ces constatations, considérons maintenant une fonction g décroissante quelconque, notons σ_1 l'image de la mesure de Lebesgue par l'application $x \mapsto (x, g(x))$ et, dans les zones où g est injective, σ_2 l'image de la mesure de Lebesgue par l'application $t \mapsto (g^{-1}(t), t)$. Notons enfin $D_g(x, h) = \frac{g(x) - g(x+h)}{h^2}$ et découpons le graphe $\partial\Omega$ en trois zones :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \{(x,g(x)) \in \partial\Omega \ ; \ \liminf_{h\to 0^+} D_g(x,h) < +\infty \text{ et } \limsup_{h\to 0^+} D_g(x,h) > 0\} \\
\mathcal{A}^+ &= \{(x,g(x)) \in \partial\Omega \ ; \ \liminf_{h\to 0^+} D_g(x,h) > 0\} \\
\mathcal{A}^- &= \{(x,g(x)) \in \partial\Omega \ ; \ \limsup_{h\to 0^+} D_g(x,h) < +\infty\} \ .
\end{aligned}
$$

Ces trois zones ne sont pas tout à fait disjointes mais on constate que

$$\partial\Omega \setminus (\mathcal{A}^+ \cup \mathcal{A}^-) \subset \mathcal{P} \ .$$

En épuisant petit à petit, grâce à un lemme de comparaison qu'on doit à Ancona, les points de $\mathcal{A}^+$ et les points de $\mathcal{A}^-$, on obtient alors le résultat suivant.

Théorème 4.15 ([2]) *Soit $M_0 = (x_0, t_0) \in \Omega$. Notons $\Delta_{t_0} = \partial\Omega \cap \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ t \leq t_0\}$ le support fermé de ω^{M_0}. On a alors :*

(i) *L'ensemble $\mathcal{P}$ est polaire. En particulier, la mesure ω^{M_0} est portée par $\Delta_{t_0} \cap (\mathcal{A}^+ \cup \mathcal{A}^-)$*

(ii) *Sur $\Delta_{t_0} \cap \mathcal{A}^+$, on a :*
$$\omega^{M_0}(E) = 0 \Leftrightarrow \Lambda_2(E) = 0 \Leftrightarrow \sigma_2(E)$$

(iii) *Sur $\Delta_{t_0} \cap \mathcal{A}^-$, on a :*

$$\omega^{M_0}(E) = 0 \Leftrightarrow \Lambda_1(E) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{H}^1(E) = 0 \Leftrightarrow \sigma_1(E) \ .$$

L'ensemble $\mathcal{A}^+$ correspond à une partie du graphe où la fonction g est inversible et où son inverse est localement de classe $C^{1/2}$. Le fait que la mesure calorique y soit équivalente à la mesure Λ_2 semble en contradiction avec les résultats du théorème 4.2 et du paragraphe 4.3. En fait, la monotonie est une hypothèse de régularité supplémentaire suffisante pour assurer (sur le support de ω^{M_0}) l'équivalence entre les mesures ω^{M_0} et Λ_2. C'est ce qui est traduit dans le résultat suivant qui constitue une étape clé dans la preuve du théorème 4.15.

Théorème 4.16 ([2]) *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $r_0 \leq 1$ et $Q \in \partial\Omega$ un point frontière "lipschitzien" de Ω adapté au cylindre $T(Q, 2r_0, K)$. On suppose de plus que la fonction f qui décrit le bord de Ω au voisinage de Q est décroissante. Notons $M_0 = Q + (10Kr_0, 2r_0^2)$ et $\Delta = \partial\Omega \cap T(Q, r_0, K)$. On peut trouver deux constantes $C = C(K)$ et $\alpha = \alpha(K)$ strictement positives telles que pour tout $\Delta(\xi, r) \subset \Delta$ et pour tout Borélien $E \subset \Delta(\xi, r)$, on ait*

$$\frac{1}{C}\left(\frac{\omega^{M_0}(E)}{\omega^{M_0}(\Delta(\xi,r))}\right)^{\alpha} \leq \frac{\sigma(E)}{\sigma(\Delta(\xi,r))} \leq \left(\frac{\omega^{M_0}(E)}{\omega^{M_0}(\Delta(\xi,r))}\right) \ ,$$

où $\Delta(\xi, r) = \partial\Omega \cap T(\xi, r, K)$ et σ est la mesure de surface sur Δ telle qu'on l'a définie lors du paragraphe 4.1.

