C. R. Acad. Sci. Paris, t. 327, Série I, p. 871-874, 1998
Analyse fonctionnelle/*Functional Analysis*

Triplets spectraux pour les pseudovariétés à singularité conique isolée

Jean-Marie LESCURE

Département de mathématiques, Université de Nantes, 2, rue de la Houssinière, B.P. 92208, 44322 Nantes cedex 3, France
Courriel : Jean-Marie.Lescure@math.univ-nantes.fr

(Reçu le 8 octobre 1998, accepté le 13 octobre 1998)

Résumé. Sur une pseudovariété de dimension paire à une singularité conique isolée, des triplets spectraux sont construits à partir d'une classe d'opérateurs différentiels elliptiques de type Fuchs, contenant les opérateurs de Dirac à coefficients dans des fibrés plats dans la direction radiale. Ces derniers engendrent, sous une hypothèse raisonnable, le groupe de K-homologie pair tensorisé par $\mathbb{C}$ de la pseudovariété et leur caractère de Chern est calculé. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Spectral triples for pseudomanifolds with isolated singularity

Abstract. *We use elliptic operators of Fuchs type on an even-dimensional pseudomanifold with an isolated singularity to construct spectral triples. This class of operators includes Dirac operators with coefficients in flat bundles in the radial direction and, under some hypothesis, these operators generate the even K-homology group tensorized by $\mathbb{C}$, of the pseudomanifold. Moreover, their Chern character is computed.* © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

1. Généralités

Dans cette Note, nous considérons une pseudovariété X^c de dimension paire, m de la forme $X^c = (([0,1] \times N)/(\{0\} \times N)) \cup M$, où M est une variété différentielle compacte à bord N, de dimension $n = m - 1$. Nous notons X la variété différentielle non compacte obtenue en ôtant le point singulier de X^c. Elle sera munie d'une métrique riemanienne g *conique*, ce qui signifie que, sur la partie conique $]0,1] \times N$, on a $g = \mathrm{d}r^2 + r^2 g_N$, où g_N est la métrique induite sur $\partial M = N$ et r est la coordonnée radiale. Nous demandons que X soit munie d'une structure spin. Nous considérons les opérateurs de Dirac D à coefficients dans des fibrés de torsion $\mathcal{W}$ *plats dans la direction radiale*, ce qui signifie qu'ils sont munis d'une connexion de Clifford de la forme $\partial_r \otimes \mathrm{d}r + \nabla^{\mathcal{W}|_N}$ sur la partie conique. Ces opérateurs agissent sur les sections du fibré $\mathcal{E} = \mathcal{S} \otimes \mathcal{W}$, où $\mathcal{S}$ est le fibré des spineurs. La proposition qui suit s'applique aussi, lorsque X n'a pas de structure spin, aux opérateurs de type

Note présentée par Alain CONNES.

Dirac D pour lesquels les fibrés locaux de torsion sur la partie conique sont munis d'une connexion plate dans la direction radiale. Nous notons $U : C^\infty(]0,1], \Gamma(\mathcal{E}|_N)) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{E}|_{]0,1]\times N})$ la bijection définie par $U\theta(r,x) = r^{-n/2}\tau\,\theta$, où τ désigne le transport parallèle associé à la connexion de $\mathcal{E}$, le long de la géodésique qui relie $(1,x)$ à (r,x). Ces exemples sont génériques, voir la proposition 3.1 à la fin de la Note. Nous vérifions alors que :

PROPOSITION 1.1. – *D est un opérateur de type Fuchs. Plus précisément, on a $D \in \mathrm{Diff}^{1,1}(\mathcal{E})$ [1] et l'écriture suivante sur la partie conique :*

$$U^{-1}DU = \begin{pmatrix} 0 & D_- \\ D_+ & 0 \end{pmatrix},$$

où $D_\pm = \pm\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}S$ et S est un opérateur de type Dirac sur N.

