Ali Baklouti*, Sami Dhieb**, Dominique Manchon***

Orbites coadjointes et variétés caractéristiques

A la mémoire de N.V. Pedersen

Version du 20 janvier 2003

Abstract : The purpose of the present work is to describe a dequantization procedure of topological modules over a deformed algebra. We define the characteristic variety of a topological module as the common zeroes of the annihilator of the representation obtained by setting the deformation parameter to zero. On the other hand, the Poisson characteristic variety is defined as the common zeroes of the ideal obtained by considering the annihilator of the deformed representation, and only then setting the deformation parameter to zero.

Using Gabber's theorem, we show the involutivity of the characteristic variety. The Poisson characteristic variety is indeed a Poisson subvariety of the underlying Poisson manifold. We compute explicitly the characteristic variety in several examples in the Poisson-linear case, including the dual of any exponential solvable Lie algebra. In the nilpotent case, we show that any coadjoint orbit appears as the Poisson characteristic variety of a well chosen topological module.

Résumé : Nous présentons dans ce travail un procédé de déquantification de modules topologiques sur une algèbre déformée. Nous définissons la variété caractéristique d'un module topologique comme l'ensemble des zéros communs de l'annulateur de la représentation obtenue en annulant le paramètre de déformation. Nous définissons par ailleurs la variété de Poisson caractéristique comme l'ensemble des zéros communs de l'idéal obtenu par quotient en annulant le paramètre de déformation dans l'annulateur de la représentation déformée.

Nous montrons à l'aide du théorème de Gabber l'involutivité de la variété caractéristique. La variété de Poisson caractéristique est une sous-variété de Poisson de la variété de Poisson sous-jacente. Nous explicitons la variété caractéristique dans plusieurs exemples, incluant le dual des algèbres de Lie résolubles exponentielles. Dans le cas nilpotent nous montrons que toute orbite coadjointe est la variété de Poisson caractéristique d'un module topologique bien choisi.

* Faculté des Sciences de Sfax, Département de Mathématiques, 3038 Sfax, Tunisie. Ali.Baklouti@fss.rnu.tn

** Faculté des Sciences de Sfax, Département de Mathématiques, 3038 Sfax, Tunisie. Sami.Dhieb@fss.rnu.tn

*** Laboratoire de mathématiques appliquées, UMR 6620, Clermont-Ferrand. manchon@math.univ-bpclermont.fr

Recherche supportée par l'action d'échange CNRS-DGRSRT 01/R 15 04.

Table des matières

Introduction

Nous proposons dans cet article un procédé pour *déquantifier* certains modules sur une algèbre déformée, c'est-à-dire associer à un tel module une sous-variété involutive et une sous-variété de Poisson de la variété de Poisson sous-jacente. Le cadre C^∞ est mal adapté, mais le cadre analytique ou algébrique convient : nous travaillons d'abord sur le corps des complexes, puis, considérant une involution naturelle sur l'algèbre déformée nous mettons en évidence une classe de modules pour lesquels les objets ainsi mis en évidence vivent sur le corps des réels. Ce sont les modules *fortement pseudo-unitaires*, c'est-à-dire les modules munis d'une forme bilinéaire hermitienne non dégénérée compatible avec l'involution, à valeurs dans $\mathbb{C}[[\nu]]$ (où ν est le paramètre de déformation), et telle que la forme bilinéaire quotient à valeurs dans $\mathbb{C}$ obtenue en $\nu = 0$ est encore non-dégénérée.

Soit $(V, \{,\})$ une variété de Poisson analytique réelle (resp. algébrique) c'est-à-dire une variété analytique réelle (resp. algébrique) munie d'un 2-tenseur P à coefficients analytiques (resp. réguliers) tel que le crochet de Schouten $[P, P]$ s'annule. Le crochet de Poisson munit le faisceau structural $\mathcal{O}$ des germes de fonctions analytiques (resp. régulières) d'une structure de faisceau d'algèbres de Poisson.

Nous nous limiterons au cas plat $V = \mathbb{R}^d$. En complexifiant nous obtenons donc une structure de variété de Poisson analytique complexe (resp. algébrique) sur $V^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^d$. Nous noterons A l'algèbre de Poisson $\mathcal{O}_V$ des fonctions analytiques (resp. polynomiales) sur $\mathbb{C}^d$ (c'est l'espace des sections globales du faisceau structural). M. Kontsevich [K] a construit un étoile-produit $\#$ sur V :

$$f\#g = \sum_{k\geq 0} \nu^k C_k(f, g),$$

où les coefficients C_k sont des opérateurs bidifférentiels décrits à l'aide de formules complètement explicites ne faisant intervenir que les dérivées partielles des constantes de structure du 2-tenseur de Poisson (voir aussi [AMM] et [MT]). En particulier si le 2-tenseur de Poisson est à coefficients analytiques (resp. polynomiaux) alors l'étoile-produit est aussi à coefficients analytiques (resp. polynomiaux). Autrement dit l'étoile-produit $\#$ munit $\mathcal{A} = A[[\nu]]$ d'une structure d'algèbre associative topologiquement libre sur $\mathbb{C}[[\nu]]$. Cette algèbre est naturellement filtrée par $\mathcal{A}_n = \nu^n \mathcal{A}$, et son gradué associé $\mathrm{Gr}\,\mathcal{A}$ est naturellement isomorphe à $A[[\nu]]$ muni du produit commutatif de A étendu par $\mathbb{C}[[\nu]]$-linéarité. Enfin cet étoile-produit est à coefficients réels : si f et g sont des fonctions sur V à valeurs réelles, alors $f\#g$ est aussi à valeurs réelles.

L'étoile-produit $\#$ de M. Kontsevich est équivalent à un autre étoile-produit $*$ [K § 8], [MT], [CFT] ayant les mêmes propriétés, et vérifiant de plus la propriété suivante : pour tout f, g dans le centre de $(\mathcal{A}, *)$ on a :

$$f * g = fg.$$

Les deux algèbres $(\mathcal{A}, \#)$ et $(\mathcal{A}, *)$ sont bien entendu isomorphes. Nous appellerons le produit $*$ *étoile-produit de Duflo-Kontsevich* [ABM].

Nous nous placerons exclusivement dans le cadre algébrique. Nous définissons dans le premier paragraphe la variété caractéristique $V(\mathcal{M}) \subset V^{\mathbb{C}}$ d'un $\mathcal{A}$-module topologiquement libre $\mathcal{M}$ ainsi que sa variété de Poisson caractéristique $VA(\mathcal{M})$ en adaptant les définitions de [J] de la façon suivante : considérant l'annulateur $\mathrm{Ann}\,\mathcal{M}$ du $\mathcal{A}$-module $\mathcal{M}$ nous définissons $V(\mathcal{M})$ comme l'ensemble des zéros communs de l'annulateur du A-module $M = \mathcal{M}/\nu\mathcal{M}$, et $VA(\mathcal{M})$ comme l'ensemble des zéros communs de $\mathrm{Ann}\,\mathcal{M}/\nu\,\mathrm{Ann}\,\mathcal{M}$. Ces deux objets sont des sous-variétés affines de $\mathbb{C}^n$ (i.e. définies par l'annulation d'un nombre fini de polynômes).

Nous montrons (à l'aide de [G]) que $V(\mathcal{M})$ est une sous-variété involutive de $V^{\mathbb{C}}$, que $VA(\mathcal{M})$ est une sous-variété de Poisson de $V^{\mathbb{C}}$ (ce qui justifie l'appellation), et que l'on a toujours l'inclusion :

$$V(\mathcal{M}) \subset VA(\mathcal{M}).$$

Après avoir montré (à l'aide de [CF]) que l'involution $f \longmapsto f^*$ définie par :

$$f^*(\xi) = \overline{f(\overline{\xi})}$$

est un anti-automorphisme de l'algèbre $(\mathcal{A}, *)$, nous introduisons la notion de $\mathcal{A}$-module *fortement pseudo-unitaire*, et nous montrons que la variété caractéristique d'un $\mathcal{A}$-module fortement pseudo-unitaire est définie sur le corps des réels, ainsi que sa variété de Poisson caractéristique.

Plus précisément, on prolonge d'abord la conjugaison complexe en un automorphisme de $\mathbb{C}[[\nu]]$ en décrétant que $\nu = i\hbar$ est imaginaire pur, c'est-à-dire $\overline{\nu} = -\nu$. Nous dirons que le module $\mathcal{M}$ est pseudo-unitaire (ou, de façon équivalente, que la représentation qui lui est associée est une $*$-représentation [Bu-W]), s'il existe une forme sesquilinéaire non-dégénérée $< -, - >_\nu$ à valeurs dans $\mathbb{C}[[\nu]]$ sur $\mathcal{M}$ qui soit hermitienne, i.e.

$$< m, n >_\nu = \overline{< n, m >_\nu}, \qquad m, n \in \mathcal{M}$$

et compatible avec l'involution, i.e. vérifiant pour tout $a \in \mathcal{A}$:

$$< am, n >_\nu = < m, a^* n >_\nu \ .$$

La forme $< -, - >_\nu$ induit par passage au quotient une forme hermitienne $< -, - >_0$ sur M à valeurs dans $\mathbb{C}$. Si cette forme est non-dégénérée nous dirons que le module $\mathcal{M}$ est fortement pseudo-unitaire (ou, de façon équivalente, que la représentation associée est une $*$-représentation fortement non-dégénérée). Contrairement à [Bu-W], nous ne faisons pas forcément d'hypothèse de positivité sur la forme sesquilinéaire. Un module fortement pseudo-unitaire muni d'une forme définie positive sera dit *fortement unitaire*.

Dans le deuxième paragraphe nous adaptons ce cadre aux variétés de Poisson linéaires. Pour toute algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$ nous introduisons la famille à un paramètre réel d'algèbres de Lie $\mathfrak{g}_\hbar$, de même espace sous-jacent $\mathfrak{g}$ avec le crochet de Lie :

$$[X, Y]_\hbar = \hbar[X, Y],$$

et nous montrons (Théorème II.3.1) l'équivalence entre les notions de $\mathcal{A}$-module fortement unitaire et de famille à un paramètre $(\rho_\hbar)$ de représentations unitaires de $\mathfrak{g}_\hbar$, où $\mathcal{A}$ s'identifie, via l'isomorphisme de Duflo, à l'algèbre enveloppante formelle complexifiée :

$$\mathcal{U}_\nu(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}) = T(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})[[\nu]] / < x \otimes y - y \otimes x - \nu[x, y] > \ .$$

Le troisième paragraphe est consacré à quelques exemples dans le cadre Poisson-linéaire, plus précisément dans les cadres nilpotent et résoluble, mis à part les modules de Verma traités en conclusion.

Dans la dernière partie, à l'aide de la méthode des orbites de Kirillov [Ki] et des résultats de N.V. Pedersen [Pe1] nous déterminons, dans le cas des algèbres de Lie résolubles exponentielles la variété caractéristique d'un module fortement unitaire obtenu par induction unitaire d'une polarisation réelle quelconque. Nous montrons enfin que lorsque V est le dual d'une algèbre de Lie nilpotente toute feuille symplectique (c'est-à-dire toute orbite coadjointe) peut se voir comme la variété de Poisson caractéristique d'un $\mathcal{A}$-module fortement unitaire $\mathcal{M}$ bien choisi.

Cette étude montre que le cadre tracé au § I pour une vaste classe de variétés de Poisson s'accorde bien avec la méthode des orbites de Kirillov dans le cas des variétés de Poisson linéaires.

Remarque : contrairement à l'anneau des polynômes, l'anneau des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}^n$ n'est pas noethérien. En revanche l'anneau des germes de fonctions holomorphes en un point donné est noethérien. Dans l'optique d'une adaptation de nos méthodes au cadre analytique il serait donc intéressant de "faisceautiser" la construction présentée ici, c'est-à-dire de déquantifier des faisceaux de modules topologiquement libres sur le faisceau $(\mathcal{O}[[\nu]], *)$ d'algèbres déformées (qui a un sens puisque l'étoile-produit est bidifférentiel). Nous remercions Georges Pinczon d'avoir attiré notre attention sur ce point.

I. Objets géométriques associés aux algèbres déformées

Nous gardons les notations de l'introduction en nous limitant exclusivement au cadre algébrique. Nous introduisons la notion d'idéal divisible de l'algèbre déformée $\mathcal{A}$, puis nous introduisons, en nous inspirant de [J], la notion de variété caractéristique pour un $\mathcal{A}$-module topologiquement libre. C'est un fermé de Zariski de V. Nos variétés caractéristiques ne sont pas forcément coniques (contrairement à ce qui se passe dans [J] ou [GM]), ceci grâce à l'introduction du paramètre de déformation dans la construction. La notion de *pseudo-unitarité forte* permet de faire vivre ces variétés caractéristiques sur le corps des réels.

