

# THÈSE

présentée devant

L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER DE TOULOUSE

en vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER

Spécialité: Mathématiques Pures

par

Jean-Marie Lescure

**Triplets spectraux pour les pseudovariétés à une singularité isolée**

le 15 Décembre 1998

Au vu des rapports établis par :

**H. Moscovici** Professeur (Ohio State U., États-Unis)  
**E. Schrohe** Professeur (Potsdam, Allemagne)

Devant le jury composé de :

<b>C. Anné</b>	Chargé de recherche CNRS (Nantes)	
<b>A. Berthomieu</b>	Maître de conférence (Toulouse III)	
<b>M. Hilsum</b>	Chargé de recherche CNRS (Paris VI)	
<b>A. Legrand</b>	Professeur (Toulouse III)	Directeur
<b>E. Schrohe</b>	Professeur (Potsdam, Allemagne)	Rapporteur
<b>G. Skandalis</b>	Professeur (Paris VI)	
<b>N. Teleman</b>	Professeur (Ancona, Italie)	

# Contents

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>4</b>
1.1 Notion de triplet spectral . . . . .	4
1.1.1 Spectre des dimensions et cocycle localisé . . . . .	6
1.1.2 Cas d'une variété différentiable compacte . . . . .	7
1.2 Généralités sur les pseudovariétés à singularité conique . . . . .	8
1.2.1 Recouvrements, partitions, coordonnées de $X$ . . . . .	8
1.2.2 Fibrés . . . . .	9
1.2.3 Espaces de fonctions et de sections . . . . .	11
1.2.4 Espaces de Sobolev . . . . .	12
1.2.5 Plongements de Sobolev . . . . .	13
1.3 Opérateurs de Fuchs et de Dirac . . . . .	14
1.3.1 Opérateurs différentiels de type Fuchs . . . . .	15
1.3.2 Opérateurs de Dirac . . . . .	15
1.4 L'algèbre $\mathcal{A}$ . . . . .	21
1.4.1 $K$ -théorie . . . . .	21
1.4.2 Homologies . . . . .	22
<b>2 Exemples de triplets spectraux</b>	<b>25</b>
2.1 Choix de $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ sur une variété à une singularité conique . . . . .	25
2.2 Résultats techniques . . . . .	26
2.2.1 Propriétés spectrales de $\mathcal{D}$ . . . . .	27
2.2.2 Résultats sur les opérateurs pseudodifférentiels . . . . .	28
2.3 Structure de $\varphi \mathcal{D} ^z$ , $\varphi \in C_c^\infty(X)$ . . . . .	30
2.3.1 Construction du paramétrix et propriétés . . . . .	31
2.3.2 Définition des puissances complexes et propriétés . . . . .	35
2.4 Vérification de $C_1$ et $C_2$ pour $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ . . . . .	38
2.4.1 Vérification de l'hypothèse $(C_1)$ . . . . .	38
2.4.2 Vérification de l'hypothèse $(C_2)$ . . . . .	39

<b>3</b>	<b>Expression du caractère de Chern localisé</b>	<b>46</b>
3.1	Enoncé du résultat . . . . .	46
3.2	Les calculs . . . . .	51
3.3	Une application . . . . .	61
<b>A</b>	<b>Filtration de la <math>K</math>-homologie</b>	<b>66</b>
A.1	Dualité de Poincaré en dimension finie . . . . .	66
A.2	Produit extérieur de modules finiment sommables . . . . .	70
	<b>Bibliographie</b>	<b>71</b>

# Chapter 1

## Préliminaires

Dans ce premier chapitre, nous rappellerons la notion de triplet spectral de A. Connes et H. Moscovici. Nous relierons cette notion à des résultats connus sur une variété différentiable compacte après avoir fait une remarque sur la filtration de la  $K$ -homologie dans cette situation. Ensuite, nous préciserons le cadre général dans lequel nous allons travailler, puis énoncerons un plongement de Sobolev spécifique à notre situation. Ce résultat sera employé à de maintes reprises dans le chapitre suivant pour étudier la régularité et le comportement asymptotique des noyaux de Schwartz des opérateurs étudiés. Nous terminerons ce chapitre par une écriture en coordonnées polaires des opérateurs de type Dirac tordus par des fibrés “plats” dans la direction radiale.

### 1.1 Notion de triplet spectral

Avant de parler de la notion de triplet spectral de A. Connes et H. Moscovici, il est sans doute nécessaire de rappeler au moins très succinctement ce qu’est un module de Fredholm, un module non-borné, un module finiment sommable. Le lecteur plus exigeant pourra de préférence consulter [Con94, Ska91, BD82, Kas80].

Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre (sur  $\mathbb{C}$ , ce qui sera la seule situation rencontrée ici) involutive.

Un module de Fredholm sur  $\mathcal{A}$  est la donnée :

- d’une représentation  $\rho$  de  $\mathcal{A}$  sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$
- d’un opérateur  $F$  sur  $\mathcal{H}$  tel que :

$$F^2 = 1, \quad F = F^*,$$

$$\forall a \in \mathcal{A} \quad [F, \rho(a)] \in \mathcal{K}(\mathcal{H}).$$

Si  $\mathcal{A} = A$  est une  $C^*$ -algèbre, les modules de Fredholm sont les éléments constitutifs du groupe de Kasparov  $KK(A, \mathbb{C})$ . Ce groupe est une réalisation de la théorie duale de la  $K$ -théorie de  $A$  généralisant au cas non commutatif les idées de M.F. Atiyah et surtout incorporant la bonne relation d’équivalence.

On dit que le module est pair si  $\mathcal{H}$  est  $\mathbb{Z}_2$  gradué,  $F$  est de degré 1 par rapport à cette graduation et la représentation est de degré 0 ( $\mathcal{A}$  ayant par défaut la  $\mathbb{Z}_2$ -graduation triviale).

On dit que le module est  $p$ -sommable si :

$$\forall a \in \mathcal{A} \quad [F, \rho(a)] \in \mathcal{L}_p(\mathcal{H}).$$

$\mathcal{L}_p(\mathcal{H})$  étant l'idéal des opérateurs compacts pour lesquels la série de leurs valeurs singulières est dans  $l_p(\mathbb{N})$ . Si  $A$  est une  $C^*$ -algèbre, on dit que le module est densément  $p$ -sommable si la sous algèbre de  $A$  :

$$\{a \in A \mid [F, \rho(a)] \in \mathcal{L}_p(\mathcal{H})\}$$

est dense dans  $A$ .

Enfin, nous terminons par la notion de modules non bornés (ou  $K$ -cycle), la seule que nous rencontrerons réellement dans ce travail. Un module de Fredholm non borné sur  $\mathcal{A}$  est la donnée :

- d'une représentation  $\rho$  de  $\mathcal{A}$  sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$
- d'un opérateur  $\mathcal{D}$  non borné densément défini sur  $\mathcal{H}$  autoadjoint tel que :

$$\forall a \in \mathcal{A} \quad [\mathcal{D}, \rho(a)] \in \mathcal{B}(\mathcal{H}),$$

$$(1 + \mathcal{D}^2)^{-1} \in \mathcal{K}(\mathcal{H}),$$

on dit qu'il est  $p$ -sommable si

$$(1 + \mathcal{D}^2)^{-1} \in \mathcal{L}_p(\mathcal{H}).$$

A tout module non borné on peut associer un module borné ([Con94], p310, déf. 11). Lorsque  $A$  est une  $C^*$ -algèbre, un groupe formé à partir de modules non bornés  $\Psi(A, \mathbb{C})$  et une application surjective :

$$\Psi(A, \mathbb{C}) \longrightarrow KK(A, \mathbb{C})$$

sont construits dans [BJ78] (en fait nous énonçons leur résultat avec  $B = \mathbb{C}$ ).

Les définitions rappelées ci dessus utilisent indifféremment une algèbre involutive  $\mathcal{A}$  (sans topologie spécifiée) ou une  $C^*$ -algèbre  $A$ . Cependant, étant donné un module de Fredholm ( $p$ -sommable)  $\mathcal{F}$  sur  $\mathcal{A}$ , la sous algèbre  $\rho(\mathcal{A})$  de l'algèbre  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  a une fermeture normique  $A$ . Cette dernière est une  $C^*$ -algèbre. Alors le module  $\mathcal{F}$  est un module de Fredholm ( $p$ -sommable) sur  $\bar{\mathcal{A}}$  ([Con94], p.297), où  $\bar{\mathcal{A}}$  est la plus petite sous algèbre de  $A$  stable par calcul fonctionnel holomorphe dans  $A$ . Il induit donc également un module (densément  $p$ -sommable) sur la  $C^*$ -algèbre  $A$  elle même. La géométrie différentielle non commutative de  $A$ . Connes donne un rôle privilégié à

l'algèbre  $\bar{\mathcal{A}}$ , qui a la même  $K$ -théorie que  $\mathcal{A}$ , rappelons par exemple le diagramme commutatif ([Con94], p.298) :

$$\begin{array}{ccc} \text{Modules finiment sommables sur } \bar{\mathcal{A}} & \xrightarrow{\text{ch}_*} & HP^*(\bar{\mathcal{A}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ KK_*(\mathcal{A}, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \text{hom}(K_*(\mathcal{A}), \mathbb{C}) \end{array}$$

Nous arrêtons les rappels, le lecteur intéressé pourra consulter les références citées.

La sommabilité d'un module de Fredholm peut être considérée comme sa dimension maximale en tant que cycle de la  $K$ -homologie, cette dernière étant elle même considérée comme une théorie homologique. Au delà de cette dimension, on peut se demander comment détecter les composantes de ce cycle de dimension inférieure dans la  $K$ -homologie. Une problème lié à celui ci est la production de formules explicites et localisées du caractère de Chern dans la cohomologie cyclique. La notion de triplet spectral (rappelée dans le prochain paragraphe) et le théorème local de l'indice [CM95] (rappelé au début du troisième chapitre) donnent une réponse à ces deux questions.

### 1.1.1 Spectre des dimensions et cocycle localisé

Soit  $(\mathcal{H}, \mathcal{D})$  un  $K$ -cycle non borné  $p$ -sommable sur  $\mathcal{A}$ . On notera  $\delta$  l'opérateur non borné sur  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  :

$$\delta(T) := [|\mathcal{D}|, T].$$

Comme hypothèse technique, il sera demandé que la représentation de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  soit dans le domaine de toutes les puissances de  $\delta$ , c'est à dire, par un petit abus de notation :

$$\mathcal{A} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{dom } \delta^n. \quad (C_1)$$

Cette condition étant vérifiée, on note  $\mathcal{B}$  la sous algèbre de  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  engendrée par la famille  $\{\delta^n(a) ; a \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}\}$ . Alors :

**Définition 1.1** ([CM95]) *Un triplet spectral est la donnée d'un triplet  $(\mathcal{H}, \mathcal{D}, \mathcal{A})$  où  $(\mathcal{H}, \mathcal{D})$  est un  $K$ -cycle non borné  $p$ -sommable sur  $\mathcal{A}$  qui vérifie la condition  $(C_1)$  et la condition  $(C_2)$  suivante :*

*il existe une partie discrète  $Sd \subset \mathbb{C}$  telle que pour tout  $b \in \mathcal{B}$  la fonction suivante, définie a priori pour  $\text{Re } z > p$  :*

$$h_b : z \longmapsto \text{tr}(b|D|^{-z}), \quad (C_2)$$

*admette un prolongement holomorphe à  $\mathbb{C} \setminus Sd$  avec pôles de multiplicité finie.  $Sd$  est appelé le spectre des dimensions. La borne supérieure des multiplicités des pôles est appelée multiplicité du spectre des dimensions.*

A partir de ces hypothèses, A. Connes et H. Moscovici ont localisé le caractère de Chern. Ils considèrent le cocycle de JLO associé à un triplet spectral  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$  et utilisent la stabilité de sa classe quand on remplace  $\mathcal{D}$  par  $\varepsilon^{1/2}\mathcal{D}$  pour procéder à un “passage à la limite” quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Grâce aux hypothèses  $(C_1)$  et  $(C_2)$ , ils obtiennent un développement asymptotique de ce cocycle quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  (après l’utilisation de la transformation de Mellin et le passage des noyaux de la chaleur aux puissances complexes) et identifient ainsi le terme constant du développement avec un cocycle  $\varphi$  du  $(b, B)$ -bicomplexe de l’algèbre  $\mathcal{A}$ . Le cocycle localisé  $\varphi$  est cohomologue au caractère de Chern du module de Fredholm sous-jacent au triplet spectral. Nous rappellerons la formule apparaissant dans leur théorème au début du troisième chapitre.

### 1.1.2 Cas d’une variété différentiable compacte

Dans cette situation, il est facile de filtrer la  $K$ -homologie de l’espace topologique sous-jacent à l’aide de la sommabilité des modules de Fredholm. Soit  $M$  une variété différentiable compacte de dimension  $m$ .

**Définition 1.2** *Notons :*

- $\mathcal{F}^{(p)}(C^\infty(M))$  la collection des modules de Fredholm  $(p+1)$ -sommables.
- $\sim_f$  l’homotopie à l’intérieur de la classe des modules finiment sommables.
- $K^{(p)}(C^\infty(M))$  le quotient  $\mathcal{F}^{(p)}(C^\infty(M))/\sim_f$ .

En utilisant la dualité de Poincaré, nous montrerons dans l’appendice le résultat :

**Proposition 1.1**  $K^{(m)}(C^\infty(M)) \simeq K_*(M) = K^*(C(M))$  où on a posé :  $K_* = K_0 \oplus K_1$ . En particulier, on a une filtration par des sous groupes :

$$K^{(0)}(C^\infty(M)) \subset \dots \subset K^{(m)}(C^\infty(M)).$$

On peut bien entendu donner une définition identique dans le cas non commutatif et la proposition reste vraie en la présence d’une dualité de Poincaré avec classe fondamentale finiment sommable. Cela est précisé et prouvé dans l’appendice.

Pour obtenir une filtration, on peut aussi utiliser l’isomorphisme de Chern et l’isomorphisme entre cohomologie cyclique de  $C^\infty(M)$  et homologie de De Rham mais, bien sûr, le résultat est un peu plus faible puisqu’on obtient une filtration de la partie sans torsion de la  $K$ -homologie.

Notons que cette filtration de  $K_*$ , valable sur la catégorie des variétés différentiables compactes et des applications différentiables, est fonctorielle.

Considérons maintenant un opérateur différentiel  $P$  elliptique symétrique d’ordre 1 agissant sur les sections d’un fibré hermitien  $E$ . L’analyse classique des opérateurs pseudodifférentiels permet de vérifier que le triplet  $(C^\infty(M), L^2(E), P)$  est un triplet spectral. Son spectre des dimensions est

$$Sd = \{m - n, n \in \mathbb{N}\},$$

et la multiplicité est 1. La non nullité du résidu de la fonction  $\text{Tr}(|P|^{-z})$  au point  $j \in \{1, \dots, m\}$  est une condition nécessaire pour que la classe de  $P$  dans  $K_*(M)$  ait une composante non triviale dans le quotient :

$$K^{(j)}(C^\infty(M))/K^{(j-1)}(C^\infty(M))$$

Dans ce degré de généralité, il est toutefois difficile d'expliciter le courant de De Rham correspondant au cocycle des théorèmes II.1 et II.3 de [CM95]. Cela est plus facile quand on considère  $M$  munie d'une structure spin et un opérateur de type Dirac (c'est à dire l'opérateur de Dirac associé à la structure spin et à coefficient dans un fibré de torsion  $\mathcal{W}$ ). Le calcul symbolique de Getzler permet alors de montrer [BF90] :

$$\varphi_n(a_0, a_1, \dots, a_n) = \nu_n \int_M a_0 \wedge da_1 \wedge \dots \wedge da_n \wedge \hat{A}(M) \wedge \text{ch}(\mathcal{W})$$

La seule contribution à la composante  $\varphi_n$  est amenée, pour  $n > 0$ , par le résidu de la fonction zeta  $\zeta_D(z) = \text{Str}(|\mathcal{D}|^{-z})$  au point  $m - n$  du spectre des dimensions associé à  $D$ .

## 1.2 Généralités sur les pseudovariétés à singularité conique

### 1.2.1 Recouvrements, partitions, coordonnées de $X$

Fixons le cadre géométrique et les notations que nous utiliserons par la suite. Soit  $M$  une variété différentiable compacte de dimension paire  $m$  à bord connexe  $N$ . On notera  $n = m - 1$  la dimension de la variété compacte  $N$ . Nous considérons dans ce travail la pseudo-variété

$$X^c = (([0, 1] \times N)/(\{0\} \times N)) \cup M.$$

Notons  $c$  le sommet du cône et  $X$  la variété différentiable obtenue en otant à  $X^c$  le point singulier  $c$ . La variété  $X$  sera munie d'une métrique riemannienne  $g$  égale à  $dr^2 + r^2 g_N$  sur la partie conique  $]0, 1] \times N$  où  $g_N$  est la métrique induite sur la sous-variété  $\partial M = N$ . Le couple  $(X, g)$  est donc une variété riemannienne incomplète. Pour tout  $0 < \varepsilon \leq 1$  nous noterons  $X_\varepsilon$  la variété compacte à bord :

$$X_\varepsilon = \{x \in X \mid \text{dist}(x, c) \geq \varepsilon\},$$

et  $C_{0,\varepsilon}N$  son complémentaire dans  $X$ . Nous noterons  $\bar{X}$  la compactification évidente de  $X$  en une variété différentiable compacte dont le bord est  $N$ .



Nous utiliserons des recouvrements finis de  $N$  par des ouverts de cartes locales  $(U_j, \chi_j)$ , qui fournissent les systèmes de coordonnées  $id_{]0,1[} \otimes \chi_j$  pour les secteurs  $]0,1[ \times U_j$  recouvrant  $]0,1[ \times N$ . Lorsque nous utiliserons un recouvrement  $\mathcal{U}$  de  $X$  par des cartes locales, il sera toujours fini et du type précédent près de la singularité. Plus précisément on pourra choisir  $0 < a < 1/2$  tel que pour tout  $(U, \chi) \in \mathcal{U}$ , soit  $U \cap C_{0,a}N = \emptyset$  soit  $U = ]0,1[ \times U_j$  et  $\chi = id_{]0,1[} \otimes \chi_j$ .

Nous supposerons donc que  $\mathcal{U}$  est de la forme :  $\mathcal{U} = (]0,1[ \times U_j)_j \cup \mathcal{U}'$  où  $\mathcal{U}'$  recouvre  $X_{2a}$ .

Les partitions de l'unité seront choisies suivant des critères analogues : fixons des partitions de l'unité  $(\theta_U)$  de  $X_{2a}$  subordonnée à  $\mathcal{U}'$  et  $(\theta_j)$  de  $N$  subordonnée à  $(U_j)_j$  ainsi qu'une fonction  $\varphi \in C_c^\infty(X)$  égale à 1 sur un voisinage ouvert de  $M$  et nulle sur  $C_{0,2a}N$ . Alors  $\text{Supp}(1 - \varphi) \otimes \theta_j \subset ]0,1[ \times U_j$  et :

$$1 = (1 - \varphi) + \varphi = (1 - \varphi) \otimes \sum_j \theta_j + \varphi \sum_{U \in \mathcal{U}'} \theta_U$$

Puisqu'on est dans un contexte riemannien, il y a une mesure naturelle  $dvol$ , celle associée à la forme volume, qui induit un espace de Hilbert  $L^2(X, dvol)$ . Cependant, comme nous regarderons souvent la partie conique comme un cylindre nous serons amenés à utiliser aussi l'espace  $L^2$  associé à la mesure "produit" près de la singularité, c'est à dire

$$\mathcal{H} = L^2(X, \varphi^{-n} dvol)$$

où  $\varphi = r$  près de la singularité et  $\varphi = 1$  ailleurs. L'information amenée par la métrique n'est cependant pas perdue, on verra qu'elle est codée dans les coefficients singuliers des opérateurs géométriques.

## 1.2.2 Fibrés

Soit  $E$  un fibré sur  $X$ . Sur la partie conique nous supposerons après identification si nécessaire que  $E = \pi^* \tilde{E}$  où  $\pi$  est l'application :

$$\begin{aligned} \pi \quad ]0,1[ \times N &\longrightarrow \{1\} \times N \\ (r, x) &\longmapsto (1, x) \end{aligned}$$

et  $\tilde{E}$  est le fibré restreint  $E$  à  $\{1\} \times N$ .

D'une façon générale, nous noterons par  $\sim$  les restrictions des fibrés et de tous les objets géométriques (pour autant que cela ait un sens) à cette sous-variété.

On a une identification canonique entre les espaces :

$$\Gamma(E) \simeq C^\infty(]0,1[), \Gamma(\tilde{E}). \quad (1.1)$$

$E$  sera muni d'une métrique  $C^\infty$  hermitienne  $h$  et d'une connexion  $\nabla^E$  dont les propriétés seront dictées par le contexte : en particulier,  $h$  ne sera pas nécessairement

la tirée en arrière d'une métrique sur  $\tilde{E}$  et  $\nabla^E$  ne sera pas nécessairement une connexion produit.

$h$  induit une norme  $L^2$  sur les sections :

$$\|\phi\|^2 = \int_X |\phi|^2 dvol_X.$$

$L^2(E)$  désignera l'espace de Hilbert correspondant. Le contexte métrique induit également des identifications importantes, différentes de (1.1). Considérons sur la partie conique l'application induite par le transport parallèle  $\tau$  le long des géodésiques radiales :

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(]0, 1], \Gamma(\tilde{E})) & \longrightarrow & \Gamma(E|_{]0, 1] \times N}) \\ \theta & \longmapsto & \bar{\theta}, \end{array}$$

où

$$\bar{\theta}(r, x) := \tau_{(1,x) \rightarrow (r,x)} \theta(r, x) \in E_{(r,x)}.$$

Nous obtenons alors l'identification "métrique" :

$$\begin{array}{ccc} U : C^\infty(]0, 1], \Gamma(\tilde{E})) & \longrightarrow & \Gamma(E) \\ \theta & \longmapsto & r^{-n/2} \bar{\theta}. \end{array}$$

L'application  $U$  a un prolongement, que nous noterons encore  $U$ , aux espaces  $L^2$  définis ci après :

$$U : L^2(]0, 1], L^2(\tilde{E}); dr) \longrightarrow L^2(E|_{]0, 1] \times N}),$$

où  $L^2(\tilde{E})$  est obtenu à partir de la norme :

$$\|\phi\|^2 = \int_N |\phi|^2 dvol_N,$$

et  $L^2(]0, 1], L^2(\tilde{E}); dr)$  est obtenu à partir de la norme :

$$\left( \int_{]0, 1]} \int_N |\phi(r, x)|_{(1,x)}^2 dx dr \right)^{1/2}.$$

On vérifie immédiatement que  $U$  est une isométrie.

L'espace de Hilbert adéquat pour notre travail sera noté  $\mathcal{H}$  et il est défini par la norme :

$$\left( \int_M |\phi|^2 dvol_M + \int_{]0, 1]} \int_N |\phi(r, x)|_{(1,x)}^2 dx dr \right)^{1/2}. \quad (1.2)$$

L'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  sera aussi parfois noté  $\mathcal{H}^{0,0}(E)$  et il correspond à l'espace de référence pour l'échelle des Sobolev à poids. Remarquons enfin qu'en prolongeant  $U$  par  $U = id_{\Gamma(E|_M)}$ , on obtient une isométrie :

$$U : \mathcal{H} \xrightarrow{\cong} L^2(E).$$

### 1.2.3 Espaces de fonctions et de sections

La notion de fonctions continument différentiables jusqu'à un ordre  $k$  et dont le comportement asymptotique est prescrit près de la singularité va jouer un rôle important dans l'analyse effectuée ultérieurement.

**Définition 1.3** On appelle  $C^{k,\gamma}(X)$  l'espace des fonctions  $f$   $k$ -fois continument différentiables sur  $X$  telles que pour tous  $j, l$  tels que  $j + l \leq k$  et tout opérateur différentiel  $A$  sur  $N$  de degré  $l$  :

$$p_{j,\gamma,A}(f) := \sup_{(r,x) \in ]0,1] \times N} |(r\partial_r)^j A r^{-\gamma} f(r,x)| < \infty.$$

Les  $p_{j,\gamma,A}$  définissent des semi-normes, et à partir de certaines d'entre elles nous allons construire une norme  $|\cdot|_{k,\gamma}$  qui fait de  $C^{k,\gamma}(X)$  un espace de Banach. Notons  $|\cdot|_k$  la norme des fonctions  $k$  fois différentiables sur  $X_{1/2}$ . Sur la partie conique de  $X$ , pour chaque secteur  $]0,1] \times U_i$ , notons  $|\cdot|_{k,\gamma}^{(i)}$  la norme pour les fonctions définies sur le secteur correspondant de  $\mathbb{R}^m$  :

$$|f|_{k,\gamma}^{(i)} := \sup_{(r,x) \in ]0,1] \times V_i} \sum_{|\alpha|+j \leq k} |(r\partial_r)^j \partial_x^\alpha r^{-\gamma} f(r,x)|,$$

on pose alors :

$$|f|_{k,\gamma} = |\varphi f|_k + \sum_i |(\chi^{-1})^*(\theta_j(1-\varphi)f)|_{k,\gamma}^{(i)}.$$

On peut dominer  $|\cdot|_{k,\gamma}$  par  $|\cdot|_k$  et un nombre fini de  $p_{j,\gamma,A}$ , car les opérateurs de différentiation apparaissant dans la définition de  $|\cdot|_{k,\gamma}^{(i)}$ , composés avec les fonctions cut-off  $\theta_j(1-\varphi)$  correspondent à des opérateurs différentiels sur  $N$  à supports dans  $U_i$  ; réciproquement, il est immédiat que les  $p_{j,\gamma,A}$  sont dominés par  $|f|_{k,\gamma}$ . Ceci prouve que :

**Proposition 1.2** a)  $|\cdot|_{k,\gamma}$  est une norme sur  $C^{k,\gamma}(X)$ , un autre choix de  $(U_i, \theta_i)_i$  et de  $\varphi$  donne une norme équivalente.

b)  $(C^{k,\gamma}(X), |\cdot|_{k,\gamma})$  est un espace de Banach.

c) Pour tout  $k > k', \gamma > \gamma'$ , les inclusions  $C^{k,\gamma}(X) \hookrightarrow C^{k',\gamma'}(X)$  sont continues.

d) l'application bilinéaire :

$$\begin{array}{ccc} C^{k,\gamma}(X) \times C^{k,\delta}(X) & \longrightarrow & C^{k,\gamma+\delta}(X) \\ (f, g) & \longmapsto & fg, \end{array}$$

est continue, et en particulier pour  $\gamma \geq 0$   $C^{k,\gamma}(X)$  est une algèbre de Banach.

Preuve : a) résulte de la discussion précédant la proposition, b) est classique, c) et d) sont évidents. Au niveau  $C^\infty$  nous sommes amenés à considérer :

**Notation 1.1**

$$C^{\infty,\gamma}(X) := \bigcap_{n \geq 0} C^{n,\gamma}(X)$$

$$C^{\infty,\gamma^+}(X) := \bigcup_{\varepsilon > 0} C^{\infty,\gamma+\varepsilon}(X)$$

$$C^{\infty,\gamma^-}(X) := \bigcap_{\varepsilon > 0} C^{\infty,\gamma-\varepsilon}(X)$$

Munis des topologies naturelles induites par leur définitions, ce sont des espaces de Fréchet, le premier coïncide avec la définition de [BL98].

Nous aurons besoin de notions analogues pour les espaces de sections des fibrés. Soit  $(E, h)$  un fibré hermitien, désignons par  $|\cdot|_{(p)}$  la norme correspondante de la fibre au point  $p$ , notée  $E_p$ .

**Définition 1.4**  $C^{k,\gamma}(E)$  désigne l'espace des sections  $C^k$  du fibré  $E$  contrôlées de la façon suivante près de la singularité :

Pour tous  $i, j$  tels que  $i + j \leq k$ ,  $A \in \text{Diff}^j(N, \tilde{E})$

$$\sup_{(r,x) \in ]0,1] \times N} |(r\partial_r)^k A r^{-\gamma} f(r, x)|_{(1,x)} < \infty,$$

où on a utilisé l'identification (1.1).

