Espaces L^p - Dualité dans les espaces L^p

1. Soit m une mesure finie et $f \in L^\infty(m)$. Montrer que f est dans tous les $L^p(m)$. A-t-on $L^\infty(m) = \bigcap_{p\geq 1} L^p(m)$?
   Si m est une mesure de probabilité et $f \in L^\infty(m)$, établir que
   $$\|f\|_\infty = \sup_{p\geq 1} \|f\|_p \ .$$

2. Soient p_1 et p_2 deux réels tels que $1 \leq p_1 \leq p_2 < +\infty$. Soit p un réel intérmédiaire. On écrit $p = \theta p_1 + (1-\theta)p_2$. Montrer que si $f \in L^{p_1} \cap L^{p_2}$, alors $f \in L^p$ et vérifie :
   $$\|f\|_p^p \leq \|f\|_{p_1}^{\theta p_1} \, \|f\|_{p_2}^{(1-\theta)p_2} \ .$$

3. *Une caractérisation des fonctions de $L^p(\mathbb{R}^d)$ (déjà vu en cours).*

   Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^d$. On note q l'exposant conjugué de p. Montrer que :
   $$\|f\|_p = \sup \left(\int |f\, g| \ , \quad g \in L^q(\mathbb{R}^d) \ , \quad \|g\|_q \leq 1 \right) \ ,$$
   que cette quantité soit finie ou infinie. Cette identité est surtout utile lorsqu'on ne sait pas a priori si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. On pourra alors tester cette appartenance en estimant $\int |f\, g|$ où $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$.

4. *Une caractérisation des fonctions de $L^p(\mathbb{R}^d)$ (suite).*

   En utilisant l'exercice précédent et le théorème de Banach-Steinhauss, montrer qu'un fonction f mesurable sur $\mathbb{R}^d$ appartient à $L^p(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si pour toute fonction $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, la fonction $f\, g$ est intégrable. (on fera intervenir $f_n = f 1\!\!1_{\{x;\ |f(x)|\leq n \ et\ \|x\|\leq n\}}$).

5. *Inégalité de Hardy.*

   Soit $p \in]1, +\infty[$ et q son exposant conjugué. Si $f \in L^p(]0, +\infty[)$, on pose pour $x > 0$:
   $$Tf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = \int_0^1 f(tx)dt \ .$$
   En utilisant l'exercice 3, montrer que $Tf \in L^p(]0, +\infty[)$ et que :
   $$\|Tf\|_p \leq q\|f\|_p \ .$$
   En considérant les fonctions $f_A(x) = x^{-1/p} 1\!\!1_{[1,A]}$, montrer que l'inégalité précédente est optimale.

6. Redémontrer l'inégalité de Hardy par la méthode d'approximation proposée page 189 du polycopié Orsay-Plus d'exercices de calcul intégral (voir aussi Rudin, Real and complex analysis, page 75).

7. *Opérateurs à noyaux.* On veut démontrer le théorème suivant.

   Théorème. *Soit (X, μ) un espace mesuré, avec μ σ-finie, $1 \leq p \leq +\infty$, q son exposant conjugué et $k(x, y)$ une fonction mesurable sur $X \times X$. Si k vérifie*

   $$\forall y, \int_X |k(x,y)| d\mu(x) \leq C_1 < \infty, \quad \forall x \int_X |k(x,y)| d\mu(y) \leq C_2 < \infty,$$

   la formule

   $$Ku(x) = \int_X k(x,y) u(y) d\mu(y)$$

   définit un opérateur linéaire continu $K : L^p \to L^p$ de norme $\leq C_1^{1/p} C_2^{1/q}$.

   (a) On suppose $1 < p < +\infty$. Pour $u \in L^p$, on pose

   $$K^+u(x) = \int_X |k(x,y)||u(y)| d\mu(y) .$$

   Majorer $\int_X |K^+u(x)v(x)| d\mu(x)$ pour une fonction $v \in L^q$ (indication: écrire que $|u(y)v(x)| \leq \frac{1}{p}\lambda^p |u(y)|^p + \frac{1}{q}\lambda^{-q}|v(x)|^q$ et optimiser en λ après intégration). En déduire que $K^+u \in L^p$ avec

   $$\|K^+u\|_p \leq C_1^{1/p} C_2^{1/q} \|u\|_p .$$

   (b) Conclure quant au théorème dans ce cas.

   (c) Traiter le cas $p = 1$ et le cas $p = +\infty$.

   (d) Que dit ce théorème lorsque $k(x, y) = f(x - y)$ où $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

8. On note $c_0(\mathbb{N})$ l'espace des suites tendant vers 0 à l'infini. On le munit de la norme $\| \; \|_\infty$. C'est donc un sous-espace fermé de $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Pour deux suites $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on note $T_a(b) = \sum_{n \geq 0} a_n b_n$ lorsque ça a un sens. Montrer que l'application :

   $$a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N}) \longmapsto T_a \in c_0(\mathbb{N})'$$

   est une isométrie surjective. En déduire que l'espace $c_0(\mathbb{N})$ n'est pas reflexif.

