Cohomologie tangente et cup-produit pour la quantification de Kontsevich

Dominique Manchon[1], Charles Torossian[2]

Abstract. On a flat manifold $M = \mathbb{R}^d$, M. Kontsevich's formality quasi-isomorphism is compatible with cup-products on tangent cohomology spaces, in the sense that for any formal Poisson 2-tensor $\hbar\gamma$ the derivative at $\hbar\gamma$ of the quasi-isomorphism induces an isomorphism of graded commutative algebras from Poisson cohomology space to Hochschild cohomology space relative to the deformed multiplication built from $\hbar\gamma$ via the quasi-isomorphism. We give here a detailed proof of this result, with signs and orientations precised.

Mathematics Subject Classification (2000) : 16S80, 53D17, 53D55, 58A50.

Introduction

L'existence d'un étoile-produit sur une variété de Poisson quelconque est la conséquence d'un résultat plus profond : le théorème de formalité de M. Kontsevich [K], qui énonce l'existence d'un quasi-isomorphisme L_∞ entre les deux algèbres de Lie différentielles graduées naturellement attachées à une variété différentiable M : l'algèbre de Lie différentielle graduée $\mathfrak{g}_1$ des multi-champs de vecteurs (ou tenseurs contravariants) sur M (avec différentielle nulle et crochet de Schouten), et l'algèbre de Lie différentielle graduée $\mathfrak{g}_2$ des opérateurs multi-différentiels sur M (avec différentielle de Hochschild et crochet de Gerstenhaber).

Un tel quasi-isomorphisme L_∞ fournit un procédé canonique et parfaitement explicite pour produire un étoile-produit $* = *_\gamma$ à partir d'un 2-tenseur de Poisson formel γ sur la variété, et tout étoile-produit est équivalent à un étoile-produit obtenu de cette façon [K § 4.4], [AMM § A.2].

Les graduations de $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ sont telles qu'un élément homogène de degré n dans $\mathfrak{g}_1$ (resp. $= \mathfrak{g}_2$) est un $(n-1)$-champ de vecteur (resp. un opérateur $(n-1)$-différentiel). Nous considérons comme dans [K] les espaces décalés $\mathfrak{g}_1[1]$ et $\mathfrak{g}_2[1]$ comme des variétés formelles graduées pointées, en ce sens que pour $i = 1, 2$ la structure d'algèbre de Lie différentielle

[1] CNRS - Institut Elie Cartan, BP 239, F54506 Vandoeuvre CEDEX. manchon@iecn.u-nancy.fr
[2] CNRS - Ecole Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris CEDEX 05. torossia@ens.fr

graduée définit une codérivation Q^i de degré 1 de la cogèbre sans co-unité $S^+(\mathfrak{g}_i[1])$ qui vérifie l'équation maîtresse :

$$[Q^i, Q^i] = 0. \tag{0.1}$$

L'espace décalé $\mathfrak{g}_i[1]$ désigne l'espace $\mathfrak{g}_i$ dans lequel la graduation a augmenté d'une unité : ainsi un élément homogène de degré n dans $\mathfrak{g}_1[1]$ est un $(n+2)$-champ de vecteur, et un élément homogène de degré n dans $\mathfrak{g}_2[1]$ est un opérateur $(n+2)$-différentiel.

Théorème 0.1 (M. Kontsevich).
Il existe un quasi-isomorphisme L_∞ de la variété formelle graduée pointée $\mathfrak{g}_1[1]$ vers la variété formelle graduée pointée $\mathfrak{g}_2[1]$, c'est-à-dire un morphisme de cogèbres :

$$\mathcal{U} : S^+(\mathfrak{g}_1[1]) \longrightarrow S^+(\mathfrak{g}_2[1])$$

tel que :

$$\mathcal{U} \circ Q^1 = Q^2 \circ U, \tag{0.2}$$

et tel que la restriction $\mathcal{U}_1$ de $\mathcal{U}$ à $\mathfrak{g}_1[1]$ est un quasi-isomorphisme de complexes de cochaînes[1].

Le théorème de formalité est relié à la quantification par déformation de la manière suivante : par propriété universelle des cogèbres cocommutatives colibres, les codérivations Q^i et le L_∞-morphisme $\mathcal{U}$ sont entièrement déterminés par leurs coefficients de Taylor :

$$Q^i_k : S^k(\mathfrak{g}_i[1]) \longrightarrow \mathfrak{g}_i[2]$$
$$\mathcal{U}_k : S^k(\mathfrak{g}_1[1]) \longrightarrow \mathfrak{g}_2[1],$$

$k \geq 1, i = 1, 2$, obtenus en composant Q^i et $\mathcal{U}$ à droite avec la projection canonique : $\pi : S^+(\mathfrak{g}_i) \twoheadrightarrow \mathfrak{g}_i$ (resp. $\pi : S^+(\mathfrak{g}_2) \twoheadrightarrow \mathfrak{g}_2$). Soit $\mathfrak{m} = \hbar\mathbb{R}[[\hbar]]$ la limite projective des algèbres nilpotentes de dimension finie $\mathfrak{m}_r = \hbar\mathbb{R}[[\hbar]]/\hbar^r\mathbb{R}[[\hbar]]$. Soit $\hbar\gamma = \hbar(\gamma_0 + \hbar\gamma_1 + \hbar^2\gamma_2 + \cdots)$ un 2-tenseur de Poisson formel infinitésimal, c'est-à-dire une solution dans $\mathfrak{g}_1^{(1)}\widehat{\otimes}\mathfrak{m}$ de l'équation de Maurer-Cartan :

$$\hbar d\gamma - \frac{1}{2}[\hbar\gamma, \hbar\gamma] = 0, \tag{0.3}$$

qui s'écrit aussi de manière plus géométrique :

$$Q^1(e^{\cdot\hbar\gamma} - 1) = 0, \tag{0.4}$$

où $e^{\cdot\hbar\gamma} - 1$ est un élément de type groupe dans la $\mathfrak{m}$-cogèbre topologique $S^+(\mathfrak{g}_1[1])\widehat{\otimes}\mathfrak{m}$. Alors $\mathcal{U}(e^{\cdot\hbar\gamma} - 1)$ est de type groupe dans la cogèbre topologique $S^+(\mathfrak{g}_2[1])\widehat{\otimes}\mathfrak{m}$, et donc :

$$\mathcal{U}(e^{\cdot\hbar\gamma} - 1) = e^{\cdot\hbar\tilde{\gamma}} - 1 \tag{0.5}$$

[1] D'après [AMM] on doit remplacer le crochet de Schouten par l'opposé du crochet pris dans l'ordre inverse. Ce crochet coïncide avec le crochet de Schouten modulo un signe moins lorsque deux éléments impairs sont en jeu (cf. § III.2).

avec :

$$\hbar\tilde{\gamma} = \sum_{k\geq 1} \frac{\hbar^k}{k!}\mathcal{U}_k(\gamma^{\cdot k}). \tag{0.6}$$

Comme Q^2 s'annule en $e^{\cdot\hbar\tilde{\gamma}} - 1$ l'élément $\hbar\tilde{\gamma}$ verifie l'équation de Maurer-Cartan dans $\mathfrak{g}_2\widehat{\otimes}\mathfrak{m}$:

$$\hbar d\tilde{\gamma} - \frac{1}{2}[\hbar\tilde{\gamma}, \hbar\tilde{\gamma}] = 0. \tag{0.7}$$

Soit m l'opérateur bidifférentiel de multiplication :$f \otimes g \mapsto fg$, et soit $* = m + \hbar\tilde{\gamma}$. On rappelle ([AMM] § IV.3) que le cobord de Hochschild est donné par $d = -[m, -]$. L'équation de Maurer-Cartan pour $\hbar\tilde{\gamma}$ est donc équivalente à l'équation :

$$[*, *] = 0, \tag{0.8}$$

qui dit que $*$ est un produit associatif sur $C^\infty(M)[[\hbar]]$.

L'élément de type groupe $e^{\cdot\hbar\gamma} - 1$ désigne "le $\mathfrak{m}$-point $\hbar\gamma$ sur la variété formelle $\mathfrak{g}_1[1]$". Cette expression prend tout son sens géométrique si on pense à $e^{\cdot\hbar\gamma} - 1$ comme à la différence entre les deux mesures de Dirac $\delta_{\hbar\gamma} - \delta_0$. Dire que le champ de vecteurs impair Q^1 s'annule au point $\hbar\gamma$, c'est dire précisément que la codérivation Q^1 s'annule sur $e^{\cdot\hbar\gamma} - 1$.

Nous nous intéressons maintenant à la différentielle $\mathcal{U}'_{\hbar\gamma}$ du morphisme de variétés formelles $\mathcal{U}$. L'espace tangent de $\mathfrak{g}_1[1]\widehat{\otimes}\mathfrak{m}$ en $\hbar\gamma$ s'identifie à $\mathfrak{g}_1[1]\widehat{\otimes}\mathfrak{m}$. La linéarisation du champ de vecteurs impair Q^1 qui s'annule au point $\hbar\gamma$ donne un champ de vecteurs impair $Q^{\hbar\gamma}$ sur cet espace tangent, donné par :

$$Q^{\hbar\gamma}(\hbar\delta) = \sum_{n\geq 0} \frac{\hbar^{n+1}}{n!} Q^1_{n+1}(\delta.\gamma^{\cdot n}), \tag{0.9}$$

comme on peut le voir en extrayant le terme linéaire en δ dans l'expresssion $Q^1(e^{\cdot\hbar\gamma+\hbar\delta} - 1)$. L'équation maîtresse :

$$[Q^1, Q^1](e^{\cdot\hbar\gamma+\hbar\delta} - 1) = 0 \tag{0.10}$$

permet facilement de déduire l'équation maîtresse pour le champ linéarisé :

$$[Q^{\hbar\gamma}, Q^{\hbar\gamma}] = 0. \tag{0.11}$$

Dans notre cas particulier où tous les coefficients de Taylor de Q^1 sont nuls sauf le deuxième on obtient :

$$Q^{\hbar\gamma}(\hbar\delta) = Q^1_2(\hbar\gamma.\hbar\delta) = \hbar^2[\delta, \gamma]. \tag{0.12}$$

(Voir [AMM] § II.4 et IV.1). On linéarise de même le champ de vecteurs impair Q^2 qui s'annule en $\hbar\tilde{\gamma} = \mathcal{U}(\hbar\gamma)$. On obtient ainsi un champ de vecteurs impair $Q^{\hbar\tilde{\gamma}}$ de carré nul sur l'espace tangent à $\mathfrak{g}_2[1]$ en $\hbar\tilde{\gamma} = \mathcal{U}(\hbar\gamma)$, qui s'écrit :

$$Q^{\hbar\tilde{\gamma}}(\hbar\delta) = Q^2_1(\hbar\delta) + Q^2_2(\hbar\tilde{\gamma}.\hbar\delta) = \hbar[\delta, *]. \tag{0.13}$$

Les deux espaces tangents ci-dessus sont donc ainsi munis d'une structure de complexe de cochaînes. La dérivée $\mathcal{U}'_{\hbar\gamma}(\delta)$ du L_∞-morphisme $\mathcal{U}$ est un quasi-isomorphisme de complexes du premier espace tangent vers le deuxième, et s'exprime par :

$$\mathcal{U}'_{\hbar\gamma}(\delta) = \sum_{n\geq 0} \frac{\hbar^n}{n!}\mathcal{U}_{n+1}(\delta.\gamma^{\cdot n}). \tag{0.14}$$

L'opérateur de cobord $Q^{\hbar\gamma} = [-, \hbar\gamma]$ est une dérivation graduée pour le produit extérieur $\wedge$ des multi-champs de vecteurs étendu à $\mathfrak{g}_1\widehat{\otimes}\mathfrak{m}$ par $\mathfrak{m}$-linéarité, par définition même du crochet de Schouten. Le produit extérieur induit donc un produit associatif et commutatif (au sens gradué), que nous noterons $\cup$, sur l'espace de cohomologie $H_{\hbar\gamma}$ du premier espace tangent.

