Quelques questions complémentaires au problème d'Analyse 96

On reprend les notations du problème d'Analyse 96 et on cherche à compléter la première partie par des exemples en dimension infinie.

1. Soit F un espace de Banach et E un sous-espace vectoriel de F. Montrer que $\pi(E,F) < +\infty$ si et seulement si E est fermé et possède un supplémentaire fermé dans F (penser au théorème du graphe fermé).

Remarque. La question III 4 °) du problème fournit l'exemple d'un sous-espace fermé d'un espace de Banach qui ne possède pas de supplémentaire fermé.

2. Dans cette question, H désigne un espace de Hilbert et $(e_n)_{n\geq 1}$ est une base orthonormée de H. On pose :

$$E = \overline{\mathrm{vect}\,\{e_{2n},\ n \geq 1\}} \quad \text{et} \quad E_1 = \overline{\mathrm{vect}\,\{e_{2n} + e_{2n-1}/n,\ n \geq 1\}}\ .$$

   Si $F = E + E_1$, établir que la somme est directe. Montrer que p_{E,E_1} n'est pas continue, bien que E et E_1 soient des sous-espaces fermés supplémentaires de F.

3. Soit $F = E \oplus E_1$ une décomposition de l'espace vectoriel normé F en deux sous-espaces supplémentaires. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que p_{E,E_1} est continu si et seulement si E_1 est fermé.

Remarque. La partie II permet de conclure que si E est un sous-espace de dimension n de l'e.v.n. F, il possède un supplémentaire fermé et vérifie même $\pi(E,F) \leq n$.

Pour les courageux qui souhaitent retravailler la partie IV, donnons les quelques indications suivantes.

Dans la question 5 °), on pourra d'abord montrer que l'encadrement $q \leq \|\ \|_\infty^2 \leq Cq$ n'est possible que si $C \geq n$ puis discuter le cas $C = n$ pour obtenir la valeur de q_N (c'est une façon de procéder).

Dans la question 7 °), on pourra associer à toute norme N sur $\mathbb{R}^n$, la norme N^* définie par :

$$N^*(x) = \sup_{N(y)\leq 1} (x|y) = \sup_{N(y)\leq 1} |(x|y)|\ ,$$

où $(\ |\ )$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.