Les opérateurs de type Fuchs ont été introduits et étudiés par différents auteurs : M. Lesch [7], E. Schrohe [8], B.W. Schulze [9]. Leur analyse est intimement liée à l'utilisation de la transformation de Mellin sur la partie conique, à la place de la transformation de Fourier usuelle. Les espaces de Hilbert adéquats pour leur étude sont les espaces de Sobolev à poids $\mathcal{H}^{s,\alpha}(\mathcal{E})$ (*voir* [7], [9]). Nous introduisons une notion d'espace de sections contrôlées pour les sections des fibrés hermitiens :

DÉFINITION 1.1. – Soit k un entier naturel ou $+\infty$. On appelle $C^{k,\gamma}(\mathcal{E})$ l'espace des sections C^k du fibré $\mathcal{E}$ contrôlées de la façon suivante près de la singularité : pour tous entiers naturels i,j tels que $i+j \leq k$ et tout opérateur différentiel $A \in \mathrm{Diff}^j(N, \mathcal{E}|_N)$, on a : $\sup_{(r,x)} |(r\partial_r)^i A r^{-\gamma} f(r,x)|_{(1,x)} < \infty$.

La justification de cette définition réside dans le plongement de Sobolev suivant :

PROPOSITION 1.2. – *Pour tout réel $s > k + m/2$ et tout réel γ, on a une inclusion continue $\mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathcal{E}) \hookrightarrow C^{k,\gamma-1/2}(\mathcal{E})$.*

2. Exemples de triplets spectraux

Pour construire des triplets spectraux au sens de A. Connes et H. Moscovici [6], nous nous intéressons aux extensions auto-adjointes $\mathcal{D}$ d'opérateurs $D \in \mathrm{Diff}^{1,1}(\mathcal{E})$ elliptiques et symétriques, pour lesquelles le développement de la trace du noyau de la chaleur est connu (*voir* [7]). On obtient alors :

THÉORÈME 2.1. – *Le triplet $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$, où $\mathcal{A} = C_c^\infty(X) \oplus \mathbb{C}$ et $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{0,0}(\mathcal{E})$, est un triplet spectral dont la multiplicité du spectre des dimensions est inférieure ou égale à 2.*

Dans [2], un exemple est donné où le coefficient de $t\log t$ est non nul dans le développement du noyau de la chaleur, ce qui amène un triplet spectral avec un spectre de dimension 2.

Rappelons qu'un triplet spectral est un K-cycle (finiment sommable) $(\mathcal{H}, \mathcal{D})$ sur une algèbre $\mathcal{A}$ qui vérifie les conditions décrites ci-après. Considérant l'algèbre $\mathcal{B}$ engendrée par $\delta^n(a)$, où $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathcal{A}$ avec $\delta(a) := [|\mathcal{D}|, a]$, les conditions sont :

(C_1) : $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$;

(C_2) : $\forall b \in \mathcal{B}$, la fonction $z \longmapsto \mathrm{Tr}(b|\mathcal{D}|^{-z})$ admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$.

L'outil technique essentiel dans la vérification de ces hypothèses est :

PROPOSITION 2.1. – *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi \in C_c^\infty(X)$, on peut construire un opérateur pseudodifférentiel B_z à support compact d'ordre z, un opérateur R_z à noyau de Schwartz dans le produit tensoriel complété projectif $C^{k,\varepsilon-1/2}(\mathcal{E})\widehat{\otimes}_\pi C^{k,\varepsilon-1/2}(\mathcal{E}^*)$, où $\varepsilon > 0$, tels que :*

$$\varphi|\mathcal{D}|^z = B_z + R_z.$$

On vérifie également :

PROPOSITION 2.2. – *Pour tout opérateur pseudodifférentiel Q à support compact, la fonction $z \mapsto \mathrm{Tr}(Q|\mathcal{D}|^z)$ a un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec pôles simples.*

Après un travail sur les conditions (C_1) et (C_2), le théorème peut être prouvé. Le choix de l'algèbre $\mathcal{A}$ est convenable puisqu'on montre :

PROPOSITION 2.3

$$K_*(\mathcal{A}) \simeq K^*(X^c) \quad \textit{et} \quad \mathrm{H}P^*(\mathcal{A}) \simeq \mathrm{H}_*(X^c; \mathbb{C}).$$

Le résultat est identique pour les algèbres $\mathrm{C}^{\infty,\gamma}(X) \oplus \mathbb{C}$, pour tout $\gamma \in]0, +\infty]$.

