EXERCICES DE PROBABILITES

Fonctions de répartition

1. Soit X une variable aléatoire strictement positive. On pose $r(x) = P(X > x)$. On suppose que pour tout $x > 0$ tel que $r(x) > 0$ et pour tout $y > 0$, on a $P(X > x + y | X > x) = P(X > y)$. Calculer $r(x)$ et donner la loi de X. Etudier la réciproque.

2. On dit que la variable aléatoire réelle X suit une loi de Pareto de paramètre $\alpha > 0$ si
$$\forall x \geq 1, \quad P(X > x) = x^{-\alpha} \ . \tag{1}$$
   (a) Montrer que la propriété (**??**) caractérise effectivement la loi de X. Montrer que X suit une loi à densité et préciser cette densité.

   (b) Pour quelles valeurs de α la variable X est-elle d'espérance finie?

   (c) Dans cette question, X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Pareto de paramètre α. On note dP_Y la loi de Y. Montrer que si $t \geq 1$,
$$P(XY > t) = \int_1^{+\infty} P\left(X > \frac{t}{y}\right) dP_Y(y) \ .$$
   En déduire que $P(XY > t) = t^{-\alpha}(1 + \alpha \ln t)$.

   (d) Soit U de loi uniforme sur $[0, 1]$. Trouver G telle que $G(U)$ suive une loi de Pareto de paramètre α.

3. Soit U suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$.

   (a) Décrire G telle que $G(U)$ suive une loi de Poisson.

   (b) Calculer la fonction de répartition d'une loi de Cauchy. En déduire une fonction G telle que $G(U)$ suive une loi de Cauchy.

   (c) Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F continue. Quelle est la loi de $F(X)$?

4. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi de Cauchy $\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx$.

   (a) Montrer que le produit $Z = XY$ a pour loi $\frac{2 \ln |z|}{\pi^2(z^2-1)}$.

   (b) Calculer la fonction de répartition de $\ln |X|$. En déduire que $\ln |X|$ a pour densité :
$$f(x) = \frac{1}{\pi \operatorname{ch} x} \ .$$
   (c) Déduire du (a) que :
$$f * f(x) = \frac{2x}{\pi^2 \operatorname{sh} x} \ .$$

Fonctions caractéristiques

5. (a) Soit X de loi $\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}dx$. Calculer sa fonction caractéristique. En déduire la fonction caractéristique de Y lorsque Y suit une loi de Cauchy $C(\lambda) = \frac{\lambda}{\pi(y^2+\lambda^2)}dy$.

   (b) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes respectivement de loi $C(\lambda)$ et $C(\mu)$. Montrer que si α et β sont deux réels strictement positifs, $\alpha X + \beta Y$ suit une loi $C(\alpha\lambda + \beta\mu)$.

   (c) Soit X une variable aléatoire réelle symétrique. Montrer que sa fonction caractéristique est paire et réelle. On suppose de plus que si α et β sont deux réels strictement positifs et Y indépendante de X et de même loi, $\alpha X + \beta Y$ a même loi que $(\alpha + \beta)X$. Montrer que X suit une loi de Cauchy.

6. Soit X une variable aléatoire réelle. On note Φ_X sa fonction caractéristique. Les quatre questions sont indépendantes.

   (a) Montrer que si la loi de X vaut $dP_X(x) = c\mathbf{1}_{\{|x|>2\}}\frac{dx}{x^2 \ln|x|}$ (c choisi de telle sorte que la masse totale de la mesure soit égale à 1), Φ_X est dérivable en 0 bien que $E[|X|] = +\infty$.

   (b) On suppose dans cette question que X est telle que la quantité

$$\frac{\Phi_X(h) + \Phi_X(-h) - 2\Phi_X(0)}{h^2}$$

   possède une limite lorsque $h \to 0$. Montrer que X possède un moment d'ordre 2 et que Φ_X est de classe C^2. Justifier que c'est en particulier le cas dès que $\Phi''_X(0)$ existe.