On introduit un produit associatif gradué sur le deuxième espace tangent en posant pour chaque opérateur k_1-différentiel t_1 et pour chaque opérateur k_2-différentiel t_2 :

$$(t_1 \cup t_2)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{k_1+k_2}) = t_1(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{k_1}) * t_2(a_{k_1+1} \otimes \cdots \otimes a_{k_1+k_2}), \tag{0.15}$$

où $*$ désigne comme ci-dessus l'étoile-produit associatif $m + \hbar\mathcal{U}(\gamma)$. La compatibilité de ce produit avec l'opérateur de cobord $[-, *]$ est immédiate, et montre que le produit $\cup$ induit un produit associatif $\cup$ sur sur l'espace de cohomologie $H_{\hbar\tilde{\gamma}}$ du deuxième espace tangent[1]. La commutativité graduée n'est pas évidente à voir, mais résultera du théorème que nous pouvons énoncer maintenant :

Théorème 0.2 (M. Kontsevich).
Dans le cas particulier $M = \mathbb{R}^d$ et où $\mathcal{U}$ est le L_∞-morphisme donné dans [K § 6.4], la dérivée $\mathcal{U}'_{\hbar\gamma}$ induit un isomorphisme d'algèbres de l'espace de cohomologie $H_{\hbar\gamma}$ de l'espace tangent $T_{\hbar\gamma}\mathfrak{g}_1[1]$ sur l'espace de cohomologie $H_{\hbar\tilde{\gamma}}$ de l'espace tangent $T_{\hbar\tilde{\gamma}}\mathfrak{g}_2[1]$. Autrement dit pour tout couple (α, β) de multi-champs de vecteurs tels que $[\alpha, \gamma] = [\beta, \gamma] = 0$, on a :

$$\mathcal{U}'_{\hbar\gamma}(\alpha \cup \beta) = \mathcal{U}'_{\hbar\gamma}(\alpha) \cup \mathcal{U}'_{\hbar\gamma}(\beta) + D, \tag{0.16}$$

où D est un cobord de Hochschild pour l'algèbre déformée $(C^\infty(M)[[\hbar]], *)$.

Cet article est consacré à la démonstration détaillée de ce théorème. Elle repose sur un argument d'homotopie qui est esquissé dans [K] au paragraphe 8.1, et développé dans [ADS] dans le cas particulier où α et β sont de degré minimal -1, c'est-à-dire appartiennent à $C^\infty(\mathbb{R}^d)[[\hbar]]$. Le terme de cobord D n'apparaît pas dans ce cas. Pour un analogue partiel du théorème 0.2 dans le cas d'une variété quelconque on se reportera à [CFT].

Conventions sur le produit extérieur :

Soit V un espace vectoriel de dimension finie. On identifie $x_1 \wedge \cdots \wedge x_k$ avec la projection :

$$\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma_1} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma_k}$$

[1] Par rapport à [K chap. 8], nous nous plaçons dans le cas simplifié où $\mathfrak{m}$ est supposée concentrée en degré zéro.

de $x_1\otimes\cdots\otimes x_k$ sur les tenseurs antisymétriques. On définit le couplage entre les puissances extérieures de V et de son dual V^* par la formule :

$$< x_1\wedge\cdots\wedge x_k,\, \xi_1\wedge\cdots\wedge\xi_k >= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}\varepsilon(\sigma) < x_{\sigma 1},\, \xi_1 > \cdots < x_{\sigma k},\, \xi_k > . \qquad (0.17)$$

I. Rappels sur la construction du quasi-isomorphisme $\mathbf{L}_\infty$

Nous rassemblons ici les faits relatifs aux graphes et aux poids introduits par M. Kontsevich dans [K], qui permettent de construire explicitement le L_∞-quasi-isomorphisme $\mathcal{U}$ dans le cas où la variété est $\mathbb{R}^d$, et de montrer qu'il possède les propriétés attendues. On se reportera à [K] chap. 5 et 6 pour les détails, ainsi qu'à [AMM] pour la délicate question du choix des signes.

I.1. Graphes et poids

On se place dans le cas plat $M=\mathbb{R}^d$. Le L_∞-quasi-isomorphisme $\mathcal{U}$ est uniquement déterminé par ses coefficients de Taylor :

$$\mathcal{U}_n : S^n(\mathfrak{g}_1[1]) \longrightarrow \mathfrak{g}_2[1].$$

Si les α_k sont des s_k-champs de vecteurs, ils sont de degré s_k-2 dans l'espace décalé $\mathfrak{g}_1[1]$, et donc $\mathcal{U}_n(\alpha_1\cdots\alpha_n)$ est d'ordre $s_1+\cdots+s_n-2n$ dans $\mathfrak{g}_2[1]$. C'est donc un opérateur m-différentiel, avec :

$$\sum_{k=1}^n s_k = 2n+m-2. \qquad (\mathrm{I}.1.1)$$

Les coefficients de Taylor sont construits à l'aide de poids et de graphes : on désigne par $G_{n,m}$ l'ensemble des graphes étiquetés et orientés ayant n sommets du premier type (sommets aériens) et m sommets du deuxième type (sommets terrestres) tels que :

1). Les arêtes partent toutes des sommets aériens.

2). Le but d'une arête est différent de sa source (il n'y a pas de boucles).

3). Il n'y a pas d'arêtes multiples.

Par graphe étiqueté on entend un graphe Γ muni d'un ordre total sur l'ensemble E_Γ de ses arêtes, compatible avec l'ordre des sommets. A tout graphe étiqueté $\Gamma\in G_{n,m}$, et à tout n-uple de multi-champs de vecteurs $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ on peut associer de manière naturelle un opérateur m-différentiel $B_\Gamma(\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_n)$ lorsque pour tout $j\in\{1,\ldots,n\}$, α_j est un s_j-champ de vecteurs, où s_j désigne le nombre d'arêtes qui partent du sommet aérien numéro j [K § 6.3].

L'opérateur $B_\Gamma(\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_n)$ est construit de la façon suivante : soit E_Γ l'ensemble des arêtes de Γ. On désigne par $\{e_k^1,\ldots,e_k^{s_k}\}$ le sous-ensemble ordonné de E_Γ des arêtes partant du sommet aérien k. A toute application $I: E_\Gamma\to\{1,\ldots,d\}$ et à tout sommet du graphe Γ (de type aérien ou terrestre) on associe l'opérateur différentiel à coefficient constant :

$$D_{I(x)} = \prod_{e=(-,x)} \partial_{I(e)}, \tag{I.1.2}$$

où pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$ on désigne par ∂_i l'opérateur de dérivation partielle par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable. Le produit est pris pour toutes les arêtes qui arrivent au sommet x. Soit pour tout sommet aérien k, pour tout s_k-champ de vecteurs γ_k (où s_k est le nombre d'arêtes partant de k) et pour toute application $I : E_\Gamma \to \{1, \ldots, d\}$ le coefficient :

$$\begin{aligned} \gamma_k^I = \gamma_k^{I(e_k^1)\cdots I(e_k^{s_k})} &=< \gamma_k,\, dx_{I(e_k^1)} \wedge \cdots \wedge dx_{I(e_k^{s_k})} > \\ &=< \gamma_k,\, dx_{I(e_k^1)} \otimes \cdots \otimes dx_{I(e_k^{s_k})} > . \end{aligned} \tag{I.1.3}$$

On pose alors :

$$\mathcal{B}_\Gamma(\gamma_1 \otimes \cdots \otimes \gamma_n)(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = \sum_{I:E_\Gamma \to \{1,\ldots,d\}} \prod_{k=1}^{n} D_{I(k)} \gamma_k^I \prod_{l=1}^{m} D_{I(\bar{l})} f_l. \tag{I.1.4}$$

Le coefficient de Taylor $\mathcal{U}_n$ est alors donné par la formule :

$$\mathcal{U}_n(\alpha_1 \cdots \alpha_n) = \sum_{\Gamma \in G_{n,m}} W_\Gamma \mathcal{B}_\Gamma(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n), \tag{I.1.5}$$

où l'entier m est relié à n et aux α_j par la formule (I.1.1) ci-dessus. On écrit aussi :

$$\mathcal{U}_n = \sum_{G_n} W_\Gamma \mathcal{B}_\Gamma, \tag{I.1.6}$$

où G_n désigne l'ensemble des graphes admissibles à n sommets aériens.

Le poids W_Γ est nul sauf si le nombre d'arêtes $|E_\Gamma|$ du graphe Γ est précisément égal à $2n+m-2$. Il s'obtient en intégrant une forme fermée ω_Γ de degré $|E_\Gamma|$ sur une composante connexe de la compactification de Fulton-McPherson d'un espace de configuration qui est précisément de dimension $2n+m-2$ [FM], [K § 5]. Il dépend lui aussi d'un ordre sur l'ensemble des arêtes, mais le produit $W_\Gamma.\mathcal{B}_\Gamma$ n'en dépend plus.