En procédant comme pour les fonctions on peut définir une norme  $|\cdot|_{k,\gamma}$  qui en fait un Banach, et obtenir le Fréchet  $C^{\infty,\gamma}(E)$ .

### 1.2.4 Espaces de Sobolev

Nous donnons ici une définition des espaces de Sobolev à poids équivalente à celle de [Les96, Sch94]. Cette présentation nous permet de dériver immédiatement le plongement de Sobolev annoncé.

Sur les secteurs  $]0, 1] \times U_j$ , nous posons :

$$(\|h\|_{s,\gamma}^{(j)})^2 = \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n} (1 + (\log \nu)^2 + \xi^2)^s |\mathcal{F}(r^{-\gamma+1/2}h)(\nu, \xi)|^2 \frac{d\nu}{\nu} d\xi,$$

où  $\mathcal{F}$  est la transformation de Fourier du groupe  $(\mathbb{R}_+^*, \cdot) \times (\mathbb{R}^n, +)$ . On note  $\|\cdot\|_s$  la norme de l'espace de Sobolev usuel  $H^s(\bar{X})$  (où la mesure utilisée coïncide avec la mesure produit près de la singularité). Puis pour  $f \in H_{loc}^s(X)$  on pose :

$$\|f\|_{s,\gamma}^2 = \|\varphi f\|_s^2 + \sum_j (\|(1 - \varphi)\theta_j f\|_{s,\gamma}^{(j)})^2.$$

Pour les fibrés hermitiens  $(E, h)$ , on utilise des ouverts  $V_j$  trivialisant pour  $\tilde{E}$  dont on fixe des bases orthonormées locales. Alors pour une section  $h \simeq (h_1, h_2, \dots, h_k)$  exprimée dans cette base locale au dessus de  $]0, 1] \times V_j$ , on pose :

$$(\|h\|_{s,\gamma}^{(j)})^2 := \sum_{i=1}^k (\|h_i\|_{s,\gamma}^{(j)})^2.$$

D'autres choix de  $\varphi$ , du recouvrement de  $N$ , et des trivialisations locales du fibré donnent lieu à des normes équivalentes.

**Définition 1.5** *L'espace de Sobolev d'ordre  $s$  et de poids  $\gamma$  est défini par :*

$$\mathcal{H}^{s,\gamma}(E) = \{f \in H_{loc}^s(E) ; \|f\|_{s,\gamma} < \infty\}$$

Cette définition des Sobolev à poids est compatible avec celles de [Les96, Sch94]. On trouve dans ces deux références toutes les propriétés établies pour ces espaces dont nous aurons besoin exceptée la suivante, très importante pour la suite de notre travail, que nous prouvons dans le prochain paragraphe.

## 1.2.5 Plongements de Sobolev

On peut comparer les espaces de fonctions contrôlées et de Sobolev à poids. Une telle comparaison servira à dériver des estimations de noyaux dans les paragraphes suivants.

**Proposition 1.3** *Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Pour  $s > k + m/2$  on a une inclusion topologique :*

$$\mathcal{H}^{s,\gamma}(E) \hookrightarrow C^{k,\gamma-1/2}(E).$$

Posant  $\mathcal{H}^{\infty,\gamma}(E) = \bigcap_{s \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^{s,\gamma}(E)$  on a

$$C^{\infty,\gamma-1/2+}(E) \subset \mathcal{H}^{\infty,\gamma}(E) \subset C^{\infty,\gamma-1/2}(E).$$

*Les inclusions sont continues et strictes.*

Preuve : Dans un premier temps, supposons  $E = X \times \mathbb{C}$

Soit  $f \in \mathcal{H}^{s,\gamma}(X)$  avec  $s > k + m/2$ . Pour tout  $\phi \in C_c^\infty(X)$ ,  $\phi f \in H_c^s(X)$  et par le plongement de Sobolev usuel on obtient déjà que  $\phi f \in C^k(X)$ , donc  $f$  également et de plus :

$$\|\phi f\|_s \leq c|\phi f|_k,$$

où  $|\cdot|_k$  désigne la norme des fonctions  $k$ -fois continument différentiable sur  $\bar{X}$ .

Il reste donc à préciser le comportement asymptotique de  $f$ . Supposons que  $f$  est à support dans un des secteurs de la partie conique. On a grâce à la formule d'inversion de Fourier, pour tout  $j + |\alpha| \leq k$  :

$$\begin{aligned}
& |(r\partial_r)^j \partial_x^\alpha r^{-\gamma+1/2} f(r, x)| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n} e^{i(\log r \cdot \log \nu + x \cdot \xi)} (i \log \nu)^j (i \xi)^\alpha \mathcal{F}(r^{-\gamma+1/2} f)(\nu, \xi) \frac{d\nu}{\nu} d\xi \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n} e^{i(\log r \cdot \log \nu + x \cdot \xi)} (i \log \nu)^j (i \xi)^\alpha (1 + \log^2 \nu + \xi^2)^{-s/2} \right. \\
&\quad \left. \cdot (1 + \log^2 \nu + \xi^2)^{s/2} \mathcal{F}(r^{-\gamma+1/2} f)(\nu, \xi) \frac{d\nu}{\nu} d\xi \right| \\
&\leq c \|f\|_{s, \gamma} \left( \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n} \log^{2j} \nu \xi^{2\alpha} (1 + \log^2 \nu + \xi^2)^{-s} \frac{d\nu}{\nu} d\xi \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

la dernière ligne étant obtenue en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Enfin le changement de variable  $\eta = \log \nu$  montre immédiatement que l'intégrale dans la dernière ligne converge si  $s > k + m/2$ . Par conséquent, pour ces valeurs de  $s$ ,

$$f \in C^{k, \gamma-1/2}(X) \quad \text{et} \quad |f|_{k, \gamma-1/2} \leq c \|f\|_{s, \gamma}$$

Le cas général se déduit immédiatement en écrivant  $f = \varphi f + (1 - \varphi) \sum_j \theta_j f$  et en utilisant les définitions 1.3, 1.5 et la proposition 1.2.

Dans un second temps, on suppose le fibré  $E$  quelconque. On exprime la section  $f$  dans une base orthonormée locale au dessus du secteur considéré,  $f = (f_1, \dots, f_k)$ , alors :

$$\left| (r\partial_r)^k \partial_x^\alpha r^{-\gamma+1/2} f(r, x) \right|^2 = \sum_{i=1}^k \left| (r\partial_r)^k \partial_x^\alpha r^{-\gamma+1/2} f_i(r, x) \right|^2,$$

et on effectue le calcul précédent pour chaque  $f_i$ . La seconde partie de la proposition est immédiate.  $\square$

### 1.3 Opérateurs de Fuchs et de Dirac

Nous rappellerons dans ce paragraphe la définition des opérateurs différentiels de type Fuchs [Les96, Sch94]. Incontestablement, il s'agit de la bonne classe d'opérateurs différentiels sur une variété à singularité isolée. De plus, dans le contexte métrique les opérateurs géométriques sont des opérateurs de Fuchs. J. Brüning et R. Seeley [BS88] l'ont constaté pour les opérateurs de De Rham et de la signature, A. Chou et M. Lesch [Cho85, Les93] pour l'opérateur de Dirac dans le cas d'une structure spin. Nous le constaterons pour l'opérateur de Dirac à coefficient dans un fibré plat dans

la direction radiale et par extension, sans structure spin, pour un opérateur de type Dirac où le fibré “local” de torsion a cette propriété.

L’opérateur de Dirac à coefficient dans un fibré plat dans la direction radiale sera notre principal exemple de triplet spectral associé à cette situation singulière.

### 1.3.1 Opérateurs différentiels de type Fuchs

Ce sont des opérateurs différentiels

$$D : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$$

tels que, près de la singularité (on utilise les hypothèses et notations relatives au fibré  $E$  du paragraphe 1.2.2) il existe  $\nu \in \mathbb{R}$  et  $a_k \in C^\infty([0, 1], \text{Diff}^{d-k}(N, E|_N))$  tels que :

$$U^{-1}DU = r^{-\nu} \sum_{k=0}^d a_k(r)(-r\partial_r)^k.$$

Leur symbole de Mellin est par définition :

$$\sigma_M(D) = \sum_{k=0}^d a_k(0)z^k,$$

C’est un opérateur différentiel sur  $N$  paramétré par  $z \in \mathbb{C}$ . Nous ne pouvons pas rappeler ici toutes les notions relatives à leur étude, nous renvoyons le lecteur aux références suivantes : [Sch94, Sch97, BS88, Les96, Che83, Cho85]. Notons seulement que la condition d’ellipticité est la condition usuelle sur l’intérieur augmentée de l’inversibilité du symbole de Mellin lorsque le paramètre  $z$  décrit certaines droites verticales dans le plan complexe [Les96].

**Remarques :** 1) On s’intéressera dans un futur travail au calcul de l’homologie cyclique de l’algèbre qu’ils constituent  $\text{Diff}^{*,*}(X)$  lorsque  $E = \mathbb{C}$  (la première étoile est pour le degré des opérateurs, la seconde pour l’ordre de la singularité). En particulier, on étudiera les conséquences de différentes filtrations de son complexe de Hochschild.

2) Etant donné le choix de la métrique, les vecteurs tangents unitaires à la partie conique sont par exemple de la forme :  $\frac{\partial}{\partial r}$  et  $\frac{1}{r}X$  pour  $X$  vecteur tangent à  $N$  et unitaire pour la métrique  $g_N$ . Si on considère l’ensemble de leurs combinaisons linéaires à coefficients dans  $C^\infty([0, 1] \times N)$ , on n’obtient pas une algèbre de Lie.  $\text{Diff}^{*,*}(X)$  est l’algèbre engendré par ces champs de vecteurs et l’algèbre  $C^\infty(\bar{X})$ .

### 1.3.2 Opérateurs de Dirac

Soit  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_+ \oplus \mathcal{E}_-$  un fibré de Clifford  $\mathbb{Z}_2$  gradué sur  $X$  [BGV91]. Comme au paragraphe 1.2.2, nous noterons  $\tilde{\mathcal{E}}$  la restriction de  $\mathcal{E}$  à la sous variété  $\{1\} \times N$  et sur la

partie conique  $\mathcal{E} = \pi^*\tilde{\mathcal{E}}$ . Nous commençons par “l’écriture en coordonnées polaires” du fibré de Clifford, tout à fait analogue à l’écriture des formes différentielles :  $\omega = \phi + dr \wedge \psi$  où  $\phi, \psi \in \pi^*(\Omega(N))$  :

**Proposition 1.4** 1) *L’action de l’algèbre de Clifford sur  $X$  induit une action de l’algèbre de Clifford de  $N$  sur les fibrés  $\tilde{\mathcal{E}}_+, \tilde{\mathcal{E}}_-$  vus comme des fibrés sur  $N$ .*

2) *Sur la partie conique :*

$$\mathcal{E} \simeq e_0 \pi^* \tilde{\mathcal{E}}_+ \oplus \pi^* \tilde{\mathcal{E}}_+$$

où  $e_0$  est la multiplication de Clifford par  $= \frac{\partial}{\partial r}$ .

Preuve : Pour tout  $x \in T_p N \subset TX$  on pose  $J(x) = x e_0 \in Cl(X)_{1,p}$ . On a  $J^2 = -1$ , et  $J$  définit un morphisme :

$$J : Cl(N) \longrightarrow Cl^0(X)|_{\{1\} \times N},$$

où  $Cl^0(X)$  est la partie paire du fibré  $\mathbb{Z}_2$  gradué en algèbres de Clifford  $Cl(X)$ . Le morphisme  $J$  est un isomorphisme au dessus de chaque fibre (c’est l’isomorphisme entre l’algèbre de Clifford à  $n$  générateurs et la partie paire de celle à  $n+1$  générateurs, [LM89]), c’est donc un isomorphisme des fibrés correspondants. On obtient par composition la représentation

$$Cl(N) \xrightarrow{J} Cl^0(X)|_{\{1\} \times N} \longrightarrow \text{End}^0(\tilde{\mathcal{E}}),$$

en particulier,  $\tilde{\mathcal{E}}_+, \tilde{\mathcal{E}}_-$  sont stables pour cette action de  $Cl(N)$ , ce qui prouve 1). Pour 2), on remarque que  $e_0 \in Cl^1(X)|_{\{1\} \times N}$  échange  $\tilde{\mathcal{E}}_+$  et  $\tilde{\mathcal{E}}_-$ . Par conséquent  $\tilde{\mathcal{E}} = e_0 \tilde{\mathcal{E}}_+ \oplus \tilde{\mathcal{E}}_+$  et 2) s’en déduit immédiatement.  $\square$

**Remarque** : On peut utiliser une identification (voir par exemple [BGV91]) au dessus d’un ouvert sectoriel  $U = ]0, 1 + \varepsilon[ \times \tilde{U}$  trivialisant pour  $\mathcal{E}$  :

$$\mathcal{E} \stackrel{U}{\simeq} \mathcal{S} \otimes \mathcal{W}, \tag{1.3}$$

où  $\mathcal{S}$  est le fibré des spineurs au dessus de  $U$  et  $\mathcal{W}$  un fibré sur lequel l’action de Clifford est triviale. C’est une identification de  $Cl(X)|_U$ -modules de Clifford. On a immédiatement :

$$\tilde{\mathcal{E}} \stackrel{\tilde{U}}{\simeq} \tilde{\mathcal{S}} \otimes \tilde{\mathcal{W}}.$$

De plus les graduations de  $\mathcal{E}$  et de  $\mathcal{S}$  sont obtenues à partir du même opérateur de graduation (l’élément de volume de  $Cl(X)$ , [LM89]), donc l’identification (1.3) donne aussi les identifications :

$$\mathcal{E}_+ \simeq \mathcal{S}_+ \otimes \mathcal{W} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_- \simeq \mathcal{S}_- \otimes \mathcal{W},$$



on obtient, par restriction à  $\{1\} \times \tilde{U}$  :

$$\tilde{\mathcal{E}}_+ \simeq \tilde{\mathcal{S}}_+ \otimes \mathcal{W} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{E}}_- \simeq \tilde{\mathcal{S}}_- \otimes \mathcal{W}.$$

Ces derniers sont, d'après la proposition précédente, des isomorphismes de  $Cl(N)|_{\tilde{U}}$ -modules de Clifford. Notons également que  $\tilde{\mathcal{S}}_+$  et  $\tilde{\mathcal{S}}_-$  sont les deux  $Cl(N)|_{\tilde{U}}$ -modules de Clifford irréductibles non équivalents, [LM89]. Notons enfin que  $\tilde{\mathcal{S}}_- = e_0 \tilde{\mathcal{S}}_+$ .

Nous allons maintenant construire par un argument de partition de l'unité des métriques hermitiennes  $h$  sur  $\mathcal{E}$  pour lesquelles l'action de Clifford est unitaire et des connexions  $\nabla^{\mathcal{E}}$ , qui sont compatibles avec la connexion canonique de  $Cl(X)$ . Nous nous concentrons sur la partie conique puisque ailleurs la construction est classique. Choisissons un recouvrement ouvert sectoriel  $\mathcal{U}$  de telle sorte que  $\mathcal{E}|_U \simeq \mathcal{S} \otimes \mathcal{W}$  [BGV91] et une partition de l'unité  $(\varphi_U)_{U \in \mathcal{U}}$ . On prend alors  $h_U = h_{\mathcal{S}} \otimes h_{\mathcal{W}}$  où  $h_{\mathcal{S}}$  est la métrique hermitienne canonique sur les spineurs et  $h_{\mathcal{W}}$  est une métrique hermitienne sur  $\mathcal{W}$  constante par rapport à  $r$ , la multiplication de Clifford étant unitaire sur  $\mathcal{S}$  par rapport à sa métrique naturelle et n'agissant pas sur  $\mathcal{W}$  on obtient déjà que l'action de Clifford sur  $(\mathcal{E}|_U, h_U)$  est unitaire. Ensuite, on fixe sur  $\tilde{\mathcal{W}}$  une connexion  $\nabla^{\tilde{\mathcal{W}}}$  et après avoir identifié les espaces de sections :  $\Gamma(\mathcal{W}) \simeq C^\infty(]0, 1], \Gamma(\tilde{\mathcal{W}}))$ , on pose :

$$\nabla^{\mathcal{W}} = \partial_r \otimes dr + \nabla^{\tilde{\mathcal{W}}}.$$

Notant  $\nabla^{\mathcal{S}}$  la connexion canonique de  $\mathcal{S}$ , on définit une connexion de Clifford (c'est à dire une connexion compatible au sens rappelé antérieurement) en posant :

$$\nabla^{\mathcal{E}|_U} = \nabla^{\mathcal{S}} \otimes 1 + 1 \otimes \nabla^{\mathcal{W}}.$$

On utilise maintenant la partition de l'unité pour définir, sur la partie conique :

$$h = \sum_{U \in \mathcal{U}} \varphi_U h_U,$$

$$\nabla^{\mathcal{E}} = \sum_{U \in \mathcal{U}} \psi_U \nabla^{\mathcal{E}|_U} \varphi_U,$$

où  $\psi_U \varphi_U = \psi_U$ .

Nous allons maintenant vérifier que l'opérateur de Dirac  $D$  associé à  $(\mathcal{E}, \nabla^{\mathcal{E}})$  est un opérateur de type Fuchs.

Avant d'y parvenir nous procédons à quelques rappels de géométrie riemannienne. Fixons  $U \in \mathcal{U}$ . L'ouvert  $U$  est donc de la forme  $U = ]0, 1] \times \tilde{U}$  où  $\tilde{U}$  est un ouvert de carte locale de  $N$ . Fixons une base orthonormée locale directe (b.o.l.d.)  $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$  de  $T\tilde{U} \simeq TN$ , que l'on complète par  $e_0 = \partial_r$  en une b.o.l.d.  $e_0, \tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$  de

$T(\{1\} \times \tilde{U}) \subset TX$ . On obtient alors une b.o.l.d.  $e_0, e_1, \dots, e_n$  sur  $TU = T]0, 1] \times \tilde{U}$  en utilisant le transport parallèle le long des géodésiques radiales :  $e_i := \tilde{e}_i$ . Par exemple si  $(\tilde{e}_i)_p = (\frac{\partial}{\partial x_i})_p$  alors  $(e_i)_{r,p} = \frac{1}{r}(\frac{\partial}{\partial x_i})_{r,p}$ . Notons  $\nabla$  la connexion de Levi-Civita sur  $TX$ ,  $\tilde{\nabla}$  celle de  $TN$  et  $\omega, \tilde{\omega}$  les 1-formes correspondantes. Nous utiliserons dans ce qui suit l'égalité :

$$\Gamma(\mathcal{E}|_U) = \{\bar{\theta} \mid \theta \in C^\infty([0, 1]; \Gamma(\tilde{\mathcal{E}}))\},$$

et les égalités correspondantes pour  $\mathcal{S}, \mathcal{W}$ .

**Lemme 1.1** 1)

$$\begin{aligned} \nabla_{e_0} e_0 &= 0 \\ \forall j \geq 1 \quad \nabla_{e_0} e_j &= 0 \quad \text{et} \quad \nabla_{e_j} e_0 = \frac{1}{r} e_j \\ \forall j, k \geq 1 \quad \nabla_{e_j} e_k &= -\frac{\delta_{j,k}}{r} e_0 + \frac{1}{r} \overline{\nabla_{\tilde{e}_j} \tilde{e}_k} \end{aligned}$$

2) La connexion canonique sur  $\mathcal{S}$  est donnée par :

$$\nabla_{e_i}^{\mathcal{S}} = \partial_{e_i} + \frac{1}{2} \sum_{j < k} \omega_{j,k}(e_i) e_j \cdot e_k.$$

où  $\partial_{e_i}$  désigne la dérivation induite par le vecteur  $e_i$ . On a les relations :

$$\nabla_{e_0}^{\mathcal{S}} \bar{s} = \frac{\overline{\partial s}}{\partial r} \quad \text{et pour } j > 0 \quad \nabla_{e_j}^{\mathcal{S}} \bar{s} = \frac{1}{2r} e_0 \cdot e_j \cdot \bar{s} + \frac{1}{r} \overline{\nabla_{\tilde{e}_j} \bar{s}}$$

où  $\nabla^{\tilde{\mathcal{S}}}$  désigne la connexion suivante sur  $\tilde{\mathcal{S}}$  :

$$\nabla_{\tilde{e}_i}^{\tilde{\mathcal{S}}} = \partial_{\tilde{e}_i} + \frac{1}{2} \sum_{j < k} \tilde{\omega}_{j,k}(\tilde{e}_i) \tilde{e}_j \cdot \tilde{e}_k.$$

3) la connexion choisie sur  $\mathcal{W}$  vérifie :

$$\nabla_{e_0}^{\mathcal{W}} \bar{w} = \frac{\overline{\partial w}}{\partial r} \quad \text{et pour } j > 0 \quad \nabla_{e_j}^{\mathcal{W}} \bar{w} = \frac{1}{r} \overline{\nabla_{\tilde{e}_j}^{\tilde{\mathcal{W}}} w}$$

**Preuve :** 1) Résulte du calcul des symboles de Christoffel pour la métrique conique. 2) On peut trouver l'expression de la connexion sur les spineurs dans, par exemple, [BGV91] et les formules énoncées dans [Cho85]. 3) Résulte des propriétés de  $\nabla^{\mathcal{W}}$ .  $\square$

Ces formules montrent en outre que la connexion  $\nabla^{\mathcal{E}}$  induit une connexion sur le fibré (au dessus de  $N$ )  $\tilde{\mathcal{E}}$ , qui est obtenu à l'aide de la partition de l'unité de  $N$  sous-jacente à celle du cône et de la définition suivante sur les ouverts  $\tilde{U}$  de  $N$  :

$$\nabla^{\tilde{\mathcal{E}}}|_{\tilde{U}} = \nabla^{\tilde{\mathcal{S}}} \otimes 1 + 1 \otimes \nabla^{\tilde{\mathcal{W}}}.$$

La connexion  $\nabla^{\tilde{\mathcal{S}}}$  induit des connexions sur les fibrés  $\tilde{\mathcal{S}}_+$  et  $\tilde{\mathcal{S}}_-$ . Etant donné l'expression de  $\nabla^{\tilde{\mathcal{S}}}$ , ces connexions sont les connexions de Clifford canoniques des deux  $Cl(N)|_{\tilde{U}}$ -modules de Clifford irréductibles  $\tilde{\mathcal{S}}_+$  et  $\tilde{\mathcal{S}}_-$  (voir la remarque qui suit la preuve de la proposition 1.4).

Il devrait maintenant être clair pour le lecteur que la connexion  $\nabla^{\tilde{\mathcal{E}}}$  induit par restriction des connexions de Clifford sur les  $Cl(N)$ -modules de Clifford  $\tilde{\mathcal{E}}_+$  et  $\tilde{\mathcal{E}}_-$ .

Nous commençons maintenant à donner l'expression de l'opérateur  $D$  sur la partie conique. Soit  $\bar{\theta} \in \Gamma(\mathcal{E}|_U)$ ,

$$\begin{aligned}
D\bar{\theta} &= \sum_j e_j \cdot \nabla_{e_j}^{\mathcal{E}} \bar{\theta} = e_0 \cdot \nabla_{e_0}^{\mathcal{E}} \bar{\theta} + \sum_{j=1}^n e_j \cdot \nabla_{e_j}^{\mathcal{E}} \bar{\theta} \\
&= e_0 \cdot \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial r} + \sum_{j=1}^n e_j \cdot (\nabla_{e_j}^{\mathcal{S}} + \nabla_{e_j}^{\mathcal{W}}) \bar{\theta} \\
&= e_0 \cdot \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sum_{j=1}^n e_j \cdot \left( \frac{1}{2} e_0 \cdot e_j \cdot \bar{\theta} + \overline{\nabla_{\tilde{e}_j}^{\tilde{\mathcal{S}}} \theta} + \nabla_{\tilde{e}_j}^{\tilde{\mathcal{W}}} \theta \right) \\
&= e_0 \cdot \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{2} e_0 \cdot \bar{\theta} + \overline{\tilde{e}_j (\nabla_{\tilde{e}_j}^{\tilde{\mathcal{E}}} \theta)} \right) \\
&= e_0 \cdot \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} (\tilde{D}\bar{\theta} + \frac{n}{2} e_0 \cdot \bar{\theta}),
\end{aligned}$$

où on a posé à la dernière ligne :

$$\tilde{D} = \sum_{j=1}^n \tilde{e}_j \nabla_{\tilde{e}_j}^{\tilde{\mathcal{E}}} \in \text{Diff}^1(\tilde{U}).$$

**Proposition 1.5**  $D \in \text{Diff}^{1,1}(\mathcal{E})$  et on a sur la partie conique, pour tout  $\theta \in C^\infty([0, 1]; \Gamma(\tilde{\mathcal{E}}))$  :

$$U^{-1}DU\theta = e_0 \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \tilde{D}\theta.$$

De plus,  $\tilde{D}$  s'écrit matriciellement, lorsque on utilise la décomposition  $\tilde{\mathcal{E}} = \tilde{\mathcal{E}}_+ \oplus e_0 \tilde{\mathcal{E}}_+$  :

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} 0 & D_N \\ D_N & 0 \end{pmatrix},$$

où  $D_N$  est un opérateur de Dirac sur  $\tilde{\mathcal{E}}_+$ .

**Remarques :** a) Le fibré local de torsion et la connexion qu'il faut utiliser pour écrire l'opérateur  $d+\delta$  comme un opérateur de Dirac ne permettent pas l'application de cette proposition. Cependant l'opérateur de De Rham comme l'opérateur de la

signature sont des opérateurs de Fuchs. On peut consulter [BS88] pour trouver les identifications pertinentes.

b) La proposition énoncée est déjà connue pour l'opérateur de Dirac associé à une structure spin et sans fibré de torsion [Cho85, Les93]. Ici, la formule que nous prouvons est valable pour l'opérateur de Dirac à coefficient dans un fibré de torsion "plat dans la direction radiale" et plus généralement sans l'hypothèse de l'existence d'une structure spin.

**Preuve de la proposition :** nous appliquons la formule précédemment établie à  $U\theta$  :

$$\begin{aligned}
DU\theta &= e_0 \cdot \nabla_{e_0}^{\mathcal{E}} r^{-n/2} \bar{\theta} + \sum_{j=1}^n e_j \cdot \nabla_{e_j}^{\mathcal{E}} r^{-n/2} \bar{\theta} \\
&= -n/2 r^{-n/2-1} e_0 \bar{\theta} + r^{-n/2} e_0 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial r} + r^{-n/2-1} (\overline{D}\theta + \frac{n}{2} e_0 \cdot \bar{\theta}) \\
&= r^{-n/2} e_0 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial r} + r^{-n/2-1} \overline{D}\theta \\
&= U(e_0 \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \tilde{D}\theta).
\end{aligned}$$

De plus, on a l'expression suivante de  $\tilde{D}$ , en utilisant la décomposition  $\tilde{\mathcal{E}} = \tilde{\mathcal{E}}_+ \oplus \tilde{\mathcal{E}}_-$  : pour tout  $\theta = \varphi + e_0\psi$ , avec  $\varphi, \psi \in \Gamma(\tilde{\mathcal{E}}_+)$ ,

$$\begin{aligned}
\tilde{D}(\varphi + e_0\psi) &= \sum_{j=1}^n \tilde{e}_j \nabla_{\tilde{e}_j}^{\tilde{\mathcal{E}}} (\varphi + e_0\psi) \\
&= \sum_{j=1}^n \tilde{e}_j (\nabla_{\tilde{e}_j}^{\tilde{\mathcal{E}}} \varphi + e_0 \nabla_{\tilde{e}_j}^{\tilde{\mathcal{E}}} \psi) \\
&= \sum_{j=1}^n e_0 \tilde{e}_j e_0 \nabla_{\tilde{e}_j}^{\tilde{\mathcal{E}}} \varphi + \tilde{e}_j e_0 \nabla_{\tilde{e}_j}^{\tilde{\mathcal{E}}} \psi \\
&= e_0 D_N \varphi + D_N \psi,
\end{aligned}$$

où on a posé :

$$D_N = \sum_{j=1}^n \tilde{e}_j e_0 \nabla_{\tilde{e}_j}^{\tilde{\mathcal{E}}}.$$

L'opérateur  $D_N$  est donc l'opérateur de Dirac sur le  $Cl(N)$ -fibré de Clifford  $\tilde{\mathcal{E}}_+$  associée à la connexion de Clifford  $\nabla^{\tilde{\mathcal{E}}}$  (ou plus rigoureusement à la restriction de cette connexion sur  $\tilde{\mathcal{E}}$  au fibré  $\tilde{\mathcal{E}}_+$ ). Matriciellement, cela donne :

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} 0 & D_N \\ D_N & 0 \end{pmatrix},$$

et pour  $D$ , cela donne :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}D_N \\ \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}D_N & 0 \end{pmatrix}.$$

On a prouvé la proposition.  $\square$

**Remarque :** Le cas impair donne lieu à la même formule, la  $\mathbb{Z}_2$ -graduation en moins :

$$U^{-1}DU = e_0\partial_r + 1/rD_N.$$

## 1.4 L'algèbre $\mathcal{A}$

Le choix fondamental que nous faisons est le suivant :

$$\mathcal{A} = C_c^\infty(X) \oplus \mathbb{C}.$$

Nous précisons dans ce paragraphe la  $K$ -théorie et la cohomologie cyclique périodique de  $\mathcal{A}$  et nous vérifions que le résultat est identique pour toutes les algèbres  $\mathcal{A}_\alpha := C^{\infty,\alpha}(X) \oplus \mathbb{C}$ , où  $\alpha \in ]0, +\infty]$ .