   (c) Soit $\lambda \neq 0$. Montrer qu'il y a équivalence entre

      (i) $\Phi_X(\lambda) = 1$

      (ii) Φ_X est λ-périodique

      (iii) la loi de X ne charge que les points $2k\pi/\lambda$, $k \in \mathbb{Z}$.

   (d) On suppose que X possède un moment d'ordre 2 et on note σ^2 sa variance. On suppose de plus que si Y est indépendante de X et de même loi, alors $(X+Y)/\sqrt{2}$ a même loi que X. Montrer que X est d'espérance nulle et écrire un développement limité de Φ_X à l'ordre 2 en 0. Montrer que

$$\forall n \geq 1, \quad \left[\Phi_X\left(\frac{t}{2^{n/2}}\right)\right]^{2^n} = \Phi_X(t) \ .$$

   En déduire que X suit une loi normale dont on précisera les paramètres.

Le lemme de Borel Cantelli

7. Soit X_n une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées de loi de Bernoulli de paramètre p. Soit s une suite finie de 0 et de 1. Montrer que s apparaît presque sûrement une infinité de fois dans la suite des X_n.

8. Soient X_n une suite de variables aléatoires réelles et a un réel. Comparer les événements $\limsup\{X_n \geq a\}$ et $\{\limsup X_n \geq a\}$.

9. Soit X_i une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que :

$$\limsup_{i\to+\infty} \frac{X_i}{\sqrt{\log i}} = \sqrt{2} \quad p.s.$$

Indication : on donnera d'abord un équivalent quand a tend vers $+\infty$ de $P(X > a)$.

10. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout entier $n \geq 1$, soit

$$Z_n = \frac{1}{\ln(n)} \sup\{X_1, \ldots X_n\}.$$

(a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\liminf Z_n \geq 1 - \varepsilon$ p.s.

(b) Montrer que pour k bien choisi, $\limsup Z_{n^k} \leq 1 + \varepsilon$ p.s.

(c) En déduire que $Z_n \stackrel{p.s.}{\to} 1$.

Convergence en probabilités, convergence presque-sûre

11. Soient X_n une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ qui converge en probabilité vers X et soit Y une variable réelle.

(a) Montrer que YX_n converge en probabilité.

(b) Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $f(X_n)$ converge en probabilité (on pourra commencer par regarder le cas où f est uniformément continue).

12. Soient X_n une suite de variables aléatoires réelles indépendantes telles que

$$P(X_n = 1) = \frac{1}{n} \text{ et } P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

(a) Montrer que X_n converge vers 0 en probabilité.

(b) Soit $A_n = \{X_n = 1\}$. Montrer que $P(\limsup A_n) = 1$, en déduire que X_n ne converge pas presque sûrement vers 0. Montrer plus précisément que presque sûrement, $\limsup_{n\to\infty} X_n = 1$ et $\liminf_{n\to\infty} X_n = 0$.

(c) Trouver une sous-suite n_k telle que X_{n_k} converge presque sûrement.

13. Soit X_n une suite de variables aléatoires de loi $\frac{1}{n^2}\delta_{n^2} + (1 - \frac{1}{n^2})\delta_0$. Montrer que la suite X_n converge presque surement mais pas au sens L^1.

14. Soient X_n une suite de variables aléatoires réelles. Montrer que s'il existe une suite $a_n > 0$ telle que $\sum a_n < \infty$ et $\sum P[|X_{n+1} - X_n| > a_n] < \infty$, alors X_n converge presque sûrement.

15. Dans tout l'exercice, $(X_n)_{n\geq 1}$ désigne une suite de variables aléatoires vérifiant $0 \leq X_n \leq 1$ presque-sûrement. On pose

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n \ .$$

   (a) Montrer que S_n converge presque sûrement vers une variable aléatoire S à valeurs dans $[0, +\infty]$.

   (b) On suppose que la série $\sum_{n\geq 1} E[X_n]$ converge. Montrer que S est d'espérance finie.