Plus précisément on désigne par $\mathrm{Conf}_{n,m}$ l'ensemble des $(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_m)$ où les p_j sont des points distincts appartenant au demi-plan de Poincaré :

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}\, z > 0\},$$

et où les q_j sont des points distincts sur $\mathbb{R}$ vu comme le bord de $\mathcal{H}$. Le groupe :

$$G = \{z \mapsto az + b \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R} \text{ et } a > 0\}$$

agit librement sur $\mathrm{Conf}_{n,m}$. Le quotient :

$$C_{n,m} = \mathrm{Conf}_{n,m} / G$$

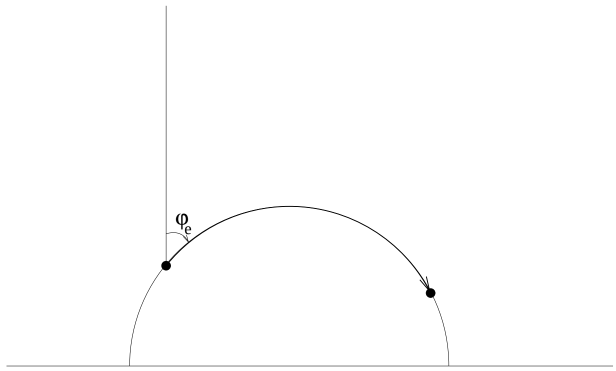
est une variété de dimension $2n + m - 2$. On a une action naturelle des groupes de permutations S_n et S_m sur $C_{n,m}$, de sorte qu'on peut parler de $C_{A,B}$ où A et B sont deux ensembles finis. La compactification de Fulton-MacPherson $\overline{C_{A,B}}$ de $C_{A,B}$ est une variété à coins qui peut se voir comme l'adhérence du plongement de $C_{A,B}$ dans une variété compacte de grande dimension, produit de tores $T = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et d'espaces projectifs $\mathbb{C}P^2$ [AMM § I.2] :

$$(r_1, \ldots, r_{n+m}) \longmapsto \big(\mathrm{Arg}(r_i - r_j)_{(i,j)}, \, [r_i - r_j : r_j - r_k : r_k - r_i]_{(i,j,k)}\big).$$

Pour tout graphe $\Gamma \in G_{n,m}$ on construit une fonction d'angle :

$$\Phi_\Gamma : \overline{C}_{n,m} \longrightarrow T^{|E_\Gamma|}$$

de la façon suivante : on trace le graphe dans $\overline{\mathcal{H}}$ en reliant les sommets par des géodésiques pour la métrique hyperbolique, et à chaque arête $e = (a, b)$ on associe l'angle φ_e que fait la demi-droite verticale issue de a avec l'arête e :



En choisissant un ordre sur les arêtes ceci définit Φ_Γ sur $C_{n,m}$ et on vérifie que cette application se prolonge à la compactification. Soit ω_Γ la forme différentielle $\Phi_\Gamma^*(dv)$ sur $C_{n,m}$ où dv est la forme volume normalisée sur $T^{|E_\Gamma|}$. La forme ω_Γ se prolonge à la compactification. Soit $C_{n,m}^+$ la composante connexe de $C_{n,m}$ où les $q_1, \ldots, q_m$ sont rangés par ordre croissant. Les orientations naturelles du demi-plan $\mathcal{H}$ et de $\mathbb{R}$ définissent une orientation de $\mathrm{Conf}_{n,m}^+$, et par passage au quotient une orientation naturelle de $C_{n,m}^+$, car l'action du groupe G préserve l'orientation. On définit alors le poids W_Γ par :

$$W_\Gamma = \int_{\overline{C}_{n,m}^+} \omega_\Gamma. \tag{I.1.7}$$

Remarque : ce poids est un peu différent du poids défini par M. Kontsevich dans [K § 6.2] : nous ne multiplions pas l'intégrale par le facteur $\big(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{s_k!}\big)$. Ce facteur multiplicatif est compensé par la convention sur les produits extérieurs (0.17) que nous avons adoptée, qui diffère de celle de [K. § 6.3].

I.2. Permutation des arêtes

Soit Γ un graphe admissible dans $G_{n,m}$. Le groupe $S_{s_1} \times \cdots \times S_{s_n}$, produit des groupes de permutations des arêtes attachés à chaque sommet, agit naturellement sur Γ par permutation de l'étiquetage des arêtes. Il est clair que l'on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\sigma.\Gamma} &= \varepsilon(\sigma)\mathcal{B}_\Gamma \\ W_{\sigma.\Gamma} &= \varepsilon(\sigma)W_\Gamma, \end{aligned} \tag{I.2.1}$$

de sorte que le produit $W_\Gamma.\mathcal{B}_\Gamma$ ne dépend pas de l'étiquetage.

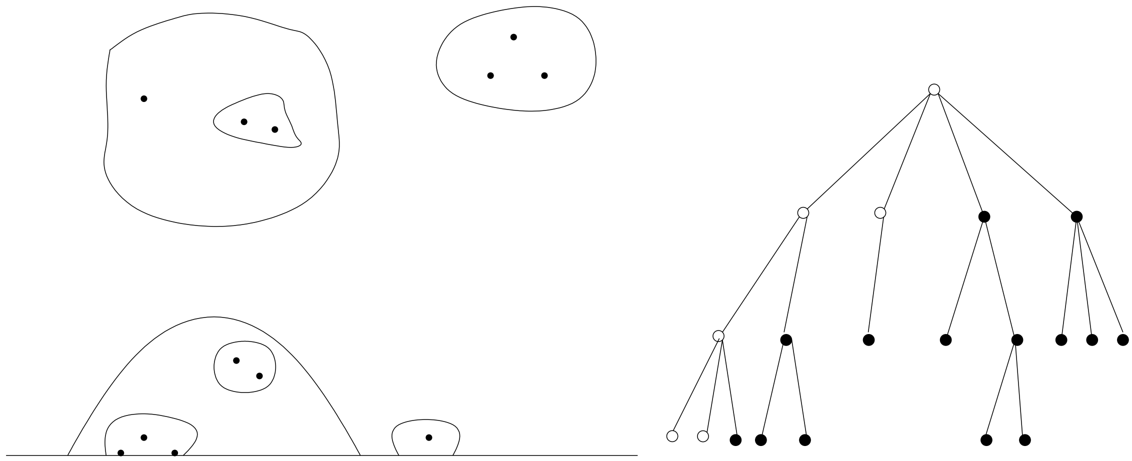
I.3. Stratification du bord

Une suite de configurations (D_n) tend vers un point D du bord de $\overline{C_{n,m}}$ lorsque des points se confondent ou tendent vers la droite réelle lorsqu'on choisit pour chaque configuration un représentant R_n en "position standard", c'est-à-dire (par exemple), quitte à faire agir le groupe G, un représentant tel que son diamètre soit égal à 1 et tel que l'abscisse de son barycentre soit 0.

On appelle *concentration* une suite (R'_n) d'ensembles de points telle que $R'_n \subset R_n$, telle que le cardinal de R'_n soit indépendant de n, telle que la distance entre deux points quelconques de R'_n tende vers zéro, et telle que si R'_n ne contient qu'un seul point, alors ce point appartient à $\mathcal{H}$ mais tend vers l'axe réel. On appelle *nuage* une concentration maximale pour l'inclusion. On remarque que, par définition de la position standard, un nuage ne peut pas contenir tous les points de la configuration.

On peut alors choisir un nuage (R'_n) , l'observer "au microscope", c'est-à-dire faire agir un élément du groupe G (différent) sur chaque ensemble de points R'_n pour l'amener en position standard pour tout n, et recommencer l'opération ci-dessus. Le processus s'arrête après un nombre fini d'étapes, la dernière étape ne fournissant plus de nuages. Autrement dit le processus s'arrête lorsque tous les points sont distingués individuellement et se trouvent soit sur l'axe réel, soit loin de l'axe réel.

Le processus itératif ci-dessus peut se décrire à l'aide d'un arbre enraciné. Les sommets autres que les feuilles et la racine correspondent au nuages, les feuilles correspondent aux points qui apparaissent à la fin du processus. Un sommet *noir* correspond à un nuage aérien (ou à un point aérien si c'est une feuille), et un sommet *blanc* correspond à un nuage (ou à un point) terrestre. La racine est par convention blanche (on considère l'ensemble de la configuration vue de loin comme un nuage terrestre), chaque sommet blanc a des descendants blancs ou noirs, mais tous les descendants d'un sommet noir sont noirs. Chaque arbre correspond à une strate du bord, dont la codimension est égale aux nombre $c(T)$ de sommets intermédiaires (ni racine ni feuilles), ou si l'on préfère, au nombre d'observations au microscope nécessaires. Voici un exemple représenté à l'aide de nuages, avec l'arbre correspondant :



Soit Conf_n l'ensemble des n-uplets de points distincts dans $\mathbb{C}^n$. On note C_n le quotient de Conf_n par l'action du groupe $G' = \{z \mapsto az + b, a > 0 \text{ et } b \in \mathbb{C}\}$. C'est une variété de dimension $2n - 3$, qu'il ne faut pas confondre avec $C_{n,0}$. Le groupe de permutations S_n agit naturellement sur C_n, de sorte qu'on peut parler de C_E où E est un ensemble fini. Pour un arbre T comme décrit ci-dessus on peut décrire la strate correspondante $\partial_T C_{n,m}$ comme un produit d'espaces de configuration $C_{A,B}$ et C_E de la façon suivante : on désigne par B l'ensemble des sommets blancs qui ne sont ni feuille ni racine, et par N l'ensemble des sommets noirs qui ne sont ni feuille ni racine. Pour tout sommet v qui n'est pas une feuille (mais pouvant être la racine) on désigne par B_v l'ensemble de ses descendants blancs et par N_v l'ensemble de ses descendants noirs. Alors on a :

$$\partial_T C_{n,m} = \prod_{v \text{ blanc}} C_{N_v, B_v} \times \prod_{v \text{ noir}} C_{N_v}. \tag{I.3.1}$$

on a $|N| + n = \sum_{v \text{ noir}} |N_v| + \sum_{v \text{ blanc}} |N_v|$, et $|B| + m = \sum_{v \text{ blanc}} |B_v|$. Sachant que n est le nombre de feuilles noires et m le nombre de feuilles blanches on a donc :

$$\begin{aligned}
\dim \partial_T &= \sum_{v \text{ blanc}} (2|N_v| + |B_v| - 2) + \sum_{v \text{ noir}} (2|N_v| - 3) \\
&= 2n + 2|N| + m + |B| - 2(|B| + 1) - 3|N| \\
&= 2n + m - 2 - |N| - |B|.
\end{aligned}$$

La codimension de ∂_T dans $\overline{C_{n,m}}$ est donc égale au nombre total $c(T)$ de sommets intermédiaires, c'est-à-dire au nombre nécessaire de grossissements au microscope.

I.4. Principe de démonstration du théorème de formalité

On reprend les notations de l'introduction : l'équation de formalité $\mathcal{U} \circ Q^1 = Q^2 \circ \mathcal{U}$ se développe en une suite (E_n) d'équations exprimant le coefficient de Taylor $\mathcal{U}_n$ en fonction de Q_2^1, Q_1^2, Q_2^2 et les $\mathcal{U}_k$ pour $k < n$. On montre, en remplaçant $\mathcal{U}$ par son expression donnée au § I.1, que l'équation (E_n) est équivalente à :

$$\sum_{\Gamma \in G_n} C_\Gamma \mathcal{B}_\Gamma = 0, \tag{I.4.1}$$

où pour $\Gamma \in G_{n,m}$ le poids C_Γ est donné par :

$$C_\Gamma = \sum_{T, c(T)=1} \int_{\partial_T \overline{C_{n,m}}^+} \omega_\Gamma = \int_{\partial \overline{C_{n,m}}^+} \omega_\Gamma. \tag{I.4.2}$$

On exprime ici que l'intégrale sur le bord est la somme des intégrales sur les strates de codimension 1 convenablement orientées (cf. [AMM] chap. 1). Or $d\omega_\Gamma = 0$. La formule de Stokes sur la variété à coins $\overline{C_{n,m}}^+$ implique l'annulation de tous les poids C_Γ, et donc le théorème de formalité [K chap. 6], [AMM].

