SERIES DE FOURIER

Les lignes qui suivent suggèrent ce que pourrait être le plan d'un cours de base sur les séries de Fourier (exemples exclus). Les paragraphes 1, 2 et 3 doivent être considérés comme le minimum à connaître sur le sujet. Les paragraphes 4, 5, 6 et 7 décrivent des résultats plus difficiles et peuvent être négligés en première lecture.

1 Introduction

1.1 Une remarque préliminaire

Proposition 1.1 *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille sommable de nombres complexes. Posons :*

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx} \ .$$

Alors, f est une fonction continue, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ et vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt \ .$$

Cette proposition suggère d'introduire pour toute fonction f localement intégrable et 2π-périodique ses coefficients de Fourier :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt \ .$$

Les $\hat{f}(n)$ constituent *l'analyse* de f. La théorie va alors chercher à donner des conditions permettant de reconstituer f (en un sens à préciser) à l'aide de ses coefficients de Fourier. On parle alors de *synthèse*. On posera :

$$S_n f(x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikx} \ .$$

1.2 Les espaces en présence

Pour $1 \leq p \leq +\infty$, on introduit l'espace $\mathcal{L}^p_{2\pi}$ des fonctions 2π-périodiques f dont la restriction à $[0, 2\pi]$ est dans l'espace $\mathcal{L}^p([0, 2\pi], dx)$ où dx est la mesure de Lebesgue. On notera $L^p_{2\pi}$ l'espace quotient correspondant.

Si $1 \leq p < +\infty$, on pose pour $f \in \mathcal{L}^p_{2\pi}$, $\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$.

Si $p = \infty$ et $f \in \mathcal{L}^\infty_{2\pi}$, on note $\|f\|_\infty = \sup \mathrm{ess}_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$.

Enfin, on introduit l'espace $\mathcal{C}_{2\pi}$ des fonctions continues 2π-périodiques qu'on munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et son sous-espace naturel $\mathcal{P}$ constitué des polynômes trigonométriques.

Les espaces ainsi définis sont naturellement emboités les uns dans les autres. Plus précisément, si $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq +\infty$, on a :

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{C}_{2\pi} \subset \mathcal{L}^\infty_{2\pi} \subset \mathcal{L}^{p_2}_{2\pi} \subset \mathcal{L}^{p_1}_{2\pi} \subset \mathcal{L}^1_{2\pi} \quad \text{et} \quad \|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_{p_1} \leq \|\cdot\|_{p_2} \leq \|\cdot\|_\infty \ .$$

L'outil clé de la théorie est à mon sens ce qu'on appelle le *principe de continuité des translations.* Si $f \in \mathcal{L}^1_{2\pi}$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $\tau_x f$ la fonction $t \mapsto f(t-x)$. On peut alors dégager l'énoncé suivant :

Théorème 1.1 ([3])

1. *Si $1 \leq p < +\infty$, l'espace $(L^p_{2\pi}, \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach. L'espace $\mathcal{C}_{2\pi}$ en constitue un sous-espace dense. Pour tout $f \in L^p_{2\pi}$, l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto \tau_x f \in L^p_{2\pi}$ est uniformément continue. Plus précisément, la quantité $\|\tau_{x+h} f - \tau_x f\|_p$ est indépendante de x et converge vers 0 lorsque $h \to 0$.*

2. *L'espace $(L^\infty_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach. L'espace $\mathcal{C}_{2\pi}$ en constitue un sous espace fermé. En général, pour $f \in L^\infty_{2\pi}$, l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto \tau_x f \in L^\infty_{2\pi}$ n'est pas continue. Plus précisément, elle l'est si et seulement si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ (avec les identifications qui s'imposent).*

1.3 L'algèbre $L^1_{2\pi}$

Théorème 1.2 ([3])

1. *Si $f \in \mathcal{L}^1_{2\pi}$, la suite $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ appartient à l'espace $C_0(\mathbb{Z})$ des suites indexées par $\mathbb{Z}$ et tendant vers 0 à l'infini.*

