UN THEOREME TAUBERIEN

1. Soit $(b_n)_{n\geq 0}$ le terme général d'une série convergente de nombres complexes. On pose, pour $x \in [0,1]$, $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$. Montrer que :
$$\lim_{x\to 1^-} h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \ .$$
Dans toute la suite de l'exercice, on s'interesse à une réciproque de ce résultat. Pour cela, on considère une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ vérifiant :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + 2\,a_2 + \ldots + n\,a_n}{n+1} = 0 \ . \tag{1}$$
On note $d_n = \sum_{k=0}^{n} k\,a_k$ si $n \geq 0$ et $c_n = d_n/n(n+1)$ si $n \geq 1$.

2. Montrer que les séries entières $\sum d_n z^n$, $\sum c_n z^n$ et $\sum a_n z^n$ ont toutes un rayon de convergence au moins égal à 1.
Si $x \in [0,1[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n$ et on suppose dorénavant que :
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \ell \ . \tag{2}$$

3. En constatant que pour tout $n \geq 1$, $c_n = a_n + \frac{d_{n-1}}{n} - \frac{d_n}{n+1}$, montrer que :
$$\forall x \in [0,1[, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n + (x-1) \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \frac{x^n}{n+1} \ .$$

4. Montrer que :
$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \ell - a_0 \ .$$

5. On note $m_n = \sup\,(k\,|c_k|\ ;\ k \geq n)$. Remarquer que m_n est fini puis montrer que :
$$\forall n \geq 1,\ \forall x \in [0,1[, \qquad \left| \sum_{k=1}^{n} c_k - g(x) \right| \leq (1-x)n\,m_0 + \frac{m_n}{n}\,\frac{1}{1-x} \ .$$

6. En étudiant le second membre de l'inégalité précédente, montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ convergeant vers 1 et telle que :
$$\forall n \geq 1, \qquad \left| \sum_{k=1}^{n} c_k - g(x_n) \right| \leq 2\,(m_0\,m_n)^{1/2} \ .$$

7. En déduire que la série $\sum c_n$ converge et calculer sa somme.

8. Conclure que la série $\sum a_n$ converge et vérifie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \ell$.

Remarque : le théorème démontré est un théorème tauberien. Un énoncé plus simple (et qui peut se voir comme un corollaire de ce qui vient d'être démontré) consiste à constater que si a_n est négligeable devant $1/n$, et si $f(x)$ a une limite lorsque $x \to 1^-$, alors la série $\sum a_n$ converge (reprendre les questions 5, 6, 7 oú justement, on utilise que $n\, c_n$ tend vers 0 et que $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, x^n$ a une limite pour conclure que $\sum c_n$ converge). En fait le vrai théorème est le suivant :

Théorème : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes tels que $n\, a_n$ soit borné indépendament de n (on écrit aussi $a_n = \mathrm{O}(1/n)$). Alors, si $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ possède une limite ℓ lorsque $x \to 1^-$, la série $\sum a_n$ converge et vérifie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ell$.

La démonstration de ce théorème difficile se trouve dans le livre de Titchmarsh (the theory of functions) ou dans le livre de Gourdon. Signalons enfin que si l'on analyse correctement la preuve donnée dans Titchmarsh, elle reste vraie sous la simple hypothèse $a_n \in \mathbb{R},\ n\, a_n$ majorée.