### 1.4.1 $K$ -théorie

Rappelons qu'une bonne algèbre topologique est une algèbre topologique dans laquelle l'ensemble des inversibles est ouvert [Bos90]. Nous commençons par vérifier :

- Proposition 1.6** a) Les algèbres  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}_\alpha$  sont denses dans  $C(X^c)$ .  
b) Si  $f \in \mathcal{A}$  (resp.  $\mathcal{A}_\alpha$ ) est inversible dans  $C(X^c)$  alors  $f^{-1} \in \mathcal{A}$  (resp.  $\mathcal{A}_\alpha$ ).  
c)  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}_\alpha$  sont de bonnes algèbres topologiques.

Les algèbres  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}_\alpha$  vérifient donc les hypothèses du théorème A.2.1 de [Bos90] c'est à dire :

#### Corollaire 1.2

$$K^j(X^c) = K_j(C(X^c)) \simeq K_j(\mathcal{A}) \simeq K_j(\mathcal{A}_\alpha), \quad j = 0, 1.$$

**Preuve de la proposition :** a) est évident. Soit  $f + c \in \mathcal{A}$  ( $f$  est  $C^\infty$  à support compact et  $c$  est une constante).  $f$  est inversible dans  $C(X^c)$  signifie que  $f + c$  ne s'annule pas sur  $X^c$  (en particulier  $c \neq 0$ ). Alors  $(f + c)^{-1}$  est définie sur  $X^c$  et  $C^\infty$  sur  $X$ . De plus  $(f + c)^{-1} = ((f + c)^{-1} - c^{-1}) + c^{-1} \in \mathcal{A}$ .

Si  $f + c \in \mathcal{A}_\alpha$  la première partie du raisonnement est identique et on peut écrire :  $(f + c)^{-1} = c^{-1} - \frac{fc^{-1}}{f+c}$ , il est immédiat que  $\frac{f}{f+c} \in C^{\infty,\alpha}(X)$ .

Pour c), rappelons que les algèbres de Banach sont de bonnes algèbres topologiques. D'autre part, l'injection  $\mathcal{A} \hookrightarrow C(X^c)$  est continue. Si  $f \in \mathcal{A}^{-1}$ , il existe un ouvert  $U$  de  $C(X^c)$  contenant  $f$  et constitué d'éléments inversibles dans  $C(X^c)$ . Par conséquent  $U \cap \mathcal{A}$  est un ouvert de  $\mathcal{A}$  constitué d'éléments inversibles dans  $C(X^c)$  donc dans  $\mathcal{A}$  d'après la question b). Le raisonnement est identique pour  $\mathcal{A}_\alpha$ .  $\square$

## 1.4.2 Homologies

Nous précisons maintenant la cohomologie cyclique périodique des algèbres  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}_\alpha$ .

**Proposition 1.7** *On a*

$$HP^*(\mathcal{A}) \simeq H_*(X^c; \mathbb{C}),$$

où  $H_*$  désigne l'homologie singulière avec sa  $\mathbb{Z}_2$  graduation et  $HP^*$  est la cohomologie cyclique périodique continue.

**Preuve :** On a :  $HP^*(\mathcal{A}) = HP^*(C_c^\infty(X)) \oplus \mathbb{C}$ , le facteur  $\mathbb{C}$  contribuant à  $HP^0$ .  $C_c^\infty(X)$  est  $H$ -unitaire, donc son homologie et sa cohomologie de Hochschild continus sont calculables à partir du complexe  $(C_*(C_c^\infty(X)), b)$ . La résolution projective utilisée par A. Connes [Con85] s'adapte immédiatement à notre situation, ce qui donne :

$$HH^*(C_c^\infty(X)) = \text{hom}_{\text{cont}}(\Omega_c^*(X), \mathbb{C}).$$

Autrement dit, il s'agit des courants de De Rham sur la variété non compacte  $X$ . Nous les noterons  $\mathcal{D}_*^{\mathcal{F}}(X)$ . Continuant à suivre la démarche de [Con85], nous identifions  $B$  avec le bord des courants  $\partial$  et nous avons :

$$HC^p(C_c^\infty(X)) \simeq \text{Ker } \partial|_{\mathcal{D}_p^{\mathcal{F}}} \oplus H_{p-2}(\mathcal{D}^{\mathcal{F}}, \partial) \oplus \dots,$$

et, avec la  $\mathbb{Z}_2$  graduation :

$$HP^*(C_c^\infty(X)) \simeq H_*(\mathcal{D}^{\mathcal{F}}, \partial).$$

L'homologie des courants sur  $X$  est canoniquement isomorphe à l'homologie à support fermé et à coefficients complexes de  $X$  [Rha73] :

$$H_*(\mathcal{D}^{\mathcal{F}}, \partial) \simeq H_*^{\mathcal{F}}(X; \mathbb{C}).$$

Cette dernière est (canoniquement) isomorphe à l'homologie à coefficients complexes réduite de  $X^c$  notée  $\bar{H}_*(X^c; \mathbb{C})$ . Comme  $H_q(X^c; \mathbb{C}) = \bar{H}_q(X^c; \mathbb{C})$  pour tout  $q > 0$  et  $H_0(X^c; \mathbb{C}) = \mathbb{C}$ , on a prouvé :

$$HP^*(\mathcal{A}/\mathbb{C}) \simeq \bar{H}_*(X^c; \mathbb{C}) \text{ et } HP^*(\mathcal{A}) \simeq H_*(X^c; \mathbb{C}).$$

□

A partir de ce résultat, les propriétés de la cohomologie cyclique périodique continue [Cun] permettent de prouver :

**Proposition 1.8**  $\forall \alpha \in ]0, \infty]$ ,

$$HP^*(\mathcal{A}_\alpha) \simeq HP^*(\mathcal{A}).$$

**Remarque :** L'algèbre  $C^{\infty,\infty}(X)$  est  $H$ -unitaire et on peut aussi lui appliquer la résolution projective de A. Connes. On trouve ainsi l'homologie de De Rham de courants que l'on peut baptiser "tempérés". Nous ignorons si l'on peut prouver directement que leur homologie ne diffère pas de celle des courants arbitraires. D'autre part, les algèbres  $C^{\infty,\alpha}(X)$ , pour tout  $\alpha \in ]0, \infty[$ , ne sont pas  $H$ -unitaires et nous ne voyons pas comment leur adapter la technique employée par A. Connes. Le calcul de leur (co)-homologie de Hochschild et cyclique est un problème délicat. Cependant la limite inductive de la cohomologie cyclique est très stable, ce qui nous a permis d'obtenir le résultat précédent.

**Preuve de la proposition :** Les algèbres  $C_c^\infty([0, 1] \times N)$  et  $C^{\infty,\alpha}([0, 1] \times N)$  sont difféotopes à 0 (pour les propriétés homologiques de la cohomologie périodique continue voir [Cun]).

En effet, considérons la famille de morphismes  $\rho_t : C^{\infty,\alpha}([0, 1] \times N) \rightarrow C^{\infty,\alpha}([0, 1] \times N)$  définis par  $\rho_t f(r, x) = f(tr, x)$ . Pour  $f$  fixé,  $\rho_t f$  est un chemin différentiable à valeurs dans  $C^{\infty,\alpha}([0, 1] \times N)$ . Donc d'après [Cun],

$$\rho_0^* = \rho_1^* : HP^*(C^{\infty,\alpha}([0, 1] \times N)) \longrightarrow HP^*(C^{\infty,\alpha}([0, 1] \times N)).$$

Or  $\rho_0^* = 0$  et  $\rho_1^* = id$ , d'où la difféotopie à 0 annoncée. L'argument est aussi valable pour  $C_c^\infty([0, 1] \times N)$ .

Considérons le diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccc} C^{\infty,\alpha}(X) & \xrightarrow{r_1 \times -r_2} & C^{\infty,\alpha}([0, 1] \times N) \times C^\infty(X_{1/2}) & \xrightarrow{s_1 \times s_2} & C^\infty([1/2, 1] \times N) \\ \uparrow i & & \uparrow i \times id & & \uparrow id \\ C_c^\infty(X) & \xrightarrow{r_1 \times -r_2} & C_c^\infty([0, 1] \times N) \times C^\infty(X_{1/2}) & \xrightarrow{s_1 \times s_2} & C^\infty([1/2, 1] \times N) \end{array}$$

où  $i$  est l'inclusion,  $id$  l'application identique et  $r_j, s_j, j = 1, 2$  sont les restrictions. Passons aux suites exactes à six termes en cohomologie périodique, en tenant compte des isomorphismes

$$HP^*(C^{\infty,\alpha}([0, 1] \times N) \times C^\infty(X_{1/2})) \simeq HP^*(C^{\infty,\alpha}([0, 1] \times N)) \oplus HP^*(C^\infty(X_{1/2})),$$

$$HP^*(C^\infty(X_{1/2})) \simeq HP^*(C^\infty(M)),$$

$$HP^*(C^\infty([1/2, 1] \times N)) \simeq HP^*(C^\infty(N)),$$

et en notant  $\bar{\mathcal{A}}_\alpha := C^{\infty,\alpha}(X)$ , on obtient :

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \rightarrow & HP^1(C^\infty(N)) & \rightarrow & HP^0(\bar{\mathcal{A}}_\alpha) & \rightarrow & HP^0(C^\infty(M)) & \rightarrow & \dots \\ \uparrow \simeq & & \uparrow \simeq & & \uparrow i^* & & \uparrow \simeq & & \uparrow \simeq \\ \dots & \rightarrow & HP^1(C^\infty(N)) & \rightarrow & HP^0(C_c^\infty(X)) & \rightarrow & HP^0(C^\infty(M)) & \rightarrow & \dots \end{array}$$

Donc  $i^*$  est un isomorphisme et la proposition est prouvée pour la version continue de  $HP^*$ .  $\square$

**Remarque :** Pour la version algébrique, on peut aussi utiliser la suite exacte ( $\infty > \alpha > \beta$ ):

$$0 \rightarrow C^{\infty, \alpha} \rightarrow C^{\infty, \beta} \rightarrow C^{\infty, \beta} / C^{\infty, \alpha} \rightarrow 0$$

Le quotient est nilpotent donc sa cohomologie périodique est nulle [CQ94] et comme  $HP_{alg}^*$  est excisive [CQ94], on en déduit l'isomorphisme  $HP_{alg}^*(\mathcal{A}_\alpha) \simeq HP_{alg}^*(\mathcal{A}_\beta)$ . D'autre part le système  $(\mathcal{A}_\alpha)_{\alpha > 0}$  induit un système inductif de complexes périodiques  $(C_{per}^{**}(\mathcal{A}_\alpha))_{\alpha > 0}$ . Par passage à la limite :

$$HP_{alg}^*(\mathcal{A}_\infty) \simeq \varinjlim HP_{alg}^*(\mathcal{A}_\alpha).$$

Ainsi,  $\mathcal{A}$  est une algèbre adéquate pour développer les idées de la géométrie différentielle non commutative dans ce contexte commutatif et singulier.



# Chapter 2

## Exemples de triplets spectraux

Dans ce deuxième chapitre, nous formerons une classe d'exemples de triplets spectraux  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ . Pour vérifier les hypothèses  $C_1$  et  $C_2$  sur les candidats choisis, nous devons préciser la nature des éléments de l'algèbre  $\mathcal{B}$ . Nous montrerons que les éléments de la forme  $b|\mathcal{D}|^z$  où  $b \in \mathcal{B}$  sont des sommes d'opérateurs de deux types :

- Des opérateurs de la forme  $QB_z$  où  $Q$  et  $B_z$  sont des opérateurs pseudo-différentiels classiques sur  $X$  à noyau de Schwartz compactement supporté.
- Des opérateurs intégraux dont les noyaux de Schwartz sont  $C^k$ ,  $k$  pouvant être choisi aussi grand que nécessaire, et avec un comportement asymptotique contrôlé, qui dépend de  $k$  mais toujours suffisant pour nos besoins.

Le matériel technique menant à ce résultat est contenu dans les paragraphes 2.2 et 2.3. Cette décomposition nous permettra alors de prouver l'existence du prolongement méromorphe sur  $\mathbb{C}$  des fonctions  $\text{Tr } b|\mathcal{D}|^z$ . La vérification des conditions  $C_1$  et  $C_2$  a lieu dans le dernier paragraphe.

### 2.1 Choix de $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ sur une variété à une singularité conique

Nous commençons par la sélection d'une classe d'exemples de triplets pour lesquels nous serons en mesure, à la fin de ce chapitre, de prouver qu'ils sont des triplets spectraux. Comme le premier chapitre le laisse deviner, nous allons choisir :

- $\mathcal{A} = C_c^\infty(X) \oplus \mathbb{C}$  l'algèbre des fonctions  $C^\infty$  à support compact unitarisée par  $\mathbb{C}$ .
- $\mathcal{D}$  parmi les extensions auto-adjointes des opérateurs de type Fuchs  $D$  agissant sur les sections d'un fibré  $E$ .

- $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{0,0}(E)$  (défini au paragraphe 1.2.4).

Cependant, nous ne pouvons pas englober la classe de toutes les extensions auto-adjointes de tous les opérateurs de Fuchs elliptiques car -à notre connaissance- les développements complets des traces des noyaux de la chaleur ne sont pas connus en toute généralité et constituent un domaine de recherche actuel. Il existent dans de nombreux cas et nous nous limiterons donc à ceux ci. D'autre part, comme nous le verrons à la fin du troisième chapitre, cette classe restreinte est tout de même suffisamment vaste pour engendrer la  $K$ -homologie restreinte (et très probablement non restreinte également) de  $X^c$ .

Venons en à la description des choix autorisés de  $\mathcal{D}$  :  $D$  sera toujours un opérateur différentiel symétrique d'ordre 1 elliptique de type Fuchs :  $D \in \text{Diff}^{1,1}(E)$ . Les développements de la chaleur sont alors connus pour une large classe d'extensions "scalables" de tels opérateurs [Les96], en particulier :

- (i) Si  $D$  est essentiellement autoadjoint (plus précisément si  $U^{-1}DU$  est essentiellement auto-adjoint sur  $\mathcal{H}$ ), alors  $\mathcal{D}$  son (unique) extension auto-adjointe est permise.
- (ii) Si les coefficients  $a_k$  de  $D$  (voir la définition du paragraphe 1.3.1) sont constants, alors toutes les extensions "scalables" ([Les96], p. 80) sont permises.
- (iii) Si  $E$  est  $\mathbb{Z}_2$  gradué et si  $D$  est de degré 1 :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & P^t \\ P & 0 \end{pmatrix}$$

alors, par exemple, les extensions auto-adjointes :

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & P_{max}^t \\ P_{min} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}' = \begin{pmatrix} 0 & P_{min}^t \\ P_{max} & 0 \end{pmatrix}$$

sont permises.

Nous montrerons que, lorsque  $\mathcal{D}$  appartient à l'une de ces trois catégories,  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$  est un triplet spectral avec spectre des dimensions de multiplicité 1 ou 2 .

## 2.2 Résultats techniques

Nous précisons ici quelques propriétés liées à l'utilisation du théorème spectral et au calcul pseudodifférentiel usuel sur une variété non compacte. Nous utiliserons largement les résultats et techniques de [Les96, Shu80].

## 2.2.1 Propriétés spectrales de $\mathcal{D}$

$\mathcal{D}$  est autoadjoint, à résolvante  $m + 1$ -sommable [Les96]. Fixons une décomposition spectrale  $\mathcal{S} = (\lambda_k, \phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  où les  $\lambda_k$  sont rangées par ordre croissant de leur valeur absolue et répétées un nombre de fois égal à leur multiplicité. On rappelle :

**Lemme 2.1** ([Les96].) *Pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , on peut trouver  $\varepsilon_j > 0$  tel que l'on ait une inégalité :*

$$\forall \phi \in \text{dom } \mathcal{D}^j, \quad \|\phi\|_{j, \varepsilon_j} \leq c_j (\|\phi\|_{0,0} + \|\mathcal{D}^j \phi\|_{0,0}).$$

En particulier  $\|\phi_k\|_{j, \varepsilon_j} \leq c_j (1 + |\lambda_k|)^j$ . Nous fixons une fois pour toute une suite  $(\varepsilon_j)_j$  qui permette d'appliquer ce lemme. Nous aurons besoin de l'estimation :

**Lemme 2.2** *Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , tout  $(\phi, \lambda) \in \mathcal{S}$  avec  $\lambda \neq 0$ , on a :*

$$\|\phi\|_{-N, -N} \leq c_N \lambda^{-N}.$$

**Preuve :** Par régularité elliptique  $\phi \in C^\infty(X)$ , par conséquent

$$\lambda^N \phi = \mathcal{D}^N \phi = D^N \phi.$$

Pour se persuader que  $\mathcal{D}^N$  et  $D^N$  coïncident sur  $\phi$  on peut écrire pour tout  $\omega \in C_c^\infty(X)$  :

$$\langle D^N \phi, \omega \rangle = \langle \phi, D^N \omega \rangle = \langle \phi, \mathcal{D}^N \omega \rangle = \langle \mathcal{D}^N \phi, \omega \rangle.$$

La première égalité résulte de la symétrie de  $D$  donc de  $D^N$  et de la compacité du support de  $\omega$ . Les deux suivantes sont vraies car  $\mathcal{D}^N$  est une extension autoadjointe de l'opérateur  $D^N$  de domaine  $C_c^\infty(X)$ .

D'autre part l'opérateur différentiel  $D^N \in \text{Diff}^{N,N}(E)$  a des prolongements continus pour tout  $s, \gamma \in \mathbb{R}$  ([Les96, Sch94]):

$$D^N : \mathcal{H}^{s, \gamma}(E) \longrightarrow \mathcal{H}^{s-N, \gamma-N}(E).$$

Donc pour  $s = \gamma = 0$ ,

$$\|\phi\|_{-N, -N} = \lambda^{-N} \|\lambda^N \phi\|_{-N, -N} = \lambda^{-N} \|D^N \phi\|_{-N, -N} \leq C_N \lambda^{-N} \|\phi\|_{0,0} = C_N \lambda^{-N}.$$

□

Ces estimations et la proposition 1.3 permettent d'établir :

**Proposition 2.1** *Pour tout  $n \geq 0$ , on peut trouver  $\varepsilon > 0$  et  $M \in \mathbb{R}$  tels que dans le demi-plan  $\text{Re } z > M$ , le noyau de l'opérateur  $|\mathcal{D}|^{-z}$  est dans le produit tensoriel projectif complété  $C^{n, \varepsilon-1/2}(E) \hat{\otimes}_\pi C^{n, \varepsilon-1/2}(E)$ , où il dépend de  $z$  de façon holomorphe.*

**Preuve :** Si  $\mathcal{D}$  n'est pas inversible, son noyau est de dimension finie, notons :

$$\mathcal{H} = \text{Ker } \mathcal{D} \oplus \mathcal{H}' \text{ et } \mathcal{D}|_{\mathcal{H}'} = \mathcal{D}',$$

alors  $|\mathcal{D}|^{-z}$  est par définition l'opérateur  $(\mathcal{D}')^{-z}$  prolongé à  $\mathcal{H}$  par 0. Nous utilisons le théorème spectral pour représenter formellement  $|\mathcal{D}|^{-z}$  par la série :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |\lambda_k|^{-z} \phi_k \otimes \overline{\phi_k}, \quad (2.1)$$

où  $\lambda_k$  décrit l'ensemble des valeurs propres non nulles de  $\mathcal{D}$ . Fixons  $n \in \mathbb{N}$  et (par exemple)  $\mathbb{N} \ni j = E(n + m/2) + 1$ , alors 1.3 s'applique et :

$$|\phi_k|_{n, \varepsilon_j - 1/2} \leq \|\phi_k\|_{j, \varepsilon_j} \leq c(1 + |\lambda_k|)^j.$$

Comme  $|\lambda_k| \sim_{k \rightarrow \infty} k^{\frac{1}{m}}$ , le terme général de la série 2.1 est dominé par  $k^{(-z+2j)/m}$  donc la série converge absolument (par rapport à la norme  $|\cdot|_{n, \varepsilon_j - 1/2} \otimes |\cdot|_{n, \varepsilon_j - 1/2}$ ) pour  $\text{Re } z > 2j + m$ , ce qui prouve déjà la première partie de la proposition. Maintenant, le même raisonnement appliqué à la série dérivée

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} -(\log |\lambda_k|) |\lambda_k|^{-z} \phi_k \otimes \overline{\phi_k},$$

prouve l'uniforme convergence sur les parties compactes de  $\text{Re } z > 2j + m$ , donc l'analyticité en  $z$  du noyau de  $|\mathcal{D}|^{-z}$  dans ce demi-plan.  $\square$

Cette technique sera réutilisée très souvent dans la suite et nous ne rappellerons pas tous les détails.

## 2.2.2 Résultats sur les opérateurs pseudodifférentiels

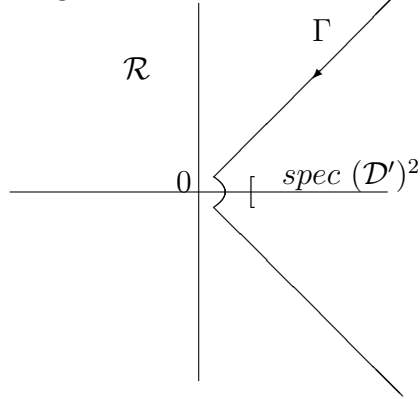
Nous aurons besoin de quelques résultats sur les opérateurs pseudodifférentiels usuels et à paramètre. Pour la définition des opérateurs à paramètre voir [Shu80]. Le lieu des paramètres est une région fermée  $\mathcal{R}$  délimitée par un contour  $\Gamma$  dans le plan complexe décrit dans la figure 2.1.

$\mathcal{R}$  est donc à distance  $d > 0$  du spectre de  $\mathcal{D}^2$ . Nous noterons  $\Psi_c^*(E)$  (resp.  $\Psi_c^*(E, \Gamma)$ ) l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels classiques (resp. classiques à paramètre) dont le noyau de Schwartz est à support compact dans  $X \times X$  (resp.   support contenu dans un compact de  $X \times X$  indépendant du paramètre).  $\Gamma$  peut être utilisé pour redéfinir  $|\mathcal{D}|^z$ , que  $\mathcal{D}$  soit inversible ou non :

$$|\mathcal{D}|^z = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \lambda^{z/2} (\mathcal{D}^2 - \lambda)^{-1} d\lambda.$$

Nous allons maintenant établir quelques lemmes nécessaires pour la suite.

Figure 2.1: Le secteur  $\mathcal{R}$ .



**Lemme 2.3** Soit  $C \in \Psi_c^d(E)$ . Pour tout  $s \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ ,  $C$  admet un prolongement continu :

$$C : \mathcal{H}^{s,\gamma}(E) \longrightarrow \mathcal{H}^{s-d,\delta}(E).$$

En particulier, si  $C \in \Psi_c^{-\infty}(E)$  on a pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$  :

$$C : \mathcal{H}^{-N,\gamma}(E) \longrightarrow \mathcal{H}^{N,\delta}(E).$$

**Preuve :** Choisissons  $\varphi \in C_c^\infty(X)$  égale à 1 sur  $\pi_i(\text{Supp } C)$ ,  $i = 1, 2$ , où  $\pi_i$  désigne la projection de  $X \times X$  sur le premier et le second facteur. Alors pour tout  $f \in C_c^\infty(E)$ , on a  $\varphi C f = C \varphi f = \varphi C \varphi f = C f$  et :

$$\|C f\|_{s-d,\delta}^2 = \|\varphi C f\|_{s-d}^2 + \sum_j (\|(1-\varphi)\theta_j C f\|_{s-d,\delta}^{(j)})^2 = \|C f\|_{s-d}^2,$$

puisque  $1-\varphi$  est nulle sur le support de  $C f$ . L'inégalité suivante est standard :

$$\|C f\|_{s-d}^2 = \|C \varphi f\|_{s-d}^2 \leq c \|\varphi f\|_s^2.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \|C f\|_{s-d,\delta} &\leq c \|\varphi f\|_{s-d} \\ &\leq c (\|\varphi f\|_s + \sum_j \|(1-\varphi)\theta_j f\|_{s,\gamma}^{(j)}) \\ &\leq c \|f\|_{s,\gamma} \end{aligned}$$

□

**Lemme 2.4** Soient  $N, p \in \mathbb{N}$ . Pour  $k = k(p, N)$  assez grand et  $C(\lambda) \in \Psi_c^{-k}(X, \Gamma)$ , la norme de  $C(\lambda) : \mathcal{H}^{-N,\gamma}(E) \longrightarrow \mathcal{H}^{N,\delta}(E)$ ,  $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$  vérifie :

$$\|C(\lambda)\|_{(-N,\gamma) \rightarrow (N,\delta)} \leq c(1 + |\lambda|)^{-p}.$$

**Preuve :** On a pour  $k$  choisi assez grand :

$$\|\varphi C_\lambda f\|_N = \|\varphi C_\lambda \varphi f\|_N \leq c(1 + |\lambda|)^{-p} \|\varphi f\|_{-N},$$

d'où :

$$\begin{aligned} \|C_\lambda f\|_{N,\delta} &\leq c(1 + |\lambda|)^{-p} \|\varphi f\|_{-N} \\ &\leq c(1 + |\lambda|)^{-p} (\|\varphi f\|_{-N} + \sum_j \|(1 - \varphi)\theta_j f\|_{-N,\gamma}^{(j)}) \\ &\leq c(1 + |\lambda|)^{-p} \|f\|_{-N,\gamma}. \end{aligned}$$

□

Nous aurons besoin également de résultats de continuité pour des opérateurs donnés par des noyaux à supports non compacts mais contrôlés :

**Lemme 2.5** Soit  $T \in C^{k,\alpha-1/2+\varepsilon}(E) \hat{\otimes}_\pi C^{l,\beta-1/2+\varepsilon}(E)$ , l'opérateur intégral correspondant a un prolongement continu :

$$T : \mathcal{H}^{-l,-\beta} \longrightarrow \mathcal{H}^{k,\alpha}.$$

**Preuve :** D'après la proposition 1.3 on a les inclusions continues :  $C^{k,\alpha-1/2+\varepsilon}(E) \hookrightarrow \mathcal{H}^{k,\alpha}$  et  $C^{l,\beta-1/2+\varepsilon}(E) \hookrightarrow \mathcal{H}^{l,\beta}$  donc également :

$$C^{k,\alpha-1/2+\varepsilon}(E) \hat{\otimes}_\pi C^{l,\beta-1/2+\varepsilon}(E) \hookrightarrow \mathcal{H}^{k,\alpha} \hat{\otimes}_\pi \mathcal{H}^{l,\beta}.$$

Rappelons que  $\mathcal{H}^{-l,-\beta} = (\mathcal{H}^{l,\beta})'$  où la dualité est donnée par :

$$\langle f, g \rangle = \int_X \bar{f} g d\mu,$$

( $d\mu$  correspondant à la mesure induite par une métrique lisse égale à la métrique produit près de la singularité ). Alors on dispose d'une injection canonique (continue) :

$$\mathcal{H}^{k,\alpha} \hat{\otimes}_\pi \mathcal{H}^{l,\beta} \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}^{-l,-\beta}, \mathcal{H}^{k,\alpha}),$$

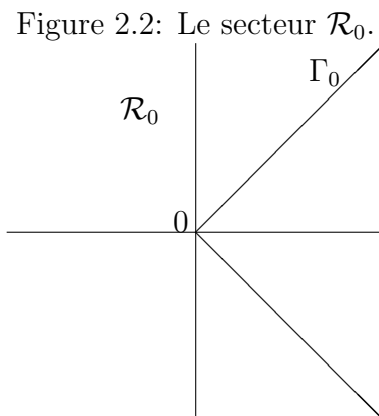
et l'image de  $T$  par cette application est bien entendu l'opérateur intégral associé à  $T$ . □

## 2.3 Structure de $\varphi|\mathcal{D}|^z$ , $\varphi \in C_c^\infty(X)$

Nous montrons ici que pour tout  $\varphi \in C_c^\infty(X)$ , l'opérateur  $\varphi|\mathcal{D}|^z$  est de la forme voulue : opérateur pseudodifférentiel à support compact + opérateur intégral à noyau contrôlé.