I.1. Modules topologiquement libres

Un $\mathbb{C}[[\nu]]$-module topologiquement libre [E-K § 2.1] est un module $\mathcal{M}$ sur $\mathbb{C}[[\nu]]$ isomorphe à $M[[\nu]]$ pour un certain espace vectoriel M sur $\mathbb{C}$. Un $\mathbb{C}[[\nu]]$-module $\mathcal{M}$ est topologiquement libre si et seulement si l'action de ν est une injection de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}$: on peut prendre en effet pour M un supplémentaire de $\nu\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}$ en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Pour $m \in \mathcal{M}$ on écrira $m = O(\nu)$ lorsqu'il existe $m' \in \mathcal{M}$ tel que $m = \nu m'$. Cet élément m' est donc unique lorsque $\mathcal{M}$ est topologiquement libre. Remarquons que M peut se voir également comme le quotient $\mathcal{M}/\nu\mathcal{M}$.

L'algèbre associative $\mathcal{A}$ définie dans l'introduction est par construction un $\mathbb{C}[[\nu]]$-module topologiquement libre. Nous appellerons *$\mathcal{A}$-module topologiquement libre* un $\mathbb{C}[[\nu]]$-module topologiquement libre $\mathcal{M}$ muni d'une application $\mathbb{C}[[\nu]]$-bilinéaire :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \times \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ (\varphi, m) &\longmapsto \pi_\nu(\varphi)m \end{aligned}$$

faisant de $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}$-module.

Soient $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ deux $\mathcal{A}$-modules topologiquement libres. Un morphisme de $\mathcal{A}$-modules topologiquement libres (ou *opérateur d'entrelacement*) de $\mathcal{M}_1$ vers $\mathcal{M}_2$ est une application $\mathbb{C}[[\nu]]$-linéaire commutant aux actions des éléments de $\mathcal{A}$. On dit que $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont *équivalents* s'il existe un opérateur d'entrelacement bijectif de $\mathcal{M}_1$ sur $\mathcal{M}_2$.

I.2. Idéaux divisibles

Soit $\mathcal{J}$ un idéal à gauche de $\mathcal{A}$. Il est immédiat de voir que $J = \mathcal{J}/\nu\mathcal{J}$ est un idéal de l'algèbre commutative A. La situation est bien sûr la même avec les idéaux à droite. Que se passe-t-il avec les idéaux bilatères? Rien de plus a priori, à moins de considérer une propriété supplémentaire :

Un sous-$\mathbb{C}[[\nu]]$-module $\mathcal{N}$ d'un module topologiquement libre $\mathcal{M} = M[[\nu]]$ sera dit *divisible* si pour tout $m \in \mathcal{N}$ tel que $m = O(\nu)$, m/ν appartient encore à $\mathcal{N}$.

Proposition I.2.1.
Soit $\mathcal{J}$ un idéal bilatère divisible de $\mathcal{A}$. Alors $J = \mathcal{J}/\nu\mathcal{J}$ est un idéal de Poisson de A.

Démonstration. Soient $a_0 \in J$ et $b_0 \in A$. Soit $a = a_0 + \nu a_1 + \cdots \in \mathcal{J}$ et soit $b = b_0 + \nu b_1 + \cdots \in \mathcal{A}$. Par divisibilité de $\mathcal{J}$ on a :

$$\frac{1}{\nu}(a * b - b * a) \in \mathcal{J},$$

d'où on déduit, en considérant le terme constant, que $\{a_0, b_0\}$ appartient à J.

•

I.3. Annulateurs

On définit l'*annulateur* $\operatorname{Ann}\mathcal{M}$ du module $\mathcal{M}$ comme l'ensemble des $\varphi \in \mathcal{A}$ tels que $\pi_\nu(\varphi)m = 0$ pour tout $m \in \mathcal{M}$. On voit immédiatement que si $\mathcal{M}$ est topologiquement libre, alors $\operatorname{Ann}\mathcal{M}$ est un idéal bilatère divisible de $\mathcal{A}$.

Proposition I.3.1.
Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}$-module. Alors $M = \mathcal{M}/\nu\mathcal{M}$ est un module sur l'algèbre commutative $A = \mathcal{A}/\nu\mathcal{A}$.

Démonstration. C'est immédiat en “faisant $\nu = 0$”. On notera π_0 la représentation de A dans le module M associée.

•

Proposition I.3.2.
Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}$-module topologiquement libre. Alors l'annulateur du A-module M est stable par le crochet de Poisson de A.

Démonstration. L'annulateur de M peut se voir comme l'ensemble des $f \in A$ tels que $\pi_\nu(f)u = O(\nu)$ pour tout $u \in \mathcal{M}$. Pour tout $f, g \in \text{Ann } M$ on a :

$$\pi_\nu(f * g)u = \pi_\nu(f)\pi_\nu(g)u = O(\nu^2),$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\pi_\nu(\{f,g\})m &= \frac{1}{\nu}\pi_\nu(f * g - g * f).m + O(\nu)\\ &= O(\nu),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

•

Remarque : L'anneau A étant noethérien [B], l'annulateur de M est finiment engendré.

I.4. Involutivité

Soit $V = \mathbb{R}^d$ une variété de Poisson plate algébrique réelle (comme dans l'introduction), et soit $W \subset V^{\mathbb{C}}$ une sous-variété affine. Soit $I(W)$ l'idéal de A constitué par les fonctions qui s'annulent sur W. On dira que W est *involutive* si l'idéal $I(W)$ est stable par le crochet de Poisson. Cette définition est motivée par le cas du fibré cotangent à une variété analytique ([GM § III.4]).

Proposition I.4.1.
Soit W une sous-variété affine de $V^{\mathbb{C}}$. Soit W^r la partie non-singulière de W. Si W est involutive, alors pour toute feuille symplectique S de $V^{\mathbb{C}}$ coupant W^r transversalement l'intersection $W^r \cap S$ est une sous-variété co-isotrope de S, c'est-à-dire que pour tout $x \in W^r \cap S$ on a :

$$(T_x(W^r \cap S))^\omega \subset T_x(W^r \cap S), \tag{I.4.1}$$

où l'exposant ω désigne l'orthogonal dans T_xS pour la forme symplectique.

Démonstration. Nous adaptons la démonstration de la proposition 19 de [GM § II I.4]. Soit $x \in W^r \cap S$. Soit P_x le 2-tenseur de Poisson en x, et soit $\widetilde{P}_x \ : T_x^*V^{\mathbb{C}} \to T_xV^{\mathbb{C}}$ l'application linéaire antisymétrique associée, définie par :

$$< \eta,\, \widetilde{P}_x(\xi) >= P_x(\xi,\, \eta). \tag{I.4.2}$$

L'image de $\widetilde{P}_x$ est précisément T_xS.

Lemme I.4.2.
On a l'égalité :

$$T_x(W^r \cap S)^\omega = \widetilde{P}_x\big(T_x(W^r \cap S)^\perp\big), \tag{I.4.3}$$

où l'exposant $\perp$ désigne l'orthogonal d'un sous-espace dans le dual.

Démonstration. Soit $\xi \in T_x(W^r \cap S)^\perp$. Alors pour tout $Y \in T_x(W^r \cap S)$ on a :

$$\omega(\widetilde{P}_x(\xi), Y) = <\xi, Y> = 0, \tag{I.4.4}$$

ce qui montre l'inclusion :

$$\widetilde{P}_x\big(T_x(W^r \cap S)^\perp\big) \subset T_x(W^r \cap S)^\omega.$$

Pour montrer l'inclusion inverse on considère un X dans $T_x(W^r \cap S)^\omega$. C'est l'image par $\widetilde{P}_x$ d'un élément ξ de T_x^*V, et il est immédiat d'après (I.4.4) que ξ appartient à $T_x(W^r \cap S)^\perp$.

•

Fin de la démonstration de la proposition I.4.1 : Soit $X \in T_xS$. Par définition d'une feuille symplectique il existe $\varphi \in A$ telle que X coïncide avec le champ hamiltonien $H_\varphi(x)$. Alors X appartient à $(T_x(W^r \cap S))^\omega$ si et seulement si pour tout $Y \in T_x(W^r \cap S)$ on a :

$$\omega(X, Y) = Y.\varphi(x) = d\varphi(x)(Y) = 0.$$

Maintenant, l'espace B_x des $d\varphi(x)$ où $\varphi \in I(W)$ est l'orthogonal de T_xW^r. Grâce à la condition de transversalité nous pouvons donc écrire :

$$T_x(W^r \cap S)^\perp = (T_xW^r \cap T_xS)^\perp = B_x + (T_xS)^\perp, \tag{I.4.5}$$

Soient donc $X, Y \in T_x(W^r \cap S)^\omega$. D'après (I.4.5) et le lemme I.4.2 il existe $\varphi, \psi \in I(W)$ telles que $X = \widetilde{P}_x(d\varphi(x)) = H_\varphi(x)$ et $Y = H_\psi(x)$. On a alors grâce à l'involutivité :

$$\omega(X, Y) = \{\varphi, \psi\}(x) = 0,$$

Ce qui termine la démonstration.

•

Remarque : on a l'égalité :

$$T_x(W^r \cap S)^\omega = \widetilde{P}_x\big((T_xW^r)^\perp\big). \tag{I.4.7}$$

On a une réciproque partielle à la proposition I.4.1 :

Proposition I.4.3.
Soit W une sous-variété affine de $V^{\mathbb{C}}$. Soit W^r la partie non-singulière de W. Supposons qu'il existe un ensemble Ariski-dense $\mathcal{U}$ de W^r tel que :
1) pour tout $x \in \mathcal{U}$, l'intersection de W^r avec la feuille symplectique S_x passant par x est transverse.
2) $W^r \cap S_x$ est co-isotrope dans S_x.

Alors W est involutive.

Démonstration. On voit facilement que sous les hypothèses de la proposition, si f et g appartiennent à $I(W)$ alors $\{f, g\}$ s'annule sur l'ensemble Zariski-dense $\mathcal{U}$ de W^r, et donc sur W tout entier. Rappelons [V] que même dans le cas algébrique que nous considérons, les feuilles symplectiques ne sont pas en général des sous-variétés algébriques de $V^{\mathbb{C}}$. Un exemple de cette situation est donné au paragraphe III.4.

•

I.5. Variétés caractéristiques

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}$-module topologiquement libre. La *variété caractéristique* $V(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}$ est définie comme l'ensemble des zéros communs de l'annulateur du A-module $M = \mathcal{M}/\nu\mathcal{M}$. On appellera *variété de Poisson caractéristique de* $\mathcal{M}$ et, comme dans [J], on notera $VA(\mathcal{M})$ l'ensemble des zéros communs de l'idéal $\operatorname{Ann}\mathcal{M}/\nu\operatorname{Ann}\mathcal{M}$ de A. Cette terminologie est justifiée au corollaire I.5.3 ci-dessous.

Comme A est un anneau commutatif noethérien, le gradué associé $A[[\nu]]$ de $\mathcal{A}$ est aussi noethérien [B § III.2 corollaire 6]. On peut donc appliquer le théorème d'intégrabilité des variétés caractéristiques de Gabber [G, Theorem I] :

Théorème I.5.1 (Intégrabilité des caractéristiques : O. Gabber).
Supposons que $\mathcal{M}$ soit un $\mathcal{A}$-module finiment engendré, et soit $M = \mathcal{M}/\nu\mathcal{M}$. Alors le radical $J(\mathcal{M})$ de $\operatorname{Ann} M$ est stable par le crochet de Poisson.

Remarque : $J(\mathcal{M})$ est l'idéal des éléments de A qui s' annulent sur la variété caractéristique $V(\mathcal{M})$. Le théorème dit donc que $V(\mathcal{M})$ est involutive.

Théorème I.5.2.
L'ensemble des zéros communs d'un idéal de Poisson est une sous-variété de Poisson de $V^{\mathbb{C}}$.

Démonstration. Soit J un idéal de Poisson de A, et soit $f \in J$. Soit x annulant tous les éléments de J, et soit $y = \phi_t(x)$, où $(\phi_t)_{|t|<\varepsilon}$ est le flot d'un champ de vecteurs hamiltonien $H_g, g \in A$. Par analyticité du flot, on a pour $|t|$ assez petit :

$$(f \circ \phi_t)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\operatorname{ad}^k g.f)(x) t^k, \tag{I.5.1}$$

où le membre de droite est convergent. Or le terme :

$$(\operatorname{ad}^k g.f)(x) = \{g, \{g, \ldots \{g, f\} \ldots\}\}(x)$$

s'annule, puisque J est un idéal de Poisson. Donc $(f \circ \phi_t)(x)$ s'annule pour t assez petit. On en déduit que la feuille symplectique passant par x est entièrement contenue dans l'ensemble des zéros communs de J.

•

Corollaire I.5.3.
La variété de Poisson caractéristique $VA(\mathcal{M})$ d'un $\mathcal{A}$- module topologiquement libre $\mathcal{M}$ est une sous-variété de Poisson de $V^{\mathbb{C}}$.

Démonstration. L'idéal $\operatorname{Ann}\mathcal{M}$ de $\mathcal{A}$ est divisible, et donc d'après la proposition I.2.1 $\operatorname{Ann}\mathcal{M}/\nu\operatorname{Ann}\mathcal{M}$ est un idéal de Poisson de A.