   (c) On suppose dans cette question que les X_n sont indépendantes et que la série $\sum_{n\geq 1} E[X_n]$ diverge. On pose $T_n = \frac{S_n}{E[S_n]}$.

      i. Montrer que la variance de S_n vérifie $\mathrm{Var}\,(S_n) \leq E[S_n]$.

      ii. Montrer que la suite T_n converge en probabilités vers 1.

      iii. En déduire que $S = +\infty$ presque sûrement.

      iv. On cherche à préciser le résultat de la question (c) ii. Pour cela, on introduit

$$n_k = \inf\{n \ ; \ E[S_n] \geq k^2\} \ .$$

      Montrer que la sous-suite T_{n_k} converge presque sûrement vers 1 pour ensuite conclure que la suite T_n converge presque sûrement vers 1.

   (d) On suppose que $X_n = 1\!\!1_{A_n}$ où $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'événements. Interpréter les conclusions des questions (b) et (c) iii.

16. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes vérifiant $P[X_n = 1] = 1/2$ et $P[X_n = -1] = 1/2$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^{-1/2} X_k$.

   (a) Calculer la fonction caractéristique Φ_{S_n} de la variable aléatoire S_n. Montrer que $\Phi_{S_n}(t)$ converge vers 0 pour tout réel t différent de 0.

   (b) Montrer que

$$|\Phi_{S_{n+p}-S_n}(t) - 1| \leq |t| + 2P[|S_{n+p} - S_n| \geq 1] \ .$$

   (c) En déduire l'existence d'une sous-suite $(n_k)_{k\geq 1}$ telle que pour tout $k \geq 1$,

$$P[|S_{n_{k+1}} - S_{n_k}| \geq 1] \geq \frac{1}{4} \ .$$

   (d) Montrer que la suite S_n est presque sûrement divergente.

Loi des grands nombres

17. Soit $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ une suite de variables aléatoires réelles possédant des variances finies. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. On dit que la suite (X_n) satisfait à la loi faible des grands nombres si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P[|\frac{S_n - E(S_n)}{n}| \geq \varepsilon] = 0.$$

Montrer que dans les deux cas suivants, la suite (X_n) satisfait la loi faible des grands nombres :

   (a) On suppose que la suite des nombres $\{\mathrm{var}(X_n), n \geq 1\}$ est bornée et que, pour tout $i < j$, $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = 0$.

(b) On suppose que la suite des nombres $\{\text{var}(X_n), n \geq 1\}$ est bornée et que, pour tout $n \geq 1$, X_n dépend de X_{n-1} et de X_{n+1}, mais est indépendante des autres X_k.

18. Il s'agit de montrer qu' étant donnée une fonction f, continue sur $[0,1]$, la suite des polynômes

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}$$

converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

(a) Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre x. Soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Rappeler la loi de S_n et déterminer $E(f(\frac{S_n}{n}))$.

(b) Déduire de la loi forte des grands nombres la convergence simple de P_n vers f.

(c) Démontrer la convergence uniforme sur $[0,1]$ de P_n vers f : pour cela, distinguer les événements $|\frac{S_n - nx}{n}| \geq \varepsilon$ et $|\frac{S_n - nx}{n}| \leq \varepsilon$, ε étant convenablement choisi, puis utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev pour le premier événement et la continuité uniforme de f pour le second.

19. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, bornée dans L^4. Montrer que $\frac{S_n - E[S_n]}{n}$ converge presque-sûrement vers 0.

20. Soit X_n une suite de variables aléatoires indépendantes de loi normale centrée réduite. Donner un équivalent de $P[|S_n/n| > \varepsilon]$ lorsque $n \to \infty$. Calculer $\ln E[e^{tX_1}]$ puis sa transformée de Legendre. Comparer l'équivalent trouvé avec l'estimation donnée par les inégalités de grandes déviations.

21. Soit X_n une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Soient $\alpha < 1$ et $\varepsilon > 0$. Donner $n = n(\alpha, \varepsilon)$ tel que $P[|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}| > \varepsilon] < \alpha$. On comparera les résultats obtenus en utilisant l'inégalité de Tchebytchev et les grandes déviations.

22. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Cauchy de paramétre a. Quelle est la loi de $\frac{S_n}{n}$? Pourquoi ce résultat ne contredit-il pas la loi des grands nombres?

Convergence en loi

23. Soit X_n une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle. Soit f une fonction continue, montrer que si X_n converge en loi vers X, $f(X_n)$ converge en loi vers $f(X)$.

24. On considère deux suites de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ telles que X_n et Y_n convergent en loi.

(a) Montrer qu'en général (X_n, Y_n) ne converge pas en loi vers (X, Y).

(b) Montrer que si X_n converge en loi vers une constante, alors X_n converge en probabilité vers cette constante.

(c) Montrer que si X_n converge en loi vers une constante alors (X_n, Y_n) converge en loi.

(d) Montrer que si X_n et Y_n sont indépendantes, (X_n, Y_n) converge en loi. Décrire sa limite.

25. On fixe $\theta \in [0, 2\pi[$. Pour tout $n \geq 1$, X_n est un point aléatoire sur le cercle unité uniformément distribué sur l'ensemble des points $\{(\cos k\theta, \sin k\theta),\ 1 \leq k \leq n\}$. Etudier la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$.

26. Soit a_n une suite de réels positifs et X_n une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $P[X_n = a_n] = P[X_n = -a_n] = 1/2$. On note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

    (a) Montrer que si S_n converge en loi, $\sum_n a_n^2$ converge.

    (b) On suppose maintenant que $\sum_n a_n^2$ diverge et que la suite a_n est bornée. On pose $\varphi^2(n) = \sum_{k=1}^n a_k^2$. Montrer que $S_n/\varphi(n)$ converge en loi.

27. Soit X_n une suite de variables aléatoires de loi normales $\mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$. Montrer que si X_n converge en loi vers une variable aléatoire X, celle-ci est constante ou suit une loi normale.

28. On se donne $\lambda > 0$ et pour tout entier $n \geq \lambda$ on considère la variable aléatoire $N_n = \frac{1}{n}\inf\{i\,;\ X_i^n = 1\}$ où $(X_i^n)_{i\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p_n = \lambda/n$. Montrer que la suite $(N_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle de loi exponentielle de paramètre λ.

29. Soit X_n une suite de variables aléatoires réelles qui converge en loi. Soit N_k une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendante de $(X_n)_{n\geq 1}$ et telle que N_k converge vers $+\infty$ en probabilité lorsque k tend vers l'infini (i.e. pour tout A, $\lim_{k\to\infty} P[N_k < A] = 0$). Montrer que $Z_k = X_{N_k}$ converge en loi.

30. Soit X_n une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, de même loi, d'espérance nulle et de variance σ^2 finie. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

    (a) Soit f une fonction réelle continue, telle que $|f(x)| \leq \varepsilon(x)x^2$, où ε est une fonction tendant vers 0 à l'infini. Montrer que
    $$\lim_{n\to\infty} E\left[f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right] = E[f(X)]\ .$$

    (b) On suppose que la loi commune est la loi de Poisson de paramètre 1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $x^- = |x|\mathbf{1}_{x<0}$. Calculer $E[Z_n^-]$ où $Z_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$. Retrouver alors la formule de Stierling.

31. Dans tout l'exercice, $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles de même loi.

    (a) Soit X une variable aléatoire réelle. Montrer que
    $$E[|X|] = \int_0^{+\infty} P[|X| \geq u]du \leq +\infty\ .$$
    En déduire que X est d'espérance finie si et seulement si $\sum_n P[|X| \geq n]$ converge.

(b) On suppose $E[|X_1|] < +\infty$. Montrer que $\frac{X_n}{n}$ converge presque-sûrement vers 0.