2. *Si $f, g \in \mathcal{L}^1_{2\pi}$, on pose : $f * g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt$. La fonction $f * g$ est définie pour presque tout x, appartient à $\mathcal{L}^1_{2\pi}$ et vérifie :*

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \, \|g\|_1 \quad \textit{et} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \ , \ \widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n)\, \hat{g}(n) \ .$$

3. *L'espace $(L^1_{2\pi}, +, \cdot, *, \|\cdot\|_1)$ est une algèbre de Banach sans unité et l'application :*

$$f \in (L^1_{2\pi}, +, \cdot, *, \|\cdot\|_1) \longmapsto (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in (C_0(\mathbb{Z}), +, \cdot, \cdot, \|\cdot\|_\infty)$$

est un morphisme d'algèbres continu.

Remarque 1.3 Avec les notations introduites plus haut, on a :

$$\forall f \in \mathcal{L}^1_{2\pi} \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \ , \quad S_n f(x) = D_n * f(x) \ \text{ où } \ D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{\sin\left((n+1/2)t\right)}{\sin\left(t/2\right)} \ .$$

Le noyau D_n est appelé noyau de Dirichlet. Son handicap est qu'il n'est pas positif ; il ne constitue pas une *approximation de l'unité*. C'est pour cela qu'en général, la suite $S_n f$ a un mauvais comportement lorsque $n \to +\infty$. Le noyau de Fejer va remédier à cette difficulté.

2 Convergence en moyenne

Si $f \in \mathcal{L}^1_{2\pi}$, et $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sigma_n f(x) = \frac{S_0 f(x) + \ldots + S_n f(x)}{n+1} \ .$$

Ainsi, $\sigma_n f(x) = K_n * f(x)$, où $K_n = \frac{1}{n+1}(D_0 + \ldots + D_n)$. Un calcul montre que :

$$K_n(x) = \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{(n+1)\ \sin^2(x/2)} \ .$$

Le noyau K_n est appelé noyau de Fejer. Il constitue une approximation de l'unité. On a alors le théorème fondamental suivant :

Théorème 2.1 ([3], [5], [7])

1. *Si $f \in \mathcal{L}^1_{2\pi}$, $\sigma_n f$ converge vers f dans $\mathcal{L}^1_{2\pi}$. C'est à dire $\lim_{n\to+\infty} \|\sigma_n f - f\|_1 = 0$.*
2. *Plus généralement, si $1 \leq p < +\infty$ et si $f \in \mathcal{L}^p_{2\pi}$, $\sigma_n f$ converge vers f dans $\mathcal{L}^p_{2\pi}$.*
3. *Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, $\sigma_n f$ converge uniformément vers f.*
4. *Si $x_0 \in \mathbb{R}$ et si $f \in \mathcal{L}^1_{2\pi}$ et possède des limites à gauche et à droite en x_0 notées $f(x_0^-)$ et $f(x_0^+)$, $\sigma_n f(x_0)$ converge vers $\frac{1}{2}(f(x_0^-) + f(x_0^+))$.*

Corollaire 2.2

1. *Les polynômes trigonométriques sont denses dans l'espace $L^1_{2\pi}$ (et aussi dans les espaces $L^p_{2\pi}$, $1 \leq p < +\infty$).*
2. *Si $f \in \mathcal{L}^1_{2\pi}$ et si $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\hat{f}(n) = 0$, alors $f = 0$ presque partout.*

3. *En particulier, si* $f \in \mathcal{L}^1_{2\pi}$ *et si* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{f}(n)\right| < +\infty$, *alors* $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)e^{inx}$ *pour presque tout* x.

Corollaire 2.3 *Les polynômes trigonométriques sont denses dans* $(\mathcal{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ *(c'est un cas particulier du théorème de Stone-Weierstrass).*

Corollaire 2.4 *Soit* $x_0 \in \mathbb{R}$ *et* f *continue en* x_0 *; si* $S_n f(x_0)$ *converge, ça ne peut être que vers* $f(x_0)$. *En particulier, si* $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ *et si* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{f}(n)\right| < +\infty$, *on a :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)e^{inx} \ .$$

Remarque 2.5 Le corollaire 2.2 nous dit que l'application $f \mapsto (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ entre $L^1_{2\pi}$ et C_0 est injective. On peut montrer à l'aide du théorème d'isomorphisme de Banach qu'elle n'est pas surjective.

