QUELQUES ASPECTS COMBINATOIRES DE LA RENORMALISATION

par

Dominique Manchon

Résumé. — La renormalisation en Théorie Quantique des Champs se laisse aborder de manière très élégante à l'aide d'une structure d'algèbre de Hopf sur les graphes de Feynman, décrite par A. Connes et D. Kreimer [**7**]. La quantité renormalisée est obtenue à l'aide d'une procédure récursive par rapport aux nombres de boucles du graphe, qui se généralise de manière immédiate à toute algèbre de Hopf graduée connexe. Nous passons ici en revue quelques propriétés combinatoires sous-jacentes, qui prennent sens dans le cadre général des algèbres de Rota-Baxter et des algèbres dendriformes.

Table des matières

1. La renormalisation

Dans un système physique en interaction, il est crucial de distinguer entre les paramètres effectivement mesurés et les paramètres *nus*, c'est-à-dire la valeur que ceux-ci prendraient en l'absence de toute interaction avec l'environnement. Le terme de renormalisation désigne tout procédé qui permet de passer des paramètres nus aux paramètres effectivement observés, qui sont alors dits *renormalisés*. L'exemple d'un ballon sphérique en mouvement dans un fluide (par exemple l'air), donné par G. Green dès 1836, permet d'en donner une idée ([**23**], voir aussi [**8**] et [**10**]) : à vitesse proche de zéro (ce qui permet de négliger les forces de frottement), tout se passe comme si la masse m_0 du ballon était augmentée de $\frac{M}{2}$, où M est la masse du volume de fluide occupé par celui-ci. La force totale $F = mg$ agissant sur le ballon (avec $m = m_0 + \frac{M}{2}$) se répartit entre la force de gravité $F_0 = m_0 g_0$ et la poussée d'Archimède $-Mg_0$, où $g_0 \simeq 9,81\ m.s^{-2}$ est l'intensité de la gravitation à la surface de la Terre. Les paramètres nus sont donc la masse m_0, la force de gravité F_0 et l'accélération g_0, alors que les paramètres renormalisés sont :

$$m = m_0 + \frac{M}{2}, \qquad F = (1 - \frac{M}{m_0})F_0, \qquad g = \frac{m_0 - M}{m_0 + \frac{M}{2}} g_0. \tag{1}$$

On remarque donc que l' accélération initiale g décroît de g_0 à $-2g_0$ lorsque l'interaction, représentée par la masse de fluide M, croît de 0 à $+\infty$. En théorie quantique des champs, même dans son approche perturbative, une difficulté supplémentaire apparaît : les paramètres nus sont en général infinis! Ils sont typiquement donnés par des intégrales divergentes[(1)] comme par exemple :

$$\int_{\mathbb{R}^4} \frac{1}{1+\|p\|^2}\,dp. \tag{2}$$

L'apparition de ces quantités infinies manifeste l'impossibilité d'annuler les interactions autrement que par la pensée en théorie quantique des champs[(2)]. On doit donc soustraire une autre quantité infinie au paramètre nu pour retrouver le paramètre renormalisé qui est une quantité finie, puisqu'il peut être observé. Dans bon nombre de cas ce procédé se décompose en deux étapes :

1. la *régularisation*, qui remplace le paramètre nu infini par une fonction d'une variable auxiliaire z qui tend vers l'infini lorsque z tend vers un certain z_0.

2. la renormalisation elle-même, de nature purement combinatoire, qui, pour les théories *renormalisables*, permet d'extraire de la fonction ci-dessus une certaine partie finie lorsque z tend vers z_0.

Parmi les nombreuses possibilités de régularisation, citons la régularisation par troncature, qui revient à considérer des intégrales comme (2) sur une boule de rayon z (avec $z_0 = +\infty$), et la régularisation dimensionnelle ([**27**], [**6**]), qui revient à "intégrer sur un espace de dimension complexe z", où z_0 est la dimension spatiale d (par exemple $d = 4$ pour l'espace-temps de Minkowski)[(3)]. Dans ce cas la fonction qui apparaît est méromorphe en z avec un pôle en z_0.

La renormalisation est donnée par l'algorithme combinatoire dit BPHZ (d'après N. Bogoliubov, O. Parasiuk, K. Hepp et W. Zimmermann, [**4**], [**25**], [**38**]). Les objets combinatoires qui interviennent ici sont les *graphes de Feynman*, classés suivant leur nombre de boucles L. Les *règles de Feynman* associent à chaque graphe[(4)] une quantité à régulariser et renormaliser. Il faut commencer par choisir un *schéma de renormalisation*, qui consiste à choisir la partie finie pour les quantités "les plus simples", qui correspondent aux graphes à une seule boucle ($L = 1$). La renormalisation des autres quantités va alors s'effectuer par récurrence sur L. Lorsque les règles de Feynman régularisées fournissent des fonctions méromorphes d'une variable (ce qui est le cas pour la régularisation dimensionnelle, par exemple), on peut citer parmi les schémas de renormalisation le *schéma minimal*, qui consiste à prendre la valeur en z_0 de la fonction amputée de sa partie polaire.