II. L'argument d'homotopie

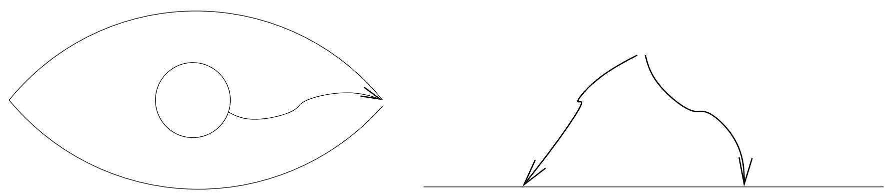
On reprend les notations de l'introduction. Il s'agit de comparer les deux quantités $\mathcal{U}'_{\hbar\gamma}(\alpha \cup \beta)$ et $\mathcal{U}'_{\hbar\gamma}(\alpha) \cup \mathcal{U}'_{\hbar\gamma}(\beta)$ en les exprimant à l'aide de graphes et de poids. L'idée est de mettre en évidence une famille Z_t de sous-variétés à coins de codimension 2 (pour $t \in [0,1]$) et une forme fermée ω à valeurs dans les opérateurs multi-différentiels telle que

$$\int_{Z_0} \omega = \mathcal{U}'_{\hbar\gamma}(\alpha \cup \beta) \qquad \text{et} \qquad \int_{Z_1} \omega = \mathcal{U}'_{\hbar\gamma}(\alpha) \cup \mathcal{U}'_{\hbar\gamma}(\beta).$$

Grâce à la formule de Stokes la différence entre les deux quantités s'exprime alors par l'intégrale sur Y de ω, où Y désigne le bord de la réunion des Z_t pour $t \in [0,1]$.

II.1. L'oeil $\overline{C_{2,0}}$.

Les différentes strates de $\overline{C_{2,0}}$ sont $C_{2,0}$, C_2 (lorsque les deux points se rapprochent dans $\mathcal{H}$), deux copies de $C_{1,1}$ (lorsque l'un ou l'autre point se rapproche de $\mathbb{R}$), et $C_{0,2}$ (lorsque les deux points se rapprochent de $\mathbb{R}$) qui est constitué par deux points. On trace un chemin $\xi(t)$ dans $\overline{C_{2,0}}$ tel que $\xi(0) \in C_2$ et $\xi(1) \in C_{0,2}^+$: autrement dit on part de deux points confondus dans $\mathcal{H}$ pour aboutir à deux points distincts sur $\mathbb{R}$.



II.2. Une famille de sous-variétés de codimension deux

Soit $F : C^+_{n+2,m} \to C_{2,0}$ l'application surjective consistant à oublier tous les points sauf les deux premiers sommets aériens. Cette application se prolonge naturellement par continuité en $F : \overline{C_{n+2,m}}^+ \to \overline{C_{2,0}}$. On définit alors pour $t \in [0,1]$:

$$Z_t = F^{-1}\big(\xi(t)\big). \tag{II.2.1}$$

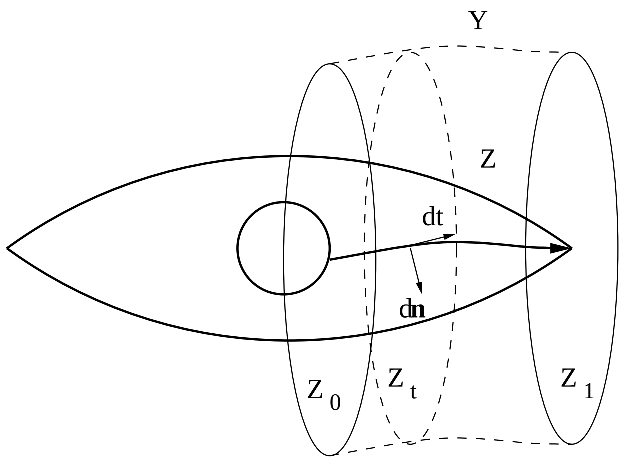
Il est clair que Z_0 et Z_1 sont contenus dans le bord de $C^+_{n+2,m}$. Appelant Z la réunion des Z_t pour $t \in]0,1[$, et posant $Y = Z \cap \partial C_{n+2,m}$ on a alors :

$$\partial Z = Z_0 \amalg Z_1 \amalg Y. \tag{II.2.2}$$

Il faut maintenant définir précisément l'orientation des espaces de configuration et des différentes strates qui interviennent. Soit Ω la forme volume sur $C^+_{n+2,m}$ définie dans [AMM § I.1], obtenue par passage au quotient de la forme sur $\mathrm{Conf}_{n+2,m}$:

$$\Omega_{p_1,\ldots,p_n\,;\,q_1,\ldots,q_m} = dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n+2} \wedge dy_{n+2} \wedge dq_1 \wedge \cdots \wedge dq_m$$

(avec $p_j = x_j + iy_j$).



Soit $d\mathbf{n}$ la normale au chemin ξ dans l'oeil $\overline{C_{2,0}}$ telle que $d\mathbf{n} \wedge dt$ forme un repère direct du plan dans lequel est dessiné l'oeil (voir dessin). La forme volume s'écrit au voisinage d'un point quelconque de Z_t :

$$\Omega = d\mathbf{n} \wedge dt \wedge \Omega',$$

ce qui définit une forme volume Ω' (et donc une orientation) sur Z_t.
Soit Γ un graphe admissible dans $G_{n+2,m}$, et ω_Γ la forme différentielle associée. On pose :

$$W^t_\Gamma = \int_{Z_t} \omega_\Gamma \tag{II.2.3}$$

où Z_t est orientée comme ci-dessus. Cette intégrale est nulle sauf éventuellement si le nombre d'arêtes de Γ est égal à la dimension de Z_t, c'est-à-dire $2n + m$.

Lemme II.2.1.
Le poids W^0_Γ est nul si les sommets 1 et 2 sont reliés par une arête, et si 1 et 2 ne sont pas reliés on a avec nos choix d'orientation :

$$W^0_\Gamma = W_\Delta = \int_{\overline{C_{n+1,m}}^+} \omega_\Delta, \tag{II.2.4}$$

où Δ est le graphe de $G_{n+1,m}$ obtenu en confondant les sommets 1 et 2.

Démonstration. Il n'y a pas de strate de codimension 2 contenue dans Z_0. On a donc :

$$\mathring{Z}_0 = \coprod_{c(T)=1} Z_0 \cap \partial_T C_{n+2,m}. \tag{II.2.5}$$

D'après le § I.3 les strates de codimension 1 (les *faces*) sont obtenues en considérant une seule fois un nuage de points. Elles sont donc de deux types : le type 1 pour un nuage aérien, et le type 2 pour un nuage terrestre, qui contient donc à la fois des points aériens et des points terrestres. Il est clair que seules les faces de type 1 ont une intersection non vide avec Z_0, et que le nuage à considérer contient alors forcément les sommets 1 et 2.

Soit $A \subset \{1, \ldots, n\}$ un tel nuage dans $C_{n+2,m}$, soit Σ_A la face associée, soit $\Gamma \subset G_{n+2,m}$ un graphe à $2n+m$ arêtes. Soit Γ^2_A le graphe obtenu en contractant le nuage A sur un point, et soit Γ^1_A le graphe interne, formé des seuls points de A et des arêtes qui relient deux points de A. On a alors :

$$\int_{\overline{\Sigma_A \cap Z_0}} \omega_\Gamma = \int_{\overline{C_A \cap Z_0}} \omega_{\Gamma^1_A} \int_{\overline{C_{n-|A|+3,m}}^+} \omega_{\Gamma^2_A}. \tag{II.2.6}$$

Si les sommets 1 et 2 sont reliés par une arête e, l'angle associé φ_e est constant sur Z_0, et donc le terme de gauche du produit s'annule. Il suffit donc de considérer les graphes Γ où 1 et 2 ne sont pas reliés. Soit $\widetilde{\Gamma}$ le graphe Γ auquel on a rajouté (en première position pour l'ordre total sur les arêtes) une arête e joignant 1 à 2. On a alors :

$$\int_{C_A \cap Z_0} \omega_{\Gamma^1_A} = \int_{C_A} d\varphi_e \wedge \omega_{\Gamma^1_A} = \int_{C_A} \omega_{\widetilde{\Gamma}^1_A}. \tag{II.2.7}$$

Cette dernière intégrale est nulle dès que $|A| \geq 3$, d'après le lemme 6.6 de [K]. On est donc ramené au cas où le nuage n'est constitué que des sommets 1 et 2. Le graphe interne est réduit à deux points reliés, et le graphe externe est le graphe Δ. On a alors :

$$\int_{C_A \cap Z_0} \omega_{\Gamma^1_A} \int_{\overline{C_{n+1,m}}^+} \omega_{\Gamma^2_A} = \int_{C_2} d\varphi_e \int_{\overline{C_{n+1,m}}^+} \omega_\Delta. \tag{II.2.8}$$

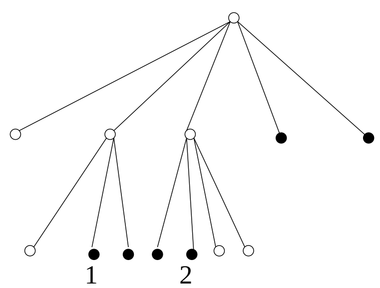
Il n'y a donc qu'une seule strate Σ_A de codimension 1 à considérer. On a donc, en utilisant l'orientation de la strate donnée par le lemme I.2.1 de [AMM] :

$$\begin{aligned}
W_\Gamma^0 &= \int_{Z_0} \omega_\Gamma \\
&= \int_{\Sigma_A \cap Z_0} \omega_\Gamma \\
&= -\int_{\Sigma_A} \omega_{\widetilde{\Gamma}} \\
&= -(-\int_{C_A} d\varphi_e \int_{\overline{C_{n+1,m}}} \omega_\Delta) \\
&= \int_{\overline{C_{n+1,m}}} \omega_\Delta,
\end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme. Le premier signe moins vient du fait que Z_0 est orientée avec une normale rentrante, alors que les conventions de [AMM] utilisent la normale sortante. il vient donc d'après [AMM lemme I.2.1] un deuxième signe moins qui annule le premier.

•

Considérons maintenant Z_1. Son intersection avec les strates de codimension 1 est vide, donc Z_1 est une réunion de strates de codimension 2. Par définition de Z_1 ces strates sont des C_T où T est un arbre du type ci-dessous :



c'est-à-dire qu'il y a deux nuages terrestres, un contenant le sommet 1 et l'autre contenant le sommet 2. Une telle strate s'écrit donc :

$$C_T = C_{n_1,m_1} \times C_{n_2,m_2} \times C_{n_3,m_3}, \tag{II.2.9}$$

avec $n_1 + n_2 + n_3 = n + 2$ et $m_1 + m_2 + (m_3 - 2) = m$. Son intersection avec Z_1 est la composante connexe :

$$C_T^+ = C_{n_1,m_1}^+ \times C_{n_2,m_2}^+ \times C_{n_3,m_3}^+.$$

Les deux premiers facteurs représentent les deux nuages et le dernier facteur représente la configuration "avant grossissement". Soit Γ un graphe dans $G_{n+2,m}$ contenant $2n + m$ arêtes, soient Γ_1^T et Γ_2^T les deux graphes internes correspondant aux deux nuages, et soit Γ_3^T le graphe externe.