### 2.3.1 Construction du paramétriix et propriétés

$D^2$  a un symbole principal  $a_2(x, \xi)$  positif. Pour avoir la condition d'ellipticité à paramètre pour  $D^2 - \lambda$ , il faut prendre  $\lambda$  dans des secteurs  $\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R}$  décrits dans la figure 2.2.



**Proposition 2.2** Soient  $\varphi \in C_c^\infty(X)$  avec  $\varphi = 1$  sur  $X_\epsilon$  et  $n_0 \in \mathbb{N}$ . On peut construire  $B(\lambda)$ ,  $C(\lambda) \in \Psi_c^{-2}(X, \mathcal{R})$ ,  $R(\lambda)$ ,  $S(\lambda) \in \Psi_c^{-n_0}(X, \mathcal{R})$  tels que :

$$B(\lambda)(D^2 - \lambda) = \varphi + R(\lambda) \quad \text{et} \quad (D^2 - \lambda)C(\lambda) = \varphi + S(\lambda).$$

**Preuve :** On se donne un recouvrement ouvert, fini, de  $X_\epsilon$  par des cartes locales  $(U_j, \chi_j)$ . Soit  $(U, \chi)$  l'une d'entre elle et soit  $V = \chi(U)$  l'ouvert de  $\mathbb{R}^m$  correspondant. On résoud dans l'ouvert  $V$  l'équation symbolique formelle :

$$b(x, \xi, \lambda) \# (a(x, \xi) - \lambda) \sim 1, \quad (2.2)$$

où  $a$  est le symbole de  $D^2$  dans la carte locale en question. On trouve une solution sous la forme d'une somme formelle

$$\sum_k b_k^0(x, \xi, \lambda)$$

définie pour  $\lambda \in \mathcal{R}_0$  et  $|\xi| + |\lambda| \neq 0$ . On associe à la somme finie  $\sum_{k=0}^{n_0-1} b_k^0(x, \xi, \lambda)$  un vrai symbole  $\sum_{k=0}^{n_0-1} b_k(x, \xi, \lambda)$  après avoir éliminé par une fonction cut-off la singularité des  $b_k^0$  en  $|\xi| + |\lambda| = 0$  :

$$b_k(x, \xi, \lambda) = \theta(|\lambda| + |\xi|^2) b_k^0(x, \xi, \lambda).$$

Les  $b_k$  prennent un sens sur  $\mathcal{R}$ , en effet :  $a_2(x, \xi) - \lambda \neq 0$  pour  $|\lambda| < \kappa(|\xi|)$  et les  $b_k^0(x, \xi, \lambda)$  sont définis lorsque cette condition est remplie, c'est à dire qu'ils sont

définis dans une région similaire à  $\mathcal{R}$  mais dépendante de  $\xi$ . La fonction  $\kappa$  peut être choisie de la façon suivante :

$$\kappa(|\xi|) = \rho|\xi|^2,$$

où  $\rho := \inf_{x \in V, |u|=1} a_2(x, u)$  est strictement positif puisqu'on peut toujours supposer que  $V \subset\subset V'$  et que  $a$  est elliptique sur  $V'$ . Par conséquent pour avoir des  $b_k$  définis sur  $\mathcal{R} := \mathcal{R}_0 \cup D(0, \rho)$  ( $\mathcal{R}$  ne dépend pas de  $k$ ), on peut utiliser  $\theta$  telle que :  $\theta(t) = 0$  si  $t < \rho + 1$  et  $\theta(t) = 1$  si  $t > \rho + 2$ .

On obtient un opérateur  $E^V(\lambda) \in \Psi^{-2}(V, \mathcal{R})$  qui vérifie :

$$E^V(\lambda)(D^2 - \lambda) = I + R^V(\lambda),$$

$$(D^2 - \lambda)E^V(\lambda) = I + S^V(\lambda),$$

où  $R^V(\lambda), S^V(\lambda) \in \Psi^{-n_0}(V, \mathcal{R})$ .

Soit maintenant  $\phi, \psi \in C_c^\infty(V)$  telles que  $\phi\psi = \phi$ . On pose :

$$B^V(\lambda) = \phi E^V(\lambda)\psi \quad \text{et} \quad C^V(\lambda) = \psi E^V(\lambda)\phi.$$

On vérifie :

$$\begin{aligned} \sigma(B^V(\lambda)(D^2 - \lambda))(x, \xi) &\sim \sum_{\alpha \geq 0} \partial_\xi^\alpha (\phi(x)e(x, \xi, \lambda)) \partial_x^\alpha (\psi(x)(a(x, \xi) - \lambda)) \\ &\sim \phi(x) \sum_{\alpha \geq 0} \partial_\xi^\alpha e(x, \xi, \lambda) \partial_x^\alpha (a(x, \xi) - \lambda) \\ &\sim \phi(x)(1 + \sigma(R^V(\lambda))). \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} (D^2 - \lambda)\psi E^V(\lambda)\phi &= [(D^2 - \lambda), \psi]E^V(\lambda)\phi + \psi(D^2 - \lambda)E^V(\lambda)\phi \\ &= [D^2, \psi]E^V(\lambda)\phi + \psi\phi + \psi S^V(\lambda)\phi \\ &= \phi + [D^2, \psi]E^V(\lambda)\phi + \psi S^V(\lambda)\phi. \end{aligned}$$

Les coefficients de l'opérateur différentiel  $[D^2, \psi]$  sont à support dans  $\text{Supp } d\psi$  donc sont nuls sur  $\text{Supp } \phi$  puisque  $\phi\psi = \phi$ , et par conséquent

$$[D^2, \psi]E^V(\lambda)\phi \in \Psi_c^{-\infty}(V, \mathcal{R})$$

Donc on a bien les relations, sur l'ouvert  $V$  :

$$B^V(\lambda)(D^2 - \lambda) = \phi + R^V(\lambda) \quad \text{et} \quad (D^2 - \lambda)C^V(\lambda) = \phi + S^V(\lambda).$$

Par construction, les supports des noyaux de Schwartz de  $B^V(\lambda), C^V(\lambda)$  sont inclus dans  $\text{Supp } \phi \times \text{Supp } \psi$  qui est un compact de  $V \times V$  indépendant de  $\lambda$ . Il en est de même pour les opérateurs :

$$R^V = B^V(\lambda)(D^2 - \lambda) - \phi \quad \text{et} \quad S^V(\lambda) = (D^2 - \lambda)C^V(\lambda) - \phi,$$



puisque  $(D^2 - \lambda)$  est différentiel donc local.

Sur chaque ouvert  $U_j$  du recouvrement choisi de  $X_\epsilon$  on définit l'opérateur  $B_j(\lambda)$  correspondant à  $B^{V_j}(\lambda)$  par  $\chi_j$  :

$$B_j(\lambda) = (\chi_j^{-1})_*(B^{V_j}(\lambda)),$$

avec  $\phi_j := ((\chi_j^{-1})^*\varphi_j)$  où  $\varphi_j \in C_c^\infty(U_j)$ ,  $\sum_j \varphi_j = 1$  sur  $X_\epsilon$ , et  $\psi_j$  telle que  $\phi_j\psi_j = \phi_j$ . Et de la même façon :  $R_j(\lambda) = (\chi_j^{-1})_*(R^{V_j}(\lambda))$  Alors avec  $B(\lambda) = \sum_j B_j(\lambda)$ ,  $R(\lambda) = \sum_j R_j(\lambda)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \forall u \in C_c^\infty(E), \quad B(\lambda)(D^2 - \lambda)u &= \sum_j B_j(\lambda)(D^2 - \lambda)u \\ &= \sum_j (\varphi_j u + R_j(\lambda)u) \\ &= \varphi u + R(\lambda)u. \end{aligned}$$

Avec les définitions analogues pour  $C(\lambda)$ ,  $S(\lambda)$  à partir des constructions déjà faites en coordonnées locales, on obtient :

$$(D^2 - \lambda)C(\lambda)u = \varphi u + S(\lambda)u.$$

$B(\lambda)$  et  $C(\lambda)$  sont des sommes finies d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordre  $-2$  dont les noyaux de Schwartz sont à support compact indépendant de  $\lambda$ , donc ils ont eux mêmes des noyaux à support compact indépendant de  $\lambda$ . Cette conclusion est aussi valable pour les opérateurs (d'ordre  $-n_0$ )  $R(\lambda)$  et  $S(\lambda)$ .  $\square$

**Proposition 2.3** a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on peut fixer  $n_0$  assez grand tel que, avec les notations précédentes, les opérateurs

$$R(\lambda)(\mathcal{D}^2 - \lambda)^{-1}, \quad (\mathcal{D}^2 - \lambda)^{-1}S(\lambda)$$

soient à noyaux de Schwartz dans  $C^{n, \epsilon-1/2}(E) \hat{\otimes}_\pi C^{n, \epsilon-1/2}(E)$  pour un certain  $\epsilon > 0$ . De plus, ces opérateurs dépendent analytiquement de  $\lambda$  dans la région  $\mathcal{R} \setminus \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$ .

b) On a le même résultat pour les opérateurs

$$|\mathcal{D}|^j R(\lambda)(\mathcal{D}^2 - \lambda)^{-1} |\mathcal{D}|^k \quad \text{et} \quad |\mathcal{D}|^j (\mathcal{D}^2 - \lambda)^{-1} S(\lambda) |\mathcal{D}|^k,$$

pour tout  $j, k \in \mathbb{N}$ .

**Preuve :** Notons que le noyau de l'opérateur  $R(\lambda)(\mathcal{D}^2 - \lambda)^{-1}$  est donné par la série :

$$\sum_{\lambda_k \in \text{spec } \mathcal{D}^2} (\lambda_k^2 - \lambda)^{-1} R(\lambda)(\phi_k) \otimes \bar{\phi}_k. \quad (2.3)$$

Notons  $|\cdot|_{m,\alpha;t,\beta}$  la norme de  $C^{m,\alpha}(E) \hat{\otimes}_\pi C^{t,\beta}(E)$ . Avec la méthode et les notations de la preuve de la proposition 2.1, et les lemmes 2.4, 2.2 nous obtenons, pour tout  $p, n, N$ , tout  $\lambda_k \neq 0$  et pour  $n_0(n, N)$  convenablement choisi :

$$|(R(\lambda)(\phi_k)(x) \otimes \phi_k(y))|_{n,\varepsilon_j-1/2;n,\varepsilon_j-1/2} \quad (2.4)$$

$$\leq c \|R(\lambda)\phi_k\|_{j,\varepsilon_j} \|\phi_k\|_{j,\varepsilon_j} \quad (2.5)$$

$$\leq c(1 + |\lambda|)^{-p} \|\phi_k\|_{-N,-N} (1 + |\lambda_k|)^j \quad (2.6)$$

$$\leq c(1 + |\lambda|)^{-p} \lambda_k^{-N} (1 + \lambda_k)^j \quad (2.7)$$

$$\leq c(1 + |\lambda|)^{-p} \lambda_k^{-N+j} \quad (2.8)$$

La constante  $c$  dépend de  $p, n, N$  mais pas de  $k, \lambda$ . Pour  $\phi_k \in \text{Ker } \mathcal{D}^2$ , on obtient de la même façon :

$$|(R(\lambda)(\phi_k)(x) \otimes \phi_k(y))|_{n,\varepsilon_j-1/2;n,\varepsilon_j-1/2} \leq c(1 + |\lambda|)^{-p}.$$

Nous n'avons besoin pour le moment que de la majoration par une puissance convenable de  $\lambda_k$ , mais nous avons précisé par la même occasion le comportement en  $\lambda$ , qui servira ultérieurement dans la preuve de la proposition 2.4, a).

De plus  $\Gamma$  est choisi de telle sorte que :

$$\exists M \text{ tel que } \forall \lambda \in \Gamma, \forall \lambda_k \in \text{Spec } \mathcal{D}^2 \quad |\lambda_k^2 - \lambda|^{-1} \leq M \lambda_k^{-2}.$$

Les  $\phi_k \in \text{Ker } \mathcal{D}^2$  sont en nombre fini, dans le domaine de l'opérateur différentiel  $D^q$  pour tout  $q$ , donc dans  $\mathcal{H}^{q,\varepsilon_q}$  où  $\varepsilon_q > 0$  d'après [Les96], et dans  $C^{n,\varepsilon_q-1/2}(E)$  pour  $q$  choisi assez grand d'après 1.3.

Par conséquent la série 2.3 converge absolument dans  $C^{n,\varepsilon-1/2}(E) \hat{\otimes}_\pi C^{n,\varepsilon-1/2}(E)$  dès que  $-N + j - 2 < -1$  et la première partie de a) est prouvée.

D'autre part  $R(\lambda) = -\varphi + B(\lambda)(\mathcal{D}^2 - \lambda)$  est analytique en  $\lambda$  dans la région  $\mathcal{R} \setminus \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq \rho + 2\}$ . On a perdu l'analyticité de  $B(\lambda)$  au voisinage de 0 puisque on a coupé son symbole par une fonction cut-off. Comme  $(\mathcal{D}^2 - \lambda)^{-1}$  est analytique en  $\lambda$  dans la région  $\mathcal{R}$ , l'opérateur  $R(\lambda)(\mathcal{D}^2 - \lambda)^{-1}$  vérifie bien la condition demandée. Le raisonnement est identique pour l'autre opérateur de a).

b) Un tel opérateur est représenté par un noyau du type suivant :

$$\sum_{p,q} \lambda_p^j \frac{\lambda_q^k}{\lambda_q^2 - \lambda} \phi_p < \phi_p \mid R(\lambda) \mid \phi_q > \otimes \overline{\phi_q},$$

où on considère  $R(\lambda)$  comme une forme linéaire continue sur  $\mathcal{H}^{-N,-N} \times \mathcal{H}^{-N,-N}$ . La méthode précédente s'applique alors à cette série double et donne le résultat voulu. Le raisonnement est identique pour l'autre opérateur.  $\square$

**Remarque :** On aurait pu montrer un peu mieux dans a) puisque les noyaux étudiés n'ont pas un comportement symétrique par rapport à leur 2 variables : celui de  $R(\lambda)(\mathcal{D}^2 - \lambda)^{-1}$  est à support compact par rapport à la première variable et celui de  $(\mathcal{D}^2 - \lambda)^{-1}S(\lambda)$  est à support compact par rapport à la seconde variable.

### 2.3.2 Définition des puissances complexes et propriétés

Nous sommes maintenant en mesure d'effectuer les intégrales de contour suivantes :

**Proposition 2.4** a) Pour tout  $M, n$  et pour  $n_0 = n_0(n, M)$  assez grand, l'intégrale

$$R_z = \int_{\Gamma} \lambda^{z/2} R(\lambda) (\mathcal{D}^2 - \lambda)^{-1} d\lambda$$

converge dans  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  pour tout  $\operatorname{Re} z < M$ . Le noyau de  $R_z$  est une fonction holomorphe de  $z$  à valeurs dans  $C^{n, \varepsilon-1/2}(E) \hat{\otimes}_{\pi} C^{n, \varepsilon-1/2}(E)$  pour un certain  $\varepsilon > 0$ .

b) Pour  $\operatorname{Re} z < 0$  l'intégrale

$$B_z = \int_{\Gamma} \lambda^{z/2} B(\lambda) d\lambda$$

est absolument convergente dans  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  et  $B_z \in \Psi_c^z(E)$ . Les composantes homogènes de son symbole sont, en coordonnées locales :

$$b_k^{(z), 0}(x, \xi) = \int_{\Gamma} \lambda^{z/2} b_k^0(x, \xi, \lambda) d\lambda$$

où les  $b_k^0$  sont ceux qui apparaissent dans la résolution de l'équation (2.2).

c) les résultats de a) et b) sont valables pour les opérateurs :

$$\int_{\Gamma} \lambda^s (\mathcal{D}^2 - \lambda)^{-1} S(\lambda) \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma} \lambda^s C(\lambda) d\lambda.$$

**Remarque :** On peut prolonger la définition précédente de  $B_z$  à tout  $z \in \mathbb{C}$  de telle sorte que la relation :

$$\text{Pour tout } k \text{ tel que } \operatorname{Re} z - 2k < 0 \quad B_z = B_{z-2k} D^{2k},$$

soit vérifiée au niveau symbolique et donc modulo  $\Psi_c^{-\infty}(E)$ . De plus, en coordonnées locales, les composantes homogènes du symbole de l'opérateur  $B_z$  obtenu sont holomorphes en  $z$  sur  $\mathbb{C}$  pour tout  $x$  et tout  $\xi \neq 0$ .

**Preuve de la proposition :** a) C'est immédiat, il suffit de reprendre les estimations de la proposition 2.3, d'y choisir  $p, N$  assez grands pour que l'intégrale

$$\int_{\Gamma} \lambda^{z/2} (\lambda_k - \lambda)^{-1} R(\lambda) (\phi_k) \otimes \phi_k d\lambda$$

soit absolument convergente pour la norme  $|\cdot|_{n, \varepsilon-1/2; n, \varepsilon-1/2}$  avec un contrôle de cette intégrale par une puissance de  $\lambda_k$  telle que la série

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{\Gamma} \lambda^{z/2} (\lambda_k - \lambda)^{-1} R(\lambda) (\phi_k) \otimes \phi_k d\lambda$$

converge avec les propriétés exigées pour sa somme.

b) : Ecrivons  $B_z = \sum_j \int_{\Gamma} \lambda^{z/2} B_j(\lambda) d\lambda = \sum_j B_{j,z}$ .  $B_j(\lambda) = (\chi_j^{-1})_*(B^{V_j}(\lambda))$ . Chaque des intégrales définissant  $B_{j,z}$  peut être faite dans l'ouvert  $V_j \subset \mathbb{R}^m$ , la question peut donc être traitée en coordonnées locales où le résultat est celui de [Shu80]. L'intégrale de contour ne modifie pas les supports des noyaux des  $B_j(\lambda)$ , donc  $B_z$  est comportement supporté, uniformément en  $z$ .

c) est montré par les mêmes arguments.  $\square$

Les assertions énoncées dans la remarque qui suit la proposition se montrent de la même façon.

Nous arrivons au résultat technique principal, qui nous permettra de vérifier  $C_1$  et  $C_2$ . On utilisera la définition de  $R_z$  donnée dans la proposition 2.4 uniquement pour  $\operatorname{Re} z < 0$ . Pour  $\operatorname{Re} z \geq 0$  on choisit  $k$  tel que  $\operatorname{Re} z - 2k < 0$  et on définira  $R_z := R_{z-2k} \mathcal{D}^{2k}$ . Nous ferons la même chose pour  $S_z$ . En vertu de la proposition 2.3 b), le noyau de ce nouvel opérateur a le même comportement que celui défini par l'intégrale de contour dans la proposition 2.4 (ils sont d'ailleurs probablement égaux mais nous ne l'avons pas prouvé).

**Proposition 2.5** *Avec les notations précédentes, la relation suivante est vérifiée pour tout  $z \in \mathbb{C}$  :*

$$\varphi |\mathcal{D}|^z = B_z + R_z \quad \text{et} \quad |\mathcal{D}|^z \varphi = C_z + S_z$$

**Preuve :** Partons de l'égalité entre opérateurs définis sur  $C_c^\infty(X)$  :

$$B(\lambda)(D^2 - \lambda) = \varphi + R(\lambda).$$

Ces opérateurs, en tant qu'opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0 compactement supportés, se prolongent en des opérateurs continus sur  $\mathcal{H}$  (nous noterons par  $\bar{\phantom{x}}$  les prolongements naturels des opérateurs sur les Sobolev appropriés). Nous admettons pour le moment l'égalité dans  $B(\mathcal{H})$  suivante :

$$\overline{B(\lambda)(D^2 - \lambda)(\mathcal{D}^2 - \lambda)^{-1}} = \overline{B(\lambda)}, \quad (2.9)$$

qui implique l'égalité

$$\varphi(\mathcal{D}^2 - \lambda)^{-1} = B(\lambda) - R(\lambda)(\mathcal{D}^2 - \lambda)^{-1},$$

dont on déduit pour tout  $\operatorname{Re} z < 0$  :

$$\varphi |\mathcal{D}|^z = B_z + R_z. \quad (2.10)$$

La proposition est prouvée dans ce cas.

Pour  $\operatorname{Re} z \geq 0$  on fixe  $2k > \operatorname{Re} z$ . L'égalité précédente pour la valeur  $z - 2k$  composée à droite avec l'opérateur  $\mathcal{D}^{2k}$  donne :

$$\varphi |\mathcal{D}|^{z-2k} \mathcal{D}^{2k} = B_{z-2k} \mathcal{D}^{2k} + R_{z-2k} \mathcal{D}^{2k}. \quad (2.11)$$

$\mathcal{D}^{2k} = |\mathcal{D}|^{2k}$  donc  $|\mathcal{D}|^{z-2k}\mathcal{D}^{2k} = |\mathcal{D}|^z$ . Lorsque nous justifions (2.9), nous prouverons par la même occasion l'égalité suivante :

$$B_{z-2k}\mathcal{D}^{2k} = B_{z-2k}D^{2k}\mathcal{D}^{-2k}\mathcal{D}^{2k} = B_{z-2k}D^{2k}. \quad (2.12)$$

Cette dernière relation implique :  $B_{z-2k}\mathcal{D}^{2k} = B_z$ .

De même les relations  $R_{z-2k}\mathcal{D}^{2k} = R_{z-2k}D^{2k}$  et (2.11) prouvent que la définition de  $R_z$  pour  $\operatorname{Re} z \geq 0$  est indépendante de  $k$ . Elles permettent également d'étendre la relation (2.10) à tout  $z \in \mathbb{C}$ .  $\square$

Nous prouvons maintenant (2.9) et (2.12). Pour cela nous commençons par vérifier le lemme suivant

**Lemme 2.6** *Soit  $A \in \operatorname{Diff}^{k,l}(E)$  elliptique, symétrique. Notons  $\bar{A}$  le prolongement continu de  $A$  entre  $H$  et  $\mathcal{H}^{-k,-l}(E)$ . Soit  $A_e$  une extension fermée de  $A$  sur  $\mathcal{H}$  de domaine  $\mathcal{T}_e$ , alors on a :*

$$\bar{A}|_{\mathcal{T}_e} = A_e.$$

**Preuve :** Il suffit de le vérifier pour l'extension maximale  $A_{max}$  de  $A$  sur  $\mathcal{H}$ . On rappelle que  $u \in \operatorname{dom} A_{max}$  si et seulement si la forme linéaire :

$$\begin{array}{ccc} C_c^\infty(E) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \varphi & \longmapsto & \langle u, A^*\varphi \rangle \end{array}$$

se prolonge continument à  $\mathcal{H}$ . Dans ce cas  $A_{max}u$  est l'unique élément de  $\mathcal{H}$  tel que :

$$\forall v \in C_c^\infty(E), \quad \langle A_{max}u, v \rangle = \langle u, A^*v \rangle.$$

D'autre part l'opérateur borné :  $\bar{A} : H \longrightarrow \mathcal{H}^{-k,-l}(E)$  admet un adjoint :

$$\bar{A}^* : \mathcal{H}^{k,l}(E) \simeq (\mathcal{H}^{-k,-l}(E))' \longrightarrow \mathcal{H}' \simeq \mathcal{H},$$

qui est caractérisé de la façon suivante sur  $C_c^\infty(E)$  (dense dans  $\mathcal{H}^{k,l}(E)$ ):

$$\forall v \in \mathcal{H}, \quad \langle \bar{A}^*\varphi, v \rangle = \langle \varphi, \bar{A}v \rangle$$

La forme linéaire  $\bar{A}^*\varphi$  sur  $\mathcal{H}$  est entièrement déterminée dès qu'elle est connue sur  $C_c^\infty(E)$  (par densité). Soit donc  $\psi \in C_c^\infty(E)$ , on a :

$$\langle \bar{A}^*\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \bar{A}\psi \rangle = \langle \varphi, A\psi \rangle = \langle A\varphi, \psi \rangle.$$

La dernière égalité provient du fait que  $A$  est symétrique et que  $\varphi, \psi \in \operatorname{dom} A$ . On a prouvé que  $\bar{A}^*\varphi = A\varphi = \bar{A}\varphi$  pour tout  $\varphi \in C_c^\infty(E)$ . Maintenant soit  $u \in \operatorname{dom} A_{max}$ , on a pour tout  $\psi \in C_c^\infty(E)$  :

$$\langle A_{max}u, \psi \rangle = \langle u, A\psi \rangle = \langle u, \bar{A}^*\psi \rangle = \langle \bar{A}u, \psi \rangle,$$

d'où  $A_{max}u = \bar{A}u$ , ce qui prouve 2.6. □

On peut définir le prolongement de  $B(\lambda)(\mathcal{D}^2 - \lambda)$  à  $H$  par la composition :

$$H = \mathcal{H}^{0,0}(E) \xrightarrow{\overline{D^2 - \lambda}} \mathcal{H}^{-2,-2}(E) \xrightarrow{\overline{B(\lambda)}} \mathcal{H}^{0,0}(E).$$

L'application du lemme précédent à l'extension fermée  $\mathcal{D}^2 - \lambda$  nous donne :

$$\overline{B(\lambda)} \circ \overline{(\mathcal{D}^2 - \lambda)}|_{\text{dom } \mathcal{D}^2} = \overline{B(\lambda)}(\mathcal{D}^2 - \lambda),$$

dont on déduit immédiatement l'égalité (2.9):

$$\overline{B(\lambda)} \circ \overline{(\mathcal{D}^2 - \lambda)} \circ (\mathcal{D}^2 - \lambda)^{-1} = \overline{B(\lambda)}.$$

En appliquant le lemme à  $\mathcal{D}^2$  on obtient (2.12). □

**Corollaire 2.7**  $\varphi|D|^z\varphi$  est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre  $z$  à noyau de Schwartz à support compact.

**Preuve :** On a

$$\begin{aligned} \varphi|D|^z\varphi &= B_z\varphi + \int_{\Gamma} \lambda^{z/2} R(\lambda)(\mathcal{D}^2 - \lambda)^{-1}\varphi d\lambda \\ &= B_z\varphi + \int_{\Gamma} \lambda^{z/2} R(\lambda)(C(\lambda) + (\mathcal{D}^2 - \lambda)^{-1}S(\lambda))d\lambda \\ &= B'_z + \int_{\Gamma} \lambda^{z/2} R(\lambda)(\mathcal{D}^2 - \lambda)^{-1}S(\lambda)d\lambda \end{aligned}$$

L'assertion  $B'_z \in \Psi_c^z(E)$  est immédiate. On peut construire les opérateurs  $B, C, R, S$  à partir de la solution complète de l'équation symbolique (2.2). Alors  $R(\lambda)$  et  $S(\lambda)$  sont régularisants et l'opérateur

$$\int_{\Gamma} \lambda^{z/2} R(\lambda)(\mathcal{D}^2 - \lambda)^{-1}S(\lambda)d\lambda,$$

est régularisant et à noyau de Schwartz compactement supporté. □

## 2.4 Vérification de $C_1$ et $C_2$ pour $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$

### 2.4.1 Vérification de l'hypothèse $(C_1)$

On s'appuie sur le lemme suivant :

**Lemme 2.8** ([CM95]).

$$\bigcap_{n \geq 0} \text{dom } \delta^n = \bigcap_{p, q \geq 0} \text{dom } L^p R^q.$$

On montre ensuite par une récurrence immédiate la relation :

$$L^p R^q(a) = |\mathcal{D}|^{-p} \nabla^{p+q}(a) |\mathcal{D}|^{-q},$$

où  $a \in \mathcal{A}$  et  $\nabla(a) = [\mathcal{D}^2, a]$ .