3. Expression du cocycle

Nous calculons le caractère de Chern des triplets $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ lorsque D est un des opérateurs de Dirac décrit dans le premier paragraphe et $\mathcal{D}$ est l'extension auto-adjointe :

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & (D_-)_{\max} \\ (D_+)_{\min} & 0 \end{pmatrix}.$$

Le résultat est un cocycle pair φ_* du (b, B)-bicomplexe de $\mathcal{A}$:

THÉORÈME 3.1. – *Pour $n > 0$,*

$$\varphi_n(a_0, \ldots, a_n) = \nu_n \int_X a_0 \mathrm{d}a_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}a_n \wedge \widehat{A}(X) \wedge \mathrm{ch}(E).$$

Pour $n = 0$ et pour $a + \lambda \in \mathcal{A} = \mathrm{C}_c^\infty(X) \oplus \mathbb{C}$,

$$\varphi_0(a + \lambda) = \nu_0 \int_X a\widehat{A}(X) \wedge \mathrm{ch}(E) + \lambda \mathrm{Ind}\,(D_+)_{\min}.$$

Remarque. – a) Le théorème s'applique aussi à l'extension

$$\mathcal{D}' = \begin{pmatrix} 0 & (D_-)_{\min} \\ (D_+)_{\max} & 0 \end{pmatrix},$$

et il faut juste remplacer $\mathrm{Ind}\,(D_+)_{\min}$ par $\mathrm{Ind}\,(D_+)_{\max}$ dans l'expression de φ_0 précédente.

b) Les entiers $\mathrm{Ind}\,(D_+)_{min/max}$ sont connus dans de nombreux cas (*voir* [2], [3], [4], [7]).

Schéma de la démonstration. – Dans [6], une formule localisée du caractère de Chern est produite pour les K-cycles finiment sommables qui sont des triplets spectraux. C'est cette formule que nous utilisons pour calculer le caractère de Chern. Le cocycle localisé de [6] est donné par les formules :

$$\text{pour } n > 0, \quad \varphi_n(a_0, \ldots, a_n) = \sum_{k,q} \sigma_{k,q,n} \tau_q(\gamma a_0 (\mathrm{d}a_1)^{(k_1)} \cdots (\mathrm{d}a_n)^{(k_n)} |\mathcal{D}|^{-(2|k|+n)}),$$

$$\varphi_0(a) = \tau_{-1}(\gamma a) + \mathrm{Tr}(\gamma a H),$$

où γ est l'opérateur de graduation, $da = [\mathcal{D}, a]$, $\nabla(a) = [\mathcal{D}^2, a]$ et $a^{(k)} = \nabla^k(a)$. De plus, $\tau_q(P)$ est le résidu en 0 de la fonction $z^q \mathrm{Tr}(P|\mathcal{D}|^{-2z})$ et H est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Ker}\,\mathcal{D}$.

Posons $Q = \gamma a_0(\mathrm{d}a_1)^{(k_1)} \cdots (\mathrm{d}a_n)^{(k_n)}$. La fonction $\mathrm{Tr}(Q|\mathcal{D}|^{-z})$ n'a que des pôles simples donc tous les termes avec $q > 0$ entrant dans la composition de φ_n avec $n > 0$ sont nuls. Ensuite, les résultats de [1] permettent de traiter d'une part les termes où $q = 0$ et $k = 0$ de φ_n, avec $n > 0$, et d'autre part la composante φ_0. Les contributions amenées sont précisément celles annoncées dans le théorème. Pour traiter les cas où $q = 0$, $|k| > 0$ et $n > 0$, on montre :