•

Proposition I.5.4.
Pour tout $\mathcal{A}$-module topologiquement libre $\mathcal{M}$ on a l'inclusion :

$$V(\mathcal{M}) \subset VA(\mathcal{M}). \tag{I.5.2}$$

Démonstration. Ce résultat découle naturellement des caractérisations suivantes :

$$\begin{aligned} \operatorname{Ann} M = \operatorname{Ann}(\mathcal{M}/\nu\mathcal{M}) &= \{\varphi_0 \in A/\pi_\nu(\varphi_0) = O(\nu)\} \\ \operatorname{Ann}\mathcal{M}/\nu\operatorname{Ann}\mathcal{M} &= \{\varphi_0 \in A/\exists\varphi = \varphi_0 + \nu\varphi_1 + ... \in \mathcal{A}/\pi_\nu(\varphi) = 0\}. \end{aligned} \tag{I.5.3}$$

Il est clair que le deuxième idéal est contenu dans le premier, d'où l'inclusion inverse des variétés caractéristiques.

•

Remarque : les annulateurs de deux modules topologiquement libres équivalents sont égaux. La variété de Poisson caractéristique $VA(\mathcal{M})$ ne dépend donc que de la classe d'équivalence de $\mathcal{M}$. Il n'en va pas de même de la variété caractéristique $V(\mathcal{M})$.

I.6. Involution et $*$-représentations

A. Cattaneo et G. Felder ont remarqué [CF § 2] que l'algèbre $(\mathcal{A}, \#)$ est naturellement munie d'une involution. Nous adaptons ici leurs arguments, et nous allons montrer que cette involution est également une involution pour l'étoile-produit $*$ de Duflo-Kontsevich. On étend la conjugaison complexe en un automorphisme involutif de $\mathbb{C}[[\nu]]$ en posant simplement $\overline{\nu} = -\nu$. On considère donc ν comme "imaginaire pur", et nous poserons également $\nu = i\hbar$, où $\hbar = \overline{\hbar}$ peut être considéré comme "réel".

Proposition I.6.1.
L'involution semi-linéaire $f \mapsto f^*$ de $\mathcal{A}$ définie par :

$$f^*(\xi) = \overline{f(\overline{\xi})} \tag{I.6.1}$$

est un anti-automorphisme de l'algèbre $(\mathcal{A}, \#)$.

Démonstration. Dans l'expression de l'étoile-produit on peut remplacer le paramètre ν par n'importe quelle série formelle sans terme constant. En particulier on peut remplacer ν par $\hbar = -i\nu$ (qui vérifie alors $\overline{\hbar} = \hbar$). L'étoile-produit # étant défini par des opérateurs bi-différentiels à coefficients réels, on vérifie facilement que l'on a :

$$(f\#_\hbar g)^* = f^*\#_\hbar g^*. \tag{I.6.2}$$

d'où l'on déduit :

$$(f\#_\nu g)^* = f^*\#_{-\nu} g^*. \tag{I.6.3}$$

Enfin, on sait (voir la remarque à la fin du § 2 de [CF]) que l' étoile-produit de Kontsevich vérifie la propriété de parité alternée de ses coefficients, c'est-à-dire :

$$f\#_{-\nu} g = g\#_\nu f. \tag{I.6.4}$$

D'après (I.6.3) on a donc :

$$(f\#_\nu g)^* = g^*\#_\nu f^*, \tag{I.6.5}$$

d'où le résultat.

•

Proposition I.6.2.
L'involution $f \mapsto f^*$ est également un anti-automorphisme de l'algèbre $(\mathcal{A}, *)$ munie de l'étoile-produit de Duflo-Kontsevich. Elle se restreint à A et sa restriction est un (anti-) automorphisme de l'algèbre commutative A.

Démonstration. Soit $D = I + \nu D_1 + \cdots$ l'opérateur différentiel formel qui réalise l'équivalence entre les deux étoile-produits :

$$f * g = D(D^{-1}f\#D^{-1}g). \tag{I.6.6}$$

Cet opérateur d'équivalence D est à coefficients réels, et commute donc avec l'involution $f \mapsto f^*$. L'involution semi-linéaire $f \mapsto f^0$ définie par :

$$f^0 = D[(D^{-1}f)^*] \tag{I.6.7}$$

coïncide donc avec $f \mapsto f^*$. Dans le cadre des variétés de Poisson linéaires (voir § II.1 ci-dessous) on a même l'égalité entre les deux étoile-produits.

L'involution se restreint de manière évidente à A. De plus l'involution respecte $\nu\mathcal{A}$, et l'involution ainsi définie sur $\mathcal{A}/\nu\mathcal{A}$ correspond à cette restriction via l'isomorphisme canonique de A sur $\mathcal{A}/\nu\mathcal{A}$.

•

Soit π une représentation de $(\mathcal{A}, *)$ dans un module topologiquement libre $\mathcal{M} = M[[\nu]]$. A la suite de [Bu-W] on dit que π est une *$*$-représentation* de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{M}$ si on a :

$$< \pi(f)u, v >_\nu = < u, \pi(f)^* v >_\nu, \qquad u, v \in \mathcal{M},\ f \in \mathcal{A} \tag{I.6.8}$$

pour une certaine forme sesquilinéaire $< -, - >_\nu$ hermitienne non-dégénérée (sans hypothèse de positivité) sur $\mathcal{M}$ à valeurs dans $\mathbb{C}[[\nu]]$. On dira que l'$*$-représentation est *unitaire* si de plus cette forme sesquilinéaire est définie positive, c'est-à-dire $< x, x >_\nu > 0$ pour tout $x \in \mathcal{M}$ non nul, l'ordre sur $\mathbb{R}[[\nu]]$ étant l'ordre lexicographique.

Cette forme sesquilinéaire définit par passage au quotient une forme sesquilinéaire sur M à valeurs dans $\mathbb{C}$. Nous supposerons que la forme $< -, - >_\nu$ est *fortement non-dégénérée*, c'est-à-dire que nous supposerons aussi non-dégénérée la forme quotient sur M. Dans ce cas on dira que l'$*$-représentation est fortement non dégénérée. Une représentation fortement non dégénérée et unitaire sera dite fortement unitaire.

Un $\mathcal{A}$-module unitaire (resp. pseudo-unitaire) sera par définition un module topologiquement libre muni d'une représentation unitaire (resp. d'une $*$-représentation) de $\mathcal{A}$. Un $\mathcal{A}$-module fortement unitaire (resp. fortement pseudo-unitaire) sera par définition un module topologiquement libre muni d'une représentation fortement unitaire (resp. d'une $*$-représentation fortement non dégénérée) de $\mathcal{A}$.

Proposition I.6.3.
Soit π une $*$-représentation fortement non-dégénérée de $(\mathcal{A}, *)$ dans un module topologiquement libre $\mathcal{M}$. Alors l'annulateur de $M = \mathcal{M}/\nu\mathcal{M}$ est engendré par un nombre fini d'éléments auto-adjoints de A. Il en est de même de $\operatorname{Ann}\mathcal{M}/\nu \operatorname{Ann}\mathcal{M}$.

Démonstration. Tout élément f de A s'écrit de manière unique :

$$f = f^+ + i f^-, \tag{I.6.9}$$

où f^+ et f^- sont auto-adjoints. On a :

$$f^+ = \frac{1}{2}(f + f^*), \qquad f^- = \frac{1}{2i}(f - f^*). \tag{I.6.10}$$

Grâce à la non-dégénérescence du produit scalaire sur M on voit que si f appartient à $\operatorname{Ann} M$, f^* appartient aussi à $\operatorname{Ann} M$. Soit $\{f_1, \ldots, f_k\}$ un système de générateurs de $\operatorname{Ann} M$. Il est alors clair que $\operatorname{Ann} M$ est engendré par $\{f_1^+, \ldots, f_k^+, f_1^-, \ldots, f_k^-\}$. Le même raisonnement s'applique à $\operatorname{Ann}\mathcal{M}/\nu \operatorname{Ann}\mathcal{M}$, comme on peut le voir en utilisant la deuxième égalité (I.5.3) et la pseudo-unitarité forte de $\mathcal{M}$.

•

Corollaire I.6.4.
Sous les hypothèses ci-dessus, la variété caractéristique $V(\mathcal{M})$ d'un module fortement pseudo-unitaire est réelle, de même que sa variété de Poisson caractéristique $VA(\mathcal{M})$.

Démonstration. La variété caractéristique $V(\mathcal{M})$ est définie par les $2k$ équations :

$$f_j^+(\xi) = f_j^-(\xi) = 0, \ j = 1, \cdots, k. \tag{I.6.11}$$

Or les polynômes $f_j^{\pm}$ sont bien à coefficients réels par définition de l'involution. Le raisonnement pour $VA(\mathcal{M})$ est identique.

•

Remarque 1 : La proposition I.6.3 et le corollaire I.6.4 n'utilisent pas d'hypothèse de positivité sur le produit scalaire. Il faut noter que les notions de non-dégénérescence introduites ici sont différentes de celles introduites dans [Bu-W], qui par ailleurs se placent d'emblée dans le cas unitaire.

Remarque 2 : On notera indifféremment $V(\mathcal{M}) = V(\pi)$ pour la variété caractéristique, et $VA(\mathcal{M}) = VA(\pi)$ pour la variété de Poisson caractéristique.

II. Application au cas des variétés de Poisson linéaires

Nous allons appliquer les résultats précédents aux représentations des algèbres de Lie. L'ingrédient essentiel ici est la spécialisation du paramètre de déformation ν en un imaginaire pur quelconque, ce qui permet d'identifier une représentation fortement unitaire de l'algèbre déformée avec une famille à un paramètre de représentations unitaires d'algèbres de Lie.

Soit $V = \mathbb{R}^d$ une variété de Poisson linéaire. Alors le dual V^* des formes linéaires sur V forme une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de A munie du crochet de Poisson. On voit donc la variété de Poisson V comme le dual $\mathfrak{g}^*$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On a pour $f, g \in A$ et $\xi \in \mathfrak{g}$ [W § 3] :

$$\{f, g\}(\xi) = < \xi, \ [df(\xi), \, dg(\xi)] > .$$

II.1. L'algèbre $(\mathcal{A}, *)$

Il résulte des travaux de B. Shoikhet sur l'annulation des poids associés aux "roues" [FS], [S], que les deux étoile-produits # et $*$ coïncident. L'algèbre $(\mathcal{A}, *)$ est isomorphe à "l'algèbre enveloppante formelle complexifiée" :

$$\mathcal{U}_\nu(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}) = T(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})[[\nu]]/ < x \otimes y - y \otimes x - \nu[x, y] >, \tag{II.1.1}$$

et on a précisément :

$$f * g = \tau^{-1}(\tau f . \tau g). \tag{II.1.2}$$

Ici $\tau \ : \mathcal{A} \to U_\nu(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ est l'isomorphisme de Duflo [D1] :

$$\tau = J(D)^{1/2} \circ \sigma, \tag{II.1.3}$$

où σ est la symétrisation et $J(D)^{1/2}$ est l'opérateur différentiel d'ordre infini à coefficients constants correspondant à la série formelle :

$$J(x)^{1/2} = \Big(\det \frac{\operatorname{sh} \operatorname{ad} \frac{\nu}{2}x}{\operatorname{ad} \frac{\nu}{2}x}\Big)^{1/2}. \tag{II.1.4}$$

Remarque : l'algèbre commutative A est l'algèbre symétrique de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, et on peut spécialiser la valeur du paramètre de déformation ν : en effet pour tout f, g dans A la série en ν définissant $f * g$ comporte un nombre fini de termes [K § 8] : on peut donc voir l'étoile-produit comme une famille de lois non-commutatives $(*_\nu)$ sur A, le paramètre ν parcourant l'ensemble des nombres complexes. Chacune de ces algèbres s'identifie via l'isomorphisme de Duflo τ_ν à l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\nu^{\mathbb{C}}$, d'espace vectoriel sous-jacent $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ mais avec le crochet défini par $[x,y]_\nu = \nu[x,y]$. Pour un paramètre réel $\hbar$ on notera $\mathfrak{g}_\hbar$ l'algèbre de Lie réelle d'espace vectoriel sous-jacent $\mathfrak{g}$ mais avec le crochet défini par $[x,y]_\hbar = \hbar[x,y]$.

II.2. Modules topologiquement libres

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur le corps $\mathbb{C}$. Considérons pour tout $\nu \in \mathbb{C}$ une représentation π_ν de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\nu$ dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel M indépendant de ν . Supposons pour fixer les idées que $\nu \mapsto \pi_\nu(X)$ est entière pour tout $X \in \mathfrak{g}$. En considérant alors ν comme une indéterminée, on peut voir alors ces données comme un $\mathcal{A}$-module $\mathcal{M} = M[[\nu]]$ topologiquement libre.

II.3. Unitarité

Soit $\pi = (\pi_\nu)$ une représentation fortement unitaire (au sens du § I.6) de $\mathcal{A}$ dans un module topologiquement libre $\mathcal{M} = M[[\nu]]$. On pose également $\nu = i\hbar$. La représentation π induit alors par spécialisation du paramètre une représentation $\pi_{i\hbar}$ de $(A, *_{i\hbar})$ dans M pour tout nombre complexe $\hbar$.