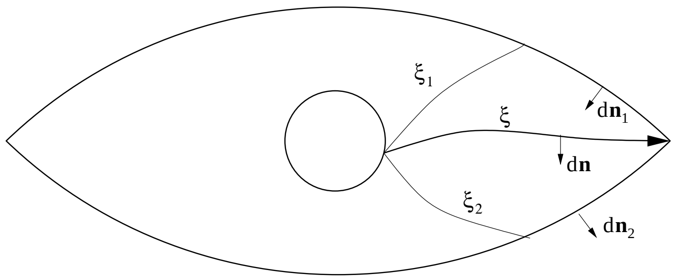
Lemme II.2.2.
On a $m_3 = 2$. Si Γ possède une ou plusieurs flèches sortant du graphe interne Γ_1 ou Γ_2 alors $W^1_\Gamma = 0$. Dans le cas contraire on a :

$$W^1_\Gamma = \sum_T W_{\Gamma_1^T} W_{\Gamma_2^T} W_{\Gamma_3^T}, \tag{II.2.10}$$

la somme portant sur tous les arbres T décrits ci-dessus.

Démonstration. Dans le premier cas, lorsqu'il existe une "mauvaise flèche" e, l'angle φ_e correspondant est constant sur Z_1, et donc la forme différentielle à intégrer s'annule [K § 6.4.2.2]. Au signe près, la deuxième assertion découle naturellement de l'expression (II.2.9) donnant C_T comme produit de trois espaces de configuration, et aussi du fait que pour intégrer sur Z_1 il suffit de faire la somme des intégrations sur les C_T^+ où T décrit l'ensemble des arbres dessinés ci-dessus. Reste à préciser les orientations pour démontrer que le signe annoncé est le bon.

On oriente chaque composante $C^+_{n_i,m_i}$ de la strate C_T^+ par sa forme volume $\Omega_i, i = 1, 2, 3$. Le choix de normale que nous avons fait pour le chemin ξ induit une orientation de chacune des paupières de l'oeil : la paupière supérieure est orientée par la normale rentrante $d\mathbf{n}_1$, et la paupière inférieure est orientée par la normale sortante $d\mathbf{n}_2$. On s'en convainc en traçant deux chemins ξ_1 et ξ_2 homotopes à ξ dans $\overline{C_{2,0}}$, l'un se confondant avec la paupière supérieure pour $t \geq 1/2$, et l'autre se confondant avec la paupière inférieure pour $t \geq 1/2$:



De même que les coins de l'oeil forment l'intersection des deux paupières, la strate C_T de codimension 2 est l'intersection des deux strates C_{T_1} et C_{T_2} de codimension 1 obtenues respectivement en contractant seulement le nuage de gauche (resp. de droite). D'après [AMM lemme I.2.2] la forme volume Ω s'écrit :

$$\Omega = -d\mathbf{n}_1 \wedge \Omega(C^+_{T_1}) = (-1)^{lm_1+l+m_1+1} d\mathbf{n}_1 \wedge \Omega_1 \wedge \Omega(C^+_{n_2+n_3,1+m_2}).$$

L'entier l désigne le nombre de points terrestres à gauche du nuage de gauche : on a donc $l = 0$. La convention appliquée dans [AMM] est celle de la normale sortante : comme $d\mathbf{n}_1$ est rentrante on a un signe opposé qui apparaît par rapport à [AMM lemme I.2.2].

On contracte maintenant le nuage de droite. On a, toujours grâce à [AMM lemme I.2.2] :

$$\Omega(C^+_{n_2+n_3,1+m_2}) = d\mathbf{n}_2 \wedge \Omega(C^+_{T'}) = (-1)^{lm_2+l+m_2} d\mathbf{n}_2 \wedge \Omega_2 \wedge \Omega_3,$$

où $C_{T'}$ désigne la strate de codimension 1 de $C_{n_2+n_3,1+m_2}$ homéomorphe à C_T, obtenue en contractant le nuage de droite une fois que le nuage de gauche est déjà contracté. Cette fois-ci $l = 1$, car il y a un point à gauche du nuage : celui produit par la contraction du nuage de gauche. la normale $d\mathbf{n}_2$ étant sortante il n'y a pas de changement de signe ici. De plus on peut manifestement remplacer $d\mathbf{n}_2$ par dt pour peu que le chemin ξ arrive transversalement à la paupière inférieure au coin de l'oeil. On a donc finalement :

$$\begin{aligned}\Omega &= (-1)^{m_1+1}(-1)^1 d\mathbf{n}_1 \wedge \Omega_1 \wedge d\mathbf{n}_2 \wedge \Omega_2 \wedge \Omega_3 \\ &= d\mathbf{n} \wedge dt \wedge \Omega_1 \wedge \Omega_2 \wedge \Omega_3.\end{aligned}$$

Chaque strate du type T intervenant dans Z_1 est donc orientée par $\Omega_1 \wedge \Omega_2 \wedge \Omega_3$, d'où le lemme.

•

Remarque : Nous aurions pu choisir de contracter le nuage de droite avant celui de gauche (autrement dit, nous aurions pu suivre le chemin ξ_2 pour arriver à la strate T au lieu de suivre le chemin ξ_1). Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que cette alternative donne le même résultat.

II.3. Expression du cup-produit à l'aide de graphes et de poids

Les expressions suivantes constituent le premier pas de la démonstration du théorème 0.2 :

Proposition II.3.1.
Pour tout $\alpha, \beta \in \mathfrak{g}_1[1]$ on a :

1. $$\mathcal{U}'_{\hbar\gamma}(\alpha \cup \beta) = \sum_{n\geq 0} \frac{\hbar^n}{n!} \sum_{\Gamma \in G_{n+2,m}} W^0_\Gamma \mathcal{B}_\Gamma(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma \otimes \cdots \otimes \gamma) \qquad \text{(II.3.1)}$$
2. $$\mathcal{U}'_{\hbar\gamma}(\alpha) \cup \mathcal{U}'_{\hbar\gamma}(\beta) = \sum_{n\geq 0} \frac{\hbar^n}{n!} \sum_{\Gamma \in G_{n+2,m}} W^1_\Gamma \mathcal{B}_\Gamma(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma \otimes \cdots \otimes \gamma). \qquad \text{(II.3.2)}$$

Démonstration. On commence par démontrer la première assertion. On suppose que α est homogène de degré $|\alpha| = m_1 - 1$ dans $\mathfrak{g}_1$, et que β est homogène de degré $|\beta| = m_2 - 1$ dans $\mathfrak{g}_2$. On rappelle que γ est homogène de degré 1. L'expression explicite (0.14) de $\mathcal{U}'_{\hbar\gamma}$ donnée dans l'introduction, ainsi que l'expression explicite (I.1.5) des $\mathcal{U}_n$ à l'aide de graphes et de poids, nous donnent :

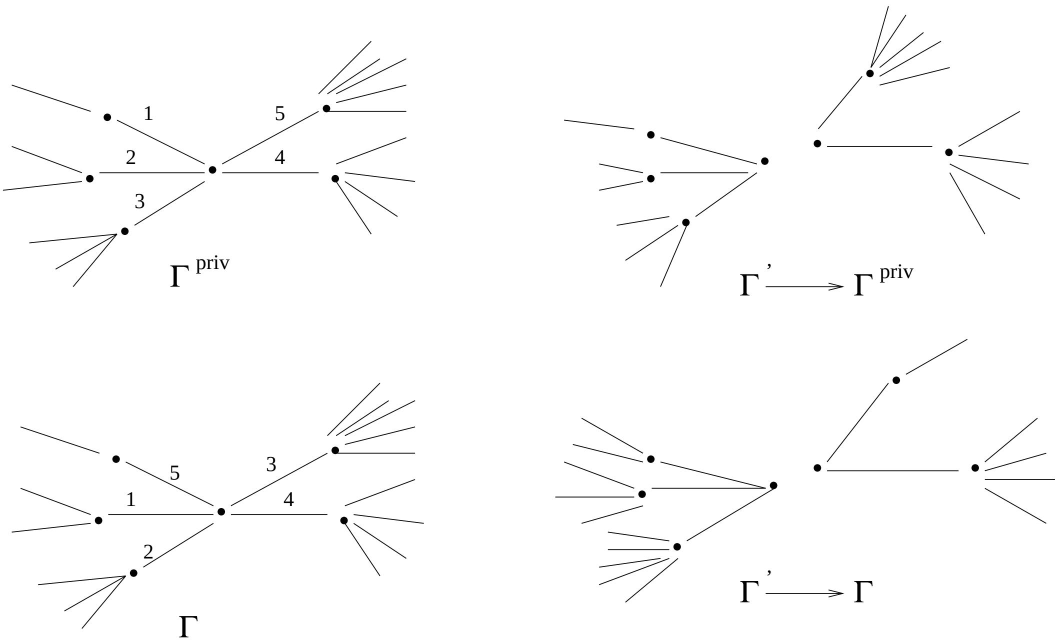
$$\mathcal{U}'_{\hbar\gamma}(\alpha \cup \beta) = \mathcal{U}'_{\hbar\gamma}(\alpha \wedge \beta) = \sum_{n\geq 0} \frac{\hbar^n}{n!} \sum_{\Gamma \in G_{n+1,m}} W_\Gamma \mathcal{B}_\Gamma\big((\alpha \wedge \beta) \otimes \gamma \otimes \cdots \otimes \gamma\big), \qquad \text{(II.3.3)}$$

avec $m = |\alpha| + |\beta| + 2 = m_1 + m_2$.

Introduisons provisoirement, juste pour la suite de la démonstration, une classe spéciale de graphes : on dira que l'ordre des arêtes d'un graphe Γ de $G_{n+1,m}$ est *privilégié par rapport au premier sommet* si l'application qui à une arête issue du premier sommet associe son sommet d'arrivée est croissante. Tout graphe $\Gamma \in G_{n+1,m}$ se déduit d'un graphe privilégié par application d'une unique permutation σ des arêtes issues du premier sommet. On notera $\varepsilon(\Gamma)$ la signature de cette permutation, et on notera Γ^{priv} le graphe privilégié naturellement associé au graphe Γ.

Soient Γ et Γ' deux graphes admissibles (munis chacun d'un ordre sur leurs arêtes compatible avec l'ordre sur leurs sommets). La notation $\Gamma' \to \Gamma$ signifie que le graphe Γ se déduit de Γ' par compression d'un nuage de points. L'ordre sur les arêtes de Γ' impose l'ordre sur les arêtes de Γ, et réciproquement l'ordre sur les arêtes de Γ impose l'ordre sur les arêtes de Γ' qui sortent du nuage.

Les graphes Γ' donnant Γ par contraction peuvent être très différents des Γ' donnant Γ^{priv} par contraction sur un sommet s : on s'en convainc (voir dessin ci-dessous) par un exemple simple dans le cas où s n'a pas d'arêtes incidentes et où le nuage est composé de deux sommets aériens non reliés. Il n'y a qu'un seul Γ' par graphe contracté Γ dans ce cas-là.



Lemme II.3.2.
Soit Γ_0 un graphe dans $G_{n+1,m}$ privilégié par rapport au premier sommet. Alors,

$$\begin{aligned}(m_1+m_2)!\mathcal{B}_{\Gamma_0}\big((\alpha\wedge\beta)\otimes\gamma\otimes\cdots\otimes\gamma\big) &= \sum_{\Gamma,\,\Gamma^{\mathrm{priv}}=\Gamma_0} \varepsilon(\Gamma)\mathcal{B}_{\Gamma}\big((\alpha\wedge\beta)\otimes\gamma\otimes\cdots\otimes\gamma\big)\\ &= \sum_{\Gamma,\,\Gamma^{\mathrm{priv}}=\Gamma_0} \varepsilon(\Gamma)\sum_{\Gamma'\to\Gamma}\mathcal{B}_{\Gamma'}(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma\otimes\cdots\otimes\gamma),\end{aligned} \tag{II.3.4}$$

où la deuxième somme est prise sur tous les graphes Γ' dans $G_{n+2,m}$ construits à partir de Γ en dédoublant le sommet 1 de valence m_1+m_2 étiqueté par $\alpha\wedge\beta$ en deux sommets 1 et 2 de valence m_1 et m_2 respectivement, et en répartissant les arêtes incidentes entre les deux sommets de toutes les manières possibles.