$(C_1)$  est alors vérifiée pour les raisons suivantes : pour  $p + q > 0$  les coefficients de l'opérateur différentiel  $\nabla^{p+q}(a)$  sont nuls près de la singularité. On peut donc trouver  $\varphi \in C_c^\infty(X)$  telle que l'égalité suivante soit vérifiée :

$$\varphi \nabla^{p+q}(a) \varphi = \nabla^{p+q}(a).$$

On peut alors écrire :

$$L^p R^q(a) = (C_{-p} + S_{-p}) \nabla^{p+q}(a) (B_{-q} + R_{-q}),$$

où

$$C_{-p} \in \Psi_c^{-p}(E), \quad B_{-q} \in \Psi_c^{-q}(E),$$

et

$$S_{-p} \in C^{n, \varepsilon-1/2} \hat{\otimes}_\pi C^{m, \varepsilon-1/2}, \quad R_{-q} \in C^{n, \varepsilon-1/2} \hat{\otimes}_\pi C^{m, \varepsilon-1/2},$$

avec  $\varepsilon > 0$  et avec  $n$  pouvant être fixé aussi grand que nécessaire. De plus :

- $C_{-p} \nabla^{p+q}(a) B_{-q}$  est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0 compactement supporté donc il est borné sur  $\mathcal{H}$ .
- Pour  $n \geq p$  le lemme 2.5 implique la continuité de

$$S_{-p} : \mathcal{H}^{-p,0} \longrightarrow \mathcal{H},$$

comme  $\nabla^{p+q}(a) B_{-q} \in \Psi_c^p$ , on a la continuité de

$$\nabla^{p+q}(a) B_{-q} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}^{-p,0},$$

donc  $S_{-p} \nabla^{p+q}(a) B_{-q} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ .

- Nous prouvons de la même façon les mêmes résultats pour les opérateurs  $C_{-p} \nabla^{p+q}(a) R_{-q}$  et  $S_{-p} \nabla^{p+q}(a) R_{-q}$ .

## 2.4.2 Vérification de l'hypothèse $(C_2)$

La fonction  $h_b : z \longmapsto \text{Tr}(b|\mathcal{D}|^{-z})$ ,  $b \in \mathcal{B}$ , est définie et holomorphe dans le demi-plan  $\text{Re } z > m$ , le comportement asymptotique du spectre est prouvé par M. Lesch dans [Les96]. fixons  $b \in \mathcal{B}$ .  $b$  est une somme finie d'éléments de la forme :

$$\delta^{k_1}(a_1) \delta^{k_2}(a_2) \cdots \delta^{k_j}(a_j) \quad a_i \in \mathcal{A}, \quad k_i \in \mathbb{N}, \quad j \in \mathbb{N},$$

qui sont eux mêmes des combinaisons linéaires d'éléments de la forme

$$Q' = |D|^{l_1} a_1 |D|^{l_2} a_2 \cdots |D|^{l_j} a_j |D|^{l_{j+1}},$$

où  $\forall 1 \leq i \leq j$ ,  $a_i \in C_c^\infty(X)$ . Remarquons que :

$$\mathrm{Tr} (|D|^{l_1} a_1 |D|^{l_2} a_2 \cdots |D|^{l_j} a_j |D|^{l_{j+1}} |\mathcal{D}|^{-z}) = \mathrm{Tr} (a_1 |D|^{l_2} a_2 \cdots |D|^{l_j} a_j |\mathcal{D}|^{-z+l_1+l_{j+1}}).$$

En effet, pour  $k$  assez grand, en utilisant les arguments du paragraphe précédent on prouve que  $Q' |\mathcal{D}|^{-k} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Par conséquent pour  $\mathrm{Re} z$  assez grand, l'opérateur  $Q' |\mathcal{D}|^{-k} |\mathcal{D}|^{k-z+l_1}$  est à trace. Comme  $|\mathcal{D}|^{-l_1}$  est borné, on a ensuite :

$$\mathrm{Tr} (Q' |\mathcal{D}|^{-z}) = \mathrm{Tr} (Q' |\mathcal{D}|^{-z+l_1} |\mathcal{D}|^{-l_1}) = \mathrm{Tr} (|\mathcal{D}|^{-l_1} Q' |\mathcal{D}|^{-z+l_1})$$

d'où l'égalité annoncée. D'après le corollaire 2.7 on a

$$a_1 |D|^{l_2} a_2 \cdots |D|^{l_j} a_j =: Q \in \Psi_c^l(E)$$

Finalemment nous avons deux cas à traiter : le prolongement de  $\mathrm{Tr} (|\mathcal{D}|^{-z})$  et celui de  $\mathrm{Tr} (Q |\mathcal{D}|^{-z+l})$  avec  $Q \in \Psi_c^k(E)$ ,  $k, l \in \mathbb{N}$ . On peut oublier  $l$  pour le moment puisqu'il ne modifie pas la propriété d'existence d'un prolongement analytique, et translate seulement, le cas échéant, les pôles de la fonction.

### Cas de $\mathrm{Tr} (|\mathcal{D}|^{-z})$

On va se servir des théorèmes (2.4.5) et (2.4.6) de [Les96]. Si  $\mathcal{D}$  provient de la catégorie (i) du paragraphe 2.1, alors  $\mathcal{D}^2$  coïncide avec l'extension de Friedrichs de  $D^2$ . Donc le théorème (2.4.5) donne :

$$\mathrm{Tr} e^{-t\mathcal{D}^2} \sim_{t \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + \alpha_n \log t) t^{\frac{n-m}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n t^{\frac{n}{2}}. \quad (2.13)$$

Si  $\mathcal{D}$  vient de la classe (ii), le théorème (2.4.6) de [Les96] donne :

$$\mathrm{Tr} e^{-t\mathcal{D}^2} \sim_{t \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{\frac{n-m}{2}} + \alpha_m \log t. \quad (2.14)$$

Si  $\mathcal{D}$  est de la catégorie (iii), alors :

$$\mathcal{D}^2 = \begin{pmatrix} P_{max}^t P_{min} & 0 \\ 0 & P_{min} P_{max}^t \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

$P_{max}^t P_{min}$  est l'extension de Friedrichs associée à  $P$ , donc on peut lui appliquer (2.13). Comme  $\mathrm{Tr} e^{-tP_{max}^t P_{min}}$  et  $\mathrm{Tr} e^{-tP_{min} P_{max}^t}$  ne diffèrent que d'une constante



(l'indice de  $P_{min}$ ), le développement (2.13) est valable pour  $\text{Tr} e^{-tP_{min}P_{max}^t}$  et donc pour l'opérateur diagonal  $\text{Tr} e^{-t\mathcal{D}^2}$  également.

Il y a donc très peu à faire : nous rappelons juste le lien entre résidus de la fonction zeta et coefficients du développement asymptotique du noyau de la chaleur quand  $t \rightarrow 0$  :

$$\text{Tr} b|\mathcal{D}|^{-z} = \text{Tr} b|\mathcal{D}'|^{-z} = \frac{1}{\Gamma(z/2)} \int_0^\infty t^{z/2-1} \text{Tr} b e^{-t\mathcal{D}'^2} dt, \quad (2.16)$$

valable pour  $b \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  et  $\text{Re } z \gg 0$ . Ici  $b$  est une constante, on la fixe égale à 1. On a la relation, pour tout  $t > 0$ ,  $\text{Tr} b e^{-t\mathcal{D}^2} = \nu + \text{Tr} b e^{-t\mathcal{D}'^2}$ , où  $\nu = \text{Dim Ker } \mathcal{D}^2$ , dont on déduit le développement asymptotique de  $\text{Tr} b e^{-t\mathcal{D}'^2}$ .

Suivant la méthode usuelle [Gil84], nous décomposons l'intégrale (2.16) en :

$$\tau(z) + \theta(z) = \frac{1}{\Gamma(z/2)} \left( \int_0^1 t^{z/2-1} \text{tr} e^{-t\mathcal{D}'^2} dt + \int_1^\infty t^{z/2-1} \text{tr} e^{-t\mathcal{D}'^2} dt \right).$$

Les valeurs propres de  $\mathcal{D}$  ont une croissance du type  $\lambda_k \geq k^\delta$  quand  $k \rightarrow \infty$  pour un certain  $\delta > 0$ . De plus,  $0 \notin \text{Spec } \mathcal{D}'$ , donc l'intégrale  $\theta(z)$  converge pour tout  $z \in \mathbb{C}$  et définit une fonction entière.

Le développement asymptotique (2.13) signifie que :

$$\forall 0 < t < 1 \quad \text{tr} e^{-t\mathcal{D}'^2} = \sum_{n=0}^{N+m} (a_n + \alpha_n \log t) t^{\frac{n-m}{2}} + \sum_{n=0}^N \beta_n t^{\frac{n}{2}} + O(t^{N/2}),$$

où on a remplacé dans (2.13),  $a_m$  par  $a_m - \nu$ . L'intégration du reste d'ordre  $t^{N/2}$  amène une fonction holomorphe dans le demi-plan  $\text{Re } z/2 > -N/2$ . Les autres termes peuvent être calculés directement (pour  $\text{Re } z$  assez grand):

$$\int_0^1 t^{z/2-1+(n-m)/2} (a_n + \alpha_n \log t) dt = \frac{2a_n}{z+n-m} + \frac{2\alpha_n}{(z+n-m)^2},$$

$$\int_0^1 t^{z/2-1+n/2} \beta_n dt = \frac{2\beta_n}{z+n},$$

et leur prolongement analytique est ainsi connu. On a prouvé :

**Proposition 2.6** *La fonction  $h_1$  admet un prolongement méromorphe sur  $\mathbb{C}$  avec pôles au plus d'ordre 2 aux points  $z_j = m - n$  où  $n$  décrit  $\mathbb{N}$ .*

La présence possible de pôles doubles est liée à la situation singulière considérée. Dans [BL96], on trouve un exemple où le coefficient de  $t \log t$  est non nul. La multiplicité du spectre des dimensions est alors effectivement 2.

### Cas de $\text{Tr} (Q|\mathcal{D}|^{-z}), Q \in \Psi_c^l(E)$

Même si ceci nous a semblé être des résultats classiques, le développement du noyau de la chaleur et le prolongement analytique de la fonction zeta dans cette situation n'apparaissent pas dans la littérature. Nous effectuons ici le prolongement analytique de la fonction zeta. La compacité du support du noyau de Schwartz de  $Q$  va nous permettre d'utiliser la méthode de Shubin ([Shu80],chap. 2). Fixons  $\varphi \in C_c^\infty(X)$  égale à 1 sur  $\pi_j(\text{Supp } Q)$ . On part de la relation :

$$Q|\mathcal{D}|^{-z} = \int_{\Gamma} \lambda^{-z/2} QB(\lambda) d\lambda + \int_{\Gamma} \lambda^{-z/2} QR(\lambda)(\mathcal{D}^2 - \lambda)^{-1} d\lambda. \quad (2.17)$$

Pour  $\text{Re } z \gg 0$ , l'opérateur  $Q|\mathcal{D}|^{-z}$  est à trace sur  $\mathcal{H}$  et comme nous le prouverons, pour ces valeurs de  $z$  son noyau est continu, ce qui implique que la relation suivante est vérifiée :

$$\text{Tr } Q|\mathcal{D}|^{-z} = \int_X \text{tr } Q|\mathcal{D}|^{-z}(x, x) dx.$$

Nous avons à étudier les noyaux des deux opérateurs :

$$QB_{-z} := \int_{\Gamma} \lambda^{-z/2} QB(\lambda) d\lambda \quad \text{et} \quad T_{-z} := \int_{\Gamma} \lambda^{-z/2} QR(\lambda)(\mathcal{D}^2 - \lambda)^{-1} d\lambda.$$

Pour cela, on rappelle que  $B(\lambda)$  et  $R(\lambda)$  sont des sommes finies d'opérateurs  $B_j$  et  $R_j$  définis dans des cartes locales  $(U_j, \chi_j)$ , chacun des termes amenant une contribution au noyau de l'opérateur  $Q|\mathcal{D}|^{-z}$ , nous fixons  $j$  et travaillons avec les coordonnées locales et les opérateurs correspondants (et nous supprimons  $j$  dans les notations).

**Etude de  $QB_{-z}$ .** L'opérateur  $QB_{-z}$  est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre  $-z + l$ . La partie réelle de cet ordre est inférieure à  $-m$  dès que  $\text{Re } z > m + l$  et par conséquent pour ces valeurs de  $z$ , l'opérateur  $QB_{-z}$  a un noyau de Schwartz continu. En effet, l'intégrale :

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{i(x-y) \cdot \xi} \sigma(QB_{-z})(x, \xi) d\xi$$

converge absolument et définit une fonction continue en  $(x, y)$  et holomorphe en  $z$ . On a :

$$B_{-z} = \sum_{k=0}^{n_0} \text{op} (\theta(\xi) b_k^{(-z),0}(x, \xi)) = \sum_{k=0}^{n_0} B_k^{(-z)},$$

où  $b_k^{(-z),0}(x, \xi) = \int_{\Gamma} \lambda^{-z/2} b_k(x, \xi, \lambda)$  (et  $\theta$  sert à éliminer la singularité en  $\xi = 0$ ).  $B_k^{(-z)}$  est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre  $-z - k$ . Soient  $q_j$  les composantes homogènes du symbole de  $Q$ . Posons :

$$(QB_k^{(-z)})' = \sum_{n=k+l}^N \sum_{|\alpha|+j=n-k-l} \text{op} (\theta(\xi) \partial_{\xi}^{\alpha} q_j(x, \xi) \partial_x^{\alpha} b_k^{(-z),0}(x, \xi)), \quad (2.18)$$

de sorte que le reste :  $R_k^{(-z)} = (QB_k^{(-z)})' - QB_k^{(-z)}$  soit donné par un symbole  $r^{(-z)}$  d'ordre  $-z - N - 1$ , holomorphe sur  $\mathbb{C}$ . Alors pour  $\text{Re } z > m - N$ , la partie réelle de cet ordre est donc strictement inférieur à  $-m$  (où  $V \subset \mathbb{R}^m$ ) et  $op(r^{(-z)})$  est donné par un noyau continu et holomorphe en  $z$ . Donc l'opérateur  $R_k^{(-z)}$  n'amène pas de contribution aux pôles de la fonction  $\zeta$  dans le demi-plan  $\text{Re } z > m - N - 1$ .

Occupons nous de la partie "principale"  $(QB_k^{(-z)})'$  : nous allons calculer explicitement la restriction de son noyau à la diagonale. Pour  $\text{Re } z$  assez grand, les intégrales

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{i(x-y) \cdot \xi} \theta(\xi) \partial_\xi^\alpha q_j(x, \xi) \partial_x^\alpha b_k^{(-z), 0}(x, \xi) d\xi$$

convergent pour tout  $\alpha, j$  tels que  $|\alpha| + j + k + l \leq N$  et définissent un noyau continu en  $x, y$ . On peut procéder à un changement de variables et utiliser les coordonnées polaires  $(r, \nu)$  de  $\mathbb{R}^m$ . L'homogénéité de  $\partial_\xi^\alpha q_j$  (le degré est  $l - |\alpha| - j$ ) et de  $b_k^{(-z), 0}$  (le degré est  $-z - k$ ) donne immédiatement pour les intégrales ci-dessus, avec  $x = y$  :

$$\left( \int_0^\infty \theta(r) r^{l-j-|\alpha|-z-k+m-1} dr \right) \left( \int_{S^{m-1}} \partial_\nu^\alpha q_j(x, \nu) \partial_x^\alpha b_k^{(-z), 0}(x, \nu) d\nu \right).$$

Comme  $\theta = 0$  sur  $[0, 1/2]$  et  $\theta = 1$  sur  $[1, \infty[$ , on obtient immédiatement que la fonction

$$\int_0^1 \theta(r) r^{l-j-|\alpha|-z-k+m-1} dr$$

est entière et que

$$\int_1^\infty \theta(r) r^{l-j-|\alpha|-z-k+m-1} dr = \frac{1}{-l + j + |\alpha| + k - m + z}$$

définit une fonction méromorphe sur  $\mathbb{C}$ , avec un pôle simple en  $z = m + l - (j + |\alpha| + k)$ . D'où :

$$(QB_k^{(z)})'(x, x) = \sum_{n=k+l}^N \frac{c_n(x)}{z - (m - n) + l} + f(z, x),$$

avec  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, C(V))$ . La décomposition  $QB_{-z} = \sum_{k=0}^{n_0} (QB_k^{(-z)})' + R_k^{(-z)}$  est faite en fonction de  $N$  et comme  $N$  peut être choisi arbitrairement grand, on a établi :

**Proposition 2.7** *Pour  $Q \in \Psi_c^l(E)$  la fonction :*

$$z \longmapsto \int_X QB_{-z}(x, x) dx \tag{2.19}$$

se prolonge en une fonction méromorphe sur  $\mathbb{C}$  avec au plus des pôles simples aux points  $z = m - n + l$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , où les résidus sont calculables par la formule :

$$\sum_{j+|\alpha|+k=n} \int_{|\nu|=1} \partial_\nu^\alpha q_j(x, \nu) \partial_x^\alpha b_k^{(-z), 0}(x, \nu) d\nu.$$

**Etude de  $T_{-z}$ .** Nous devons maintenant nous occuper du second opérateur

$$T_{-z} = \int_{\Gamma} \lambda^{-z/2} QR(\lambda)(\mathcal{D}^2 - \lambda)^{-1} d\lambda.$$

**Proposition 2.8** *Pour tout  $k > 0$ , pour  $n_0 \geq n_0(k)$  assez grand, le noyau de  $T_{-z}$  est une fonction continue en tout point  $(x, y) \in X \times X$  et holomorphe en  $z$  dans le demi plan  $\operatorname{Re} z > -k$ .*

**Preuve :** Formellement :

$$T_{-z}(x, y) = \int_{\Gamma} \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^{-z/2}}{\lambda_j^2 - \lambda} QR(\lambda)(\phi_j)(x) \otimes \overline{\phi_j} d\lambda.$$

Grâce aux lemmes 2.3 et 2.4 on a, pour  $n_0 \geq n_0(p, n, N, l)$  assez grand :

$$|QR(\lambda)(\phi_j)|_{p, \varepsilon_p - 1/2} \leq c \|QR(\lambda)(\phi_j)\|_{p', \varepsilon_p} \leq c \|R(\lambda)(\phi_j)\|_{p' - l, \varepsilon_p} \leq c(1 + |\lambda|)^{-n} \lambda_j^{-N}$$

si  $\lambda_j \neq 0$  et :

$$|QR(\lambda)(\phi_j)|_{p, \varepsilon_p - 1/2} \leq c(1 + |\lambda|)^{-n}$$

sinon. Donc l'intégrale

$$f_j(z, x) = \int_{\Gamma} \frac{\lambda^{-z/2}}{\lambda_j^2 - \lambda} QR(\lambda)(\phi_j)(x) d\lambda$$

converge absolument par rapport à la norme  $|\cdot|_{p, \varepsilon_p - 1/2}$  pour  $\operatorname{Re} z > -2(n - 1)$  fixé. Pour s'assurer qu'elle est holomorphe en  $z$  on constate que la convergence est uniforme en  $z$  pour la norme infinie sur les parties compactes  $K$  de  $\{\operatorname{Re} z > -2(n - 1)\}$ . En effet, vu les majorations déjà faites

$$\sup_{z \in K} |f(z)|_{p, \varepsilon_p - 1/2} \leq c \int_{\Gamma} (1 + |\lambda|)^{-\rho - 1} |d\lambda| \leq c,$$

où  $\rho$  représente ici la distance entre  $K$  et la droite  $\operatorname{Re} z = -2(n - 1)$ . On a la même uniformité pour la convergence de l'intégrale de la dérivée par rapport à  $z$  :

$$\int_{\Gamma} (-1/2 \log \lambda) \frac{\lambda^{-z/2}}{\lambda_j^2 - \lambda} QR(\lambda)(\phi_j)(x) d\lambda,$$

donc la fonction

$$\begin{array}{ccc} \{\operatorname{Re} z > -2(n - 1)\} & \longrightarrow & C^{p, \varepsilon_p - 1/2}(E) \\ z & \longmapsto & f_j(z) \end{array}$$

est holomorphe. De la même façon les majorations déjà faites prouvent que la série de terme général  $f_j(z) \otimes \phi_j$  converge absolument par rapport à la norme  $|\cdot|_{p, \varepsilon_p - 1/2} \otimes$

$|\cdot|_{p,\varepsilon_p-1/2}$  pourvu que  $N$  soit choisi assez grand et la convergence est uniforme en  $z$  sur les parties compactes de  $\{\operatorname{Re} z > -2(n-1)\}$ . Le résultat étant identique pour la série des dérivées, la somme de la série est une fonction holomorphe en  $z$  sur le demi-plan considéré, à valeur dans  $C^{p,\varepsilon_p-1/2}(E) \hat{\otimes}_\pi C^{p,\varepsilon_p-1/2}(E)$ . On a également prouvé que l'on pouvait intervertir  $\int_\Gamma$  et  $\sum_j$ . Comme  $n$  peut être fixé arbitrairement grand, la preuve est achevée.  $\square$

### Conclusion : Prolongement de $h_b$ .

**Théorème 2.9** *Pour tout  $b \in \mathcal{B}$ ,  $z \mapsto \operatorname{Tr}(b|\mathcal{D}|^{-z})$  a une extension méromorphe à  $\mathbb{C}$ . Les pôles sont au plus d'ordre 2 et situés dans l'ensemble :*

$$Sd = \{m - n; n \in \mathbb{N}\}$$

**Preuve :** Nous savons déjà que  $b$  est borné sur  $\mathcal{H}$  donc que  $h_b(z) = \operatorname{Tr} b|\mathcal{D}|^{-z}$  est définie dans le demi-plan  $\operatorname{Re} z > m$ . En collectant les résultats des pages précédentes on obtient l'analyticité de  $h_b$  dans un demi-plan  $\operatorname{Re} z > m'$ , pour un certain  $m'$  assez grand.

En fait, on a l'analyticité de  $h_b$  dans le demi-plan  $\operatorname{Re} z > m$ . En effet, remarquons que  $|\mathcal{D}|^{-z} = |\mathcal{D}^k|^{-z/k}$ , puis, en écrivant les intégrales de contour définissant  $b|\mathcal{D}^k|^{-z/k}$  et sa dérivée par rapport à  $z$ , que l'on peut choisir  $k$  assez grand pour que la convergence absolue des intégrales ait lieu dans le Banach  $(\mathcal{L}^1(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{tr})$  et soit uniforme en  $z$  sur les parties compactes du demi-plan considéré. L'assertion sur l'analyticité est alors justifiée.

Nous avons vu que  $\operatorname{Tr} b|\mathcal{D}|^{-z}$  était une somme finie de termes de la forme  $\operatorname{Tr} Q_j |\mathcal{D}|^{z+l_j}$  avec  $Q_j \in \Psi_c^{k_j}(E)$  et  $k_j, l_j \in \mathbb{N}$  et de  $c \operatorname{Tr} |\mathcal{D}|^{-z}$ ,  $c \in \mathbb{C}$ . Pour  $\operatorname{Re} z$  assez grand les opérateurs  $Q_j |\mathcal{D}|^{z+l_j}$  et  $|\mathcal{D}|^{-z}$  ont un noyau continu et plus précisément dans  $C^{0,\varepsilon_0-1/2}(E) \hat{\otimes}_\pi C^{0,\varepsilon_0-1/2}(E)$ . Comme  $\varepsilon_0 > 0$ , la restriction de leur noyau à la diagonale est intégrable et la formule suivante s'applique :

$$\operatorname{Tr} b|\mathcal{D}|^{-z} = \int_X \operatorname{tr} b|\mathcal{D}|^{-z}(x, x) d\mu = \sum_j \int_X \operatorname{tr} Q_j |\mathcal{D}|^{z+l_j}(x, x) d\mu + c \int_X \operatorname{tr} |\mathcal{D}|^{-z}(x, x) d\mu.$$

Les propositions 2.6, 2.7, 2.8 prouvent l'existence du prolongement méromorphe avec pôles au plus d'ordre 2 situés a priori dans l'ensemble  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ . En effet, l'écriture de  $b$  que nous avons utilisé fait apparaître des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre un entier positif, ce qui explique que l'ensemble des pôles déborde a priori du demi plan  $\operatorname{Re} z \leq m$ . Cependant, nous avons remarqué au début de la preuve que la fonction  $h_b(z)$  était holomorphe dans le demi-plan  $\operatorname{Re} z > m$ , donc la combinaison des résidus que chaque  $\operatorname{Tr} Q_j |\mathcal{D}|^{z+l_j}$  amène dans cette région est nulle, et le théorème est prouvé.  $\square$

# Chapter 3

## Expression du caractère de Chern localisé

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons au calcul explicite du caractère de Chern à partir de la formule de [CM95]. Pour cela, nous devons nous restreindre aux opérateurs de Dirac.

Les hypothèses seront les suivantes :  $X$  est de dimension paire, munie d'une structure spin et  $D$  est l'opérateur de Dirac associé. Nous considérerons la classe des triplets spectraux obtenus en tordant  $D$  avec des fibrés  $E$  trivialement gradués, munis d'une connexion plate dans la direction radiale près de la singularité.

Les opérateurs  $D_E$  ainsi formés sont des éléments de  $\text{Diff}_c^{1,1}(\mathcal{S} \otimes E)$  (voir le paragraphe 1.3.2) de degré 1 par rapport à la graduation de  $\mathcal{E} = \mathcal{S} \otimes E$ . Dans la terminologie du paragraphe 2.1, ils sont dans l'intersection des catégories  $(\mathit{u})$  et  $(\mathit{m})$ . L'extension auto-adjointe  $\mathcal{D}$  choisie pour chacun d'eux est :

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & (D_-)_{max} \\ (D_+)_{min} & 0 \end{pmatrix}.$$

Sauf risque de confusion nous omettrons de mentionner la dépendance en  $E$  de  $D$  et  $\mathcal{D}$ .

### 3.1 Enoncé du résultat

Soit  $(\mathcal{H}, \mathcal{D}, \mathcal{A})$  le triplet spectral pair associé. Son caractère de Chern, si  $\mathcal{D}$  est inversible, est représenté dans le  $(b, B)$ -bicomplexe par le cocycle  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{2N}}$  suivant ([CM95], p.230):

Pour  $n > 0$ ,

$$\varphi_n(a_0, \dots, a_n) = \sum_{k,q} \sigma_{k,q,n} \tau_q(\gamma a_0 (da_1)^{(k_1)} \dots (da_n)^{(k_n)} |\mathcal{D}|^{-(2|k|+n)}). \quad (3.1)$$

Pour  $n = 0$ ,

$$\varphi_0(a) = \tau_{-1}(\gamma a),$$

où  $\gamma$  est l'opérateur de graduation. On rappelle aussi les notations :

$$\tau_k(P) = \text{Res}_{z=0} z^k \text{Tr}(P|\mathcal{D}|^{-2z}) \quad \text{pour tout } k = -1, 0, 1, \dots$$

et :

$$da = [\mathcal{D}, a], \quad \nabla(a) = [\mathcal{D}^2, a], \quad a^{(k)} = \nabla^k(a).$$

Avant de commencer, nous traitons le cas non inversible. Rappelons brièvement comment le cocycle  $\varphi = (\varphi_n)$  est obtenu dans [CM95] à partir du cocycle de JLO construit pour le module de Fredholm non borné  $(\mathcal{H}, \mathcal{D})$ , que nous baptisons par la lettre  $\psi$  (la dépendance en  $(\mathcal{H}, \mathcal{D})$  est sous entendue) :

$$\psi_n(a_0, a_1, \dots, a_n) = \int_{\Delta^n} \text{Str}(a_0 e^{-u_0 \mathcal{D}^2} [D, a_1] \dots [D, a_n] e^{-u_n \mathcal{D}^2}) du.$$

La super trace étant la trace ordinaire si le module est impair.