Théorème II.3.1.
Pour tout réel $\hbar$ la correspondance :

$$\begin{aligned} \rho_\hbar \ : \mathfrak{g} &\longrightarrow \operatorname{End} M \\ X &\longmapsto -i\pi_{i\hbar}(X) \end{aligned}$$

définit une représentation unitaire de l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}_\hbar$ (au sens des algèbres de Lie, i.e. par des opérateurs antisymétriques) . Réciproquement une famille $(\rho_\hbar)_{\hbar\in\mathbb{R}}$ de représentations unitaires de $\mathfrak{g}_\hbar$ dans un même module M, que l'on suppose entière par rapport au paramètre $\hbar$, définit une représentation fortement unitaire π_ν de $\mathcal{A}$ (au sens du § I.6) par la formule :

$$\pi_\nu(X) = i\rho_{-i\nu}(X) \textit{ pour tout } X \in \mathfrak{g}. \tag{II.3.1}$$

Démonstration. Si $X \in \mathfrak{g}$ on a $X^* = X$. L'unitarité de π_ν implique immédiatement que $\pi_{i\hbar}(X)$ est symétrique. L'opérateur $\rho_\hbar(X)$ est donc bien antisymétrique, et on a pour $X, Y \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned}[\rho_\hbar(X),\, \rho_\hbar(Y)] &= -[\pi_{i\hbar}(X),\, \pi_{i\hbar}(Y)] \\ &= -i\hbar\pi_{i\hbar}([X, Y]) \\ &= \hbar\rho_\hbar([X, Y]), \\ &= \rho_\hbar([X, Y]_\hbar),\end{aligned}$$

d'où la première partie de la proposition. La réciproque est immédiate, en appliquant (II.3.1) pour tout ν imaginaire pur, en prolongeant analytiquement le π_ν ainsi défini à tout $\nu \in \mathbb{C}$ et en appliquant la construction du § II.2.

•

III. Exemples

Nous explicitons ici la variété caractéristique et la variété de Poisson caractéristique dans quelques exemples Poisson-linéaires.

III.1. Le groupe de Heisenberg

Considérons le groupe de Heisenberg $H_{2n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ muni du produit

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + \frac{1}{2}(xy' - x'y)).$$

Son algèbre de Lie $\mathfrak{h}_{2n+1}$ est engendrée par $< X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_n, Z >$ dont les crochets de Lie sont donnés par :

$$[X_i, X_j] = \delta_{ij} Z, \quad i, j = 1, ..., n.$$

Pour $f_\lambda = \lambda Z^* + \sum_{i=1}^n a_i X_i^* + \sum_{i=1}^n b_i Y_i^* \in \mathfrak{h}_{2n+1}^*$, considérons la représentation ρ^λ associée à f_λ par la méthode des orbites.

Cas 1 : Si $\lambda \neq 0$ on peut prendre $f_\lambda = \lambda Z^*$, en effet, la dimension de ρ^λ est infinie et l'orbite associée à f_λ sous l'action coadjointe est $\Omega_{f_\lambda} = \{(\lambda, u, v),\ u, v \in \mathbb{R}^n\}$.
Si on réalise ρ^λ à l'aide de la polarisation $\mathfrak{b} =< Y_1, Y_2, ..., Y_n, Z >$, alors ρ^λ agit sur l'espace $L^2(\mathbb{R}^n)$ et l'on a :

$$\begin{cases} \rho^\lambda(Z) = -i\lambda \\ \rho^\lambda(X_i) = -\frac{\partial}{\partial t_i}, \quad i = 1, ..., n \\ \rho^\lambda(Y_j) = it_j, \quad j = 1, ..., n. \end{cases}$$

Ainsi, la représentation $\rho_\hbar^\lambda$ est définie par les relations :

$$\begin{cases} \rho_\hbar^\lambda(Z) = -i\lambda \\ \rho_\hbar^\lambda(X_i) = -\frac{\partial}{\partial t_i}, \quad i = 1, ..., n \\ \rho_\hbar^\lambda(Y_j) = i\hbar t_j, \quad j = 1, ..., n. \end{cases}$$

Posons $\nu = i\hbar$. Utilisant le théorème II.3.1, on en déduit la représentation de $\mathcal{A}$ associée :

$$\begin{cases} \pi_\nu^\lambda(Z) = \lambda \\ \pi_\nu^\lambda(X_i) = -i\frac{\partial}{\partial t_i}, \quad i = 1, ..., n \\ \pi_\nu^\lambda(Y_j) = -i\nu t_j, \quad j = 1, ..., n. \end{cases}$$

L'annulateur de π_ν^λ est donc engendré par $Z - \lambda$, et donc :

$$VA(\pi_\nu^\lambda) = \Omega_{f_\lambda}.$$

Par suite,

$$\begin{cases} \pi_0^\lambda(Z) = \lambda \\ \pi_0^\lambda(X_i) = -i\frac{\partial}{\partial t_i}, \quad i = 1, ..., n \\ \pi_0^\lambda(Y_j) = 0, \quad j = 1, ..., n. \end{cases}$$

On en déduit alors que $\mathrm{Ann}(\pi_0^\lambda)$ est engendré par $< Z - \lambda,\ Y_j, j = 1, ..., n >$.
Il vient alors que :

$$\begin{aligned} V(\pi_\nu^\lambda) &= \{l \in \mathfrak{h}_{2n+1}^* / l(Z - \lambda) = 0 \text{ et } l(Y_j) = 0,\ j = 1, ..., n\} \\ &= \lambda Z^* \oplus_{i=1}^n \mathbb{R} X_i^* = f_\lambda + \mathfrak{b}^\perp. \end{aligned}$$

Un calcul analogue montre que si on réalise ρ^λ à l'aide de la polarisation $\mathfrak{b}' =< X_1, ..., X_n, Z >$, alors on a aussi que $V(\pi_\nu^\lambda) = f_\lambda + \mathfrak{b}'^\perp$ et donc on voit clairement que $V(\pi_\nu^\lambda)$ dépend de la réalisation de π^λ.

Cas 2 : Si $\lambda = 0$, alors, l'orbite Ω_{f_0} se réduit au point $\{f_0\}$ et la polarisation associée à f_0 est l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}_{2n+1}$ toute entière. Ainsi,

$$\rho^0(X) = -if_0(X), \quad \text{pour tout } X \in \mathfrak{h}_{2n+1}.$$

Dans ce cas, on a que : $\pi_\nu^0(X) = \pi_0^0(X)$, pour tout $X \in \mathfrak{h}_{2n+1}$. On en déduit alors que l'annulateur de π_ν^0 est l'idéal engendré par $\{X - f_0(X),\ X \in \mathfrak{h}_{2n+1}\}$. Il s'ensuit alors que

$$\begin{aligned} V(\pi_\nu^0) &= \{l \in \mathfrak{h}_{2n+1}^* / l(X - f_0(X)) = 0,\ \forall X \in \mathfrak{h}_{2n+1}\} \\ &= \{f_0\}, \end{aligned}$$

et de même, $VA(\pi_\nu^0) = \{f_0\}$.

III.2. L'algèbre de Lie filiforme de pas n

Considérons le groupe de Lie nilpotent filiforme de pas n, G_n d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_n$ de dimension $n + 1$ muni d'une base de Jordan-Hölder $(X_1, ..., X_{n+1})$ avec

$$[X_{n+1}, X_j] = X_{j-1}, \quad j = 2, ..., n.$$

Soit $(X_1^*, \ldots, X_{n+1}^*)$ la base duale de $\mathfrak{g}^*$. Le centre de $\mathfrak{g}$ est engendré par le vecteur X_1. Soit $l = l_1 X_1^* + \cdots + l_{n+1} X_{n+1}^* \in \mathfrak{g}^*$ avec $l_1 \neq 0$. Alors, $\mathfrak{b}(l) = \mathrm{Vect}\{X_1, ..., X_n\}$ est un idéal abélien de $\mathfrak{g}_n$ qui polarise l.

Comme l'ensemble indice de Pukanszky est $\{2, n+1\}$, sans perte de généralités, on peut supposer que $l_2 = l_{n+1} = 0$ (voir [BBR]). La représentation unitaire et irréductible $\rho = \rho_l$ associée à l se réalise alors sur $L^2(\mathbb{R})$ par :

$$\begin{cases} \rho(X_{n+1}) = -\dfrac{\partial}{\partial t} \\ \rho(X_1) = -il_1 \\ \rho(X_2) = itl_1 \\ \rho(X_3) = -i(l_3 + \dfrac{1}{2}t^2 l_1) \\ . \\ . \\ . \\ \rho(X_n) = -i(l_n - l_{n-1}t + \dfrac{1}{2}l_{n-2}t^2 + ... + (-1)^{n-3}\dfrac{l_3}{(n-3)!}t^{n-3} + (-1)^{n-1}\dfrac{l_1}{(n-1)!}t^{n-1}). \end{cases}$$

Il s'ensuit alors que la représentation $\rho_\hbar$ est déterminée par :

$$\begin{cases} \rho_\hbar(X_{n+1}) = -\dfrac{\partial}{\partial t} \\ \rho_\hbar(X_1) = -il_1 \\ \rho_\hbar(X_2) = +i\hbar t l_1 \\ \rho_\hbar(X_3) = -i(l_3 + \dfrac{1}{2}\hbar^2 t^2 l_1) \\ . \\ . \\ . \\ \rho_\hbar(X_n) = -i(l_n - l_{n-1}\hbar t + \dfrac{1}{2}l_{n-2}\hbar^2 t^2 + ... + \dfrac{l_3}{(n-3)!}(-\hbar t)^{n-3} + \dfrac{l_1}{(n-1)!}(-\hbar t)^{n-1}), \end{cases}$$

et par suite, en appliquant le théorème II.3.1. on obtient :

$$\begin{cases} \pi_\nu(X_{n+1}) = -i\dfrac{\partial}{\partial t} \\ \pi_\nu(X_1) = l_1 \\ \pi_\nu(X_2) = +i\nu t l_1 \\ \pi_\nu(X_3) = l_3 - \dfrac{1}{2}\nu^2 t^2 l_1 \\ . \\ . \\ . \\ \pi_\nu(X_n) = l_n + i\nu l_{n-1}t - \dfrac{1}{2}\nu^2 l_{n-2}t^2 + ... + (i\nu)^{n-3}\dfrac{l_3}{(n-3)!}t^{n-3} + (i\nu)^{n-1}\dfrac{l_1}{(n-1)!}t^{n-1}. \end{cases}$$

Faisant $\nu = 0$ on obtient donc :

$$\begin{cases} \pi_0(X_{n+1}) = -i\dfrac{\partial}{\partial t} \\ \pi_0(X_1) = l_1 \\ \pi_0(X_2) = 0 \\ \pi_0(X_3) = l_3 \\ . \\ . \\ . \\ \pi_0(X_n) = l_n. \end{cases}$$

En remarquant que $\mathrm{Ann}(\pi_0)$ est engendré par $< X_1 - l_1, X_2, X_3 - l_3, ..., X_n - l_n >$, il vient que pour $f = (f_1, ..., f_{n+1}) \in \mathfrak{g}^*$, $f \in V(\pi_\nu)$ si et seulement si $f \in l + \mathfrak{b}(l)^\perp$. D'autre part on voit que l'annulateur de π_ν est engendré par les $v_k, k = 1, \dots, n$, avec :

$$v_k = X_k - l_k - \frac{l_{k-1}}{l_1}X_2 - \frac{l_{k-2}}{2l_1^2}X_2^2 - \cdots - \frac{l_3}{(k-3)!l_1^{k-3}}X_2^{k-3} - \frac{1}{(k-1)!l_1^{k-2}}X_2^{k-1}.$$

La variété de Poisson caractéristique $VA(\pi_\nu)$ est donc égale à l'orbite coadjointe Ω_l.

III.3. L'algèbre de Lie du groupe affine de la droite :

Considérons le groupe de Lie complétement résoluble "$aX + b$" défini par
$G = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ a, b \in \ \mathbb{R} \ \text{ et } a > 0\}$. Son algèbre de Lie est $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X \oplus \mathbb{R}Y$,
où $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et dont le crochet de Lie est donné par $[X, Y] = Y$.