Remarques. 1. Comme lors du théorème 4.4, l'inégalité de gauche est une conséquence de l'inégalité de droite et de la théorie des poids de Mückenhoupt (voir [Tor86]).

2. Par définition, la mesure σ coïncide sur Δ avec la mesure Λ_2. Par ailleurs, la fonction f étant monotone, Δ est rectifiable. Cependant, il faut bien comprendre que la mesure de

longueur traditionnelle $\mathcal{H}^1$ n'est pas équivalente à la mesure Λ_2 sur Δ. Par exemple, considérons un ensemble de Cantor $\mathbb{K}$ de dimension de Hausdorff 1/2. On le construit en partant de l'intervalle $[0,1]$, en conservant les intervalles $[0,1/4]$ et $[3/4,1]$, puis en réitérant l'opération. Notons m la mesure naturelle sur $\mathbb{K}$ et définissons f par $f(x) = m([x,+\infty[)$. Son graphe est souvent appelé de façon imagée "l'escalier du diable". La fonction f est décroissante et de classe $C^{1/2}$ (c'est pour cela que $\mathbb{K}$ est de dimension 1/2 !). Si $G = \{(f(t),t)\ ,\ t \in \mathbb{K}\}$, on a alors :

$$\Lambda_2(G) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{H}^1(G) = 1\ .$$

Ce n'est pas par hasard que nous avons appelé cet ensemble G. C'est vraiment l'ensemble G qui intervient dans la preuve du théorème 4.12. Il est polaire pour l'équation de la chaleur et vérifie même $\Lambda_1(G) < +\infty$.

Références

[Anc78] A. Ancona. Principe de harnack à la frontière et théorème de Fatou pour un opérateur elliptique dans un domaine Lipschitzien. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **28** : 169–213, 1978.

[Anc79] A. Ancona. Une propriété de la compactification de Martin d'un domaine euclidien. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **29** : 71–90, 1979.

[Anc82] A. Ancona. Comparaison de mesures harmoniques et des fonctions de Green pour des opérateurs elliptiques sur un domaine Lipschitzien. *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **294** : 505–508, 1982.

[Anc84] A. Ancona. Régularité d'accès de bouts et frontière de Martin d'un domaine euclidien. *J. Math. Pures Appl.*, **63** : 215–260, 1984.

[Anc90] A. Ancona. Théorie du potentiel sur les graphes et les variétés. In *Ecole d'été de probabilités de Saint-Flour XVII*, volume **1427** of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag Berlin, 1990.

[Aro67] D.G. Aronson. Bounds for the fundamental solution of a parabolic equation. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** : 890–896, 1967.

[Bat96] A. Batakis. Harmonic measure of some Cantor type sets. *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, **21** : 255–270, 1996.

[Bes35] A.S. Besicovitch. On the sum of digits of real numbers represented in the dyadic system. *Math. Annalen*, **110** : 321–330, 1934-35.

[Bis95] A. Bisbas. A multifractal analysis of an interesting class of measures. *Colloq. Math.*, **69** : 37–42, 1995.

[BK90] A. Bisbas and C. Karanikas. On the Hausdorff dimension of Rademacher Riesz products. *Monatsh. Math.*, **110** : 15–21, 1990.

[BMP92] G. Brown, G. Michon, and J. Peyrière. On the Multifractal Analysis of Measures. *J. Stat. Phys.*, **66** : 775–790, 1992.

[Bou87] J. Bourgain. On the Hausdorff dimension of harmonic measure in higher dimension. *Invent. Math.*, **87** : 477–483, 1987.

[Bre69] M. Brelot. *Axiomatique des fonctions harmoniques.* Les presses de l'Université de Montréal, 1969.

[Car63] L. Carleson. On the existence of boundary values for harmonic functions of several variables. *Ark. Mat.*, **4** : 393–399, 1963.

[Car67] L. Carleson. *Selected Problems on Excoptional Sets.* Van Nostrand, Princeton, N.J., 1967.