2. Renormalisation et algèbres de Hopf graduées connexes

Soit k un corps de caractéristique zéro. Une *algèbre de Hopf graduée* sur k est un k-espace vectoriel gradué :

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{H}_n$$

muni d'un produit $m : \mathcal{H}\otimes\mathcal{H} \to \mathcal{H}$, un coproduit $\Delta : \mathcal{H} \to \mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$, une unité $u : k \to \mathcal{H}$, une co-unité $\varepsilon : \mathcal{H} \to k$ et un antipode $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, le tout vérifiant les axiomes d'une algèbre de Hopf [**35**], et tel que :

$$\begin{aligned} m(\mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_q) &\subset \mathcal{H}_{p+q}, \\ \Delta(\mathcal{H}_n) &\subset \bigoplus_{p+q=n} \mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_q, \end{aligned}$$

---

(1) Plus précisément, les paramètres physiques sont donnés par une *série* en les constantes de couplage (qui représentent l'interaction), dont chaque terme est une intégrale divergente. Nous nous intéressons ici à la renormalisation de chacun de ces termes, sans aborder la question de la renormalisation de la série dans son ensemble.
(2) contrairement au ballon ci-dessus, pour lequel on peut faire tendre l'interaction vers zéro en le faisant évoluer dans un vide quasi-parfait.
(3) Cet "espace de dimension z" a été récemment défini de manière rigoureuse à l'aide de triples spectraux et de facteurs de type II ([**10**] § 19.2).
(4) avec une donnée supplémentaire : ses *moments extérieurs*.

$$S(\mathcal{H}_n) \quad \subset \quad \mathcal{H}_n.$$

Une algèbre de Hopf graduée $\mathcal{H}$ sur k est dite *connexe* si sa partie homogène de degré zéro est de dimension un, c'est-à-dire réduite à $k.\mathbf{1}$, où $\mathbf{1}$ désigne l'unité. La donnée d'une telle algèbre de Hopf $\mathcal{H}$, lorsqu'elle est de plus *commutative*, équivaut à la donnée du schéma en groupes pro-nilpotents qui à toute algèbre commutative unitaire $\mathcal{A}$ associe le groupe $G_{\mathcal{A}}$ des caractères de $\mathcal{H}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$. Le théorème de Cartier-Milnor-Moore permet de récupérer l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ comme le dual gradué de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_k)$ où $\mathfrak{g}_k$ est l'algèbre de Lie du groupe G_k, qui peut se voir comme l'ensemble des *caractères infinitésimaux* de $\mathcal{H}$ à valeurs dans k.

Les algèbres de Hopf graduées connexes (commutatives ou non) sont particulièrement bien adaptées aux raisonnements par récurrence sur le degré. Cela vient du fait que pour tout élément x homogène de degré n dans $\mathcal{H}$ on peut écrire en utilisant la notation de Sweedler :

$$\Delta x = x \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes x + \sum_{(x)} x' \otimes x'', \tag{3}$$

où les x' et x'' sont homogènes de degré compris entre 1 et $n-1$. En particulier l'antipode est "donné gratuitement" par l'une des deux formules de récurrence ci-dessous :

$$S(x) \quad = \quad -x - \sum_{(x)} S(x')x'', \tag{4}$$

$$S(x) \quad = \quad -x - \sum_{(x)} x'S(x''). \tag{5}$$

D. Kreimer a le premier observé que les graphes de Feynman d'une théorie quantique des champs donnée s'organisent en une algèbre de Hopf commutative graduée connexe [**28**]. Les règles de Feynman régularisées fournissent un caractère de cette algèbre de Hopf à valeurs dans une algèbre de fonctions, par exemple l'algèbre des fonctions méromorphes d'une variable complexe dans le cas de la régularisation dimensionnelle.

Nous pouvons maintenant expliquer comment renormaliser un caractère φ d'une algèbre de Hopf graduée connexe : il faut pour cela que φ soit à valeurs dans une algèbre commutative unitaire $\mathcal{A}$ munie d'un *schéma de renormalisation*, c'est-à-dire d'une décomposition :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_- \oplus \mathcal{A}_+ \tag{6}$$

où $\mathcal{A}_-$ et $\mathcal{A}_+$ sont deux sous-algèbres de $\mathcal{A}$, avec $\mathbf{1}_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}_+$. Le schéma minimal évoqué plus haut correspond au cas où $\mathcal{A}$ est l'algèbre (sur $k = \mathbb{C}$) des fonctions méromorphes d'une variable, $\mathcal{A}_+$ est la sous-algèbre des fonctions qui sont holomorphes en un z_0 fixé, et $\mathcal{A}_-$ est la sous-algèbre des polynômes en $(z-z_0)^{-1}$ sans terme constant. L'espace des applications linéaires de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{A}$ est muni du produit de convolution, donné par :

$$\varphi * \psi = m_{\mathcal{A}} \circ (\varphi \otimes \psi) \circ \Delta. \tag{7}$$