Le problème de la convergence de $S_n f$ (en un sens à préciser) est beaucoup plus délicat à aborder et nécessite souvent des *hypothèses de régularité* supplémentaires. L'objet des paragraphes qui suivent est de décrire les résultats de base (positifs et négatifs) à ce sujet.

3 Convergence de $S_n f$

3.1 La théorie L^2

C'est la situation la plus simple. Il faut voir l'appartenance à $L^2_{2\pi}$ comme une propriété de régularité par rapport à l'appartenance à $L^1_{2\pi}$ ($L^2_{2\pi} \subset L^1_{2\pi}$). On a l'énoncé suivant :

Théorème 3.1 ([4])

1. *La norme* $\|\cdot\|_2$ *dans* $L^2_{2\pi}$ *est issue du produit scalaire :*

$$< f \mid g >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\bar{g}(t)dt \ .$$

L'espace $L^2_{2\pi}$ *est alors un espace de Hilbert.*

2. *La famille* $\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *est une base orthonormée de* $L^2_{2\pi}$.

3. *Si* $f \in L^2_{2\pi}$, $S_n f$ *s'interprète comme étant la projection orthogonale de* f *sur l'espace* $\mathcal{P}_n$ *des polynômes trigonométriques de degré au plus* n. *Ainsi,* $\|S_n f - f\|_2$ *minimise dans l'espace* $L^2_{2\pi}$ *la distance de* f *à l'ensemble des polynômes de degré au plus* n . *La suite* $S_n f$ *converge vers* f *dans* $L^2_{2\pi}$ *et on a :*

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(n)\right|^2 \ .$$

Cette dernière identité est connue sous le nom d'égalité de Parseval.

Proposition 3.1 *Réciproquement, si* $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, *il existe une unique fonction* $f \in L^2_{2\pi}$ *telle que pour tout* $n \in \mathbb{Z}$, $\hat{f}(n) = a_n$. *Ainsi, l'application :*

$$f \in L^2_{2\pi} \longmapsto (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

est une isométrie bijective entre ces deux espaces de Hilbert.

Il faut insister sur le fait que la convergence de $S_n f$ vers f signifie uniquement :

$$\lim_{n\to+\infty} \|S_n f - f\|_2 = 0 \ ,$$

mais n'entraine à priori rien sur le comportement ponctuel de la suite $S_n f$.

Corollaire 3.2 ([1], [4]) *Si* f *est continue,* 2π*-périodique et* C^1 *par morceaux, on a la relation :*

$$\forall n \in \mathbb{Z}^* \quad \hat{f}(n) = \frac{1}{in}\widehat{f'}(n) \ .$$

Il s'en suit que la famille $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ *est sommable et que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{inx} \ .$$

En particulier, $S_n f$ *converge uniformément vers* f.

Corollaire 3.3 *Si* $f, g \in \mathcal{L}^2_{2\pi}$, $f * g \in \mathcal{C}_{2\pi}$ *et on a :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f * g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)\, \hat{g}(n)\, e^{inx} \ ,$$

la convergence étant normale sur $\mathbb{R}$.

Corollaire 3.4 (application à un problème de minimisation)
Si f *est de classe* C^1 *sur* $[0, \pi]$ *avec* $f(0) = f(\pi) = 0$, *on a :*

$$\int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_0^{\pi} |f'(x)|^2 dx \ ,$$

avec égalité si et seulement si f *est multiple de la fonction* sin.

