Suites de fonctions holomorphes

1. *Théorème de Weierstrass.* Soit f_n une suite de fonctions holomorphes sur Ω convergeant uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction f. Montrer que f est holomorphe sur Ω et que pour tout ordre de dérivation p, la suite $f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout compact de Ω vers $f^{(p)}$.
   Indication : utiliser la formule de Cauchy.
   Interprétation : L'espace $H(\Omega)$ des fonctions holomorphes sur Ω est fermé dans $\mathcal{C}(\Omega)$ pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. L'application $f \mapsto f'$ est continue sur $H(\Omega)$ pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

2. *Propriété de Montel.* Soit f_n une suite de fonctions holomorphes sur Ω vérifiant la propriété suivante :

   $$(*) \qquad \forall K \text{ compact } \subset \Omega,\quad \exists C > 0\ ;\ \forall n \geq 0,\quad \forall z \in K,\quad |f_n(z)| \leq C\ .$$

   Montrer à l'aide de la formule de Cauchy que la suite f_n' est uniformément bornée sur tout disque fermé inclus dans Ω. En déduire qu'il existe une sous-suite de f_n convergeant uniformément sur tout compact de Ω.

3. Montrer que toute fonction holomorphe sur Ω est limite uniforme sur tout compact d'une suite de polynômes en z et $\bar{z}$.

4. On suppose que dans l'ouvert Ω, toute fonction holomorphe est limite uniforme sur tout compact d'une suite de polynômes en z. Montrer que Ω est simplement connexe (évaluer $\int_\gamma \frac{1}{\xi - z} d\xi$ pour tout point $z \notin \Omega$ et tout chemin γ tracé dans Ω).

5. Soit f_n une suite de fonctions holomorphes sur Ω convergeant simplement vers une fonction f. Montrer, en considérant la fonction $\Phi = \sup |f_n|$ et en utilisant la propriété de Baire, que dans tout ouvert $U \subset \Omega$, on peut trouver un disque sur lequel la suite f_n est bornée. En déduire qu'il existe un ouvert $\Omega' \subset \Omega$, dense dans Ω, sur lequel f est holomorphe.

6. *Théorème de Runge.* On cherche à démontrer le théorème suivant :

   Théorème. *Soit K un compact du plan tel que $\mathbb{C} \setminus K$ soit connexe et $F \in H(\Omega)$ où Ω est un voisinage de K. Alors, il existe une suite de polynômes P_n convergeant uniformément vers F sur K.*

   On peut noter que ce théorème permet de montrer la réciproque de l'énoncé de l'exercice 4.

On fixe donc un tel compact K non vide de $\mathbb{C}$. On considère deux fonctions f et g continues sur $[0,1]$ et telles que $g([0,1]) \subset \mathbb{C} \setminus K$. On note F la fonction définie dans $\mathbb{C} \setminus g([0,1])$ par $F(z) = \int_0^1 \frac{f(t)}{g(t)-z} dt$.

(a) Justifier que F est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus g([0,1])$. On note

$$F_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{f(j/n)}{g(j/n) - z} \ .$$

Montrer que la suite de fonction F_n converge uniformément vers F sur K.Pour $a \in \mathbb{C} \setminus K$, on note $R(a)$ l'espace vectoriel des fractions rationnelles ayant comme unique pôle le point a.

(b) Soient a et b deux points de $\mathbb{C} \setminus K$ tels que le disque fermé $\bar{D}(b,r)$ vérifie $a \in \bar{D}(b,r) \subset \mathbb{C} \setminus K$. Montrer, en utilisant un développement de Laurent dans une couronne convenable, que pour toute fonction $h \in R(a)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $k \in R(b)$ telle que $\sup_{z \in K} |h(z) - k(z)| \leq \varepsilon$. On dira alors que $R(b)$ approxime $R(a)$ sur K.

(c) En utilisant un argument de connexité, montrer que pour tout point $a \in \mathbb{C} \setminus K$, $R(b)$ approxime $R(a)$ sur K pour tout $b \in \mathbb{C} \setminus K$.

(d) Montrer que si $|a|$ est assez grand, pour toute fonction $h \in R(a)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme p tel que $\sup_{z \in K} |h(z) - p(z)| \leq \varepsilon$. Déduire de ce qui précède que la fonction F est limite uniforme sur K d'une suite de polynômes.

(e) Montrer le théorème de Runge en admettant le résultat suivant (voir Rudin, théorème 13.5) :

Théorème. *Si K est un compact de $\mathbb{C}$ et si F est une fonction holomorphe sur un voisinage Ω de K, on peut trouver un cycle γ dans $\Omega \setminus K$ tel que :*

$$\forall z \in K, \quad F(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \ .$$

7. Construire une suite de compacts K_n de $\mathbb{C}$ tels que les ensembles $\mathbb{C} \setminus K_n$ soient connexes et vérifient $\bigcup_n K_n = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En déduire que la fonction $1/z$ est limite simple sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ d'une suite de polynômes (utiliser l'exercice 6). Trouver un compact K de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sur lequel la fonction $1/z$ n'est pas limite uniforme d'une suite de polynômes?

   Utiliser ce qui précède pour prouver que dans l'exercice 5, on peut avoir $\Omega' \neq \Omega$.

8. Soit f_n une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω convergeant simplement vers une fonction f. On suppose de plus que la suite est uniformément bornée. Montrer que la convergence est uniforme sur tout compact.

   Indication : On évitera d'utiliser l'exercice 2 trop sophistiqué pour un tel résultat mais on préférera représenter la fonction $f_n - f_m$ à l'aide de la formule de Cauchy puis utiliser le théorème de convergence dominée.