Démonstration. L'identité bien connue sur les produits extérieurs (avec la convention (0.17)) :

$$< \alpha\wedge\beta,\, dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{m_1+m_2} >= \frac{1}{(m_1+m_2)!}\sum_{\sigma\in S_{m_1+m_2}} \varepsilon(\sigma) < \alpha,\, dx_{\sigma_1}\wedge\cdots\wedge dx_{\sigma_{m_1}} >< \beta,\, dx_{\sigma_{m_1+1}}\wedge\cdots\wedge dx_{\sigma_{m_1+m_2}} > \tag{II.3.5}$$

montre que l'on a pour toute application I de $E_{\Gamma'}$ dans $\{1,\ldots,d\}$:

$$(\alpha\wedge\beta)_1^I = \frac{1}{(m_1+m_2)!}\sum_{\sigma\in S_{m_1+m_2}} \varepsilon(\sigma)\alpha_1^{I\circ\sigma}\beta_2^{I\circ\sigma}. \tag{II.3.6}$$

On remplace alors $\mathcal{B}_{\Gamma_0}\big((\alpha\wedge\beta)\otimes\gamma\otimes\cdots\otimes\gamma\big)$ par son développement explicite donné par (I.1.4). L'utilisation de la formule de Leibniz fait alors apparaître une et une seule fois tous les graphes $\Gamma'\to\Gamma$ décrits ci-dessus (par répartition des arêtes incidentes entre les sommets 1 et 2). Le groupe $S_{m_1+m_2}$ agit librement transitivement sur l'ensemble des graphes Γ tels que $\Gamma^{\mathrm{priv}}=\Gamma_0$, et le signe $\varepsilon(\Gamma)$ est égal à la signature $\varepsilon(\sigma)$ où σ est la permutation telle que $\Gamma=\sigma\Gamma_0$.

•

Sachant que l'on a $W_\Gamma=\varepsilon(\Gamma)W_{\Gamma_0}$, on déduit du lemme précédent et du lemme II.2.1 :

$$\sum_{\Gamma,\,\Gamma^{\mathrm{priv}}=\Gamma_0} W_\Gamma\mathcal{B}_\Gamma\big((\alpha\wedge\beta)\otimes\gamma\otimes\cdots\otimes\gamma\big) = \sum_{\Gamma,\,\Gamma^{\mathrm{priv}}=\Gamma_0}\sum_{\Gamma'\to\Gamma} W^0_{\Gamma'}\mathcal{B}_{\Gamma'}\big(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma\otimes\cdots\otimes\gamma\big).$$

On en déduit l'assertion 1 de la proposition en sommant sur tous les graphes Γ de $G_{n+1,m}$ pour un n donné, en multipliant par $\frac{\hbar^n}{n!}$ et en sommant sur les entiers n.

Suite de la démonstration de la proposition : les égalités (0.14), (0.15) et (I.1.5) nous donnent :

$$\mathcal{U}'_{\hbar\gamma}(\alpha)\cup\mathcal{U}'_{\hbar\gamma}(\beta)(f_1\otimes\cdots\otimes f_{m_1+m_2}) =$$
$$\sum_{k,l\geq 0}\frac{1}{k!l!}\sum_{\substack{\Gamma_1\in G_{k+1,m_1}\\ \Gamma_2\in G_{l+1,m_2}}} W_{\Gamma_1}W_{\Gamma_2}\mathcal{B}_{\Gamma_1}(\alpha\otimes\gamma\otimes\cdots\otimes\gamma)(f_1\otimes\cdots\otimes f_{m_1})*\mathcal{B}_{\Gamma_2}(\beta\otimes\gamma\otimes\cdots\otimes\gamma)(f_{m_1+1}\otimes\cdots\otimes f_{m_1+m_2}). \tag{II.3.7}$$

Développant le produit $*$ à l'aide de (0.6) et (I.1.5) on obtient :

$$\mathcal{U}'_{\hbar\gamma}(\alpha)\cup\mathcal{U}'_{\hbar\gamma}(\beta)(f_1\otimes\cdots\otimes f_{m_1+m_2}) = \sum_{k,l,r\geq 0}\frac{1}{k!l!r!}\sum_{\substack{\Gamma_1\in G_{k+1,m_1}\\ \Gamma_2\in G_{l+1,m_2}\\ \Gamma_3\in G_{r,2}}} W_{\Gamma_1}W_{\Gamma_2}W_{\Gamma_3}$$
$$\mathcal{B}_{\Gamma_3}(\gamma\otimes\cdots\otimes\gamma)\Big(\mathcal{B}_{\Gamma_1}(\alpha\otimes\gamma\otimes\cdots\otimes\gamma)(f_1\otimes\cdots\otimes f_{m_1})\otimes\mathcal{B}_{\Gamma_2}(\beta\otimes\gamma\otimes\cdots\otimes\gamma)(f_{m_1+1}\otimes\cdots\otimes f_{m_1+m_2})\Big). \tag{II.3.8}$$

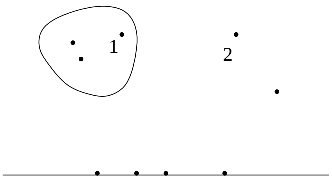
Rappelons que toute strate C_T de codimension 2 incluse dans Z_1 induit une décomposition d'un graphe $\Gamma\in G_{n+2,m}$ en deux graphes internes $\Gamma_1\in G_{n_1,m_1}$, $\Gamma_2\in G_{n_2,m_2}$ et un graphe externe $\Gamma_3\in G_{n_3,m_3}$. Compte tenu des degrés respectifs de α, β et γ les graphes Γ intervenant dans le membre de droite de l'égalité (II.3.2) vérifient $m_3=2$ pour toute décomposition de ce type : autrement dit pour toute strate C_T de codimension 2 incluse dans Z_1 les deux nuages absorbent tous les points terrestres. Réciproquement, un triplet $(\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3)$ de graphes comme dans la formule (II.3.8) ci-dessus provient d'un "grand" graphe $\Gamma\in G_{n+2,m}$ avec $n=k+l+r$, $m=m_1+m_2$.

Reste le problème du dénombrement de tous les Γ donnant un triplet $(\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3)$ fixé : on construit Γ à partir de ces trois composantes en choisissant la manière de "brancher" Γ_3 sur Γ_1 et Γ_2, et en choisissant un ordre sur les sommets aériens de Γ compatible avec l'ordre des sommets aériens de Γ_i pour $i=1,2,3$. il y a $|B_{k,l,r}|=\dfrac{(k+l+r)!}{k!l!r!}$ choix possibles de tels ordres, et les choix de branchements apparaissent tous par application de la règle de Leibniz lorsqu'on remplace les $\mathcal{B}_{\Gamma_i}$ par leur expression explicite donnée par (I.1.4). Le lemme II.2.2 permet alors de conclure. La proposition II.3.1 est donc démontrée.

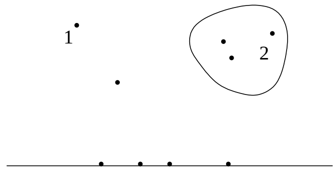
•

II.4. le côté du cylindre : étude de Y.

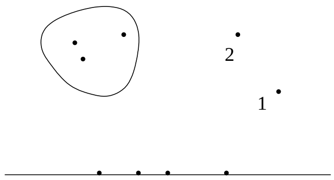
On peut voir le bord de Z comme un cylindre borné (une boîte de conserve) dont Z_0 serait le couvercle supérieur, Z_1 le couvercle inférieur et Y le côté. Il n'y a pas de strates de codimension 2 incluses dans Y, donc l'intérieur de Y est constitué par la réunion des $Z\cap\partial_T C_{n+2,m}$ avec $c(T)=1$, intersection de Y avec les différentes strates de codimension 1. On peut distinguer ici quatre types de strates, suivant la position des sommets 1 et 2 par rapport au nuage :



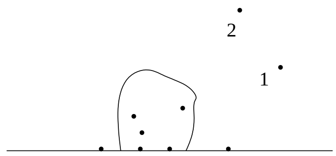
Cas 1



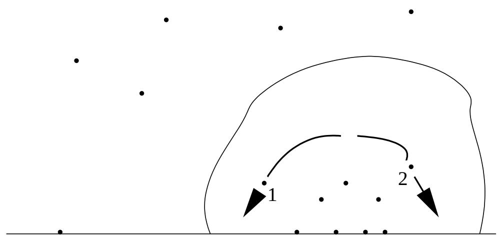
Cas 2



Cas 3 aerien



Cas 3 terrestre



Cas 4

Cas 1 : le nuage contient le sommet 1 et ne contient pas le sommet 2.
Cas 2 : le nuage contient le sommet 2 et ne contient pas le sommet 1.
Cas 3 : le nuage ne contient ni le sommet 1 ni le sommet 2.
Cas 4 : le nuage contient à la fois les sommets 1 et 2.

Dans les cas 1 et 2 le nuage est forcément aérien, car le chemin choisi dans l'oeil $C_{2,0}$ ne rencontre aucune des deux copies de $C_{1,1}$. Dans le cas 3 le nuage peut être aérien ou terrestre. enfin dans le cas 4 le nuage est forcément terrestre : s'il était aérien la strate serait contenue dans $F^{-1}(C_2)$ qui est d'intersection vide avec Y. Une telle strate contient alors le chemin en entier, en ce sens que l'on a :

$$C_T \cap Y = (F_{|_{C_T}})^{-1}\big(\xi([0,1])\big).$$

III. Démonstration du théorème.

III.1. L'intégrale sur Y comme cobord de Hochschild.

Soit pour tout graphe Γ dans $G_{n+2,m}$ le poids W''_Γ défini par :

$$W''_\Gamma = \int_Y \omega_\Gamma \tag{III.1.1}$$

où le bord Y de Z est orienté par la normale sortante. D'après la formule de Stokes on a :

$$\int_{\partial Z} \omega_\Gamma = -W^0_\Gamma + W^1_\Gamma + W''_\Gamma = 0. \tag{III.1.2}$$

Le théorème découlera donc immédiatement de la proposition II.3.1 et de la proposition suivante :

Proposition III.1.1.
Soit γ un 2-tenseur de Poisson formel, soit $*$ l'étoile-produit construit à partir de γ à l'aide du L_∞-quasi-isomorphisme $\mathcal{U}$, soient α un k_1-champ de vecteurs et β un k_2-champ de vecteurs. Alors on a :

$$\sum_{n\geq 0}\frac{\hbar^n}{n!}\sum_{\Gamma\in G_{n+2,m}} W''_\Gamma \mathcal{B}_\Gamma(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma\otimes\cdots\otimes\gamma) = \sum_{n\geq 0}\frac{\hbar^n}{n!}\sum_{\Delta\in G_{n+2,m-1}} \widetilde{W}_\Delta[*,\mathcal{B}_\Delta(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma\otimes\cdots\otimes\gamma)]$$
$$-\sum_{n\geq 0}\frac{\hbar^n}{n!}\sum_{\Delta\in G_{n+1,m}} \widetilde{W}_\Delta\Big((-1)^{(k_1-1)k_2}\mathcal{B}_\Delta([\alpha,\gamma]\otimes\beta\otimes\gamma\otimes\cdots\otimes\gamma)+(-1)^{k_1(k_2-1)}\mathcal{B}_\Delta(\alpha\otimes[\beta,\gamma]\otimes\gamma\otimes\cdots\otimes\gamma)\Big), \tag{III.1.3}$$

où $\widetilde{W}_\Delta$ désigne l'intégrale de ω_Δ sur l'image réciproque de $\xi([0,1])$ par l'application oubli $F:\overline{C_{n+2,m-1}}\to\overline{C_{2,0}}$ ou $F:\overline{C_{n+1,m}}\to\overline{C_{2,0}}$.