$\psi$  est un cocycle de la cohomologie cyclique entière de l'algèbre  $\mathcal{A}$ . Soit  $\psi^\varepsilon$  le cocycle obtenu en remplaçant  $\mathcal{D}$  par  $\varepsilon^{1/2} \mathcal{D}$  et soit  $c$  un cycle cyclique. Pour un  $K$ -cycle  $p$ -sommable, les affirmations suivantes ont été successivement prouvées dans [Con94, CM90, CM95, CM93]

- Si  $n > p$ ,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_n^\varepsilon(c_n) = 0$ .
- $\psi^\varepsilon(c) = \langle \psi^\varepsilon, c \rangle$  est indépendant de  $\varepsilon$ .
- $\sum_{n \leq p} \langle \psi_n^\varepsilon, c_n \rangle \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \text{ch}_*(\mathcal{H}, \mathcal{D}), c \rangle$ .

La cochaîne  $\varphi_n$  est alors définie par :

$$\langle \varphi_n, c_n \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \psi_n^\varepsilon, c_n \rangle.$$

C'est cette limite qui est calculée dans la preuve des théorèmes II.1, 2, 3 de [CM95].

Au cours des calculs effectués par A. Connes et H. Moscovici, la formule suivante est utilisée : pour tout  $\lambda > \frac{p}{2(n+1)}$ ,

$$e^{-u \mathcal{D}^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\lambda + is) |\mathcal{D}|^{-2(\lambda + is)} u^{-(\lambda + is)} ds.$$

Lorsque  $\mathcal{D}$  n'est pas inversible, il faut remplacer  $\mathcal{D}$  par  $\mathcal{D}'$  pour définir la puissance complexe  $|\mathcal{D}|^z$ , et la formule doit comporter  $e^{-u(\mathcal{D}')^2}$  à la place de  $e^{-u \mathcal{D}^2}$ .

Vérifions maintenant que ce remplacement n'a pas d'incidence sur l'expression des cochaines  $\varphi_n$  lorsque  $n > 0$  (en l'occurrence dans le cas impair on trouve le même

résultat quelle que soit la dimension de  $\text{Ker } \mathcal{D}$ , et dans le cas pair seule la composante de degré 0 est affectée par les variations de  $\text{Dim Ker } \mathcal{D}$ ).

Suivant [CM95], notons :

$$\theta(\varepsilon u_0, \dots, \varepsilon u_n) = \text{Str} (a_0 e^{-u_0 \varepsilon \mathcal{D}^2} [D, a_1] \dots [D, a_n] e^{-u_n \varepsilon \mathcal{D}^2}). \quad (3.2)$$

Alors :

$$\psi^\varepsilon(a_0, \dots, a_n) = \varepsilon^{n/2} \int_{\Delta^n} \theta(\varepsilon u_0, \dots, \varepsilon u_n) du.$$

La limite est obtenue en intégrant sur le simplexe  $\Delta^n$  le coefficient de  $\varepsilon^{-n/2}$  dans le développement asymptotique de  $\theta(\varepsilon u_0, \dots, \varepsilon u_n)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  (et avec  $\sum u_j = 1$ ), en supposant a priori qu'un tel développement existe.

On part de la relation :

$$\forall t > 0 \quad e^{-t \mathcal{D}^2} = e^{-t(\mathcal{D}')^2} + H,$$

que l'on injecte dans l'expression de  $\theta$ . Quand on développe l'expression algébrique correspondante, il vient un terme et un seul qui ne comporte pas l'opérateur  $H$ , c'est simplement :

$$\theta'(\varepsilon u_0, \dots, \varepsilon u_n) = \text{Str} (a_0 e^{-u_0 \varepsilon (\mathcal{D}')^2} [D, a_1] \dots e^{-u_n \varepsilon (\mathcal{D}')^2}). \quad (3.3)$$

Ce terme nous ramène au cas inversible, les calculs p217-220 de [CM95] produisent un développement asymptotique de (3.3) et l'expression de  $\varphi_n$  annoncée dans (3.1) en découle.

Il reste à vérifier que les autres termes apparaissant dans le développement, termes qui contiennent au moins une fois l'opérateur  $H$  (et au maximum  $[n/2] + 1$ -fois à cause de la relation  $H[D, a]H = 0$ ), ne contribuent pas au coefficient de  $\varepsilon^{-n/2}$  du développement asymptotique de  $\theta(\varepsilon u_0, \dots, \varepsilon u_n)$ . Considérons un terme qui contient  $H$ , par exemple :

$$\text{Str} (a_0 H [D, a_1] e^{-u_1 \varepsilon (\mathcal{D}')^2} \dots). \quad (3.4)$$

Les pointillés (...) dans (3.4) désignent un produit de commutateurs  $[D, a_j]$ , de noyaux de la chaleur  $e^{-u_j \varepsilon (\mathcal{D}')^2}$  et éventuellement d'un certain nombre d'exemplaire de l'opérateur  $H$ . Dans le cas pair, il y a un nombre pair de commutateurs  $[D, a_j]$  qui sont de degré 1 par rapport à la graduation correspondante de  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Le projecteur  $H$  et l'opérateur de la chaleur  $e^{-u_j \varepsilon (\mathcal{D}')^2}$  sont eux de degré 0. Donc l'opérateur sous le signe  $\text{Str}$  dans (3.4) est de degré 0.

Remarquons de plus que  $H$  est de rang fini, donc à trace finie, et d'autre part que :

$$\forall t > 0 \quad \|e^{-t(\mathcal{D}')^2}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq 1.$$



Nous pouvons en déduire l'estimation suivante, dans le cas pair par exemple (le cas impair est encore plus facile puisque il n'y a plus de trace graduée):

$$\begin{aligned}
& |\text{Str}(a_0 H [D, a_1] e^{-u_1 \varepsilon (\mathcal{D}')^2} \dots)| \\
&= |\text{tr}_{\mathcal{H}^+}(a_0 H [D, a_1] e^{-u_1 \varepsilon (\mathcal{D}')^2} \dots) - \text{tr}_{\mathcal{H}^-}(a_0 H [D, a_1] e^{-u_1 \varepsilon (\mathcal{D}')^2} \dots)| \\
&\leq |\text{tr}_{\mathcal{H}^+}(a_0 H [D, a_1] e^{-u_1 \varepsilon (\mathcal{D}')^2} \dots)| + |\text{tr}_{\mathcal{H}^-}(a_0 H [D, a_1] e^{-u_1 \varepsilon (\mathcal{D}')^2} \dots)| \\
&\leq \text{tr}_{\mathcal{H}^+}(H) \cdot \|[D, a_1] e^{-u_1 \varepsilon (\mathcal{D}')^2} \dots a_0\| + \text{tr}_{\mathcal{H}^-}(H) \cdot \|[D, a_1] e^{-u_1 \varepsilon (\mathcal{D}')^2} \dots a_0\| \\
&\leq c,
\end{aligned}$$

où  $c$  est une constante indépendante de  $\varepsilon$ . Il est alors clair que les termes formant (3.2) et contenant  $H$  ne contribuent pas au coefficient de  $\varepsilon^{-n/2}$ , puisque ils ont une trace bornée. Ce raisonnement est valable car  $n > 0$ , ce qui entraîne que les termes autres que (3.3) contiennent simultanément  $H$  et des noyaux de la chaleur, et par conséquent ont une trace bornée par rapport à  $\varepsilon$ .

Maintenant, examinons ce qu'il se produit pour  $n = 0$  (cas pair uniquement, donc). On a :

$$\psi_0^\varepsilon(a) = \text{Str}(a e^{-\varepsilon \mathcal{D}^2}).$$

Alors  $\varphi_0(a)$  est le coefficient constant dans le développement de l'expression ci dessus quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Pour exprimer ce terme en fonction des résidus de la fonction zeta, lorsque  $\mathcal{D}$  n'est pas inversible, on écrit :

$$\text{Str}(a e^{-\varepsilon \mathcal{D}^2}) = \text{Str}(a e^{-\varepsilon (\mathcal{D}')^2}) + \text{Str}(aH).$$

Le coefficient constant dans le développement est donc  $\text{Str}(aH) + \bar{\varphi}_0(a)$ , où ([CM95], p230)

$$\begin{aligned}
\bar{\varphi}_0(a) &= \text{Res}_{z=0} \Gamma(z) \text{Str}(a |D|^{-2z}) \\
&= \text{Res}_{z=0} \Gamma(z+1) z^{-1} \text{Str}(a |D|^{-2z}) \\
&= \sum_{q \geq 0} \frac{\Gamma(1)^{(q)}}{q!} \tau_{q-1}(\gamma a)
\end{aligned}$$

Définissons la cochaîne :

$$\iota(a) = \text{Str}(aH).$$

Alors,  $\mathcal{A}$  étant ici commutative,  $b\iota = 0$  et par conséquent  $\iota$  est un cocycle du  $(b, B)$ -complexe de  $\mathcal{A}$  (toutes ses composantes de degré  $> 0$  sont nulles). Il est clair que :

$$\varphi = \bar{\varphi} + \iota$$

où  $\bar{\varphi}_n = \varphi_n, \forall n > 0$ . La méthode de renormalisation ([CM95], p. 221-226) s'applique au cocycle  $\bar{\varphi}$  et finalement :

Pour  $n > 0$ ,

$$\varphi_n(a_0, \dots, a_n) = \sum_{k,q} c_{n,k,q} \tau_q(\gamma a_0 (da_1)^{(k_1)} \dots (da_n)^{(k_n)} |\mathcal{D}|^{-(2|k|+n)}). \quad (3.5)$$

Pour  $n = 0$ ,

$$\varphi_0(a) = \iota(a) + \tau_{-1}(\gamma a). \quad (3.6)$$

En utilisant les développements connus des noyaux de la chaleur et les méthodes du calcul asymptotique de Getzler, nous allons vérifier :

**Théorème 3.1** *Pour  $n > 0$ ,*

$$\varphi_n(a_0, \dots, a_n) = \nu_n \int_X a_0 da_1 \wedge \dots \wedge da_n \hat{A}(X) ch(E).$$

*Pour  $n = 0$ ,*

$$\varphi_0(a + \lambda) = \int_X a \hat{A}(X) ch(E) + \lambda Ind(D_+)_{min}.$$

**Remarques :** 1) Ce théorème s'applique également à l'extension  $\mathcal{D}'$  définie dans le deuxième chapitre et en fait à toute extension auto-adjointe  $\mathcal{D}_e$  qui est  $\mathbb{Z}_2$ -graduée et pour laquelle on dispose des asymptotes de la trace du noyau de la chaleur. La seule différence entre tous les cocycles obtenus réside dans la composante  $\varphi_0$  : il faut juste remplacer  $Ind(D_+)_{min}$  par l'indice correspondant à l'extension considérée.

2) Bien sûr, la composante en dimension 0 nous ramènent aux formules d'indices habituelles, et plutôt que de rappeler les formules exprimant l'entier  $Ind D_+$ , nous renvoyons le lecteur aux références dans lesquelles il a été calculé pour différents opérateurs de Dirac ou de type Fuchs : [Che83, Cho85, BS88, Les96]. Par contre, l'expression des composantes en degré positif dans la cohomologie cyclique d'une algèbre adaptée à l'espace  $X^c$  est nouvelle. Cependant, une expression du "straight chern character" dans l'homologie d'Alexander-Spanier [MW96], puis plus récemment dans la cohomologie cyclique périodique associé à l'opérateur de la signature a été dérivée par S. Chan [Cha97, Cha98]. Il n'utilise pas le théorème local de l'indice de Connes et Moscovici ni la notion de triplet spectral. Notre travail est complètement indépendant et ne s'applique pas aux mêmes opérateurs. Nous ajoutons que nous n'avons pas recours à l'hypothèse de l'unicité de l'extension auto-adjointe.

La démonstration du théorème 3.1 occupera les prochains paragraphes et se fera par le calcul successif des différents termes intervenant dans les composantes  $\varphi_n$ . Nous commençons par un recensement de ces termes.

### Inventaire des termes à calculer

Nous avons à considérer les situations suivantes :

- $n > 0, q > 0$  : Nous savons déjà que lorsque  $q > 0$ , les termes  $\tau_q$  sont nuls. En effet  $Q = a_0(da_1)^{(k_1)} \dots (da_n)^{(k_n)} \in \text{Diff}_c^{|k|}(\mathcal{E})$  et nous sommes dans le cas de la proposition 2.7 : la fonction  $h_Q(z)$  n'a que des pôles simples. Ce cas est donc traité.
- $n > 0, q = 0$  :
  - a) Nous prouverons que le terme correspondant à  $|k| = 0$  amène la contribution annoncée dans le théorème.
  - b) Nous montrerons que les termes avec  $|k| > 0$  sont identiquement nuls.
- $n = 0$  : Ici, il n'y a pas de commutateur pour faire disparaître la constante provenant de l'unitarisation de l'algèbre. Nous rappellerons rapidement comment on relie le terme  $\varphi_0(a + \lambda)$  avec l'indice et l'expression annoncée.

## 3.2 Les calculs

**Termes où  $n > 0, q = 0, k = 0$ .** Pour le calcul correspondant au cas  $k = 0$ , nous savons nous passer de l'existence d'une structure spin, aussi nous présentons le calcul sous cette forme légèrement plus générale, bien que dans la suite nous ne l'utiliserons que dans la situation où une structure spin existe. Dans la proposition qui suit,  $D$  est un opérateur de Dirac du type de ceux construits au paragraphe 1.3.2.

### Proposition 3.1

$$\tau_0(\gamma a_0 da_1 \dots da_n |\mathcal{D}|^{-n}) = \nu_n \int_X a_0 da_1 \wedge \dots \wedge da_n \hat{A}(X) ch(\mathcal{E}/\mathcal{S}),$$

où  $\hat{A}(X)$  est la forme différentielle correspondant au genre  $\hat{A}$  de la variété riemannienne  $X$  et  $ch(\mathcal{E}/\mathcal{S})$  est le caractère de Chern relatif du fibré de Clifford  $\mathcal{E}$  tel qu'il est défini dans [BGV91].

**Preuve :** Notons

$$Q = a_0 da_1 \dots da_n = a_0 [D, a_1] \dots [D, a_n] = a_0 c(da_1) \dots c(da_n).$$

C'est un endomorphisme de  $\mathcal{E}$  de degré 0 (puisque  $n$  est pair) à support compact. Par définition

$$\tau_0(\gamma Q |\mathcal{D}|^{-n}) = \text{Res}_{w=n} \text{Tr}_{\mathcal{E}}(\gamma Q |\mathcal{D}|^{-w}) = \text{Res}_{w=n} \text{Str}_{\mathcal{E}}(Q |\mathcal{D}|^{-w}).$$

Pour  $\varphi \in C_c^\infty(X)$ , nous savons d'après le travail effectué sur  $\varphi |\mathcal{D}|^{-z}$  dans le deuxième chapitre que  $\text{str} \varphi e^{-t\mathcal{D}^2}(x, x)$  a pour développement asymptotique quand  $t \rightarrow 0$  :

$$\text{str}(\varphi e^{-t\mathcal{D}^2}(x, x)) \sim t^{-m/2} \sum_{j \geq 0} \text{str}(\varphi k_j(x)) t^j, \quad (3.7)$$

où  $k_j \in \text{End}(\mathcal{E})$  est défini en coordonnées locales à partir du symbole de  $D$  par les mêmes formules qui servent à faire cette construction dans le cas  $C^\infty$  compact. En remplaçant  $\varphi$  par l'endomorphisme de  $\mathcal{E}$  à support compact  $Q$ , on obtient simplement :

$$\text{str}(Qe^{-t\mathcal{D}^2}(x, x)) \sim t^{-m/2} \sum_{j \geq 0} \text{str}(Qk_j(x))t^j.$$

En utilisant la formule

$$\text{Str } Q|\mathcal{D}|^{-w} = \frac{1}{\Gamma(w/2)} \int_0^\infty t^{w/2-1} \text{Str } Qe^{-t\mathcal{D}^2} dt,$$

on obtient immédiatement

$$(n > 0) \quad \text{Res}_{w=n} \text{Str}_{\mathcal{E}}(Q|\mathcal{D}|^{-w}) = \frac{1}{\Gamma(n/2)} \int_X \text{str}_{\mathcal{E}}(Qk_{\frac{m-n}{2}})(x) d\mu.$$

Nous utilisons maintenant les résultats de [BGV91]. Rappelons que ([BGV91], 3.2):

$$\text{End}(\mathcal{E}) \simeq Cl(X) \otimes \text{End}_{Cl(X)}(\mathcal{E})$$

et rappelons également la formule ([BGV91], 3.21 et 4.1 p.146/147) :

$$u \in \text{End}(\mathcal{E}), \quad \text{str}_{\mathcal{E}}(u) = (-2i)^{m/2} \text{str}_{\mathcal{E}/\mathcal{S}}(\sigma_m u).$$

$\sigma : Cl^*(X) \longrightarrow \Lambda^*(X)$  est l'isomorphisme usuel des fibrés vectoriels sous-jacents, il conserve leur filtration naturelle et  $\sigma_j : C^j \rightarrow \Lambda^i$  est l'application qui à  $a \in C^j$  associe la composante homogène de degré  $i$  de la forme différentielle  $\sigma(a)$ .  $\text{str}_{\mathcal{E}/\mathcal{S}}$  est la super-trace relative. Elle est définie sur  $\text{End}_{Cl(X)}(\mathcal{E})$  par :

$$\text{str}_{\mathcal{E}/\mathcal{S}} u = 2^{-m/2} \text{str}_{\mathcal{E}}(\Gamma u),$$

où, en coordonnées locales,  $\Gamma = i^{m/2} e_1 \dots e_m$  ( $m$  est pair). La super-trace est ensuite prolongée aux formes différentielles sur  $X$  à valeurs dans  $\text{End}_{Cl(X)}(\mathcal{E})$  :

$$\text{str}_{\mathcal{E}/\mathcal{S}} : \Lambda^*(X, \text{End}_{Cl(X)}(\mathcal{E})) \longrightarrow \Lambda^*(X).$$

Lorsque  $\mathcal{E} = \mathcal{S} \otimes \mathcal{W}$ , la super trace relative correspond à la super trace du fibré de torsion  $\mathcal{W}$ .

Rappelons enfin que les coefficients  $k_i$  du développement (3.7), puisqu'ils coïncident avec ceux construits sur une variété différentiable compacte vérifient ([BGV91], thm 4.1) :

$$\sigma_{2i} k_i(x) = [\hat{A}(X) \wedge \text{ch}(\mathcal{E}/\mathcal{S})(x)]_{2i}$$

où  $[\omega]_j$  désigne la composante de degré  $j$  de la forme différentielle  $\omega$ .

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\text{str}_{\mathcal{E}/\mathcal{S}}(Qk_{\frac{m-n}{2}})(x) &= \text{str}_{\mathcal{E}/\mathcal{S}}(\sigma_m(Qk_{\frac{m-n}{2}})) \\
&= \text{str}_{\mathcal{E}/\mathcal{S}}(\sigma_n(Q) \wedge \sigma_{m-n}(k_{\frac{m-n}{2}})) \\
&= \sigma_n(Q) \wedge \text{str}_{\mathcal{E}/\mathcal{S}}(\sigma_{m-n}(k_{\frac{m-n}{2}})) \\
&= a_0 da_1 \wedge \dots \wedge da_n \wedge \hat{A}(X) \wedge ch(\mathcal{E}/\mathcal{S}).
\end{aligned}$$

La seconde ligne résulte de  $Q \in Cl^n(X)$ ,  $k_j \in Cl^{2j} \otimes \text{End}_{Cl(X)}(\mathcal{E})$  et de la formule pour tout  $a \in Cl^k$ ,  $b \in Cl^l$  :  $\sigma(ab) = \sigma(a) \wedge \sigma(b)$  modulo  $\Lambda^{k+l-1}$ . L'expression de  $\sigma^n(Q)$  est évidente.

**Termes où  $n > 0$ ,  $q = 0$ ,  $|k| > 0$ .** Nous revenons à la situation où une structure spin existe. En effet les articles [Get83, CM90] que nous allons largement utiliser sont écrits dans ce contexte et même si la preuve de la validité de leurs résultats dans le cas général semble accessible, nous restons dans la situation annoncée ci-dessus.

**Proposition 3.2** *Pour tout  $(a_j)_{0 \leq j \leq n}$ , tout  $|k| > 0$*

$$\tau_0(\gamma a_0 (da_1)^{(k_1)} \dots (da_n)^{(k_n)} |\mathcal{D}|^{-(2|k|+n)}) = 0.$$

**Schéma de la preuve :** Nous allons utiliser, après un travail technique préalable, le calcul symbolique de Getzler [Get83] et la démarche de [CM90].

Comme nous l'avons déjà fait, nous relierons résidus de la fonction zeta et coefficients dans le développement de la trace du noyau de la chaleur quand  $t \rightarrow 0$ . Ici :

$$\tau_0(Q|\mathcal{D}|^{-(2|k|+n)}) = \text{Res}_{w=2|k|+n} \text{Str}(Q|\mathcal{D}|^{-w}), \quad (3.8)$$

où  $Q := a_0 (da_1)^{(k_1)} \dots (da_n)^{(k_n)}$ . Nous avons le long de la diagonale la relation asymptotique suivante :

$$\text{str} Q e^{-t\mathcal{D}^2}(x) \sim^{t \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{\infty} h_j(x) t^{\frac{j-m}{2}},$$

où  $\sim^{t \rightarrow 0}$  fait ici référence à l'utilisation de la topologie  $C^\infty$  sur les parties compactes de  $X$ . Le résidu recherché (3.8) correspond au coefficient de  $t^{-(|k|+n/2)}$ . Plus précisément :

$$\text{Res}_{w=2|k|+n} \text{Str}(Q|\mathcal{D}|^{-w}) = \frac{2}{\Gamma(|k| + n/2)} \int_X h_{m-(2|k|+n)}(x) d\mu. \quad (3.9)$$

Cela étant rappelé, nous souhaitons utiliser le calcul symbolique de Getzler pour prouver que (3.9) est nul. Pour cela, nous aurions besoin d'utiliser l'application symbole de Getzler directement sur l'opérateur  $e^{-t\mathcal{D}^2}$ .

Ce dernier est un opérateur à noyau  $C^\infty$  et on peut même obtenir en utilisant les techniques du deuxième chapitre le contrôle asymptotique :

$$e^{-t\mathcal{D}^2} \in C^{\infty, -1/2+}(\mathcal{E}) \hat{\otimes}_\pi C^{\infty, -1/2+}(\mathcal{E}^*).$$

Cependant, l'opérateur  $e^{-t\mathcal{D}^2}$  n'est pas obtenu par la quantification usuelle (ou celle de Getzler) d'un symbole. Si c'était le cas, on trouverait, en déroulant les techniques classiques, un développement de sa trace en puissance de  $t$ , or on sait que dans la situation présente des termes logarithmiques peuvent survenir.

Donc, nous ne pouvons pas appliquer directement le travail de Getzler. L'extension du calcul pseudodifférentiel de Getzler en présence d'une singularité conique est un problème très intéressant en soi, mais nous avons préféré adopter ici la démarche décrite ci-dessous.

En nous inspirant des techniques que nous avons utilisées pour le prolongement des fonctions zeta, nous exprimerons  $Qe^{-t\mathcal{D}^2}$  comme la somme de deux termes. Le premier terme sera un opérateur régularisant à support compact et le second un opérateur intégral traçable (à support non compact) dont la trace est de l'ordre de 1 quand  $t \rightarrow 0$  : par conséquent ce second terme ne peut pas amener de contribution au résidu recherché.

Cette décomposition et le fait que la trace du deuxième terme est de l'ordre de 1 quand  $t \rightarrow 0$  seront l'objet de la proposition 3.3.

Pour appliquer le calcul de Getzler au premier opérateur de la décomposition, nous montrerons ensuite comment on peut ramener le problème à celui où la variété est  $C^\infty$  et compacte. Cela sera fait dans la proposition 3.4.

Le calcul de Getzler sera ensuite appliqué et la preuve de la proposition 3.2 pourra être achevée.

**Proposition 3.3** *On peut écrire :*

$$Qe^{-t\mathcal{D}^2} = QL(t) + J(t),$$

où  $L(t) \in \Psi_c^{-\infty}(\mathcal{E})$  vérifie, pour une fonction  $\psi \in C_c^\infty(X)$  convenable :

$$\text{Str} QL(t) = \text{Str} Qe^{-t\mathcal{D}^2} \psi + O(t^\infty),$$

et  $J(t)$  est un opérateur à trace tel que :

$$J(t) \in C^0([0, +\infty[, \mathcal{L}_1(\mathcal{H})).$$

*En particulier*

$$\text{Str} J(t) \sim^{t \rightarrow 0} O(1).$$

**Preuve :** Choisissons  $\varphi \in C_c^\infty(X)$  telle que  $\varphi = 1$  sur le support de  $Q$  et construisons les opérateurs  $B(\lambda) \in \Psi_c^{-2}(\mathcal{E})$ ,  $R(\lambda) \in \Psi_c^{-n_0}(\mathcal{E})$ . Tout d'abord, nous notons que dans ce qui va suivre nous n'avons pas besoin de modifier les contours d'intégration, donc nous n'avons pas besoin de l'analyticité par rapport à  $\lambda$ . Aussi, nous pouvons dans la construction de  $B(\lambda)$ , résoudre l'équation symbolique (2.2) jusqu'à l'ordre  $n_0 = +\infty$ . Donc  $R(\lambda) \in \Psi_c^{-\infty}(\mathcal{E})$ . Nous avons :

$$\begin{aligned}
Qe^{-t\mathcal{D}^2} &= Q\varphi e^{-t\mathcal{D}^2} \\
&= Q\varphi \int_{\Gamma} e^{-t\lambda} (\mathcal{D}^2 - \lambda)^{-1} d\lambda \\
&= Q \int_{\Gamma} e^{-t\lambda} (B(\lambda) + R(\lambda)(\mathcal{D}^2 - \lambda)^{-1}) d\lambda \\
&= Q \left( \int_{\Gamma} e^{-t\lambda} B(\lambda) d\lambda + \int_{\Gamma} e^{-t\lambda} R(\lambda)(\mathcal{D}^2 - \lambda)^{-1} d\lambda \right) \\
&=: QL(t) + QK(t).
\end{aligned}$$

$B(\lambda) \in \Psi_c^{-2}(\mathcal{E}, \mathcal{R})$ , donc on a immédiatement que  $L(t)$  est associé, dans le calcul pseudo-différentiel classique à support compact, à un symbole d'ordre  $-\infty$ . De plus on a :

$$B(\lambda) = \phi(\mathcal{D}^2 - \lambda)^{-1}\psi \text{ mod } \Psi_c^{-\infty}(\mathcal{E}, \mathcal{R}). \quad (3.10)$$

Et par conséquent, quand  $t \rightarrow 0$ :

$$L(t) = \phi e^{-t\mathcal{D}^2}\psi + O(t^\infty) \quad (3.11)$$

La relation (3.10) est obtenue de la façon suivante : on a l'égalité

$$\varphi(\mathcal{D}^2 - \lambda)^{-1} = B(\lambda) + R(\lambda)(\mathcal{D}^2 - \lambda)^{-1},$$

que l'on compose à droite avec une fonction  $\psi \in C_c^\infty(X)$  égale à 1 sur  $\pi_j(\text{Supp } B(\lambda))$ ,  $j = 1, 2$ ,  $\forall \lambda \in \Gamma$  (c'est possible par construction de  $B(\lambda)$ ). De plus  $R(\lambda) \in \Psi_c^{-\infty}(\mathcal{E}, \mathcal{R})$  et  $\phi(\mathcal{D}^2 - \lambda)^{-1}\psi \in \Psi_c^{-2}(\mathcal{E}, \mathcal{R})$ , donc :

$$R(\lambda)(\mathcal{D}^2 - \lambda)^{-1}\psi \in \Psi_c^{-\infty}(\mathcal{E}, \mathcal{R}).$$

La relation (3.11) découle d'une intégrale de contour effectuée à partir de (3.10). Nous allons donner une estimation de  $\|K(t)\|_1$ , la norme de  $K(t)$  dans le Banach  $(\mathcal{L}_1(\mathcal{H}), \|\cdot\|_1)$ . On a l'inclusion  $\Psi_c^{-\infty} \subset \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ . Nous commençons par une estimation de  $\|R(\lambda)\|_1$ . Ce dernier est une somme finie d'opérateurs à paramètre régularisants définis sur des ouverts de cartes locales de  $X$ . Il suffit donc de donner une estimation de la trace de l'un d'eux. Nous le noterons encore  $R(\lambda)$  et l'ouvert sur lequel il vit est noté  $U$ . Sa trace est donnée par la formule :

$$\text{Tr } R(\lambda) = \int_U \text{tr } R(\lambda)(x, x) d\mu_x,$$

où son noyau  $R(\lambda)(x, y)$  est défini à partir de son symbole  $r(x, \xi, \lambda)$  par la formule :

$$R(\lambda)(x, y) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{i(x-y)\cdot\xi} r(x, \xi, \lambda) d\xi.$$

De plus, les entrées de la matrice donnant le symbole  $r(x, \xi, \lambda)$  vérifient l'estimation ([Shu80], chap. 2):

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in K \subset\subset U, \forall (\xi, \lambda) \in \mathbb{R}^m \times \Gamma, \quad |r_{ij}(x, \xi, \lambda)| \leq c(1 + |\xi| + |\lambda|^{1/2})^{-k}.$$

D'où, pour tout  $k \in \mathbb{N}$   $|\lambda| \geq 1$  et pour  $y = x$ :

$$\begin{aligned} |R(\lambda)(x, x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^m} r(x, \xi, \lambda) d\xi \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^m} r(x, |\lambda|^{1/2}\xi, \lambda) |\lambda|^{m/2} d\xi \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^m} |r(x, |\lambda|^{1/2}\xi, \lambda)| |\lambda|^{m/2} d\xi \\ &\leq c \int_{\mathbb{R}^m} (1 + |\lambda|^{1/2}|\xi| + |\lambda|^{1/2})^{-k} |\lambda|^{m/2} d\xi \\ &\leq c |\lambda|^{(-k+m)/2} \int_{\mathbb{R}^m} (|\lambda|^{-1/2} + |\xi| + 1)^{-k} d\xi \\ &\leq c |\lambda|^{(-k+m)/2} \int_{\mathbb{R}^m} (1 + |\xi|)^{-k} d\xi \\ &\leq c |\lambda|^{(-k+m)/2}. \end{aligned}$$

On déduit de ce qui vient d'être fait que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\|R_\lambda\|_1 \leq c(1 + |\lambda|)^{-k}.$$

Nous disposons ainsi d'une estimation de la norme trace de  $R(\lambda)$  en fonction de  $\lambda$ . Rappelons que la norme, en tant qu'opérateur borné sur  $\mathcal{H}$ , de la résolvante  $(\mathcal{D}^2 - \lambda)^{-1}$  est régie par [Kat80] :

$$\|(\mathcal{D}^2 - \lambda)^{-1}\| \leq c.(\text{Dist}(\lambda, \text{Spec } \mathcal{D}^2))^{-1}.$$

Cette norme est donc bornée par une quantité finie quand  $\lambda$  parcourt  $\Gamma$ . On peut à présent attaquer les estimations sur la norme trace de  $K(t)$  :

$$\begin{aligned} \|K(t)\|_1 &\leq \int_{\Gamma} |e^{-t\lambda}| \|R(\lambda)(\mathcal{D}^2 - \lambda)^{-1}\|_1 |d\lambda| \\ &\leq \int_{\Gamma} e^{-\text{tr}e\lambda} \|R(\lambda)\|_1 \|(\mathcal{D}^2 - \lambda)^{-1}\| |d\lambda| \\ &\leq c \int_{\Gamma} e^{-\text{tr}e\lambda} (1 + |\lambda|)^{-k} |d\lambda|. \end{aligned}$$



Donc l'intégrale qui définit  $K(t)$  est absolument convergente dans  $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$  pour tout  $t \in [0, +\infty[$ .