3.2 Convergence ponctuelle

La question naturelle qui se pose concernant la convergence ponctuelle est la suivante : $S_n f(x_0)$ converge-t-il vers $f(x_0)$ lorsque f est continue en x_0 ? La réponse est négative. Plus précisément, le théorème de Banach-Steinhauss permet d'établir le :

Théorème 3.5 ([3], [6]) *Il existe un ensemble sous-ensemble dense de $(\mathcal{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ constitué de fonctions f telles que $S_n f(0)$ diverge.*

On peut aussi construire un exemple "explicite" de fonction continue f telle que $S_n f(0)$ diverge (voir [5]). Il va donc falloir rajouter une *hypothèse de régularité locale* pour assurer la convergence ponctuelle de $S_n f(x_0)$. C'est l'objet du résultat qui suit.

Théorème 3.6 (Critère de Diny, [5]) *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}^1_{2\pi}$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que la fonction $t \mapsto \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2a}{t}$ soit intégrable au voisinage de 0. Alors $S_n f(x_0)$ converge vers a lorsque $n \to +\infty$.*

Exemple 3.7 Le théorème 3.6 s'applique lorsque f possède une limite à gauche et à droite en x_0 ainsi que des demi-tangentes non verticales en ce point. Dans ce cas, $S_n f(x_0)$ converge vers $\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$. On parle alors de la règle de Dirichlet. •

Exemple 3.8 Si f est continue en x_0 et si $|f(x_0+h) - f(x_0)| \leq C|h|^\alpha$ au voisinage de $h = 0$, $S_n f(x_0)$ converge vers $f(x_0)$. •

3.3 Convergence L^1

En général, lorsque $f \in L^1_{2\pi}$, $S_n f$ ne converge pas vers f dans $L^1_{2\pi}$. Ainsi, la théorie L^1 est moins simple que la théorie L^2. C'est du reste pour cela que l'on introduit la notion de convergence en moyenne. Le théorème de Banach-Steinhauss permet même d'établir :

Théorème 3.9 ([6])*Il existe un $\mathcal{G}_\delta$ dense de fonctions $f \in L^1_{2\pi}$ telles que la suite $\|S_n f\|_1$ soit non bornée. Dans ce cas, $S_n f$ diverge dans $L^1_{2\pi}$.*

4 Principe de localisation uniforme

Le théorème 3.7 indique que le comportement de $S_n f(x_0)$ ne dépend que de l'allure locale de f au voisinage de x_0. Il existe une *version uniforme* de ce principe.

Théorème 4.1 (Principe de localisation uniforme, [3]) *Soient $f \in \mathcal{L}^1_{2\pi}$ et $]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose que f est identiquement nulle sur $]a, b[$. Alors, $S_n f$ converge uniformément sur tout compact de $]a, b[$ vers 0.*

Voici un exemple d'utilisation de ce résultat :

Exemple 4.2 Soit f une fonction 2π-périodique localement intégrable. On suppose que f est de classe C^1 sur un sous-intervalle $]a,b[$ de $\mathbb{R}$. Alors, $S_n f$ converge uniformément sur tout compact de $]a,b[$ vers f. $\bullet$

5 Problème de la convergence normale

Théorème 5.1 (Théorème de Bernstein, [2], [3])

1. *Soit $\alpha > 1/2$ et f une fonction 2π-périodique et α-höldérienne (c'est à dire telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ $|f(x) - f(y)| \leq cste\, |x-y|^\alpha$). Alors, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$ converge normalement vers f.*

2. *Il existe une fonction 1/2-höldèrienne f telle que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(n)\right| = +\infty$.*

L'exemple de la deuxième partie du théorème 5.1 peut être construit de la façon suivante.

Exemple 5.2 ([3]) On introduit les polynomes trigonométriques P_n et Q_n dits de Rudin Shapiro :

$$\begin{cases} P_0(x) = Q_0(x) = 1 \\ P_{n+1}(x) = P_n(x) + e^{2^n ix} Q_n(x) \\ Q_{n+1}(x) = P_n(x) - e^{2^n ix} Q_n(x) \ . \end{cases}$$

La fonction f définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}(P_{n+1}(x) - P_n(x))$ est alors une fonction continue 2π-périodique 1/2-höldérienne et telle que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(n)\right| = +\infty$. On peut remarquer cependant à l'aide du théorème 6.1 que $S_n f$ converge uniformément vers f. $\bullet$

Le contrôle du module de continuité de la fonction f se fait en utilisant le lemme suivant.