Démonstration. On va montrer ceci en décomposant W''_Γ en somme de termes W^T_Γ d'intégrations sur chacune des strates C_T de codimension 1 rencontrant Z, qui sont de quatre types différents (voir § II.3). On rappelle que, suivant [AMM §IV.2], on doit pour que le théorème de formalité soit vérifié remplacer le crochet de Schouten par une petite modification de celui-ci, définie par :

$$[\gamma_1,\,\gamma_2] = -[\gamma_2,\,\gamma_1]_{\text{Schouten}}. \tag{III.1.4}$$

C'est ce crochet modifié qui est utilisé ici dans l'écriture des deux derniers termes de (III.1.3).

III.2. l'intégration sur une strate de type 1 ou 2.

On considère le type 1, le type 2 se traite de la même manière. Le nuage est aérien et contient le sommet 1 (étiqueté par α). On peut supposer que le nuage ne comporte que deux points, car pour un nombre de points supérieur l'intégrale de ω_Γ sur la strate correspondante s'annule, d'après [K Lemma 6.6]. On reprend la terminologie et les notations du § II.3.

Lemme III.2.1.
Soit Δ_0 un graphe dans $G_{n+1,m}$ privilégié par rapport au premier sommet. Alors,

$$\begin{aligned}(k_1+k_2-1)!\mathcal{B}_{\Delta_0}\big([\gamma_1,\,\gamma_2]\otimes\gamma_3\otimes\cdots\otimes\gamma_{n+2}\big) &= \sum_{\Delta,\,\Delta^{\text{priv}}=\Delta_0}\varepsilon(\Delta)\mathcal{B}_\Delta\big([\gamma_1,\,\gamma_2]\otimes\gamma_3\otimes\cdots\otimes\gamma_{n+2}\big)\\ &= (-1)^{(k_1-1)k_2}\sum_{\Delta,\,\Delta^{\text{priv}}=\Delta_0}\varepsilon(\Delta)\sum_{\Gamma\to\Delta}\mathcal{B}_\Gamma(\gamma_1\otimes\cdots\otimes\gamma_{n+2}),\end{aligned} \tag{III.2.1}$$

où la deuxième somme est prise sur tous les graphes Γ dans $G_{n+2,m}$ construits à partir de Δ en dédoublant le sommet 1 de valence k_1+k_2-1 étiqueté par $[\gamma_1,\,\gamma_2]$ en deux sommets 1 et 2 de valence k_1 et k_2 respectivement, en traçant une arête de 1 vers 2 ou de 2 vers 1, et en répartissant les arêtes incidentes entre les deux sommets de toutes les manières possibles.

Démonstration. La formule générale pour le crochet de Schouten **modifié** est la suivante :

$$\begin{aligned}&[\xi_1\wedge\cdots\wedge\xi_{k_1},\,\eta_1\wedge\cdots\wedge\eta_{k_2}] = -[\eta_1\wedge\cdots\wedge\eta_{k_2},\,\xi_1\wedge\cdots\wedge\xi_{k_1}]_{\text{Schouten}}\\ &= \sum_{r=1}^{k_1}\sum_{s=1}^{k_2}(-1)^{r+s+1}[\eta_s,\xi_r]\wedge\eta_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\eta_s}\wedge\cdots\wedge\eta_{k_2}\wedge\xi_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\xi_r}\wedge\cdots\wedge\xi_{k_1}\\ &= \sum_{r=1}^{k_1}\sum_{s=1}^{k_2}(-1)^{r+s+k_1k_2}[\xi_r,\eta_s]\wedge\xi_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\xi_r}\wedge\cdots\wedge\xi_{k_1}\wedge\eta_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\eta_s}\wedge\cdots\wedge\eta_{k_2}.\end{aligned} \tag{III.2.3}$$

On rappelle ([AMM] § II.4, IV.1 et IV.2) que le deuxième coefficient de Taylor de la codérivation Q^1 de $S^+(\mathfrak{g}_1[1])$ vérifie :

$$Q^1_2(\gamma_1.\gamma_2) = (-1)^{(k_1-1)k_2}[\gamma_1,\gamma_2], \tag{III.2.4}$$

soit, avec $\gamma_1=\xi_1\wedge\cdots\wedge\xi_{k_1}$ et $\gamma_2=\eta_1\wedge\cdots\wedge\eta_{k_2}$:

$$Q^1_2(\gamma_1.\gamma_2) = \sum_{r=1}^{k_1}\sum_{s=1}^{k_2}(-1)^{r+s+k_2}[\xi_r,\eta_s]\wedge\xi_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\xi_r}\wedge\cdots\wedge\xi_{k_1}\wedge\eta_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\eta_s}\wedge\cdots\wedge\eta_{k_2}. \tag{III.2.5}$$

On peut supposer que $\xi_1=f\partial_{i_1}$, $\xi_r=\partial_{i_r}$ pour $r>1$, $\eta_1=g\partial_{j_1}$ et $\eta_s=\partial_{j_s}$ pour $s>1$. On a alors, toujours d'après [AMM § IV.2] :

$$Q^1_2(\gamma_1.\gamma_2) = \gamma_1\bullet\gamma_2+(-1)^{k_1k_2}\gamma_2\bullet\gamma_1, \tag{III.2.6}$$

avec :

$$\gamma_1\bullet\gamma_2 = \sum_{r=1}^{k_1}(-1)^{r-1}f\partial_r g\partial_{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{\partial_{i_r}}\wedge\cdots\wedge\partial_{i_{k_1}}\wedge\partial_{j_1}\wedge\cdots\wedge\partial_{j_{k_2}}. \tag{III.2.7}$$

Le lemme découlera donc directement de la formule suivante :

$$\begin{aligned}(k_1+k_2-1)!\mathcal{B}_{\Delta_0}\big((\gamma_1\bullet\gamma_2)\otimes\gamma_3\otimes\cdots\otimes\gamma_{n+2}\big) &= \sum_{\Delta,\,\Delta^{\mathrm{priv}}=\Delta_0}\varepsilon(\Delta)\mathcal{B}_{\Delta}\big((\gamma_1\bullet\gamma_2)\otimes\gamma_3\otimes\cdots\otimes\gamma_{n+2}\big)\\ &= \sum_{\Delta,\,\Delta^{\mathrm{priv}}=\Delta_0}\varepsilon(\Delta)\sum_{\Gamma\to\Delta}\mathcal{B}_{\Gamma}(\gamma_1\otimes\cdots\otimes\gamma_{n+2}),\end{aligned} \tag{III.2.8}$$

où la somme interne porte sur les $\Gamma\to\Delta$ tels que la flèche reliant les sommets 1 et 2 est issue du sommet 1. On déduit de (III.2.7) la formule pour un coefficient quelconque du multi-tenseur $\gamma_1\bullet\gamma_2$:

$$(\gamma_1\bullet\gamma_2)^{u_1\cdots u_{k_1+k_2-1}} = \frac{1}{(k_1+k_2-1)!}\sum_{\sigma\in S_{k_1+k_2-1}}\varepsilon(\sigma)\sum_{v=1}^{d}\sum_{r=1}^{k_1}(-1)^{r-1}\gamma_1^{u_{\sigma_1}\cdots u_{\sigma_{r-1}}vu_{\sigma_r}\cdots u_{\sigma_{k_1-1}}}\partial_v(\gamma_2)^{u_{\sigma_{k_1}}\cdots u_{\sigma_{k_1+k_2-1}}} \tag{III.2.9}$$

Le groupe $S_{k_1+k_2-1}$ agit librement transitivement sur l'ensemble des graphes Δ tels que $\Delta^{\mathrm{priv}}=\Delta_0$, et le signe $\varepsilon(\Delta)$ est égal à la signature $\varepsilon(\sigma)$ où σ est la permutation telle que $\Delta=\sigma\Delta_0$. La formule (III.2.8) se déduit alors de (III.2.4), (III.2.6) et (III.2.9). Le lemme se déduit immédiatement de (III.2.8) du fait que le signe $(-1)^{k_1k_2}$ apparaît lorsque l'on échange les deux premiers sommets et qu'on réordonne les arêtes de manière compatible avec ce nouvel ordre sur les sommets.

•

Corollaire III.2.2.
Soit C_T la strate de codimension 1 de $\overline{C_{n+2,m}}^{+}$ correspondant au rapprochement des deux premiers sommets, orientée avec la convention de la normale sortante comme dans [AMM § I.2.1]. Soit W_Γ^T l'intégrale de la forme ω_Γ sur la strate C_T, où Γ est un graphe admissible. On a alors :

$$\sum_{\Delta,\,\Delta^{\mathrm{priv}}=\Delta_0}\widetilde{W}_\Delta\mathcal{B}_\Delta([\gamma_1,\gamma_2])\otimes\gamma_3\otimes\cdots\otimes\gamma_{n+2}) = (-1)^{(k_1-1)k_2}\sum_{\Delta,\,\Delta^{\mathrm{priv}}=\Delta_0}\sum_{\Gamma\to\Delta}W_\Gamma^T\mathcal{B}_\Gamma(\gamma_1\otimes\cdots\otimes\gamma_{n+2}) \tag{III.2.10}$$

la somme étant prise sur tous les graphes Γ obtenus à partir de Δ en dédoublant le premier sommet et en traçant une arête d'un sommet vers l'autre.

Démonstration. La strate C_T correspond au grossissement au microscope d'un nuage aérien. On peut supposer que le nuage n'est composé que de deux points a et b, en vertu du lemme 6.6 de [K]. l'un de ces sommets est le sommet 1 ou 2, l'autre est un sommet différent de 1 et 2. On a :

$$C_T\sim C_2\times C_{n+1,m},$$

et :

$$C_T \cap Y \sim C_2 \times \widetilde{Z},$$

où $\widetilde{Z}$ est l'image réciproque de $\xi(]0,1[)$ par l'application oubli de $C_{n+1,m}$ dans $C_{2,0}$. La strate C_T est orientée par $-\Omega_1 \wedge \Omega_2$, d'après [AMM § I.2.1]. On a donc :

$$\int_{C_T \cap Y} \omega_\Gamma = -\int_{C_2} \omega_{\Gamma_1} \int_{\widetilde{Z}} \omega_\Delta,$$

où Γ_1 est le graphe interne et Δ le graphe externe. Cette intégrale s'annule sauf éventuellement si les deux points a et b sont reliés par une arête. Dans ce cas on a donc $\widetilde{W_\Delta} = -W_\Gamma^T$.