En effectuant des estimations similaires sur la différence  $K(t) - K(t_0)$ , on prouve que pour tout  $t_0 \in [0, +\infty[$  l'assertion suivante est vérifiée :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|K(t) - K(t_0)\|_1 = 0.$$

La fonction  $t \mapsto \text{Tr } K(t)$  est donc continue sur  $[0, +\infty[$  et par conséquent  $\text{tr } K(t) = O(1)$  quand  $t \rightarrow 0$ .

Le lecteur pourra vérifier que l'on arrive aux mêmes conclusions pour l'opérateur  $J(t) := QK(t)$ .  $\square$

Maintenant nous allons nous ramener aux calculs dans le cas d'une variété  $C^\infty$  compacte. Nous procédons de la façon suivante :

Les fonctions  $\varphi, \psi$  utilisées plus haut ont des supports compacts contenus, par conséquent, dans un certain  $X_\varepsilon$ , avec  $\varepsilon > 0$ . Déformons sur  $C_{0,\varepsilon}N$  la métrique conique en la métrique produit  $dr^2 + g_N$ . Notons  $g_1$  cette nouvelle métrique et formons la variété riemannienne  $C^\infty$  compacte sans bord  $(\tilde{X}, \tilde{g})$  obtenue en doublant la variété riemannienne compacte à bord  $(\bar{X}, g_1)$ . On fait la même opération pour le fibré de Clifford  $\mathcal{E}$  et la connection  $\nabla^\mathcal{E}$ . Notons  $\tilde{D}$  l'opérateur de Dirac correspondant. On va montrer

**Proposition 3.4** *Pour la fonction  $\psi \in C_c^\infty(X)$  choisie lors de la preuve de la proposition 3.3, on vérifie*

$$\text{Str } Qe^{-t\mathcal{D}^2}\psi = \text{Str } Qe^{-t\tilde{\mathcal{D}}^2}\psi. \quad (3.12)$$

**Preuve :** L'opérateur de Dirac  $\tilde{D}$  coïncide sur  $X_{\varepsilon/2}$  avec  $D$ , c'est à dire :

$$\forall u \in \Gamma_c(\mathcal{E}_{\varepsilon/2}) \quad \tilde{D}u = Du$$

où on a noté  $\mathcal{E}_{\varepsilon/2} := \mathcal{E}|_{X_{\varepsilon/2}}$ . Les opérateurs  $\tilde{D}$  et  $\tilde{D}^2$  sont essentiellement autoadjoints. On peut toujours supposer que le contour  $\Gamma$  choisi au début a été choisi de sorte que, une fois la métrique déformée :

$$\text{Spec } \tilde{D}^2 \cap \Gamma = \emptyset.$$

Alors  $(\tilde{D}^2 - \lambda)^{-1}$  est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre  $-2$ . De plus, nous allons montrer que :

$$\varphi(\mathcal{D}^2 - \lambda)^{-1}\psi = \varphi(\tilde{D}^2 - \lambda)^{-1}\psi$$

en tant qu'opérateurs sur  $\Gamma(\mathcal{E}_\varepsilon)$  et modulo un opérateur régularisant dont le noyau de Schwartz est nul sur un voisinage de la diagonale de  $\tilde{X} \times \tilde{X}$ .

Prouvons cette affirmation.  $\varphi, \psi$  vérifient  $\varphi\psi = \varphi$ , sont égales à 1 sur  $X_\varepsilon$  et nulles sur  $C_{0,\varepsilon/2}N$ . Introduisons une troisième fonction  $\theta \in C_c^\infty(X_{\varepsilon/2})$  telle que  $\varphi\theta = \varphi$

et  $\psi\theta = \psi$  et une quatrième  $\rho$  qui vérifie  $\rho\psi = \psi$ . Pour tout  $v \in \Gamma_c(\mathcal{E}) \subset \Gamma(\tilde{\mathcal{E}})$ , l'équation

$$\rho v = (\tilde{D}^2 - \lambda)w$$

a une unique solution  $w = (\tilde{D}^2 - \lambda)^{-1}\rho v$ . Alors :

$$\psi v = \psi\rho v = \psi(\tilde{D}^2 - \lambda)\theta w + \psi(\tilde{D}^2 - \lambda)(1 - \theta)w, \quad (3.13)$$

et par construction  $(\tilde{D}^2 - \lambda)\theta w = (D^2 - \lambda)\theta w$ . Pour tout  $v \in \Gamma_c(\mathcal{E})$ , on a :

$$\begin{aligned} \varphi(\tilde{D}^2 - \lambda)^{-1}\psi v &= \varphi(\tilde{D}^2 - \lambda)^{-1}\psi\rho v \\ &= \varphi(\tilde{D}^2 - \lambda)^{-1}\psi(\tilde{D}^2 - \lambda)w \\ &= \varphi w + \varphi(\tilde{D}^2 - \lambda)^{-1}[\psi, \tilde{D}^2]w \\ &= \varphi w + \varphi(\tilde{D}^2 - \lambda)^{-1}[\psi, D^2]w, \end{aligned}$$

où on a utilisé  $[\psi, \tilde{D}^2] = [\psi, D^2]$ . D'autre part :

$$\begin{aligned} \varphi(D^2 - \lambda)^{-1}\psi v &= \varphi(D^2 - \lambda)^{-1}\psi\{(D^2 - \lambda)\theta + (\tilde{D}^2 - \lambda)(1 - \theta)\}w \\ &= \varphi(D^2 - \lambda)^{-1}\psi(D^2 - \lambda)\theta w \\ &\quad + \varphi(D^2 - \lambda)^{-1}\psi\{(1 - \theta)(\tilde{D}^2 - \lambda) + [\tilde{D}^2 - \lambda, 1 - \theta]\}w \\ &= \varphi w + \varphi(D^2 - \lambda)^{-1}[\psi, D^2]\theta w - \varphi(D^2 - \lambda)^{-1}\psi[\tilde{D}^2, \theta]w \\ &= \varphi w + \varphi(D^2 - \lambda)^{-1}[\psi, D^2]w, \end{aligned}$$

où on a utilisé (3.13),  $(1 - \theta)\psi = 0$  et  $[\psi, D^2]\theta - \psi[\tilde{D}^2, \theta] = [\psi, D^2]$ . Par conséquent :

$$\varphi((\tilde{D}^2 - \lambda)^{-1} - (D^2 - \lambda)^{-1})\psi = \varphi((\tilde{D}^2 - \lambda)^{-1} - (D^2 - \lambda)^{-1})[\psi, D^2] =: T(\lambda).$$

Le commutateur  $[\psi, D^2]$  est un opérateur différentiel d'ordre 1 dont les coefficients sont à support dans  $\text{Supp } d\psi$ , qui est d'intersection vide avec  $\text{Supp } \varphi$ . Par conséquent,  $\varphi(D^2 - \lambda)^{-1}[\psi, D^2]$  et  $\varphi(\tilde{D}^2 - \lambda)^{-1}[\psi, D^2]$  sont des opérateurs régularisants donnés par des noyaux de Schwartz nuls sur un voisinage de la diagonale de  $\tilde{X} \times \tilde{X}$  et dont les supports sont des compacts inclus dans  $X \times X$ .

Etant régularisants et à supports compacts, ils sont traçables et leur trace est donnée par l'intégrale de la trace ponctuelle de leur noyau restreint à la diagonale, donc elle est nulle. La conclusion est la même pour leur super-trace.

Après l'intégrale de contour  $\int_{\Gamma} e^{-t\lambda} T(\lambda) d\lambda$ , l'opérateur obtenu a encore un noyau nul sur un voisinage de la diagonale de  $\tilde{X} \times \tilde{X}$  donc est à trace et à super trace nulle. On obtient donc le résultat annoncé :

$$\text{Str } \varphi e^{-tD^2} \psi = \text{Str } \varphi e^{-t\tilde{D}^2} \psi \quad (3.14)$$

Le lecteur pourra vérifier que le résultat est le même avec  $Q$  à la place de  $\varphi$ .  $\square$

En définitive, dans notre but de déterminer les coefficients de certaines puissances négatives du développement de  $\text{Str } Q e^{-tD^2}$ , on peut tronquer le noyau de la chaleur à “gauche” et à “droite” puis remplacer  $D^2$  par  $\tilde{D}^2$ . On dispose alors des résultats prouvés dans [CM90]. Dans leur terminologie, on montre que :

**Lemme 3.2**  $Q$  est d'ordre asymptotique 0 et de plus  $\sigma_0(Q) = 0$ .

**Preuve :** Dans ce lemme il n'y a pas lieu de distinguer  $D$  et  $\tilde{D}$ . Les opérateurs  $D^2$ ,  $[D, a]$  sont d'ordre asymptotique 0, donc  $Q$  l'est encore. Les formules suivantes sont p.360 de [CM90]

$$\begin{aligned}\sigma_0(D^2) &= -|\xi|^2 + \frac{1}{2}(\nabla^\mathcal{E})^2, \\ \sigma_0([D, a]) &= da.\end{aligned}$$

Si  $A, B$  sont d'ordre asymptotique nul alors le produit de leur symbole asymptotique  $a, b$  est donné par :

$$a * b(x, \xi) = e^{-1/4R(\partial_\xi, \partial_\eta)} a(x, \xi) \wedge b(x, \eta)|_{\xi=\eta}.$$

On calcule pour  $Q = (da)^{(1)}$  :

$$\begin{aligned}\sigma_0([D^2, [D, a]]) &= \sigma_0(D^2) * \sigma_0([D, a]) - \sigma_0([D, a]) * \sigma_0(D^2) \\ &= (-|\xi|^2 + \frac{1}{2}(\nabla^\mathcal{E})^2) * da - da * (-|\xi|^2 + \frac{1}{2}(\nabla^\mathcal{E})^2) \\ &= (-|\xi|^2 + \frac{1}{2}(\nabla^\mathcal{E})^2) \wedge da - da \wedge (-|\xi|^2 + \frac{1}{2}(\nabla^\mathcal{E})^2) \\ &= 0.\end{aligned}$$

L'avant dernière ligne résulte du fait que  $da$  est indépendante des variables dans le cotangent. La dernière ligne est justifiée par les remarques suivantes :

- . Le symbole principal  $-|\xi|^2$  de  $D^2$  est scalaire et c'est une 0-forme, donc il commute avec la 1-forme  $da$ .
- . L'opérateur de courbure :

$$(\nabla^\mathcal{E})^2 : \Lambda^* \otimes \mathcal{E} \longrightarrow \Lambda^{*+2} \otimes \mathcal{E}$$

est  $\Lambda^*$ -linéaire, c'est à dire :

$$\forall \omega \in \Lambda^*, \forall s \in \Gamma(\mathcal{E}), \quad (\nabla^\mathcal{E})^2(\omega \otimes s) = \omega \otimes (\nabla^\mathcal{E})^2(s).$$

Par conséquent  $(\nabla^\mathcal{E})^2$  et  $da$  commutent.

On vient donc de prouver que  $\sigma_0((da)^{(1)}) = 0$ . Ensuite, par une récurrence évidente, on obtient que  $\sigma_0(da)^{(k)} = 0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et comme  $Q$  contient au moins un tel facteur, on conclut, en vertu toujours de la formule qui donne le produit des symboles, que  $\sigma_0(Q) = 0$ .  $\square$

**Fin de la preuve de la proposition 3.2 :** Notons  $Q_u$  l'opérateur obtenu en remplaçant  $D$  par  $uD$  ( $u > 0$ ). On vérifie immédiatement que  $Q_u = u^{n+2|k|}Q$ . Même notation pour  $A = e^{-\tilde{D}^2}$ , on pose  $A_u := e^{-u^2\tilde{D}^2}$ . Le calcul qui suit est maintenant entièrement justifié :

$$\begin{aligned}
\text{Str } Qe^{-t\mathcal{D}^2} &= \text{Str } QL(t) + O(1) \\
&= \text{Str } Qe^{-t\tilde{D}^2}\psi + O(1) \\
&= \int_{T^*X} \sigma_{t^{-1/2}}(Qe^{-t\tilde{D}^2}\psi)(x, \xi) dx d\xi + O(1) \\
&= t^{-(n/2+|k|)} \int_{T^*X} \sigma_{t^{-1/2}}(Q\sqrt{t}A\sqrt{t}\psi)(x, \xi) dx d\xi + O(1) \\
&= t^{-(n/2+|k|)} \int_{T^*X} \sigma_0(QA\psi)(x, \xi) dx d\xi + O(t^{-(n/2+|k|)+1/2}) \\
&= t^{-(n/2+|k|)} \int_{T^*X} \sigma_0(Q) * \sigma_0(A\psi)(x, \xi) dx d\xi + O(t^{-(n/2+|k|)+1/2}) \\
&= O(t^{-(n/2+|k|)+1/2}).
\end{aligned}$$

Dans la cinquième ligne, on a utilisé [CM90] :

$$\sigma_{t^{-1/2}}(Q\sqrt{t}A\sqrt{t}\psi)(x, \xi) = \sigma_0(QA\psi)(x, \xi) + O(t^{1/2}),$$

où  $O(t^{1/2})$  est d'ordre  $-\infty$  et nécessairement à support compact en  $x$ , donc on peut effectuer son intégrale sur  $T^*X$  et récupérer un  $O(t^{1/2})$ .

On a ainsi montré que le développement asymptotique de  $\text{Str } Qe^{-t\mathcal{D}^2}$  ne possède pas de terme non nul en  $t^{-(n/2+|k|)}$ , ce qui prouve l'affirmation  $\tau_0(Q|D|^{-(2|k|+n)}) = 0$ , pour tout  $|k| > 0$ .  $\square$

**Cas de la composante avec  $n = 0$ .** La composante  $\varphi_0(a + \lambda)$  a été précisée dans la relation (3.6). Elle représente le terme constant du développement asymptotique en  $t = 0$  de la fonction :

$$\text{Str } ((a + \lambda)e^{-t\mathcal{D}^2}) = \text{Str } (ae^{-t\mathcal{D}^2}) + \lambda \text{Str } e^{-t\mathcal{D}^2}.$$

Or, le choix de l'extension autoadjointe de  $D$  :

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & (D_-)_{max} \\ (D_+)_{min} & 0 \end{pmatrix},$$

implique immédiatement la validité de la formule de Mc Kean-Singer :

$$\forall t > 0 \quad \text{Str } e^{-tD^2} = \text{Ind } (D_+)_{min}.$$

D'autre part, comme la fonction  $a$  est  $C^\infty$  à support compact, la proposition 3.1 s'applique et on obtient :

$$\text{Str } (ae^{-tD^2}) = \int_X a \hat{A}(X) \text{ch}(E).$$

Finalement :

$$\varphi_0(a + \lambda) = \varphi_0(a) + \varphi_0(\lambda) = \int_X a \hat{A}(X) \text{ch}(E) + \lambda \text{Ind } (D_+)_{min}.$$

□

### 3.3 Une application

Nous discutons la structure de  $K_0(X^c) \otimes \mathbb{C}$ , lorsque  $X$  est munie d'une structure spin. Dans le cas  $C^\infty$  compact, il est bien connu que la famille des opérateurs obtenus en tordant l'opérateur de Dirac par des fibrés engendre la  $K$ -homologie de la variété : c'est une conséquence de la dualité de Poincaré [Con94]. Dans la situation singulière qui nous concerne, on ne dispose pas d'une telle dualité. Par contre l'isomorphisme de Chern est valable :

$$K_0(X^c) \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\text{ch}_*} H_{ev}(X^c; \mathbb{C}).$$

Il est également valable pour les versions réduites des deux théories et on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} K_0(X^c) \otimes \mathbb{C} & \xrightarrow{\text{ch}_*} & H_{ev}(X^c; \mathbb{C}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \bar{K}_0(X^c) \otimes \mathbb{C} & \xrightarrow{\bar{\text{ch}}_*} & \bar{H}_{ev}(X^c; \mathbb{C}) \end{array}$$

où  $\bar{H}_*(X^c) = \text{Ker}(H_*(X^c) \rightarrow \mathbb{Z})$ . L'application utilisée de l'homologie de  $X^c$  vers  $\mathbb{Z}$  est induite par l'application constante de  $X^c$  sur un point. Pour la  $K$ -homologie réduite, la définition est la même mais on peut alternativement utiliser la  $KK$ -théorie et le morphisme  $p : \mathbb{C} \rightarrow C(X^c)$ , puis poser :

$$\bar{K}_0(X^c) = \text{Ker}(p^* : KK(C(X^c), \mathbb{C}) \rightarrow KK(\mathbb{C}, \mathbb{C})).$$

Après tensorisation par  $\mathbb{C}$ , on a canoniquement

$$\bar{K}_0(X^c) \otimes \mathbb{C} \simeq KK(C_0(X), \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}.$$

Notons  $\mathcal{E}_D(X)$  la collection des triplets spectraux sur  $\mathcal{A}$  obtenus en tordant l'opérateur de Dirac par des fibrés munis d'une connexion plate dans la direction radiale. Ce sont des  $K$ -cycles sur  $\mathcal{A}$  et à chacun d'eux on sait associer un cocycle dans le bicomplexe de  $\mathcal{A}$  qui est un représentant de leur caractère de Chern, autrement dit le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_D(X) & \xrightarrow{\varphi} & HP^0(\mathcal{A}) \\ \downarrow q & & \mu \downarrow \simeq \\ K_0(X^c) \otimes \mathbb{C} & \xrightarrow{\text{ch}} & H_{ev}(X^c; \mathbb{C}) \end{array} \quad (3.15)$$

L'isomorphisme  $\mu$  a été construit au premier chapitre. Pour ce persuader de la commutativité du diagramme (3.15) pour cet isomorphisme, le lecteur septique pourra vérifier que l'application  $\mu$  est compatible avec l'accouplement entre  $HP^0(\mathcal{A})$  et  $K_0(\mathcal{A}) \simeq K^0(X^c)$ , c'est à dire :

$$\forall \psi \in HP^0(\mathcal{A}), \forall e \in K_0(\mathcal{A}) \quad \langle \psi, e \rangle = \langle \mu(\psi), \text{ch}(e) \rangle .$$

Cette compatibilité et le fait que  $\varphi$  associe à un triplet spectral un cocycle cohomologue à son caractère de Chern entraîne la commutativité du diagramme (3.15). Considérons les inclusions  $i : \mathcal{A}/\mathbb{C} \hookrightarrow \mathcal{A}$  et  $j : C_0(X) \hookrightarrow C(X^c)$ . Elles induisent des applications :

$$KK(C(X^c), \mathbb{C}) \xrightarrow{j^*} KK(C_0(X), \mathbb{C}) \quad \text{et} \quad HP^*(\mathcal{A}) \xrightarrow{i^*} HP^*(\mathcal{A}/\mathbb{C}),$$

qui rendent commutatifs les diagrammes ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} K_0(X^c) \otimes \mathbb{C} & \xrightarrow{\text{ch}} & H_{ev}(X^c; \mathbb{C}) \\ \downarrow j^* & & \downarrow \\ \bar{K}_0(X^c) \otimes \mathbb{C} & \xrightarrow{\bar{\text{ch}}} & \bar{H}_{ev}(X^c; \mathbb{C}) \end{array} \quad (3.16)$$

$$\begin{array}{ccc} HP^*(\mathcal{A}) & \xrightarrow{i^*} & HP^*(\mathcal{A}/\mathbb{C}) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ H_*(X^c; \mathbb{C}) & \longleftarrow & \bar{H}_*(X^c; \mathbb{C}) \end{array} \quad (3.17)$$

La commutativité de (3.15), (3.16) et (3.17) entraîne celle de :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_D(X) & \xrightarrow{i^* \circ \varphi} & HP^0(\mathcal{A}/\mathbb{C}) \\ \downarrow j^* \circ q & & \downarrow \simeq \\ KK(C_0(X), \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C} & \xrightarrow{\bar{\text{ch}}_*} & \bar{H}_{ev}(X^c; \mathbb{C}) \end{array} \quad (3.18)$$

Nous noterons  $\bar{\varphi}(\mathcal{D}_E)$  le cocycle  $i^*(\bar{\varphi}(\mathcal{D}_E))$ . C'est simplement la restriction de  $\varphi(\mathcal{D}_E)$  à  $\mathcal{A}/\mathbb{C}$ . Nous pouvons alors énoncer et prouver :

**Proposition 3.5** 1)  $\mathcal{E}_D(X)$  engendre  $\bar{K}_0(X^c) \otimes \mathbb{C}$ .

2) Si on peut trouver  $E$  tel que  $\text{Ind}(\mathcal{D}_E)_+ \neq 0$ , alors  $\mathcal{E}_D(X)$  engendre  $K_0(X^c)$ .

**Preuve :** Au vu du diagramme (3.18), le point 1) de la proposition découle de la surjectivité de  $\bar{\varphi}$ , que nous allons prouver maintenant.

Nous savons d'après les résultats du précédent paragraphe que  $\bar{\varphi}(\mathcal{D}_E)$  est représenté par le cocycle périodique  $(\bar{\varphi}_{2n}(\mathcal{D}_E))$  où :

$$\bar{\varphi}_{2n}(\mathcal{D}_E)(a_0, a_1, \dots, a_{2n}) = \int_X \hat{A}(X) \wedge \text{ch}(E) \wedge a_0 da_1 \wedge \dots \wedge da_{2n}. \quad (3.19)$$

Soit  $T$  un courant fermé, que l'on peut supposer  $C^\infty$  et obtenu à partir d'une forme différentielle ([Rha73]). Il faut prouver l'existence d'un fibré  $E$  sur  $X$ , dans la classe des fibrés admissibles, tel que les courants  $T$  et  $\hat{A}(X) \wedge \text{ch}(E)$  soient homologues.

$\hat{A}(X)$  est une combinaison algébrique des formes de Pontryagin de  $X$ , qui sont des invariants conformes, on peut par conséquent déformer la métrique conique en la métrique produit sur la partie conique sans changer la classe de cohomologie de  $\hat{A}(X)$ . Pour la métrique produit, cette forme différentielle coïncide sur la partie conique avec une forme indépendante de  $r$  et de  $dr$  (qui est en fait le tiré en arrière de la forme  $\hat{A}(N)$ ), pour la métrique  $g_N$ ). De même,  $E$  étant muni d'une connexion plate dans la direction radiale sur la partie conique, la forme différentielle  $\text{ch}(E)$  a la même propriété. Par contre  $T$  n'a pas a priori cette caractéristique.

Près de  $\partial M$ , on peut écrire :

$$T = S(r, x) + dr \wedge U(r, x). \quad (3.20)$$

Puisque  $T$  est fermé, la forme différentielle lui correspondant est fermée et sa restriction à  $M$  également. En particulier  $d_N S(r, x) = 0$ . On introduit un courant  $T'$ , homologue à  $T$ , qui ne dépend pas de  $r$  et de  $dr$  sur la partie conique :

$$T' = \begin{cases} T & \text{sur } M \\ S(1, x) & \text{sur } C_{0,1}N \end{cases} \quad (3.21)$$

Plus précisément,  $T'$  est défini par :

$$\forall \omega \in \Omega_c^*(X), \quad \int_X T' \wedge \omega = \int_{C_{0,1}N} S(1) \wedge \omega + \int_M T \wedge \omega.$$

Il y a un abus de notation :  $S(1)$  est en fait  $\pi^*(i^*(T))$ , où  $i$  est l'inclusion de  $\{1\} \times N$  dans  $X$  et  $\pi$  la projection de  $C_{0,1}N$  sur  $\{1\} \times N$ , nous persisterons dans cet abus, qui n'entraîne pas de véritable confusion.