(c) On note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et on suppose que les variables aléatoires X_n sont indépendantes et telles que $E[|X_1|] = +\infty$. Montrer que $\limsup_{n\to\infty} \frac{|X_n|}{n} = +\infty$ presque-sûrement, bien que $\frac{X_n}{n}$ converge en probabilité vers 0. En exprimant $\frac{X_n}{n}$ à l'aide de $\frac{S_n}{n}$ et de $\frac{S_{n-1}}{n-1}$, établir que $\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{n} = +\infty$ presque-sûrement.

(d) On cherche à préciser le comportement de $\frac{S_n}{n}$ dans un cas particulier. On suppose que les X_n sont indépendantes et admettent pour densité $f(x) = \frac{1}{2x^2}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(|x|)$.

i. Vérifier que $f(x)$ est bien une densité de probabilité et que $E[|X_1|] = +\infty$.

ii. Montrer que la fonction caractéristique Φ_{X_1} de X_1 est paire, à valeurs réelles et qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $\Phi_{X_1}(t) = 1 - \lambda|t| + o(t)$ lorsque $t \to 0$.

iii. Montrer que $\frac{S_n}{n}$ converge en loi vers une loi de Cauchy de paramètre λ.

iv. Montrer que si $\alpha > 0$, la suite $\frac{S_n}{n^{1+\alpha}}$ converge en probabilité vers 0.

32. Soit $p \in]0,1[$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes vérifiant

$$P[X_n = 1] = p \text{ et } P[X_n = -1] = 1 - p\ .$$

On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $S_0 = 0$. On note $N = \text{Card}\,\{n \geq 1\ ;\ S_n = 0\}$.

(a) Décrire la loi de S_n. Calculer son espérance et sa variance?

(b) Montrer que la suite S_n/n converge presque sûrement lorsque $n \to \infty$. Préciser sa limite. En déduire que si $p \neq 1/2$, la variable aléatoire N est finie presque sûrement.

On suppose dorénavant que $p = 1/2$.

(c) Pour $n \geq 1$, on note $A_n = \{S_{2n} = 0 \text{ et } \forall k > 2n,\ S_k \neq 0\}$. On remarquera que les A_n sont deux à deux disjoints.

i. Montrer que $P[A_n] = P[S_{2n} = 0]P[N = 0]$.

ii. Donner un équivalent de $P[S_{2n} = 0]$ lorsque $n \to +\infty$ (on rappelle que $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$).

iii. Déduire de ce qui précède que $N \geq 1$ presque sûrement.

On cherche à montrer que $N = +\infty$ presque sûrement et à préciser le comportement asymptotique de la suite S_n.

(d) On note $Z_k = (S_{2^{k+1}} - S_{2^k})/\sqrt{2^k}$.

i. Prouver que Z_k a même loi que $S_{2^k}/\sqrt{2^k}$. En déduire que pout tout réel M, la suite $P[Z_k \geq M]$ converge lorsque k tend vers $+\infty$. Préciser sa limite.

ii. Montrer que $P[\sup_k Z_k \geq M] = 1$ pour tout M, puis que $P[\sup_k |Z_k| = +\infty] = 1$. En déduire que

$$P\left[\sup_{n\geq 1}\left|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right| = +\infty\right] = 1\ .$$

(e) On note $Z^+ = \sup_n S_n/\sqrt{n}$ et $Z^- = \inf_n S_n/\sqrt{n}$.

i. Montrer que si n et A sont deux entiers strictement positifs

$$\begin{aligned} P[Z^+ = +\infty \quad & \text{et} \quad \forall k \leq n, \quad S_k/\sqrt{k} \leq A] \\ & = \quad P[Z^+ = +\infty]P[\forall k \leq n, \quad S_k/\sqrt{k} \leq A] \ . \end{aligned}$$

ii. En déduire que les événements $\{Z^+ = +\infty\}$ et $\{Z^+ < +\infty\}$ sont indépendants puis que l'événement $\{Z^+ = +\infty\}$ est de probabilité 0 ou 1.

iii. Montrer que $P[Z^+ = +\infty] = P[Z^- = -\infty] = 1$. En déduire que N est presque sûrement infinie.