[Car85] L. Carleson. On the support of harmonic measure for sets of Cantor type. *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, **10** : 113–123, 1985.

[Dah77] B. Dahlberg. Estimates of harmonic measure. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **65** : 275–288, 1977.

[Doo59] J.L. Doob. A relative Fatou theorem. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **45** : 215–222, 1959.

[Doo84] J.L. Doob. *Classical potential theory and its probabilistic counterpart.* Springer-Verlag, New York, 1984.

[Egg49] H.G. Eggleston. The fractional dimension of a set defined by decimal properties. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **20** : 31–46, 1949.

[Fal90] K. Falconer. *Fractal Geometry : Mathematical Foundations and Applications.* John Wiley & Sons Ltd., New-York, 1990.

[Fal97] K. Falconer. *Techniques in Fractal Geometry.* John Wiley & Sons Ltd., New-York, 1997.

[Fan94] A.H. Fan. Sur la dimension des mesures. *Studia Math.*, **111** : 1–17, 1994.

[FGS86] E.B. Fabes, N. Garofalo, and S. Salsa. A backward harnack inequality and Fatou theorem for nonnegative solutions of parabolic equations. *Illinois J. Math.*, **30** : 536–565, 1986.

[FS86] E.B. Fabes and D.W. Stroock. A new proof of Moser's parabolic Harnack inequality via the old idea of Nash. *Arch. Rat. Mech. and Anal.*, **96** : 326–338, 1986.

[HL96] S. Hofmann and J.L. Lewis. Solvability and representation by caloric layer potential in time-varying domains. *Ann. of Maths. (2)*, **144** : 349–420, 1996.

[HW68] R. A. Hunt and R. L. Wheeden. On the boundary values of harmonic functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **132** : 307–322, 1968.

[HW70] R. A. Hunt and R. L. Wheeden. Positive harmonic functions on Lipschitz domains. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **147** : 507–527, 1970.

[Kem72] J.T. Kemper. Temperatures in several variables : kernel functions, representations and parabolic boundary values. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **167** : 243–262, 1972.

[KMPY84] J.L. Kaplan, J. Mallet-Paret, and J.A. Yorke. The Lyapunov dimension of a nowhere differentiable attracting torus. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, **4** : 261–281, 1984.

[KW80] R. Kaufman and J.M. Wu. Singularity of parabolic measures. *Compositio Math.*, **40** : 243–250, 1980.

[KW82] R. Kaufman and J.M. Wu. Parabolic potential theory. *J. Differential Equations*, **43** : 204–234, 1982.

[KW88] R. Kaufman and J.M. Wu. Parabolic measure on domains of class Lip 1/2. *Compositio Math.*, **65** : 201–207, 1988.

[KW89] R. Kaufman and J.M. Wu. Dirichlet problem of heat equation for C^2 domains. *J. Differential Equations*, **80** : 14–31, 1989.

[LM91] J.L. Lewis and M.A.M. Murray. Regularity properties of commutators and layer potentials associated to the heat equation. *Trans. Amer. Math.Soc.*, **328** : 815–842, 1991.

[LM92] J.L. Lewis and M.A.M. Murray. Absolute continuity of parabolic measures. In Dahlberg et al., editor, *Partial Differential Equations with Minimal Smoothness and Applications*, volume **42** of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 173–188. Springer Verlag, N.Y., 1992.

[LM95] J.L. Lewis and M.A.M. Murray. The method of layer potentials for the heat equation in time-varying domains. *Mem. Amer. Math. Soc.*, **545** , 1995.

[LS88] J.L. Lewis and J. Silver. Parabolic measure and the Dirichlet problem for the heat equation in two dimensions. *Indiana Univ. Math. J.*, **37** : 801–839, 1988.

[Mar41] R.S. Martin. Minimal positive harmonic functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **49** : 137–172, 1941.

[Mic83] G. Michon. Mesures de Gibbs sur les cantor réguliers. *Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Théor.*, **58** : 267–285, 1983.

[Mos64] J. Moser. A Harnack inequality for parabolic differential equations. *Comm. Pure & Appl. Math.*, **17** : 101–134, 1964.