Bien sur,  $T'$  n'est pas  $C^\infty$ . Vérifions qu'il est homologue à  $T$ . Soit  $\alpha \in \Omega_c^*(X) \cap \text{Ker } d$ ,

$$\begin{aligned}
\int_X (T - T') \wedge \alpha &= \int_{C_{0,1}N} (T - S(1)) \wedge \alpha + \int_M (T - T') \wedge \alpha \\
&\stackrel{\text{Poincaré}}{=} \int_{C_{0,1}N} (T - S(1)) \wedge dK\alpha \\
&\stackrel{\text{Stokes}}{=} \pm \int_{C_{0,1}N} d(T - S(1)) \wedge K\alpha \pm \int_N i^*((T - S(1)) \wedge K\alpha) \\
&= \int_N (S(1) - S(1)) \wedge K\alpha \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ensuite, remarquons que  $\hat{A}(X)$  est de la forme :  $1 + \omega_4 + \omega_8 + \dots$  où  $\omega_j \in \Omega^j(X)$ , donc est inversible dans l'anneau  $\Omega^*(X)$ . Notons  $\hat{A}(X)^{-1}$  son inverse (c'est une forme différentielle fermée, indépendante de  $r$  et  $dr$  sur  $C_{0,1}N$ ). On peut donc écrire :

$$T' = \hat{A}(X) \wedge (\hat{A}(X)^{-1} \wedge T') = \hat{A}(X) \wedge W.$$

$W$  a les mêmes propriétés que  $T'$ , pour fixer les notations posons :

$$W = \begin{cases} B + dr \wedge C & \text{près de } \partial M \\ B(1) & \text{sur } C_{0,1}N \end{cases} \quad (3.22)$$

Sur  $M$ , l'isomorphisme de Chern et la méthode de Chern-Weyl assurent l'existence d'un fibré  $E$  et d'une connexion  $\nabla_M^E$  tels que les formes différentielles  $\text{ch}(E, \nabla_M^E)$  et  $W|_M$  soient cohomologues sur  $M$ . La classe de cohomologie de  $\text{ch}(E, \nabla_M^E)$  ne dépendant pas du choix de la connexion, on peut imposer qu'elle soit de la forme, sur un voisinage de  $\partial M$  :

$$\nabla_M^E = \partial_r \otimes dr + \nabla^{\tilde{E}},$$

où  $\nabla^{\tilde{E}}$  est indépendante de  $r$  et par conséquent, près de  $\partial M$  :

$$(\nabla_M^E)^2 = (\nabla^{\tilde{E}})^2 \text{ et } \text{ch}(E, \nabla_M^E)(r, x) = (\pi')^*(\text{ch}(\tilde{E}, \nabla^{\tilde{E}}))(r, x),$$

où, ici  $\pi' : [1, 1 + \varepsilon] \times N \rightarrow \{1\} \times N$ , mais on commettra un abus de notation en oubliant de mentionner  $\pi^*$ .

On peut alors prolonger  $E$  en un fibré sur  $X$  toujours noté  $E$  et le munir d'une connexion  $\nabla_X^E$  égale à  $\nabla_M^E$  sur  $M$  et à  $\partial_r \otimes dr + \nabla^{\tilde{E}}$  sur  $C_{0,1}N$ .

Soit  $U$  la forme différentielle sur  $M$  telle que :

$$dU = \text{ch}(E, \nabla_M^E) - W|_M$$

Près de  $\partial M$ , on écrit :  $U = Y + dr \wedge Z$  et la relation précédente implique :

$$d_N Y(r, x) = \text{ch}(\tilde{E}, \nabla^{\tilde{E}})(r, x) - B(r, x).$$



Donc, sur  $C_{0,1}N$  on a la relation :

$$\begin{aligned} & \text{ch}(E, \nabla_X^E) - W \\ &= \pi^*(\text{ch}(\tilde{E}, \nabla^{\tilde{E}})(1) - B(1)) = \pi^*(d_N Y(1)) = d_N(\pi^* Y(1)) = d(\pi^* Y(1)). \end{aligned}$$

On peut à présent vérifier que  $E$  est le bon candidat, c'est à dire montrer que  $\text{ch}(E, \nabla_X^E)$  et  $W$  sont des courants homologues : Soit  $\alpha \in \Omega_c^*(X) \cap \text{Ker } d$ ,

$$\begin{aligned} & \int_X (\text{ch}(E, \nabla_X^E) - W) \wedge \alpha \\ &= \int_{C_{0,1}N} (\text{ch}(E, \nabla_X^E) - B(1)) \wedge \alpha + \int_M (\text{ch}(E, \nabla_M^E) - W) \wedge \alpha \\ &= \int_{C_{0,1}N} d(\pi^* Y(1)) \wedge \alpha + \int_M dU \wedge \alpha \\ &= - \int_N Y(1) \wedge \alpha + \int_N i^*(U \wedge \alpha) \\ &= - \int_N Y(1) \wedge i^* \alpha + \int_N Y(1) \wedge i^* \alpha = 0. \end{aligned}$$

Dans la quatrième ligne on a utilisé la formule de Stokes, le fait que  $d\alpha = 0$  et que  $\alpha$  est à support compact. C'est terminé, car  $\text{ch}(E) \sim W$  implique :

$$T' = \hat{A}(X) \wedge W \sim \hat{A}(X) \wedge \text{ch}(E),$$

où  $\sim$  signifie "courants homologues".

2) Notons  $p$  l'inclusion d'algèbres  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{A}$ . Remarquons que l'on a l'égalité des classes de cohomologie cyclique :

$$\varphi = \bar{\varphi} + p^*(\varphi),$$

où on a identifié  $HP^*(\mathcal{A}) \simeq HP^*(\mathcal{A}/\mathbb{C}) \oplus HP^*(\mathbb{C})$ . Notons aussi que  $p^*(\varphi)(\lambda) = \lambda \text{Ind}(\mathcal{D}_E)_+$ .

Alors le diagramme 3.15 et le point a) de la proposition en cours de démonstration entraînent que l'application  $q$  est surjective si et seulement si l'application  $\mathcal{D}_E \mapsto p^* \circ \varphi(\mathcal{D}_E)$  est surjective. Comme  $HP^*(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$ , la surjectivité de  $q$  est équivalente à l'existence d'un opérateur  $\mathcal{D}_E$  tel que  $\text{Ind}(\mathcal{D}_E)_+ \neq 0$ .  $\square$

Ce problème est intéressant et la réponse est probablement positive en général.

# Appendix A

## Filtration de la $K$ -homologie

Nous discuterons ici de la filtration de la  $K$ -homologie d'une variété compacte. Cela peut se faire en utilisant l'isomorphisme de Chern et l'isomorphisme entre homologie de De Rham et cohomologie cyclique. On peut également utiliser la dualité de Poincaré. C'est ce second point de vue que nous préciserons. Dans un ordre d'idée voisin, nous montrerons que le produit tensoriel extérieur de deux  $K$ -cycles de sommabilité  $p$  et  $q$  est de sommabilité  $p + q$ .

Soit  $A$  une  $C^*$ -algèbre séparable et  $\mathcal{A}$  une sous algèbre dense et stable par calcul fonctionnel holomorphe. Pour filtrer  $K^*(A)$ , l'idée naturelle est de considérer les classes d'homotopie de modules de Fredholm  $p$ -sommables pour tout  $p \in [1, \infty[$  ; l'homotopie étant permise dans les familles de modules finiment sommables.

**Définition A.1** Notons  $\mathcal{F}^{(p)}(\mathcal{A})$  la collection des modules de Fredholm  $p$ -sommables et  $\sim_f$  l'homotopie à l'intérieur de la classe des modules finiment sommables. Le quotient  $\mathcal{F}^{(p)}(\mathcal{A}) / \sim_f$  sera noté  $K^{(p)}(\mathcal{A})$ .

Le quotient est un groupe abélien. Bien entendu, tous les modules de Fredholm ne sont pas finiment sommables. De plus, la relation d'équivalence utilisée dans cette définition est en général plus fine que l'homotopie usuelle. Donc, en général,  $K^{(p)}(\mathcal{A})$  n'est pas un sous groupe de  $K^*(A)$ .

### A.1 Dualité de Poincaré en dimension finie

On se donne deux  $C^*$ -algèbres séparables  $A$  et  $B$  qui sont en situation de dualité de Poincaré avec une classe fondamentale  $\alpha \in KK(A \otimes B, \mathbb{C})$  qui est  $p$ -sommable sur  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ , où  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont des sous algèbres denses et stables par calcul fonctionnel holomorphe. Nous ferons comme hypothèse technique que  $A$  et  $B$  sont trivialement graduées et unitaires. Dans ces conditions, on va montrer :

**Proposition A.1** *On a un isomorphisme*

$$K^{(p)}(\mathcal{A}) \simeq K^*(A),$$

où on a posé :  $K^*(A) = K^0(A) \oplus K^1(A)$ . En particulier, on a une filtration :

$$K^{(1)}(\mathcal{A}) \subset \dots \subset K^{(p)}(\mathcal{A}).$$

*C'est une filtration par des sous groupes.*

Preuve : on va utiliser les isomorphismes, valables pour  $i = 0, 1$  :

$$\otimes_A \alpha : K_i(B) \longrightarrow K^i(A),$$

et montrer que pour tout  $x \in K_i(B)$ , le produit de Kasparov  $x \otimes_A \alpha$  appartient à  $\mathcal{F}^{(p)}(\mathcal{A})$ . Nous traiterons séparément les cas pairs et impairs. Commençons par  $i = 0$ .

Soit  $[x] \in K_0(B)$ . Cet élément est représenté par un module projectif de type fini sur  $B$ , c'est à dire par un triplet

$$x = (\mathcal{E} = eB^N, 1_{\mathbb{C}}, 0),$$

où  $e \in M_N(B)$  est un projecteur :  $e^2 = e = e^*$ .

La classe fondamentale  $\alpha$  est représentée par un module de Fredholm  $p$ -sommable  $(\mathcal{H}, \rho, F)$  sur l'algèbre  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ . Ici,  $\mathcal{H}$  est un espace de Hilbert  $\mathbb{Z}_2$  gradué et  $F$  est de degré 1. On peut supposer sans perte de généralité que le module est normalisé. Le produit de Kasparov est ici de la forme :

$$x \otimes_A \alpha = \tau_A x \otimes_{A \otimes B} \alpha,$$

où  $\tau_A$  est l'application canonique  $\tau_A : KK(\mathbb{C}, B) \longrightarrow KK(A, A \otimes B)$ , définie par  $\tau_A x = [(\mathcal{E} \otimes A, 1_{\mathbb{C}} \otimes 1, 0)]$ .

Dans cette situation le produit est représentable par un  $(A, \mathbb{C})$ -bimodule

$$(\mathcal{E} \otimes A \otimes_{A \otimes B} \mathcal{H}, \rho', G),$$

où  $G$  est une  $F$ -connexion. Il nous faut en exhiber une.

On procède auparavant aux identifications canoniques suivantes :

$$(\mathcal{E} \otimes A) \otimes_{A \otimes B} \mathcal{H} \simeq \mathcal{E} \otimes_B \mathcal{H} \simeq \tilde{e}(\mathcal{H}^N),$$

où  $\tilde{e} = (\rho(1 \otimes e_{ij}))_{i,j} \in \mathcal{L}_B(\mathcal{H}^N)$ . L'élément  $\tilde{e}$  est  $B$ -linéaire et c'est un projecteur. Par conséquent, son image dans  $\mathcal{H}^N$  est fermée et l'espace  $\tilde{e}(\mathcal{H}^N)$  est un espace de Hilbert pour la structure induite.

La représentation de  $A$ , plus rigoureusement celle de  $A \otimes \mathbb{C} \subset A \otimes B$ , sur  $\mathcal{H}^N$  est donnée par la formule

$$\tilde{\rho} = \rho|_{A \otimes 1} \oplus \dots \oplus \rho|_{A \otimes 1}.$$

Elle induit une représentation de  $A$  sur  $\tilde{e}(\mathcal{H}^N)$  puisque les actions de  $\tilde{\rho}$  et  $\tilde{e}$  commutent (en effet,  $A$  et  $B$  sont trivialement graduées).

La construction de la  $F$ -connexion est maintenant classique et immédiate :

On considère l'opérateur  $\tilde{F} = F \oplus \dots \oplus F$  défini sur  $\mathcal{H}^N$ , puis on pose  $F_e = \tilde{e}\tilde{F}\tilde{e}$ .

**Lemme A.1** 1)  $F_e$  est une  $F$ -connexion sur  $(\mathcal{E} \otimes A) \otimes_{A \otimes B} \mathcal{H}$  identifié à  $\tilde{e}(\mathcal{H}^N)$ .  
2) Les commutateurs  $[F_e, a] \in \mathcal{B}(\tilde{e}(\mathcal{H}^N))$  sont  $p$ -sommables pour tout  $a \in \mathcal{A}$ .

Preuve : 1) La vérification est laissée au lecteur.

2) On a pour tout  $a \in \mathcal{A}$  :

$$[F_e, a] = \tilde{e}\tilde{F}\tilde{e}a - a\tilde{e}\tilde{F}\tilde{e} = \tilde{e}(\tilde{F}a - a\tilde{F})\tilde{e} = \tilde{e}[\tilde{F}, a]\tilde{e}. \quad (\text{A.1})$$

On a  $[\tilde{F}, a] = [F, a] \oplus \dots \oplus [F, a]$ . Le commutateur  $[\tilde{F}, a]$  est par conséquent  $p$ -sommable en tant qu'opérateur sur  $\mathcal{H}^N$ , puisque  $[F, a]$  est  $p$ -sommable en tant qu'opérateur sur  $\mathcal{H}$ . Comme  $\mathcal{L}^p(\mathcal{H}^N)$  est un idéal bilatère de  $\mathcal{B}(\mathcal{H}^N)$ , le composé  $\tilde{e}[\tilde{F}, a]\tilde{e}$  est encore  $p$ -sommable sur  $\mathcal{H}^N$ . Il reste à vérifier que ce dernier est encore  $p$ -sommable quand on le regarde comme un opérateur sur  $\tilde{e}(\mathcal{H}^N)$ .

On sait pour le moment que pour toute décomposition spectrale  $(\lambda_j, \pi_j)$  sur  $\mathcal{H}^N$  de l'opérateur auto-adjoint :

$$|\tilde{e}[\tilde{F}, a]\tilde{e}|, \quad (\text{A.2})$$

on a :

$$\sum_j \lambda_j^p < \infty. \quad (\text{A.3})$$

L'égalité suivante d'opérateurs sur  $\tilde{e}\mathcal{H}^N$  :

$$|\tilde{e}[\tilde{F}, a]\tilde{e}| = \tilde{e}|[\tilde{F}, a]|\tilde{e},$$

nous montre que l'on peut choisir une décomposition spectrale de (A.2) sur  $\mathcal{H}^N$  compatible avec la somme directe :

$$\mathcal{H}^N = \tilde{e}\mathcal{H}^N \oplus (1 - \tilde{e})\mathcal{H}^N.$$

Plus précisément, on peut choisir une décomposition  $(\lambda'_k, \pi'_k) \cup (\lambda''_j, \pi''_j)$  où  $(\pi'_k)$  forme une base orthonormée de  $\tilde{e}\mathcal{H}^N$  et  $(\pi''_j)$  une base orthonormée de  $(1 - \tilde{e})\mathcal{H}^N$ . Alors  $(\lambda'_k, \pi'_k)$  est une décomposition spectrale de (A.2) sur l'espace de Hilbert  $\tilde{e}\mathcal{H}^N$  et comme pour tout  $j$ , les valeurs propres  $\lambda''_j$  sont nécessairement nulles, la propriété de sommabilité (A.3) implique immédiatement la  $p$ -sommabilité de  $[F_e, a]$  en tant qu'opérateur sur  $\tilde{e}\mathcal{H}^N$ . Le lemme est prouvé.  $\square$

Dans le cas impair ( $i = 1$ ), l'argumentation est similaire mais il faut faire des identifications supplémentaires que nous précisons rapidement. Nous prenons comme réalisation de  $K_1(B)$  (resp.  $K^1(A)$ ) le groupe  $KK(\mathbb{C}, B \otimes C_1)$  (resp. le groupe  $KK(A \otimes C_1, \mathbb{C})$ ), où  $C_1$  est l'algèbre de Clifford complexifiée de l'espace euclidien  $\mathbb{R}$ . On a l'égalité dans  $K^1(A)$  :

$$x \otimes_A \alpha = (j_*)^{-1} \tau_{A \otimes C_1} x \otimes_{A \otimes B} \alpha,$$

où l'application

$$\begin{aligned} j : A \otimes B &\hookrightarrow M_2(A \otimes B) \\ y &\longmapsto \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

induit l'isomorphisme, après l'identification d'algèbre  $C_1 \otimes C_1 \simeq M_2(\mathbb{C})$  :

$$j_* : KK(D, A \otimes B) \xrightarrow{\simeq} KK(D, M_2(A \otimes B)).$$

L'élément  $x$  est représenté par un bimodule  $(\mathcal{E}, 1, 0)$ , où  $\mathcal{E}$  est un module projectif de type fini sur  $B \otimes C_1$ . Alors  $\tau_{A \otimes C_1} x$  est la classe du bimodule

$$(\mathcal{E} \otimes A \otimes C_1, 1_{A \otimes C_1}, 0),$$

où  $1_{A \otimes C_1}$  est l'action à gauche évidente de  $A \otimes C_1$  sur le  $A \otimes C_1 \otimes B \otimes C_1$ -module de Hilbert  $\mathcal{E}'' = A \otimes C_1 \otimes \mathcal{E}$ . Ce dernier est un module projectif de type fini. Après les identifications des algèbres  $C_1 \otimes C_1$  et  $M_2(\mathbb{C})$ , le module  $\mathcal{E}''$  est lui même identifié à un  $M_2(A \otimes B)$ -module projectif de type fini. Sous cet isomorphisme l'action à gauche  $\rho''$  de  $A \otimes C_1$  est caractérisée par

$$a \otimes 1 \mapsto a \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{E}''),$$

$$a \otimes \varepsilon \mapsto a \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{E}'').$$

Sous ces identifications,  $y := \tau_{A \otimes C_1} x$  est représenté dans  $KK(A \otimes C_1, M_2(A \otimes B))$  par le bimodule:  $(\mathcal{E}'', \rho'', 0)$ .

L'application trace  $\text{tr} : M_2(C) \rightarrow C$  induit un isomorphisme en  $KK$ -théorie :

$$\text{tr}_* : KK(A \otimes C_1, M_2(A \otimes B)) \longrightarrow KK(A \otimes C_1, A \otimes B),$$

et de plus vérifie  $j_*^{-1}(y) = (\text{tr})_*(y)$ . Donc  $j_*^{-1}(y)$  est représentable par un bimodule de la forme:  $(\mathcal{E}', \rho', 0)$ , où  $\mathcal{E}'$  est un module projectif de type fini sur  $A \otimes B$ .

Maintenant, les identifications faites permettent d'effectuer le produit comme dans le cas pair et le module de Fredholm obtenu sur  $A \otimes C_1$  est  $p$ -sommable. Ce qui termine les calculs dans le cas impair.

Ce que l'on vient de faire prouve que dans chaque classe de  $K^*(A)$  il y a un représentant  $p$ -sommable. De plus considérons deux éléments  $[x \otimes \alpha]$  et  $[y \otimes \alpha]$  de  $K^*(A)$ . Si  $x \otimes \alpha$  et  $y \otimes \alpha$  sont homotopes, alors  $x = y$  dans  $K_1(B)$ , c'est à dire que l'on peut trouver une homotopie  $(e_t)_{t \in [0,1]}$  entre  $x$  et  $y$ . Alors  $(e_t \otimes \alpha)_{t \in [0,1]}$  réalise une homotopie dans la famille des modules  $p$ -sommables entre  $x \otimes \alpha$  et  $y \otimes \alpha$ . Ce qui suffit à prouver l'isomorphisme annoncé. Le reste de la proposition (A.1) est trivial.  $\square$

## A.2 Produit extérieur de modules finiment sommables

Le produit extérieur des modules de Fredholm est obtenu par l'application :

$$KK(A, \mathbb{C}) \times KK(B, \mathbb{C}) \longrightarrow KK(A \otimes B, \mathbb{C}),$$

induite par le produit de Kasparov. Nous allons vérifier :

**Proposition A.2** *Soient  $(D_1, H_1)$  et  $(D_2, H_2)$  deux modules non bornés respectivement  $p$ -sommable sur  $A$  et  $q$ -sommable sur  $B$ . Alors leur produit extérieur sur  $A \otimes B$  est un module  $p + q$ -sommable sur  $A \otimes B$ .*

Remarque : cela correspond bien à l'intuition que l'on peut avoir : le produit cartésien d'un espace de dimension  $p$  avec un espace de dimension  $q$  est de dimension  $p + q$ .

Preuve : Nous supposons que les modules sont pairs :  $D_i$  est de degré 1 sur  $H_i = H_i^+ \oplus H_i^-$ ,  $i = 1, 2$ . Matriciellement :

$$D_i = \begin{pmatrix} 0 & D_i^- \\ D_i^+ & 0 \end{pmatrix}.$$

Leur produit de Kasparov externe est représenté par le module pair non borné [BJ78]

$$(D, H) = (D_1 \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} D_2, H_1 \hat{\otimes} H_2),$$

où  $\hat{\otimes}$  est le produit tensoriel gradué. L'espace de Hilbert  $H$  se décompose comme suit :

$$H = H^+ \oplus H^- = (H_1^+ \otimes H_2^+ \oplus H_1^- \otimes H_2^-) \oplus (H_1^+ \otimes H_2^- \oplus H_1^- \otimes H_2^+).$$

Rappelons que le produit tensoriel gradué des opérateurs est régi par :  $F \hat{\otimes} G(a \hat{\otimes} b) = (-1)^{\partial a \partial G} F(a) \hat{\otimes} G(b)$ . On obtient l'écriture matricielle suivante pour les opérateurs  $D_1 \hat{\otimes} 1$  et  $1 \hat{\otimes} D_2$  :

$$D_1 \hat{\otimes} 1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & D_1^- \hat{\otimes} 1 \\ 0 & 0 & D_1^+ \hat{\otimes} 1 & 0 \\ 0 & D_1^- \hat{\otimes} 1 & 0 & 0 \\ D_1^+ \hat{\otimes} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$1 \hat{\otimes} D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \hat{\otimes} D_2^- & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \hat{\otimes} D_2^+ \\ 1 \hat{\otimes} D_2^+ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 \hat{\otimes} D_2^- & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,  $D^2$  est donné par la matrice diagonale :

$$\begin{pmatrix} T_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_4 \end{pmatrix},$$

où :

$$\begin{aligned} T_1 &= D_1^- D_1^+ \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} D_2^- D_2^+, & T_2 &= D_1^+ D_1^- \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} D_2^+ D_2^-, \\ T_3 &= D_1^- D_1^+ \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} D_2^+ D_2^-, & T_4 &= D_1^+ D_1^- \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} D_2^- D_2^+. \end{aligned}$$

Chaque  $\Delta_i^\pm = D_i^\mp D_i^\pm$  est un opérateur autoadjoint positif sur  $H_i^\pm$  à résolvante  $p/2$ -sommable pour  $i = 1$  et  $q/2$ -sommable pour  $i = 2$ . On obtient une décomposition spectrale de chaque  $T_j$  :

$$(\nu_{k,l}, \sigma_{k,l})_{k,l} = (\lambda_k + \mu_l, \rho_k \hat{\otimes} \pi_l)_{k,l},$$

à partir de décompositions spectrales  $(\lambda_j, \rho_j)$  et  $(\mu_k, \pi_k)$  de  $\Delta_1^\pm$  et  $\Delta_2^\pm$ , les signes  $\pm$  étant adéquats.

Nous vérifions maintenant que le spectre des opérateurs  $T_j$  a la propriété de sommabilité voulue, c'est à dire :

$$\sum_{k,l} (\lambda_k + \mu_l)^{-\frac{p+q}{2}} < \infty,$$

la somme étant à prendre sur les  $(\lambda_k, \mu_l) \neq 0$ . Rappelons que pour tout  $a, b, p, q > 0$ , on a l'inégalité :  $(a + b)^{p+q} \geq a^p b^q$ . Il vient alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k,l} (\lambda_k + \mu_l)^{-\frac{p+q}{2}} &\leq \sum_{k,l} \lambda_k^{-\frac{p}{2}} \mu_l^{-\frac{q}{2}} \\ &= \left( \sum_k \lambda_k^{-\frac{p}{2}} \right) \left( \sum_l \mu_l^{-\frac{q}{2}} \right) \\ &< \infty. \end{aligned}$$

□

**Remarque :** Nous n'avons pas faits les calculs dans le cas impair, mais les raisonnements sont certainement similaires et la conclusion identique.

# Bibliography

- [BD82] P. Baum and R. Douglas. K-homology and index theory. *Proc. of Sympos. in Pure Math.*, 38(1):117–173, 1982.
- [BF90] J. Block and J. Fox. Asymptotic pseudodifferential operators and index theory. *Contemp. math.*, 105:1–31, 1990.
- [BGV91] N. Berline, E. Getzler, and M. Vergne. *Heat kernels and Dirac operators*, volume 298 of *comprehensive studies in mathematics*. Springer-Verlag, 1991.
- [BJ78] S. Baaĵ and P. Julg. Théorie bivariante de Kasparov et opérateurs non bornés dans les  $C^*$ -modules hilbertiens. *C.R. Acad Sc. Paris Série I*, 296:875, 878.
- [BL96] J. Brüning and M. Lesch. On the spectral geometry of algebraic curves. *J. reine angew math.*, 474:25–66, 1996.
- [BL98] J.P. Brasselet and A. Legrand. Algebras of differentiable functions on singular varieties. preprint laboratoire E. Picard, 1998.
- [Bos90] J.B. Bost. Principe d’Oka, K-théorie et systèmes dynamiques non commutatifs. *Invent. math.*, 101:261–333, 1990.
- [BS88] J. Brüning and R. Seeley. An index theorem for first order regular singular operators. *Amer. Journal of Math.*, 110:659–714, 1988.
- [Cha97] S. Chan. L-classes on pseudomanifolds with one singular stratum. *Proc. of the AMS*, 125(7):1955–1968, 1997.
- [Cha98] S.W. Chan. Periodic cyclic cohomology chern character for pseudomanifolds with one singular stratum. *Proc. of the AMS*, 126(3):669–675, 1998.
- [Che83] J. Cheeger. Spectral geometry of singular riemannian spaces. *J. diff. geom.*, 18:575–657, 1983.



- [Cho85] A.W. Chou. The Dirac operator on spaces with conical singularities and positive scalar curvatures. *Trans. A.M.S.*, 289(1):1–40, 1985.
- [CM90] A. Connes and H. Moscovici. Cyclic cohomology, Novikov conjecture and hyperbolic groups. *Topology*, 29:345–388, 1990.
- [CM93] A. Connes and H. Moscovici. Transgression and the finite Chern character of finite-dimensional K-cycles. *Comm. in math. physics*, 155:102–122, 1993.
- [CM95] A. Connes and H. Moscovici. The local index formula in noncommutative geometry. *GAF*, 5(2):174–243, 1995.
- [Con85] A. Connes. Non commutative differential geometry. *Publications de L’IHES*, 62, 1985.
- [Con94] A. Connes. *Noncommutative Geometry*. Academic Press, 1994.
- [CQ94] J. Cuntz and R. Quillen. On excision in periodic cyclic cohomology ii : the general case. *C.R. Acad Sc. Paris Série I*, 318:11–12, 1994.
- [Cun] J. Cuntz. Excision in continuous periodic cohomology. ?
- [Get83] E. Getzler. Pseudodifferential operators on supermanifolds and the Atiyah-Singer index theorem. *Commun. Math. Phys.*, 92:163–178, 1983.
- [Gil84] P. Gilkey. *Invariance theory, the heat equation, and the Atiyah-Singer index theorem*. Publish or Perish, 1984.
- [Kas80] G.G. Kasparov. The operator K-functor and extensions of  $C^*$ -algebras. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Math.*, 44:571–636, 1980.
- [Kat80] T. Kato. *Perturbation theory of linear operators*. Classics in mathematics. Springer, Berlin Heidelberg New-York, 1980.
- [Les93] M. Lesch. Deficiency indices for symmetric Dirac operators on manifolds with conic singularities. *Topology*, 32(3):611–623, 1993.
- [Les96] M. Lesch. Operators of Fuchs type, conical singularities and asymptotic methods, 1996. Thèse d’habilitation.
- [LM89] H. Lawson and M.L. Michelsohn. *Spin geometry*, volume 38 of *Princeton mathematical series*. Princeton university press, Princeton, New Jersey, 1989.
- [MW96] H. Moscovici and F. Wu. Straight Chern character for Witt spaces. preprint IHES, 1996.

- [Rha73] G. De Rham. *Variétés différentiables*, volume Actualités scient. indus., 1222 of *Publ. math. de l'univ. Nancago*. Hermann, Paris, trois. ed. 1973.
- [Sch94] B.W. Schulze. *Pseudo-differential boundary value problems, conical singularities, and asymptotics*, volume 4 of *mathematical topics*. Akademie Verlag, 1994.
- [Sch97] E. Schrohe. Non commutative residues and manifolds with conical singularities. *Journal of functional analysis*, 150(1):146–174, 1997.
- [Shu80] M.A. Shubin. *Pseudodifferential operators and spectral theory*. Springer Verlag, 1980.
- [Ska91] G. Skandalis. Kasparov's bivariant K-theory and applications. *Expositiones mathematicae*, 9:193–250, 1991.