Ce groupe possède deux représentations unitaires et irréductibles ρ_+ et ρ_- associées respectivement aux formes linéaires Y^* et $-Y^*$. Ces repésentations sont définies par :

$$\begin{cases} \rho_+(X) = -\frac{d}{dx} \\ \pi_+(Y) = -ie^{-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \rho_-(X) = -\frac{d}{dx} \\ \rho_-(Y) = ie^{-x}. \end{cases}$$

Alors, les expressions des représentations $\rho_{+,\hbar}$ et $\rho_{-,\hbar}$ sont données respectivement par :

$$\begin{cases} \rho_{+,\hbar}(X) = -\frac{d}{dx} \\ \rho_{+,\hbar}(Y) = -ie^{-\hbar x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \rho_{-,\hbar}(X) = -\frac{d}{dx} \\ \rho_{-,\hbar}(Y) = ie^{-\hbar x}. \end{cases}$$

Les annulateurs des représentations $\pi_{+\nu}$ et $\pi_{-\nu}$ sont réduits au singleton $\{0\}$ et par conséquent, les ensembles $VA(\pi_{+,\nu})$ et $VA(\pi_{-,\nu})$ sont égaux à $\mathfrak{g}^*$. En prenant $\nu = 0$, il vient que les annulateurs de $\pi_{+,0}$ et$\pi_{-,0}$ sont respectivement engendrés par $\langle Y - 1\rangle$ et $\langle Y + 1\rangle$. On obtient alors que :

$$\begin{aligned} V(\pi_{+,\nu}) &= \{l = xX^* + yY^* \in \mathfrak{g}^* \ / \ \forall \varphi \in \mathrm{Ann}\, \pi_{+,0}, \ \varphi(l) = 0\} \\ &= \{l = xX^* + yY^* \in \mathfrak{g}^* \ / y - 1 = 0\} = Y^* + \mathfrak{b}^\perp \end{aligned}$$

où $\mathfrak{b} = \mathbb{R}Y$ est la polarisation asoociée aux formes Y^* et $-Y^*$. De même,

$$V(\pi_{-,\nu}) = \{l = xX^* + yY^* \in \mathfrak{g}^* \ /y + 1 = 0\} = -Y^* + \mathfrak{b}^\perp.$$

Remarque : Pour ces deux représentations, la variété de Poisson caractéristique coïncide avec l'adhérence de Zariski de l'orbite coadjointe associée.

III.4. Un exemple résoluble exponentiel de dimension 3:

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie engendrée par les trois vecteurs $\{A, X, Y\}$ dont les crochets de Lie sont donnés par: $[A, X] = X - Y$, $[A, Y] = X + Y$ et soit $G = \exp \mathfrak{g}$. Alors, G est un groupe de Lie exponentiel non complètement résoluble.
Soit $f = xX^* + yY^* + aA^* \in \mathfrak{g}^*$. Si $x^2 + y^2 = 0$, alors, l'orbite de f est réduite au singleton $\{f\}$. Ainsi, le calcul précédent de l'exemple III.1. montre que dans ce cas, $V(\pi_{f,\nu}) = \{f\}$. Dans le cas où $x^2 + y^2 \neq 0$, la sous-algèbre $\mathfrak{b}$ engendrée par $< X, Y >$ est une polarisation de f vérifiant la condition de Pukanszky. Soit alors χ_f le caractère défini sur $B = \exp \mathfrak{b}$ par $\chi_f(\exp U) = e^{-if(U)}$ et $\rho_f = \mathrm{Ind}_B^G \chi_f$. On sait [ABLS] qu'il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $\rho = \rho_\theta = \rho_{f_\theta}$ où $f_\theta = \cos\theta X^* + \sin\theta Y^*$. L'orbite Ω associée à ρ est paramétrisée par

$$\Omega = \{sA^* + e^{-t}\cos(t+\theta)X^* + e^{-t}\sin(t+\theta)Y^*, \quad s, t \in \ \mathbb{R}\ \}.$$

D'autre part, on a que :

$$\begin{cases} \rho(A) = -\frac{d}{dt} \\ \rho(X) = -ie^{-t}\cos(\theta + t) \\ \rho(Y) = -ie^{-t}\sin(\theta + t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \rho_\hbar(A) = -\frac{d}{dt} \\ \rho_\hbar(X) = -ie^{-\hbar t}\cos(\theta + \hbar t) \\ \rho_\hbar(Y) = -ie^{-\hbar t}\sin(\theta + \hbar t). \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{cases} \pi_\nu(A) = -i\frac{d}{dt} \\ \pi_\nu(X) = e^{i\nu t}\cos(\theta - i\nu t) \\ \pi_\nu(Y) = e^{i\nu t}\sin(\theta - i\nu t). \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \pi_0(A) = -i\frac{d}{dt} \\ \pi_0(X) = \cos\theta \\ \pi_0(Y) = \sin\theta. \end{cases}$$

Il s'ensuit alors que l'annulateur de π_ν est réduit à $\{0\}$, et donc :

$$VA(\pi_\nu) = \mathfrak{g}^*.$$

La variété de Poisson caractéristique coïncide donc ici aussi avec l'adhérence de Zariski de l'orbite coadjointe associée. Pour le voir il suffit de se convaincre que la spirale logarithmique est Zariski-dense dans le plan, en remarquant que toute droite passant par l'origine intersecte cette spirale en une infinité de points. Par ailleurs l'annulateur de π_0 est l'idéal engendré par les deux générateurs $\{X - \cos\theta, Y - \sin\theta\}$. Soit $B = \exp \mathfrak{b}$. La représentation ρ agit sur l'espace $L^2(G/B)$ qui est isomorphe à $L^2(\exp \mathbb{R}A)$. On a alors,

$$\begin{aligned} V(\pi_\nu) &= \{l \in \mathfrak{g}^* \ /l(X - \cos\theta) = 0 \ \text{ et } \ l(Y - \sin\theta) = 0\} \\ &= f_\theta + \mathbb{R}A^* = f_\theta + \mathfrak{b}^\perp. \end{aligned}$$

III.5. L'algèbre de Lie du groupe diamant

C'est l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$ de dimension 4 de base (H, P, Q, E) avec les crochets :

$$[H, P] = -Q, \qquad [H, Q] = P, \qquad [P, Q] = E,$$

les autres crochets étant nuls. Notre référence est M. Vergne dans [BCD Chap. VIII § 1.4]. Si $X = aH + bP + cQ + dE$ on calcule facilement la matrice de $\operatorname{ad} X$ dans cette base :

$$\operatorname{ad} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & 0 & a & 0 \\ b & -a & 0 & 0 \\ 0 & -c & b & 0 \end{pmatrix}.$$

On a également :

$$(\operatorname{ad} X)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ ab & -a^2 & 0 & 0 \\ ac & 0 & -a^2 & 0 \\ b^2 + c^2 & -ab & -ac & 0 \end{pmatrix},$$

ainsi que l'égalité :

$$(\operatorname{ad} X)^3 = -a^2(\operatorname{ad} X).$$

On en déduit l'expression explicite :

$$\exp(\operatorname{ad} X) = I + \frac{\sin a}{a} \operatorname{ad} X + \frac{1 - \cos a}{a^2} (\operatorname{ad} X)^2.$$

Après transposition et passage à l'inverse on en déduit la matrice de $\exp(\operatorname{ad}^* X)$ dans la base duale :

$$\exp(\operatorname{ad}^* X) = \begin{pmatrix} 1 & c\frac{\sin a}{a} + b\frac{1-\cos a}{a} & -b\frac{\sin a}{a} + c\frac{1-\cos a}{a} & (b^2 + c^2)\frac{1-\cos a}{a^2} \\ 0 & \cos a & \sin a & c\frac{\sin a}{a} - b\frac{1-\cos a}{a} \\ 0 & -\sin a & \cos a & -b\frac{\sin a}{a} - c\frac{1-\cos a}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'action coadjointe de $\exp X$ sur un élément $\xi = \mu H^* + \beta P^* + \gamma Q^* + \lambda E^*$ s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \operatorname{Ad}^*(\exp X).\xi = \Big(\mu + (c\frac{\sin a}{a} + b\frac{1 - \cos a}{a})\beta + (-b\frac{\sin a}{a} + c\frac{1 - \cos a}{a})\gamma \\ + (b^2 + c^2)\frac{1 - \cos a}{a^2}\lambda\Big) H^* \\ + \Big((\cos a)\beta + (\sin a)\gamma + (c\frac{\sin a}{a} - b\frac{1 - \cos a}{a})\lambda\Big) P^* \\ + \Big((-\sin a)\beta + (\cos a)\gamma + (-b\frac{\sin a}{a} - c\frac{1 - \cos a}{a})\lambda\Big) Q^* \\ + \lambda E^*. \end{aligned}$$

On note ξ_i la i-ème coordonnée de $\mathrm{Ad}^*(\exp X).\xi$. La dernière coordonnée ξ_4 est ici invariante sous l'action coadjointe. Deux cas sont à considérer :

Premier cas: $\xi_4 = \lambda = 0$. L'expression $\xi_2^2 + \xi_3^2 = \beta^2 + \gamma^2$ est invariante sur le sous-espace défini par $\xi_4 = 0$. On voit alors que les orbites coadjointes correspondantes sont les cylindres d'axe H^* et chacun des points de cet axe, suivant que $\xi_2^2 + \xi_3^2$ est strictement positif ou s'annule. Ce sont exactement les orbites coadjointes du quotient de $\mathfrak{g}$ par son centre (l'algèbre de Lie du groupe des déplacements du plan) : nous traitons cet exemple au paragraphe suivant.

Deuxième cas : $\xi_4 = \lambda \neq 0$. Faisant agir $\exp Y$ sur ξ avec $Y = bP + cQ$ on obtient :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}^*(\exp Y).\xi = &\big(\mu + c\beta + b\gamma + (b^2+c^2)\lambda\big)H^*\\ &+ (\beta + c\lambda)P^*\\ &+ (\gamma - b\lambda)Q^*\\ &+ \lambda E^*.\end{aligned}$$

En choisissant bien b et c on peut donc se ramener au cas où $\beta = \gamma = 0$, ce que nous supposerons. La formule explicite donnant $\mathrm{Ad}^*(\exp X).\xi$ se simplifie alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}^*(\exp X).\xi = &\Big(\mu + (b^2+c^2)\frac{1-\cos a}{a^2}\lambda\Big)H^*\\ &+ (c\frac{\sin a}{a} - b\frac{1-\cos a}{a})\lambda P^*\\ &+ (-b\frac{\sin a}{a} - c\frac{1-\cos a}{a})\lambda Q^*\\ &+ \lambda E^*.\end{aligned}$$

On voit que l'on a :

$$\begin{aligned}\xi_1 - \frac{{\xi_2}^2 + {\xi_3}^2}{2\xi_4} &= \mu\\ \xi_4 &= \lambda.\end{aligned} \tag{III.5.1}$$

Les orbites coadjointes dans ce cas-là sont donc les paraboloïdes de révolution $\Omega_{\lambda,\mu}$ d'axe H^* donnés par les équations III.5.1.

Soit φ la fonction entière d'une variable complexe définie par :

$$\varphi(z) = \frac{\operatorname{sh} z/2}{z/2}.$$

Il est clair que la matrice de $\varphi^{1/2}(\operatorname{ad} X)$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ * & \varphi^{1/2}(ia) & 0 & 0\\ * & * & \varphi^{1/2}(ia) & 0\\ * & * & * & 1\end{pmatrix},$$

d'où avec les notations du § II.1 :

$$J(X)^{1/2} = \frac{\sin(\nu a/2)}{\nu a/2}.$$

L'isomorphisme de Duflo est donc donné par :

$$\tau = \frac{\sin(\nu\partial_1/2)}{\nu\partial_1/2} \circ \sigma,$$

où ∂_1 désigne l'opérateur de dérivée partielle $\dfrac{\partial}{\partial\xi_1}$ dans $\mathfrak{g}^*$, et où σ désigne la symétrisation. Compte tenu des équations III.5.1 on voit facilement que l'algèbre $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ des polynômes invariants sur $\mathfrak{g}^*$ est engendrée par C_1 et C_2, avec $C_1(\xi) = \xi_4$ et $C_2(\xi) = \xi_2^2 + \xi_3^2 - 2\xi_1\xi_4$. L'orbite coadjointe $\Omega_{\lambda,\mu}$ définie par III.5.1 est donnée de façon équivalente par les équations :

$$C_1(\xi) = \lambda, \qquad C_2(\xi) = -2\lambda\mu. \tag{III.5.2}$$

L'opérateur $J(D)^{1/2}$ agit par l'identité sur ces deux générateurs, et donc l'isomorphisme de Duflo τ se ramène à appliquer la symétrisation sur les deux générateurs. Nous noterons encore un peu abusivement C_1 et C_2 les deux Casimirs $\tau(C_1)$ et $\tau(C_2)$. On a explicitement :

$$C_1 = E, \qquad C_2 = P^2 + Q^2 - 2EH.$$

Nous utilisons maintenant les notations du § II. Pour tout réel $\hbar$ il existe une famille de représentations unitaires irréductibles $\rho_{\lambda,\mu;\hbar}$ de $\mathfrak{g}_\hbar$ définies sur l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (muni du produit scalaire de $L^2(\mathbb{R})$) par :

$$\begin{aligned}
\rho_{\lambda,\mu;\hbar}(H) &= -i(-\frac{1}{2\lambda}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}\lambda\hbar^2x^2 + \mu) \\
\rho_{\lambda,\mu;\hbar}(P) &= -\frac{d}{dx} \\
\rho_{\lambda,\mu;\hbar}(Q) &= i\lambda\hbar x \\
\rho_{\lambda,\mu;\hbar}(E) &= -i\lambda.
\end{aligned}$$

Cette représentation est unitairement équivalente à celle que l'on obtient par induction holomorphe à partir du point $\mu H^* + \lambda E^*$ et de la polarisation complexe $\mathfrak{h}$ engendrée par $H, E, P + iQ$ ([BCD] § V.4 et VIII.1.4.4). Posant $\nu = i\hbar$ et appliquant le théorème II.3.1 on en déduit une représentation unitaire $\pi_{\lambda,\mu;\nu}$ de l'algèbre déformée $\mathcal{A}$ dans le module topologiquement libre $\mathcal{S}(\mathbb{R})[[\nu]]$:

$$\begin{aligned}
\pi_{\lambda,\mu;\nu}(H) &= -\frac{1}{2\lambda}\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{2}\lambda\nu^2x^2 + \mu \\
\pi_{\lambda,\mu;\nu}(P) &= -i\frac{d}{dx} \\
\pi_{\lambda,\mu;\nu}(Q) &= i\lambda\nu x \\
\pi_{\lambda,\mu;\nu}(E) &= \lambda.
\end{aligned}$$

En annulant le paramètre ν on voit que l'annulateur $\operatorname{Ann}\pi_{\lambda,\mu;0}$ est l'idéal de $S(\mathfrak{g})$ engendré par $E-\lambda$, Q et $C_2+2\lambda\mu$. On en déduit que la variété caractéristique $V(\pi_{\lambda,\mu;\nu})$ est définie par les équations :

$$\xi_2^2+\xi_3^2-2\xi_1\xi_4=-2\lambda\mu, \qquad \xi_4=\lambda, \qquad \xi_3=0.$$

La variété caractéristique $V(\pi_{\lambda,\mu;\nu})$ est donc une génératrice du paraboloïde de révolution $\Omega_{\lambda,\mu}$. La non-existence de polarisations réelles se traduit ici par le fait que la variété caractéristique n'est pas un sous-espace affine (cf. § IV.2).