Le corollaire est alors une conséquence directe du lemme III.2.1 et du fait que l'on a $\widetilde{W_\Delta} = \varepsilon(\Delta)\widetilde{W}_{\Delta\mathrm{priv}}$.

•

Le cas d'une strate de type 1 se traite donc en posant $\gamma_1 = \alpha$, $\gamma_2 = \gamma$, $\gamma_3 = \beta$ et $\gamma_j = \gamma$ pour $j \geq 4$. Pour une strate de type 2 on pose $\gamma_1 = \beta$, $\gamma_2 = \gamma$, $\gamma_3 = \alpha$ et $\gamma_j = \gamma$ pour $j \geq 4$. La somme des deux contributions fournit le dernier terme dans le membre de droite de l'égalité III.1.3.

III.3. l'intégration sur une strate de type 3 aérien.

Le corollaire III.2.2 s'applique également aux strates de type 3 aérien en posant $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$: comme on a $[\gamma, \gamma] = 0$ la contribution de ces strates est nulle.

III.4. l'intégration sur les strates de type 3 terrestre.

Soit Y_{3t} la réunion des $Y \cap C_T$ où C_T est une strate de type 3 terrestre (voir § II.4). posons :

$$W_\Gamma^{(3t)} = \int_{Y_{3t}} \omega_\Gamma.$$

On a alors :

Lemme III.4.1.

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\hbar^n}{n!} \sum_{\Gamma \in G_{n+2,m}} W_\Gamma^{(3t)} \mathcal{B}_\Gamma(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma \otimes \cdots \otimes \gamma)(f_1 \otimes \cdots \otimes f_m) =$$

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\hbar^n}{n!} \sum_{\Delta \in G_{n+2,m-1}} \widetilde{W}_\Delta \mathcal{B}_\Delta(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma \otimes \cdots \otimes \gamma)\big((f_1 * f_2 \otimes \cdots \otimes f_m) - \cdots + (-1)^{m-2}(f_1 \otimes \cdots \otimes f_{m-1} * f_m)\big).$$

Démonstration. Soit $\Gamma \in G_{n+2,m}$, soit T une strate de type 3 terrestre et soit W_Γ^T l'intégrale de la forme ω_Γ sur cette strate. Chaque sommet aérien du graphe interne est étiqueté par le 2-tenseur γ, donc il possède $2n_1$ flèches, où n_1 est le nombre de sommets aériens de ce graphe. Pour que W_Γ^T soit non nul il faut qu'aucune flèche ne sorte du graphe interne, et il faut donc aussi que $m_1 = 2$, où m_1 est le nombre de points terrestres du nuage. Les points terrestres du nuage sont donc $\{\overline{i}, \overline{i+1}\}$ où i est un entier entre 1 et $m-1$. On a donc ainsi une partition de l'ensemble des strates du type 3 terrestre en $m-1$ groupes $E_i, i = 1, \ldots, m-1$. En sommant sur tous les graphes tels que le graphe externe soit un $\Delta \in G_{n+2,m-1}$ donné et tels que le graphe interne s'obtient par éclatement du sommet terrestre $\overline{i}$, on trouve donc :

$$\sum_{\Gamma \in G_{n+p+2,m}, \Gamma \to \Delta} \frac{\hbar^p}{p!} \frac{1}{|B_{n,p}|} \sum_{C_T \in E_i} W_\Gamma^T \mathcal{B}_\Gamma(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma \otimes \cdots \otimes \gamma)(f_1 \otimes \cdots \otimes f_m) =$$
$$\pm \widetilde{W}_\Delta \mathcal{B}_\Delta(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma \otimes \cdots \otimes \gamma)\big(f_1 \otimes \cdots \otimes f_i * f_{i+1} \otimes \cdots \otimes f_m\big).$$

Comme les sommets 1 et 2 sont immuables il y a en effet $|B_{n,p}| = (n+p)!/(n!p!)$ choix possibles d'ordre sur les sommets aériens de Γ qui redonnent l'ordre du graphe interne et du graphe externe (voir la discussion à la fin du § II.3). En sommant sur tous les Δ dans $G_{n+2,m}$ à n fixé, en multipliant par $\hbar^n/n!$ et en sommant la série on obtient alors :

$$\sum_{r \geq 0} \frac{\hbar^r}{r!} \sum_{\Gamma \in G_{r+2,m}} \sum_{C_T \in E_i} W_\Gamma^T \mathcal{B}_\Gamma(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma \otimes \cdots \otimes \gamma)(f_1 \otimes \cdots \otimes f_m) =$$
$$\pm \sum_{n \geq 0} \frac{\hbar^n}{n!} \sum_{\Delta \in G_{n+2,m-1}} \widetilde{W}_\Delta \mathcal{B}_\Delta(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma \otimes \cdots \otimes \gamma)\big(f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_i * f_{i+1} \otimes \cdots \otimes f_m\big).$$

Précisons maintenant le signe $\pm$ en regardant les orientations : si on décide d'orienter $Y \cap C_T$ dans C_T par sa normale sortante :

$$\Omega_{C_T} = d\mathbf{n} \wedge \Omega_{Y \cap C_T},$$

on a alors :

$$\Omega = d\mathbf{n}' \wedge d\mathbf{n} \wedge \Omega_{Y \cap C_T},$$

où $d\mathbf{n}'$ est la normale sortante de la strate C_T dans l'espace de configuration $\overline{C_{n+2,m}}^+$. D'après [AMM § I.2.2] la forme Ω_{C_T} est le produit extérieur de la "forme volume interne" par la "forme volume externe" multiplié par le signe $(-1)^{(i-1)2+(i-1)+2} = (-1)^{i-1}$. On obtient alors le lemme (avec les signes alternés comme indiqué) en sommant sur tous les groupes de strates E_i.

•

On reconnaît dans le membre de gauche un cobord de Hochschild pour la multiplication déformée $*$, aux deux termes extrêmes près. Ces deux termes vont être donnés par les strates de type 4 :

III.5. l'intégration sur une strate de type 4.

Soit Y_4 la réunion des $Y \cap \Sigma$ où Σ est une strate de type 4 (voir § II.4). Posons :

$$W_\Gamma^{(4)} = \int_{Y_4} \omega_\Gamma .$$

On a alors :

Lemme III.5.1.

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} \frac{\hbar^n}{n!} \sum_{\Gamma \in G_{n+2,m}} & W_\Gamma^{(4)} \mathcal{B}_\Gamma(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma \otimes \cdots \otimes \gamma)(f_1 \otimes \cdots \otimes f_m) = \\ & -\sum_{n\geq 0} \frac{\hbar^n}{n!} \Big(\sum_{\Delta \in G_{n+2,m-1}} f_1 * \widetilde{W}_\Delta \mathcal{B}_\Delta(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma \otimes \cdots \otimes \gamma)(f_2 \otimes \cdots \otimes f_m) + \\ & \qquad (-1)^m \widetilde{W}_\Delta \mathcal{B}_\Delta(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma \otimes \cdots \otimes \gamma)(f_1 \otimes \cdots \otimes f_{m-1}) * f_m \Big).\end{aligned}$$

Démonstration. Soit $\Gamma \in G_{n+2,m}$, soit T une strate de type 4 et soit W_Γ^T l'intégrale de la forme ω_Γ sur cette strate. Chaque sommet aérien du graphe externe est étiqueté par le 2-tenseur γ, donc il possède $2n_2$ flèches, où n_2 est le nombre de sommets aériens de ce graphe. Pour que W_Γ^T soit non nul il faut qu'aucune flèche ne sorte du graphe interne, et il faut aussi que $m_2 = 2$, où m_2 est le nombre de points terrestres du graphe externe. Le nuage contient donc exactement $m-1$ points terrestres. Les strates qui vérifient ceci se répartissent donc en deux classes, celles qui laissent le premier sommet terrestre en-dehors du nuage, et celles qui laissent le dernier. Un raisonnement similaire à celui du paragraphe précédent nous donne donc le lemme, aux signes à préciser près. Les orientations nous donnent ici un signe $(-1)^{(m-1)+(m-1)+1} = -1$ pour le premier terme, et $(-1)^{m-1}$ pour le deuxième terme.

III.6. Fin de la démonstration du théorème

La proposition III.1.1 découle de l'addition des termes provenant des quatre (ou plutôt cinq) types de strate (corollaire III.2.2, lemmes III.4.1 et III.5.1). L'addition des termes donnés par les strates de type 3 et 4 donnent l'opposé du cobord de hochschild, soit encore $[*, -]$. D'après la formule de Stokes (III.1.2) et d'après les propositions II.3.1 et III.1.1 on a donc :

Théorème III.6.1.
Soit α un k_1-champ de vecteurs et soit β un k_2-champ de vecteurs. Alors on a :

$$\mathcal{U}'_{\hbar\gamma}(\alpha \cup \beta) - \mathcal{U}'_{\hbar\gamma}(\alpha) \cup \mathcal{U}'_{\hbar\gamma}(\beta) = \sum_{n \geq 0} \frac{\hbar^n}{n!} \sum_{\Delta \in G_{n+2,m-1}} \widetilde{W}_\Delta [*, \mathcal{B}_\Delta(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma \otimes \cdots \otimes \gamma)]$$
$$- \sum_{n \geq 0} \frac{\hbar^n}{n!} \sum_{\Delta \in G_{n+1,m}} \widetilde{W}_\Delta \Big((-1)^{(k_1-1)k_2} \mathcal{B}_\Delta([\alpha, \gamma] \otimes \beta \otimes \gamma \otimes \cdots \otimes \gamma) + (-1)^{k_1(k_2-1)} \mathcal{B}_\Delta(\alpha \otimes [\beta, \gamma] \otimes \gamma \otimes \cdots \otimes \gamma) \Big). \tag{III.6.1}$$

Si on a $[\alpha, \gamma] = [\beta, \gamma] = 0$ le dernier terme est nul, et $U'_{\hbar\gamma}(\alpha \cup \beta) - \mathcal{U}'_{\hbar\gamma}(\alpha) \cup \mathcal{U}'_{\hbar\gamma}(\beta)$ est bien donné par un cobord de Hochschild pour la multiplication déformée $*$, ce qui montre le théorème 0.2.

•

Références

[ADS] M. Andler, A. Dvorsky, S. Sahi, *Kontsevich quantization and invariant distributions on Lie groups*, math.QA/9910104.

[AMM] D. Arnal, D. Manchon, M. Masmoudi : *Choix des signes dans la formalité de Kontsevich*, eprint math.QA/0003003, à paraıtre à Pac. J. Math.

[BFFLS] F. Bayen, M. Flato, C. Frønsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer, *Deformation theory and quantization I. Deformations of symplectic structures*, Ann. Phys. 111 No 1, 61-110 (1978).

[CFT] A. Cattaneo, G. Felder, L. Tomassini, *From local to global deformation quantization of Poisson manifolds*, math.QA/0012228.

[FM] W. Fulton, R. MacPherson, *Compactification of configuration spaces*, Ann. Math. 139, 183-225 (1994).

[K] M. Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds I*, math.QA/9709040.