[MV86] N. Makarov and A. Volberg. On the harmonic measure of discontinuous fractals. Preprint LOMI E-6-86, Leningrad, 1986.

[Naï57] L. Naïm. Sur le rôle de la frontière de R.S. Martin dans la théorie du potentiel. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **7** : 183–281, 1957.

[Nga97] S.M. Ngai. A dimension result arising from the L^q spectrum of a measure. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125** : 2943–2951, 1997.

[Nis92] M. Nishio. Uniqueness of positive solutions of the heat equation. *Osaka J. Math.*, **29** : 531–538, 1992.

[Nys97] K. Nyström. The Dirichlet problem for second order parabolic operators. *Indiana Univ. Math. J.*, **46** : 183–245, 1997.

[Ols00] L. Olsen. Dimension inequalities of multifractal Hausdorff measures and multifractal packing measures. *Math. Scand.*, **86** : 109–129, 2000.

[Pey95] J. Peyriere. An introduction to fractal measures and dimensions. Lectures at Xiangfan, 1995.

[PU89] F. Przytycki and M. Urbanski. On the Hausdorff dimension of some fractal sets. *Studia Math.*, **93** : 155–186, 1989.

[Rud74] W. Rudin. *Real and complex analysis, 2nd. ed.* Mc Graw-Hill, 1974.

[Ser56] J. Serrin. On the Harnack inequality for linear elliptic equations. *J. Anal. Math.*, **4**: 292–308, 1956.

[Sib68] D. Sibony. Théorèmes de limites fines et problème de Dirichlet. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **18**: 121–134, 1968.

[Tor86] A. Torchinsky. *Real-variable Methods in Harmonic Analysis.* Academic Press, Orlando, Flo., 1986.

[Tri82] C. Tricot. Two definitions of fractional dimension. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **91**: 57–74, 1982.

[Tuk89] P. Tukia. Hausdorff dimension and quasisymmetric mappings. *Math. Scand.*, **65**: 152–160, 1989.

[TW85] S.J. Taylor and N.A. Watson. A Hausdorff measure classification of polar sets for the heat equation. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **97**: 325–344, 1985.

[Wu79] J.M. Wu. On parabolic measures and subparabolic functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **251**: 171–186, 1979.

[You82] L.S. Young. Dimension, entropy and Lyapounov exponents. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, **2**: 109–124, 1982.

[Zin97] M. Zinsmeister. *Formalisme thermodynamique et systèmes dynamiques holomorphes*, volume **4** of *Panoramas et synthèses.* Société Mathématique de France, 1997.

Travaux et Publications

[0] *Inégalités de Harnack à la frontière pour des opérateurs paraboliques.* Thèse de l'Université Paris-Sud, 1989.

[1] Solutions positives et mesure harmonique pour des opérateurs paraboliques dans des ouverts "lipschitziens", *Ann. Inst. Fourier (Grenoble),* **41** : 601-649, 1991.

[1a] Inégalités de Harnack à la frontière pour des opérateurs paraboliques, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.,* **308** : 401-404, 1989.

[1b] Inégalités de Harnack à la frontière pour des opérateurs paraboliques (2) ; estimations de la mesure harmonique de certains ouverts de $\mathbb{R}^{n+1}$, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.,* **308** : 441-444, 1989.

[2] Mesure harmonique et équation de la chaleur, *Ark. Mat.,* **34** : 119-139, 1996.

[2a] Estimations de la mesure harmonique pour l'equation de la chaleur dans les sur-graphes du plan, *Séminaire d'Initiation à l'Analyse,* 34ème année, exposé n^o 8, 1995.

[3] Sur la comparaison des mesures avec les mesures de Hausdorff, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.,* **321** : 61-65, 1995.

[4] Estimations de la dimension inférieure et de la dimension supérieure des mesures, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.,* **34** : 309-338, 1998.

[5] (Avec A. Batakis) On relations between entropy and Hausdorff dimension of measures. Prépublication Orsay 98-49, 1998.

[6] (Avec T. Bousch) Caloric measure on domains bounded by Weierstrass-type graphs. Prépublication Orsay 99-13, 1999. *Ann. Acad. Sci. Fenn.* (à paraître).

Table des matières