L'annulateur $\operatorname{Ann}\pi_{\lambda,\mu;\nu}$ est quant à lui engendré dans $\mathcal{A}$ par $C_1-\lambda$ et $C_2+2\lambda\mu$. L'idéal $\operatorname{Ann}\pi_{\lambda,\mu;\nu}/\nu\operatorname{Ann}\pi_{\lambda,\mu;\nu}$ est donc engendré dans $S(\mathfrak{g})$ par $C_1-\lambda$ et $C_2+2\lambda\mu$ également. On en déduit que la variété de Poisson caractéristique $VA(\pi_{\lambda,\mu;\nu})$ coïncide avec l'orbite coadjointe $\Omega_{\lambda,\mu}$.

III.6. L'algèbre de Lie du groupe des déplacements du plan

C'est l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$ de dimension 3 de base (H,P,Q) avec les crochets :

$$[H,P]=-Q, \qquad [H,Q]=P,$$

les autres crochets étant nuls. Nous nous référons encore à l'article de M. Vergne [BCD Chap. VIII § 1.3], ainsi qu'à [AM]. Si $X=aH+bP+cQ$ on calcule facilement la matrice de $\operatorname{ad}X$ dans cette base :

$$\operatorname{ad}X=\begin{pmatrix}0&0&0\\-c&0&a\\b&-a&0\end{pmatrix}.$$

On a également :

$$(\operatorname{ad}X)^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\ab&-a^2&0\\ac&0&-a^2\end{pmatrix},$$

ainsi que l'égalité :

$$(\operatorname{ad}X)^3=-a^2(\operatorname{ad}X).$$

On en déduit la même expression explicite que dans l'exemple précédent :

$$\exp(\operatorname{ad}X)=I+\frac{\sin a}{a}\operatorname{ad}X+\frac{1-\cos a}{a^2}(\operatorname{ad}X)^2.$$

Après transposition et passage à l'inverse on en déduit la matrice de $\exp(\operatorname{ad}^*X)$ dans la base duale :

$$\exp(\operatorname{ad}^*X)=\begin{pmatrix}1&c\frac{\sin a}{a}+b\frac{1-\cos a}{a}&-b\frac{\sin a}{a}+c\frac{1-\cos a}{a}\\0&\cos a&\sin a\\0&-\sin a&\cos a\end{pmatrix}.$$

L'action coadjointe de $\exp X$ sur un élément $\xi = \mu H^* + \beta P^* + \gamma Q^*$ s'écrit donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}^*(\exp X).\xi = &\Big(\mu + (c\frac{\sin a}{a} + b\frac{1-\cos a}{a})\beta + (-b\frac{\sin a}{a} + c\frac{1-\cos a}{a})\gamma\Big)H^* \\ &+ \Big((\cos a)\beta + (\sin a)\gamma\Big)P^* \\ &+ \Big((-\sin a)\beta + (\cos a)\gamma\Big)Q^*.\end{aligned}$$

Les orbites coadjointes sont donc les points μH^* et les cylindres $\Omega_r, r > 0$ d'axe H^* et de rayon r, définis par l'équation $\xi_2^2 + \xi_3^2 = r^2$.

L'isomorphisme de Duflo est encore donné par :

$$\tau = \frac{\sin(\nu\partial_1/2)}{\nu\partial_1/2} \circ \sigma,$$

où ∂_1 désigne l'opérateur de dérivée partielle $\dfrac{\partial}{\partial\xi_1}$ dans $\mathfrak{g}^*$, et où σ désigne la symétrisation. L'algèbre des invariants admet $C\ : \xi \mapsto \xi_2^2 + \xi_3^2$ comme seul générateur, et l'isomorphisme de Duflo consiste encore à appliquer l'identité sur ce générateur. Le Casimir $\tau(C)$ que nous notons encore C s'écrit :

$$C = P^2 + Q^2.$$

On considère pour $r > 0, \hbar \neq 0$ et $0 \leq \lambda < 1$ la famille $\rho_{r,\lambda;\hbar}$ de représentations unitaires irréductibles de $\mathfrak{g}_\hbar$ définies par :

$$\begin{aligned}\rho_{r,\lambda;\hbar}(H) &= -\hbar\frac{d}{d\theta} \\ \rho_{r,\lambda;\hbar}(P) &= ir\sin(\theta) \\ \rho_{r,\lambda;\hbar}(Q) &= ir\cos(\theta)\end{aligned}$$

sur l'espace C_λ des fonctions φ entières sur $\mathbb{R}$ telles que $\varphi(x + 2\pi) = e^{2i\pi\lambda}\varphi(x)$. Posant $\nu = i\hbar$ et appliquant le théorème II.3.1 on a donc une famille de représentations unitaires de $\mathcal{A}$ dans $C_\lambda[[\nu]]$:

$$\begin{aligned}\pi_{r,\lambda;\nu}(H) &= -\nu\frac{d}{d\theta} \\ \pi_{r,\lambda;\nu}(P) &= -r\sin(\theta) \\ \pi_{r,\lambda;\nu}(Q) &= -r\cos(\theta).\end{aligned}$$

En annulant ν on voit que l'annulateur $\mathrm{Ann}\,\pi_{r,\lambda;0}$ est engendré par H et par $P^2 + Q^2 - r^2$. La variété caractéristique $V(\pi_{r,\lambda;\nu})$ est donc le cercle de cote nulle dans Ω_r défini par les équations $\xi_2^2 + \xi_3^2 = r^2$ et $\xi_1 = 0$. Elle est donc indépendante du paramètre supplémentaire λ. L'annulateur $\mathrm{Ann}\,\pi_{r,\lambda;\nu}$ est quant à lui engendré dans $\mathcal{A}$ par $C - r^2$. L'idéal $\mathrm{Ann}\,\pi_{r,\lambda;\nu}/\nu\,\mathrm{Ann}\,\pi_{r,\lambda;\nu}$ est donc également engendré par $C - r^2$ dans $S(\mathfrak{g})$. La variété de Poisson caractéristique $VA(\pi_{r,\lambda;\nu})$ est donc égale à l'orbite coadjointe Ω_r.

Soit $C^\omega(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions entières sur $\mathbb{R}$, et soit R l'opérateur sur $C^\omega(\mathbb{R})[[\nu]]$ défini par :

$$R\varphi(\theta) = \nu\varphi(\nu\theta).$$

Cet opérateur est injectif. Soit $\widetilde{C}_\lambda = R(C_\lambda[[\nu]])$, et soit $\widetilde{\pi}_{r,\lambda;\nu}$ la représentation de $\mathcal{A}$ sur $\widetilde{C}_\lambda$ définie par :

$$\widetilde{\pi}_{r,\lambda;\nu}(X) = R \circ \pi_{r,\lambda;\nu} \circ R^{-1}.$$

Les deux représentations sont équivalentes par construction, et on a :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\pi}_{r,\lambda;\nu}(H) &= -\frac{d}{d\theta} \\
\widetilde{\pi}_{r,\lambda;\nu}(P) &= -r\sin(\nu\theta) \\
\widetilde{\pi}_{r,\lambda;\nu}(Q) &= -r\cos(\nu\theta).
\end{aligned}$$

L'annulateur de $\widetilde{\pi}_{r,\lambda;0}$ est engendré par P et par $Q+r$. La variété caractéristique $V(\widetilde{\pi}_{r,\lambda;\nu})$ est donc cette fois-ci la génératrice du cylindre Ω_r définie par les équations $\xi_3 = -r$ et $\xi_2 = 0$.

III.7. Le cas semi-simple : modules de Verma

Soit $\mathfrak{g}_1$ une algèbre de Lie semi-simple complexe. La forme de Killing définie par :

$$(X, Y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, X \circ \mathrm{ad}\, Y)$$

est non dégénérée et invariante par l'action adjointe. Elle induit donc un isomorphisme linéaire κ de $\mathfrak{g}_1$ sur son dual $\mathfrak{g}_1^*$, défini par :

$$\kappa(X) = (X, -),$$

qui entrelace les représentations adjointe et coadjointe. Soit H un élément semi-simple de $\mathfrak{g}_1$, soit $\mathfrak{h}_1$ une sous-algèbre de Cartan contenant H, soit Δ le système de racines associé, et soit Δ_+ l'ensemble des racines positives provenant du choix d'un ordre sur $\mathfrak{h}_1^*$. On désignera par W le groupe de Weyl associé à ces données.

La forme de Killing restreinte à $\mathfrak{h}_1$ est non dégénérée. Soit $\lambda = \kappa^{-1}(H) \in \mathfrak{g}_1^*$. La décomposition radicielle de $\mathfrak{g}_1$ s'écrit :

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{n}_{1-} \oplus \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{n}_{1+},$$

où $\mathfrak{n}_{1\pm} = \bigoplus_{\alpha\in\pm\Delta_+} \mathfrak{g}_1^\alpha$. Soit $\delta \in \mathfrak{h}_1^*$ la demi-somme des racines positives. La sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_1$ est orthogonale à $\mathfrak{n}_{1+}$ et $\mathfrak{n}_{1-}$ pour la forme de Killing, ce qui permet de montrer que $\kappa^{-1}(H) \in \mathfrak{g}_1^*$ s'annule sur $\mathfrak{n}_{1\pm}$. On identifiera donc $\mathfrak{h}_1^*$ à l'orthogonal de $\mathfrak{n}_{1-} \oplus \mathfrak{n}_{1+}$ dans $\mathfrak{g}_1^*$ en prolongeant trivialement à $\mathfrak{n}_{1-} \oplus \mathfrak{n}_{1+}$ les formes linéaires sur $\mathfrak{h}_1$. Si H est régulier le stabilisateur de λ pour l'action coadjointe est égal à $\mathfrak{h}_1$, et la sous-algèbre résoluble $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{n}_{1+}$ est une polarisation résoluble en λ.