LEMME 3.2. – *Pour $\psi \in C_c^\infty(X)$ convenablement choisie, on a :*

$$\mathrm{Tr}(Q\mathrm{e}^{-t\mathcal{D}^2}) = \mathrm{Tr}(Q\mathrm{e}^{-t\mathcal{D}^2}\psi) + O(1) \textit{ quand } t \to 0.$$

Ensuite, on déforme la métrique conique en la métrique produit sur un petit voisinage de la singularité (inclus dans $\mathrm{Supp}\,(1-\varphi)$ où $\varphi \in C_c^\infty(X)$ vérifie $\varphi = 1$ sur le support de Q), puis on forme le double de X, on obtient ainsi une variété riemanienne $\widetilde{X}$ compacte sans bord. On double de la même façon le fibré de Clifford et la connexion de Clifford utilisée pour définir D. On obtient un opérateur de Dirac $\widetilde{D}$ sur $\widetilde{X}$. On prouve alors, avec les mêmes notations que précédemment :

LEMME 3.3

$$\mathrm{Tr}(Q\mathrm{e}^{-t\mathcal{D}^2}\psi) = \mathrm{Tr}(Q\mathrm{e}^{-t\widetilde{\mathcal{D}}^2}\psi).$$

Maintenant, on applique le calcul symbolique de Getzler sur $\widetilde{X}$, tel qu'il est formulé par exemple dans [5]. Le point est que le symbole asymptotique de Q est nul, ce qui entraîne la relation :

$$\mathrm{Tr}(Q\mathrm{e}^{-t\mathcal{D}^2}) = \mathrm{O}(t^{-(n/2+|k|)+1/2}) \text{ quand } t \to 0.$$

Le résidu recherché correspondant au coefficient de $t^{-(n/2+|k|)}$ dans le développement asymptotique de $\mathrm{Tr}(Q\mathrm{e}^{-t\mathcal{D}^2})$, il est nécessairement nul.

La collection $\mathcal{C}$ des extensions auto-adjointes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ des opérateurs de Dirac considérés précédemment, est large du point de vue de la K-homologie ; en effet :

PROPOSITION 3.1. – *Si on peut choisir un fibré $\mathcal{E}$ de telle sorte que l'opérateur de Dirac correspondant D vérifie $\mathrm{Ind}\,(D_+)_{\max} \neq 0$ ou $\mathrm{Ind}\,(D_+)_{\min} \neq 0$, alors $\mathcal{C}$ engendre $K_0(X^c) \otimes \mathbb{C}$.*

Références bibliographiques

[1] Berline N., Getzler E., Vergne M., Heat kernels and Dirac operators, 298 Comprehensive Studies in Mathematics, Springer-Verlag, Vol. 298, 1991.

[2] Brüning J., Seeley R., An index theorem for first order regular singular operators, Amer. J. Math. 110 (1988) 659–714.

[3] Cheeger J., Spectral geometry of singular Riemannian spaces, J. Diff. Geom. 18 (1983) 575–657.

[4] Chou A.W., The Dirac operator on spaces with conical singularities and positive scalar curvatures, Trans. Amer. Math. Soc. 289 (1) (1985) 1–40.

[5] Connes A., Moscovici H., Cyclic cohomology, Novikov conjecture and hyperbolic groups, Topology 29 (1990) 345–388.

[6] Connes A., Moscovici H., The local index formula in noncommutative geometry, GAFA 5 (2) (1995) 174–243.

[7] Lesch M., Operators of Fuchs type, conical singularities and asymptotic methods, Thèse d'habilitation, 1996.

[8] Schrohe E., Non-commutative residues and manifolds with conical singularities, J. Funct. Anal. 150 (1) (1997) 146–174.

[9] Schulze B.W., Pseudo-differential boundary value problems, conical singularities, and asymptotics Mathematical Topics, Volume 4 Akademie Verlag, 1994.