Lemme 5.3 (Inégalité de Bernstein, [5])

$$\forall n \geq 0, \quad \forall P \in \mathcal{P}_n, \qquad \|P'\|_\infty \leq n \|P\|_\infty \ .$$

6 Problème de la convergence uniforme

Le théorème 3.6 nous dit qu'en général, lorsque f est continue, $S_n f$ ne converge pas uniformément vers f. On va donner une condition suffisante portant sur le module de continuité de f assurant la convergence uniforme de $S_n f$ vers f.

Théorème 6.1 (Théorème de Diny-Lipschitz, [5], [8]) *Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et soit ω un module de continuité de f. Si $\omega(h)$ est négligeable devant $|\log|h||^{-1}$ au voisinage de 0, $S_n f$ converge uniformément vers f.*

La démonstration de ce théorème est basé sur le :

Lemme 6.2 *Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et $n \geq 2$ on a :*

$$\|S_n f - f\|_\infty \leq (1 + \|D_n\|_1) \|\sigma_n f - f\|_\infty \leq (1 + C.\log n)\|\sigma_n f - f\|_\infty ,$$

où C est une constante indépendante de n.

7 Le cas des fonctions à variations bornées

Notons $\mathcal{V}_{2\pi}$ l'espace des fonctions 2π-périodiques et à variations bornées sur $[0, 2\pi]$. Lorsque $f \in \mathcal{V}_{2\pi}$, le comportement de la série de Fourier de f est encore remarquable. On a l'énoncé suivant :

Théorème 7.1 ([7], [8]) *Soit $f \in \mathcal{V}_{2\pi}$. On a :*

1. *$S_n f$ converge vers f dans $L^1_{2\pi}$.*
2. *Pour tout point $x_0 \in \mathbb{R}$, $S_n f(x_0)$ converge vers $(f(x_0^+) + f(x_0^-))/2$.*
3. *Si de plus, f est continue sur $\mathbb{R}$, $S_n f$ converge uniformément vers f.*

Ce résultat est une conséquence simple des deux lemmes suivants :

Lemme 7.2 *Soit $f \in \mathcal{V}_{2\pi}$. On a l'inégalité :*

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, \quad |\hat{f}(n)| \leq \frac{V_{[0,2\pi]}(f)}{2\pi\,|n|} ,$$

où $V_{[0,2\pi]}(f)$ désigne la variation de f sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Lemme 7.3 (Théorème tauberien de Hardy-Littlewood, [7]) *Soit E un espace de Banach et $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille d'éléments de E. On note $s_n = \sum_{k=-n}^{n} a_k$. on suppose que la suite $n\,a_n$ est bornée et que la suite de terme général :*

$$\sigma_n = \frac{s_0 + \ldots + s_n}{n+1}$$

converge vers ℓ dans E. Alors, s_n converge vers ℓ.

8 Références bibliographiques

[1] A.M. ARNAUDIES, H. FRAYSSE. *Compléments d'analyse ; Dunod (1989).*

[2] J.P. KAHANE. *Séries de Fourier absolument convergentes ; Springer-Verlag (1970).*

[3] Y. KATZNELSON. *An introduction to Harmonic Analysis ; Wiley (1968).*

[4] J. LELONG-FERRAND, J.M. ARNAUDIES. *Cours de Maths. tome 2 ; Dunod (1977).*

[5] H. QUEFFELEC, C. ZUILY. *Eléments d'Analyse pour l'Agrégation ; Masson (1995).*

[6] W. RUDIN. *Real and Complex Analysis Chapitre 5 ; Mc Graw Hill (1974).*

[7] E.C. TITSCHMARCH. *The Theory of Functions ; Oxford U. Press (1932).*

[8] A. ZYGMUND. *Trigonometric series ; Cambridge U. press (1968).*