Le cadre ci-dessus s'applique aux algèbres de Lie $(\mathfrak{g}_\nu)_{\nu\in\mathbb{C}-\{0\}}$ (avec les notations du § II.2), qui ont toutes le même espace vectoriel sous-jacent que nous noterons $\mathfrak{g}$. Nous continuerons à identifier $\mathfrak{g}$ et son dual avec la forme de Killing de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1$ (indépendamment de ν) et non pas avec celle de $\mathfrak{g}_\nu$. La décomposition radicielle :

$$\mathfrak{g}_\nu = \mathfrak{n}_{\nu-} \oplus \mathfrak{h}_\nu \oplus \mathfrak{n}_{\nu+}$$

est indépendante de ν en ce qui concerne les espaces vectoriels sous-jacents que nous noterons $\mathfrak{n}_-$, $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{n}_+$. De même, on note $\mathfrak{b}_+ = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ et :

$$\mathfrak{g}^\alpha = \{X \in \mathfrak{g}, \forall A \in \mathfrak{h}, [A, X]_\nu = \nu\alpha(A)X\}.$$

Le système de racines associé à $\mathfrak{g}_\nu$ est donc $\nu\Delta$, et $\mathfrak{g}^\alpha$ coïncide pour tout ν avec le sous-espace radiciel de $\mathfrak{g}_\nu$ correspondant à $\nu\alpha$. Soit M_λ^ν le module de Verma associé à λ pour $\mathfrak{g}_\nu$. On a :

$$M_\lambda^\nu = \mathcal{U}(\mathfrak{g}_\nu) \underset{\mathcal{U}(\mathfrak{b}_{\nu+})}{\otimes} \mathbb{C},$$

où un élément $A+Y$ de $\mathfrak{b}_{\nu+} = \mathfrak{h}_\nu \oplus \mathfrak{n}_{\nu+}$ agit sur $\mathbb{C}$ via la multiplication par $(\lambda - \nu\delta)(A)$, et où l'action de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\nu)$ est donnée par la multiplication à gauche. Lorsqu'on regarde ν comme une indéterminée ce module est topologiquement libre : il s'identifie en effet à $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_{\nu-})$, et donc à $S(\mathfrak{n}_-)[[\nu]]$ via symétrisation. On a la décomposition en sous-espaces de poids sous l'action de $\mathfrak{h}_\nu$:

$$M_\lambda^\nu = \bigoplus_{\beta \in Q_+} (M_\lambda^\nu)_{\lambda - \nu\delta - \nu\beta},$$

où Q_+ désigne l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients entiers positifs d'éléments de Δ_+. En annulant ν on voit que tout $A \in \mathfrak{h}_0$ agit sur M_λ^0 par multiplication par $\lambda(A)$, que l'action de $\mathfrak{n}_{0+}$ est triviale sur M_λ^0 , et que l'action de $\mathfrak{n}_{0-}$ est fidèle. L'annulateur de M_λ^0 dans $S(\mathfrak{g})$ est donc l'idéal engendré par $\mathfrak{n}_+$ et par les $A - \lambda(A)$, $A \in \mathfrak{h}$. On en déduit :

$$V(M_\lambda^\nu) = \lambda + \mathfrak{b}_+^\perp.$$

Soit $\chi_\lambda^\nu \; : Z(\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\nu)) \to \mathbb{C}$ le caractère central de M_λ^ν. Soit $\gamma_\nu \; : Z(\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\nu)) \xrightarrow{\sim} S(\mathfrak{h})^W$ l'isomorphisme d'Harish-Chandra de $\mathfrak{g}_\nu$ [Dix § 7.4]. En considérant $S(\mathfrak{h})^W$ comme l'ensemble des polynômes W-invariants sur $\mathfrak{h}^*$ on a alors [Dix § 7.4.6] :

$$\chi_\lambda^\nu(u) = \gamma_\nu(u)(\lambda).$$

L'isomorphisme de Duflo $\tau_\nu \; : S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}_\nu} \to Z(\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\nu))$ s'obtient en composant γ_ν^{-1} à gauche par la restriction à $\mathfrak{h}^*$ (isomorphisme de Chevalley). Pour tout $v \in S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}_\nu}$ on a donc finalement :

$$\chi_\lambda^\nu(\tau_\nu(v)) = v(\lambda).$$

L'annulateur du module de Verma M_λ^ν est l'idéal bilatère de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\nu)$ engendré par $\operatorname{Ker} \chi_\lambda^\nu$ ([Dix], Théorème 8.4.3). Via l'isomorphisme de Duflo c'est donc l'idéal bilatère de $(S(\mathfrak{g}), *_\nu)$ engendré par $\{v - v(\lambda),\, v \in S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}_\nu}\}$.

L'idéal $\operatorname{Ann} M_\lambda^\nu / \nu \operatorname{Ann} M_\lambda^\nu$ de $S(\mathfrak{g})$ est donc l'idéal engendré par $\{v - v(\lambda),\, v \in S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}_\nu}\}$. On en déduit la variété de Poisson caractéristique :

$$VA(M_\lambda^\nu) = \{\xi \in \mathfrak{g}^*,\, v(\xi) = v(\lambda) \text{ pour tout } v \in S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}_\nu}\}.$$

Lorsque λ (c'est-à-dire H) est régulier, c'est l'orbite coadjointe de λ. Lorsque $\lambda = 0$ c'est le cône nilpotent.

III.8. Modules de Verma et réalité

Le module de Verma M_λ^ν admet une forme bilinéaire symétrique naturelle ayant de bonnes propriétés de covariance : la forme de Shapovalov [Sha], [D2]. En la modifiant pour la rendre sesquilinéaire hermitienne nous pourrons appliquer les résultats du § I.6.

On garde les notations du § III.7. Soit $(X_{-\alpha}, H_\alpha, X_\alpha)_{\alpha\in\Delta_+}$ une base de Chevalley de $\mathfrak{g}_1$. Alors $(-iX_{-\alpha}, -iH_\alpha, -iX_\alpha)_{\alpha\in\Delta_+}$ est une base de Chevalley de $\mathfrak{g}_i$ (où $i = \sqrt{-1}$). Soit $\mathfrak{g}_{i,\mathbb{R}}$ la forme réelle déployée de $\mathfrak{g}_i$ associée. Elle est définie comme l'espace vectoriel réel engendré par les $-iX_{-\alpha}, -iH_\alpha, -iX_\alpha$. Ceci définit une forme réelle $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ de l'espace vectoriel sous-jacent $\mathfrak{g}$, qui est à son tour automatiquement une forme réelle déployée $\mathfrak{g}_{\nu,\mathbb{R}}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\nu$ pour tout ν imaginaire pur. La conjugaison respecte les sous-espaces radiciels, donc a fortiori les trois composantes de la décomposition :

$$\mathfrak{g}_\nu = \mathfrak{n}_{\nu-} \oplus \mathfrak{h}_\nu \oplus \mathfrak{n}_{\nu+}.$$

La conjugaison sur $\mathfrak{g}$ (resp. sur $\mathfrak{h}$) par rapport à cette forme réelle induit une conjugaison sur le dual $\mathfrak{g}^*$ (resp. $\mathfrak{h}^*$) grâce à la formule :

$$\overline{\xi}(X) := \overline{\xi(\overline{X})}.$$

Nous étendons la conjugaison par multiplicativité à l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\nu)$. Cette algèbre enveloppante admet (grâce au théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt) la décomposition :

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\nu) = \mathcal{U}(\mathfrak{h}_\nu) \oplus \big(\mathfrak{n}_{\nu-}\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\nu) + \mathcal{U}(\mathfrak{g}_\nu)\mathfrak{n}_{\nu+}\big).$$

Soit $P_\nu : \mathcal{U}(\mathfrak{g}_\nu) \to \mathcal{U}(\mathfrak{h}_\nu)$ la projection correspondant à cette décomposition. D'après ce qui précède cette projection est compatible avec la conjugaison, c'est-à-dire :

$$P(\overline{u}) = \overline{P(u)} \qquad \text{pour tout } u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_\nu).$$

Nous définissons la *transposition* sur $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\nu)$ de la façon suivante :

$${}^tX_\alpha = X_{-\alpha}, \qquad {}^tX_{-\alpha} = X_\alpha, \qquad {}^tH_\alpha = H_\alpha,$$

et on étend cette transposition en un anti-automorphisme de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\nu)$. Il est immédiat de voir que la transposition commute avec la conjugaison. Nous considérerons sur $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\nu)$ l'involution (semi-linéaire) définie par :

$$a^* =^t \overline{a}.$$

Cette involution (restreinte à $\mathfrak{g}$) définit une nouvelle conjugaison sur $\mathfrak{g}$, et donc une nouvelle forme réelle $\mathfrak{g}^\mathbb{R}$, qui est une forme réelle *compacte* de chacune des algèbres de Lie $\mathfrak{g}_\hbar$ où $\hbar = -i\nu$ est un réel non nul (cf. [H] § III.6). Remarquons que l'on a :

$$\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^\mathbb{R} = i\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_\mathbb{R}.$$

Nous noterons $\mathfrak{h}^{\mathbb{R}}$ cette intersection et nous noterons τ la conjugaison (dans $\mathfrak{g}$ ou dans $\mathfrak{h}$ ou dans leurs duaux respectifs) par rapport à cette nouvelle forme réelle. Supposons alors que $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ est réel, c'est-à-dire $\tau(\lambda) = \lambda$. L'involution $*$ sur $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\nu)$ coïncide, via l'isomorphisme de Duflo, avec l'involution donnée au § I, la conjugaison étant τ.

Plutôt que de considérer le module de Verma M_ν^λ comme dans le § III.7 nous considérerons le module de Verma $M_\nu^{\lambda+\nu\delta}$. En tant que modules sur l'algèbre déformée ils coïncident à $O(\nu)$ près donc leurs variétés caractéristiques et leurs variétés de Poisson caractéristiques sont les mêmes. Soit $e^\nu_{\lambda+\nu\delta}$ le vecteur de plus haut poids de $M^\nu_{\lambda+\nu\delta}$.

Supposons que λ soit réel. Nous définissons alors une forme sesquilinéaire sur le module de Verma $M^\nu_{\lambda+\nu\delta}$ par la formule :

$$< m, n >_\nu = < a.e^\nu_{\lambda+\nu\delta}, b.e^\nu_{\lambda+\nu\delta} >_\nu = P_\nu(a^*b)(\lambda).$$

C'est une version hermitienne de la forme de Shapovalov de $M^\nu_{\lambda+\nu\delta}$.

Proposition III.8.1.
La représentation π_ν de $\mathcal{A} = \mathcal{U}(\mathfrak{g}_\nu)$ dans $M^\nu_{\lambda+\nu\delta}$ vérifie pour tout $m, n \in M^\nu_\lambda$ et pour tout $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_\nu)$:

$$< um, n >_\nu = < m, u^*n >_\nu .$$

Démonstration. Soient $a, b \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_\nu)$ tels que $m = a.e^\nu_\lambda$ et $n = b.e^\nu_\lambda$. La proposition découle immédiatement de l'égalité :

$$< ua.e^\nu_{\lambda+\nu\delta},\, b.e^\nu_{\lambda+\nu\delta} > = < a.e^\nu_{\lambda+\nu\delta},\, u^*b.e^\nu_{\lambda+\nu\delta} > .$$

•

La représentation associée est donc une $*$-représentation. De plus la forme quotient définie par $< -, - >_\nu$ en $\nu = 0$ est hermitienne non dégénérée. Autrement dit le module de Verma $M^\nu_{\lambda+\nu\delta}$ est fortement pseudo-unitaire. Nous pouvons donc appliquer les résultats du § I.6. Les variétés caractéristiques $V(\pi_\nu)$ et $VA(\pi_\nu)$ sont donc définies sur le corps des réels. Elles sont données par les mêmes formules explicites que dans le § III.7.

Remarque : Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Alors, en utilisant le théorème 7.6.24 de [Dix], il est facile de voir que le module de Verma $M^\nu_{\lambda+\nu\delta}$ est simple (et donc que la forme de Shapovalov est non-dégénérée) sauf éventuellement sur un ensemble discret dénombrable de valeurs de ν. Par ailleurs, sur la question de l'unitarisabilité de certains modules de plus haut poids, voir [EHW] et [Jak].

IV. Une construction générale à l'aide de polarisations réelles

Dans le cas résoluble exponentiel, nous explicitons dans ce paragraphe, en utilisant la construction de [Pe2], la variété caractéristique d'une représentation π_ν associée de manière convenable à une représentation monomiale quelconque induite à partir d'une polarisation réelle.

IV.1. Construction d'une représentation π_ν de $\mathcal{A}$

Soient G un groupe de Lie résoluble exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et soit $f \in \mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{h}$ une polarisation réelle en f. Notons H le sous-groupe $\exp \mathfrak{h}$. Soit Ω_f l'orbite coadjointe de f et d=dim Ω_f.
Soit $\mathfrak{g}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_n$, une bonne suite de sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ c'est à dire si $\mathfrak{g}_i$ n'est pas un idéal de $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{g}_{i-1}$ et $\mathfrak{g}_{i+1}$ le sont et $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i-2}$ est un $\mathfrak{g}$-module irréductible. On choisit une base de $\mathfrak{g}$, $(X_1, ..., X_n)$ telle que $X_k \in \mathfrak{g}_k \backslash \mathfrak{g}_{k-1}$, $k \geq 1$.
On regarde les ensembles indices $e(f)$ et $e^{\mathcal{B}}(f)$ définis par :

$$e(f) = \{j \in \{1, ..., n\}/X_j \notin \mathfrak{g}_{j-1} + \mathfrak{h}\} = \{k_1 < ... < k_{\frac{d}{2}}\}$$

et

$$e^{\mathcal{B}}(f) = \{j \in \{1, \cdots n\}/X_j \notin \mathfrak{g}_{j-1} + \mathfrak{g}(f)\}.$$