9. On suppose que m est une mesure finie et on propose une preuve élémentaire de l'identification du dual de $L^1(m)$ avec $L^\infty(m)$. On fixe donc une forme linéaire continue sur $L^1(m)$ qu'on note T. On note C sa norme.

   (a) Montrer qu'il existe $h \in L^2(m)$ telle que :

   $$\forall f \in L^2(m), \quad T(f) = \int f(t) h(t) dm(t) .$$

(b) Introduisons les fonctions $f_\alpha = \dfrac{\bar{h}}{|h|} \mathbb{1}_{\{|h| \geq \alpha\}}$. Montrer que $f_\alpha \in L^2(m)$ et que

$$\alpha\, m(\{|h| \geq \alpha\}) \leq T(f_\alpha) \leq C\, m(\{|h| \geq \alpha\}) \ .$$

En déduire que $h \in L^\infty(m)$ et que $\|h\|_\infty \leq C$.

(c) Montrer que :

$$\forall f \in L^1(m), \quad T(f) = \int f(t)h(t)dm(t) \ .$$

10. *Le dual de $L^\infty(\mathbb{R})$ n'est pas $L^1(\mathbb{R})$.*
Montrer que l'opérateur T défini sur $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ par $Tf = f(0)$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$. Que vaut sa norme? On prolonge T à l'espace $L^\infty(\mathbb{R})$ grâce au théorème de Hahn-Banach. Existe-t-il une fonction $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall f \in L^\infty(\mathbb{R}), \quad Tf = \int f(x)g(x)dx \ ?$$

11. Montrer que $L^\infty(\mathbb{R})$ n'est pas séparable pour retrouver que $L^1(\mathbb{R})$ n'est pas reflexif.

12. Soient p et r deux réels dans $[1, +\infty[$. On note q l'exposant conjugué de p. Soit T une application linéaire continue de $L^p(]0,1[)$ dans $L^r(]0,1[)$. Montrer qu'il existe K définie sur $]0,1[^2$ telle que pour tout x l'application $y \mapsto K(x,y)$ soit dans $L^q(]0,1[)$ et pour laquelle :

$$\forall f \in L^p(]0,1[) \ , \quad \forall x \in]0,1[\quad \int_0^x Tf(y)dy = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy \ .$$

13. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et T la forme linéaire sur $L^\infty(\mathbb{R})$ définie par $T(g) = \int g(t)f(t)dt$. Montrer que pour toute suite g_n dans $L^\infty(\mathbb{R})$ décroissant presque partout vers 0, la suite $T(g_n)$ converge vers 0 (propriété P). En fait on peut montrer (cf Hirsch Lacombe, Eléments d'Analyse Fonctionnelle page 142) que les formes linéaires continues sur L^∞ vérifiant la propriété (P) sont exactement celles qui se représentent à l'aide d'un élément de $L^1(\mathbb{R})$.

14. Soit $\mathcal{F}'$ une sous tribu d'une tribu $\mathcal{F}$ et m une mesure sur $\mathcal{F}$. On note m' la restriction de m à $\mathcal{F}'$. On suppose que m' est σ-finie et on fixe $p \in]1, +\infty]$. Démontrer que pour tout $f \in L^p(m)$, il existe un unique $\widetilde{f} \in L^p(m')$ tel que pour tout $A \in \mathcal{F}'$ de mesure finie on ait :

$$\int_A f dm = \int_A \widetilde{f} dm' \ .$$

(considérer $g \in L^q(m') \mapsto \int g f dm$ et se souvenir que les fonctions étagées intégrables sont denses dans $L^q(m')$).

15. Reprendre l'exercice précédent lorsque $p = 1$ en utilisant la remarque de la fin de l'exercice 13 (attention à l'argument d'unicité).

16. Avec les notations des exercices 14 et 15 on pose $T_p(f) = \widetilde{f}$. Montrer que T_p est linéaire continue de $L^p(m)$ dans $L^p(m')$ de norme ≤ 1. Décrire T_2.

17. On reprend les notations des exercices précédents et on suppose que la mesure m est une probabilité. On propose alors une autre construction de l'opérateur T_1. Décrire T_2. Montrer qu'agit aussi continuement entre $L^2(m)$ et $L^1(m')$. En déduire qu'il se prolonge en un opérateur continu T_1 de $L^1(m)$ sur $L^1(m')$. Montrer que T_1 vérifie encore :
$$\forall A \in \mathcal{F}', \quad \int_A f\, dm = \int_A T_1 f\, dm' .$$
Que représente l'opérateur T_1 ?