Alors, $e(f) \subset e^{\mathcal{B}}(f)$ et le cardinal de $e^{\mathcal{B}}(f) \backslash e(f)$ est égal à $\dfrac{d}{2}$. Il existe donc des indices $j_1 < \cdots < j_{\frac{d}{2}}$ tels que $e^{\mathcal{B}}(f) = e(f) \cup \{j_1, ..., j_{\frac{d}{2}}\}$.
D'autre part, les vecteurs $X_{k_1}, ..., X_{k_{\frac{d}{2}}}$ forment une base coexponentielle à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$; c'est à dire : $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathrm{Vect}\ (X_{k_1}, ..., X_{k_{\frac{d}{2}}})$ et l'application

$$\mathbb{R}^{\frac{d}{2}} \times H \longrightarrow G$$

$$(q_1, ..., q_{\frac{d}{2}}, h) \longmapsto \exp(q_{\frac{d}{2}} X_{k_{\frac{d}{2}}}) \cdots \exp(q_1 X_{k_1}) \cdot h$$

est un difféomorphisme.
De même, les vecteurs $\{X_j,\ j \in e^{\mathcal{B}}(f)\}$ forment une base coexponentielle à $\mathfrak{g}(f)$ dans $\mathfrak{g}$.
Soit $\rho = \mathrm{ind}_H^G \chi_f$. Alors, D'après Pedersen [Pe2](theorem 3.2.3), ρ se réalise sur l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^{\frac{d}{2}}$ par

$$\begin{aligned}\rho(X)\xi(t) = &\sum_{u=1}^{\frac{d}{2}} a_{X,u}(t) \frac{\partial \xi}{\partial t_u}(t) + i a_{X,0}(t)\xi(t) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{u=1}^{\frac{d}{2}} \frac{\partial}{\partial t_u} a_{X,u}(t)\xi(t),\end{aligned}$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$ où ξ désigne une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{\frac{d}{2}})$ et les $a_{X,u}$, $u = 1, \ldots, \dfrac{d}{2}$ sont des fonctions de classe C^∞ sur l'ouvert Ω. Ainsi,

$$\begin{aligned}\rho_\hbar(X)\xi(t) &= \sum_{u=1}^{\frac{d}{2}} a_{X,u}(\hbar t) \frac{\partial \xi}{\partial t_u}(t) + i a_{X,0}(\hbar t)\xi(t) + \frac{1}{2} \sum_{u=1}^{\frac{d}{2}} \frac{\partial}{\partial t_u} \Big(a_{X,u}(\hbar t)\Big)\xi(t), \\ &= \sum_{u=1}^{\frac{d}{2}} a_{X,u}(\hbar t) \frac{\partial \xi}{\partial t_u}(t) + i a_{X,0}(\hbar t)\xi(t) + \frac{\hbar}{2} \sum_{u=1}^{\frac{d}{2}} \frac{\partial}{\partial t_u} a_{X,u}(\hbar t)\xi(t).\end{aligned}$$

En posant $\nu = i\hbar$ et en appliquant le théorème II.3.1, on en déduit l'expression de la représentation π_ν de l'algèbre déformée :

$$\pi_\nu(X)\xi(t) = \sum_{u=1}^{\frac{d}{2}} i a_{X,u}(-i\nu t)\frac{\partial \xi}{\partial t_u}(t) - a_{X,0}(-i\nu t)\xi(t) + \frac{\nu}{2}\sum_{u=1}^{\frac{d}{2}} \frac{\partial}{\partial t_u} a_{X,u}(-i\nu t)\xi(t).$$

IV.2. Calcul de la variété caractéristique

Théorème IV.2.1.
Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble exponentielle, f un élément de $\mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{b}$ une polarisation réelle en f. Soit $\rho = Ind_B^G \chi_f$ la représentation unitaire associée à f avec $B = \exp \mathfrak{b}$ et soit π_ν la représentation de l'algèbre déformée $\mathcal{A}$ construite au paragraphe IV.1. Alors,

$$V(\pi_\nu) = f + \mathfrak{b}^\perp.$$

Démonstration. Faisant $\nu = 0$, on obtient :

$$\pi_0(X) = \sum_{u=1}^{\frac{d}{2}} i a_{X,u}(0)\frac{\partial}{\partial t_u} - a_{X,0}(0).$$

Comme l'opérateur $\pi_0(X_i)$ est un opérateur aux dérivées partielles d'ordre un pour tout $i \in e(f)$, on aura pour $X = X_{k_u}$, $u = 1, ..., \frac{d}{2}$,

$$d\pi_0(X_{k_u}) = \sum_{s=1}^{\frac{d}{2}} i a_{X_{k_u},s}(0)\frac{\partial}{\partial t_s} - a_{X_{k_u},0}(0) \quad \text{avec} \quad a_{X_{k_u},u}(0) \neq 0.$$

D'autre part, pour $j \in e^{\mathcal{B}}(f)\backslash e(f)$, $a_{X_j,u}(0) = 0$, pour tout $u = 1, ..., \frac{d}{2}$. Ce qui implique que

$$\pi_0(X_j) = -a_{X_j,0}(0), \quad \text{pour tout } j \in e^{\mathcal{B}(f)}\backslash e(f).$$

On en déduit alors que l'annulateur de π_0 contient l'idéal de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ engendré par $\{X_j + a_{X_j,0}\}$, $j \in e^{\mathcal{B}(f)}\backslash e(f)$. En outre, si $X \in \mathfrak{b}$, $\pi_\nu(X)$ est un opérateur différentiel d'ordre zéro, ce qui entraine que

$$\pi_0(X) = -a_{X,0}(0) = \langle f, X\rangle$$

d'après [Pe2] lemme 1.2.4 et nos conventions de signes pour la définition du caractère χ_f. Par suite, $X - \langle f, X\rangle \in \text{Ker } \pi_0$, pour tout $X \in \mathfrak{b}$. Ce qui montre que $V(\pi_\nu) \subset f + \mathfrak{b}^\perp$. Réciproquement, si $l \in f + \mathfrak{b}^\perp$, alors, pour tout $X \in \mathfrak{b}$, $l(X - f(X)) = 0$. Donc, $l \in V(\pi_\nu)$. •

Corollaire IV.2.2.
Soient $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie résoluble exponentielle,* f *un élément de* $\mathfrak{g}^*$ *et* $\rho = \rho_f \in \hat{G}$*. Soit* $\mathfrak{b}$ *une polarisation de Pukanszky qui réalise* ρ*. Alors,*

$$V(\pi_\nu) = B.f$$

avec $B = \exp \mathfrak{b}$.

IV.3. Le cas nilpotent

Dans les exemples III.1 et III.2 la variété de Poisson caractéristique coïncide avec l'orbite coadjointe. Cette propriété se généralise à toute représentation unitaire irréductible d'un groupe nilpotent : soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle nilpotente de dimension n. Les orbites coadjointes dans $\mathfrak{g}^*$ sont toutes des sous-variétés algébriques, données par l'annulation de polynômes à valeurs réelles $(Q_j)_{j=1,\ldots,n-2k}$ où $2k$ désigne la dimension de l'orbite. Ces orbites associées à $\rho_\hbar$ sont toutes les mêmes pour $\mathfrak{g}_\hbar$ quel que soit le paramètre $\hbar$ réel non nul. Soit $\rho_\Omega^\hbar$ la représentation unitaire irréductible du groupe simplement connexe $G_\hbar = \exp \mathfrak{g}_\hbar$ associée à une telle orbite Ω par la méthode de Kirillov. Elle s'obtient en choisissant un élément $\xi \in \Omega$, une polarisation réelle $\mathfrak{h}_\hbar$ en ξ, et en induisant de $H_\hbar = \exp \mathfrak{h}_\hbar$ à $G_\hbar$ le caractère de $H_\hbar$ défini par :

$$\chi_\xi(\exp X) = e^{-i\xi(X)}.$$

Soit τ l'isomorphisme de Duflo, qui se réduit ici à la symétrisation. D'après le théorème 2.3.2 de [Pe1] (adapté ici à nos conventions de signe dans la définition du caractère χ_ξ), l'annulateur de $\rho_\Omega^\hbar$ dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\hbar)$ est l'idéal engendré par les u_j avec $\tau^{-1}(u_j)(\eta) = Q_j(i\eta)$. En posant $\nu = i\hbar$ et en utilisant le théorème II.3.1 on voit que l'annulateur de la représentation π_Ω^ν de l'algèbre déformée $\mathcal{A}$ est alors engendré par les Q_j. L'idéal $\operatorname{Ann} \pi_\Omega^\nu / \nu \operatorname{Ann} \pi_\Omega^\nu$ de $S(\mathfrak{g})$ est donc également engendré par les Q_j, d'où l'égalité entre l'orbite Ω et la variété de Poisson caractéristique. On a donc :

Théorème IV.3.1.
Avec les notations ci-dessus,

$$VA(\pi_\Omega^\nu) = \Omega.$$

Références :

[A] S. Araki, On root systems and an infinitesimal classification of irreducible symmetric spaces, J. of Math. Osaka City Univ. 13, 1-34 (1962).

[AM] M. Andler, D. Manchon, *Opérateurs aux différences finies, calcul pseudo-différentiel et représentations des groupes de Lie*, J. Geom. Phys. 27, 1-29 (1998).

[ABLS] D. Arnal, A. Baklouti, J. Ludwig, M. Selmi, *Separation of unitary representations of exponential Lie groups*, J. Lie Theory, vol. 10, 399-410 (2000).

[ABM] D. Arnal, N. Ben Amar, M. Masmoudi, *Cohomology of good graphs and Kontsevich linear star products*, Lett. Math. Phys. 48, 291- 306 (1999).

[AMM] D. Arnal, D. Manchon, M. Masmoudi, *Choix des signes pour la formalité de M. Kontsevich*, math.QA/0003003, Pac. J. Math.

[BBR] A. Baklouti, C. Benson and G. Ratcliff, *Moment sets and the unitary dual of a nilpotent Lie group*, J. Lie Theory, Vol 11, 135-154 (2001).

[BCD] P. Bernat, N. Conze, M. Duflo et al. *Représentations des groupes de Lie résolubles*, Monographies de la Soc. Math. France No 4, Dunod, Paris 1972.

[BW] M. Bordemann, S. Waldmann, *Formal GNS construction and states in deformation quantization*, Comm. Math. Phys. 195, 549-583 (1998).

[Bu-W] H. Bursztyn, S. Waldmann, *$*$-ideals and formal Morita equivalence of $*$-algebras*, Int. J. Math. 12 No 5, 555-577 (2001).

[B] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, Hermann, Paris 1961.

[CF] A. Cattaneo, G. Felder, *A path integral approach to the Kontsevich quantization formula*, Comm. Math. Phys. 212 N3, 591-611 (2000).

[CFT] A. Cattaneo, G. Felder, L. Tomassini, *From local to global deformation quantization of Poisson manifolds*, math.QA/0012228.

[Di] G. Dito, *Kontsevich star product on the dual of a Lie algebra*, Lett. Math. Phys. 48, 307-322 (1999).

[Dix] J. Dixmier, *Algèbres enveloppantes*, Gautier-Villars, Paris 1974.

[D1] M. Duflo, *Opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie,* Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 4e série t. 10, 265-288 (1977).

[D2] M. Duflo, *Sur la classification des idéaux primitifs dans l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie semi-simple*, Ann. of Math. (2) 105 , no. 1, 107-120 (1977).

[EHW] T. Enright, R. Howe, N. Wallach, *A classification of unitary highest weight modules*, Progr. Math. 40, 97-143,(1983).

[EK] P. Etingof, D. Kazhdan, *Quantization of Lie bialgebras, I*, Selecta Math. 2, 1-41 (1996).

[FS] G. Felder, B. Shoikhet, *Deformation quantization with traces*, math.QA/0002057.

[G] O. Gabber, *The integrability of the characteristic variety*, Am. J. Math. 103, No 3, 445-468 (1981).

[GM] M. Granger, Ph. Maisonobe, *A basic course on differential modules*, in *$\mathcal{D}$-modules cohérents et holonomes*, les cours du CIMPA, Hermann, Paris 1993.

[Gui] V. Guinzburg, *On primitive ideals*, math.RT/0202079.

[H] S. Helgason, *Differential geometry and symmetric spaces*, Academic Press, 1962.

[J] A. Joseph, *On the classification of primitive ideals in the enveloping algebra of a semisimple Lie algebra*, Lect. Notes in Math. 1024 , 30-78.

[Ja] J.C. Jantzen, *Einhüllende Algebren halbeinfacher Lie-Algebren*, Springer (1983).

[Jak] H.P. Jakobsen, *Hermitian symmetric spaces and their unitary highest weight modules*, J. Funct. Anal. 52 No 3, 385-412 (1983).

[Ki] A. A. Kirillov, *Elements of the Theory of Representations*, Springer (1976).

[K] M. Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds I,* math.QA/9709040.

[MT] D. Manchon, Ch. Torossian, *Cohomologie tangente et cup-produit pour la quantification de Kontsevich*, math.QA/0106205.

[Pe1] N. V. Pedersen, *On the infinitesimal kernel of irreducible representations of nilpotent Lie groups*, Bull. Soc. Math. France 112, 42 3-467 (1984).

[Pe2] N. V. Pedersen, *On the symplectic structure of coadjoint orbits of (solvable) Lie groups and applications. I*, Math. Ann. 281, 633-669 (1988).

[Sha] N.N. Shapovalov, *A certain bilinear form on the universal enveloping algebra of a complex semisimple Lie algebra* Funct. Anal. Appl. 6 , no. 4, 307-312 (1972).

[Sh] B. Shoikhet, *Vanishing of the Kontsevich integrals of the wheels*, math.QA/0007080.

[V] P. Vanhaecke, *Integrable systems in the realm of algebraic geometry*, Lect. Notes in Math. No 1638, Springer (1996).

[Wa] A. Warner, *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups I*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften No 188, Springer (1972).

[W] A. Weinstein, *The local structure of Poisson manifolds*, J. Diff. Geom. 18, 523-557 (1983).