Il est facile de vérifier que l'espace des caractères de $\mathcal{H}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$ est un groupe pour le produit de convolution[(5)]. L'élément neutre e est donné par $e(\mathbf{1}) = \mathbf{1}_{\mathcal{A}}$ et $e(x) = 0$ si x est homogène de degré ≥ 1. L'inverse est donné par la composition à droite avec l'antipode :

$$\varphi^{*-1} = \varphi \circ S. \tag{8}$$

Chaque caractère φ admet une unique *décomposition de Birkhoff* :

$$\varphi = \varphi_-^{*-1} * \varphi_+ \tag{9}$$

compatible avec le schéma de renormalisation choisi, c'est-à-dire telle que φ_+ prenne ses valeurs dans $\mathcal{A}_+$ et telle que $\varphi_-(x) \in \mathcal{A}_-$ pour tout x homogène de degré ≥ 1. Les composantes $\varphi_\pm$ sont données par des formules

[(5)] La commutativité de l'algèbre-cible $\mathcal{A}$ est ici nécessaire.

récursives assez simples : si on note π la projection sur $\mathcal{A}_-$ parallèlement à $\mathcal{A}_+$, et si on suppose que $\varphi_-(x)$ et $\varphi_+(x)$ sont connus pour x de degré $k \le n-1$, on a alors pour tout $x \in \mathcal{H}_n$:

$$\varphi_-(x) = -\pi\left(\varphi(x) + \sum_{(x)} \varphi_-(x)'\varphi(x'')\right), \tag{10}$$

$$\varphi_+(x) = (I-\pi)\left(\varphi(x) + \sum_{(x)} \varphi_-(x)'\varphi(x'')\right). \tag{11}$$

On appelle φ_+ le caractère renormalisé et φ_- le caractère des contretermes. Le fait remarquable que les deux composantes φ_- et φ_+ soient encore des caractères de $\mathcal{H}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$ provient de la *propriété de Rota-Baxter* vérifiée par la projection π :

$$\pi(a)\pi(b) = \pi\big(\pi(a)b + a\pi(b) - ab\big). \tag{12}$$

Définition 1. — *Soit $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf graduée connexe sur le corps $\mathbb{C}$ des complexes, et soit φ un caractère de $\mathcal{H}$ à valeurs dans l'algèbre $\mathcal{A}$ des fonctions méromorphes, munie du schéma de renormalisation minimal en z_0. Alors le caractère à valeurs scalaires donné par $x \mapsto \varphi_+(x)(z_0)$ définit la* valeur renormalisée *du caractère φ en z_0.*

L'application linéaire $B(\varphi) : \mathcal{H} \to \mathcal{A}$ donnée par $B(\varphi)(\mathbf{1}) = 0$ et $B(\varphi)(x) = \varphi(x) + \sum_{(x)} \varphi_-(x')\varphi(x'')$ est nommée *préparation de Bogoliubov* et s'écrit $B(\varphi) = \varphi_- * (\varphi - e)$. Les formules de récurrence (10) et (11) s'écrivent de manière plus compacte :

$$\begin{aligned} \varphi_- &= e + P(\varphi_- * \alpha) \\ &= e + P(\alpha) + P\big(P(\alpha) * \alpha\big) + \cdots + \underbrace{P\Big(P\big(\ldots P(}_{n \text{ fois}}\alpha) * \alpha\big)\cdots * \alpha\Big) + \cdots \end{aligned} \tag{13}$$

et :

$$\begin{aligned} \varphi_+ &= e + \tilde{P}(\varphi_+ * \beta) \\ &= e + \tilde{P}(\beta) + \tilde{P}\big(\tilde{P}(\beta) * \beta\big) + \cdots + \underbrace{\tilde{P}\Big(\tilde{P}\big(\ldots \tilde{P}(}_{n \text{ fois}}\beta) * \beta\big)\cdots * \beta\Big) + \cdots \end{aligned} \tag{14}$$

avec $\alpha := e - \varphi$, $\beta := e - \varphi^{-1}$, et où $\tilde{P}$ et P sont les projections sur $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{A})$ définies par $\tilde{P}(\alpha) = (I - \pi) \circ \alpha$ et $P(\alpha) = \pi \circ \alpha$, respectivement. A. Connes et D. Kreimer ont montré dans [**8**] que lorsque $\mathcal{H}$ est l'algèbre de Hopf des graphes de Feynman associés à une théorie des champs renormalisable, cette définition de la renormalisation coïncide avec l'algorithme BPHZ des physiciens (tel qu'il est exposé par exemple dans [**6**]).

3. Une application en théorie des nombres

Les fonctions zêta multiples :

$$\zeta(s_1, \ldots, s_k) := \sum_{0 < n_k < \cdots < n_1} \frac{1}{n_1^{s_1}} \cdots \frac{1}{n_k^{s_k}} \tag{15}$$

convergent si $\sum_{j=1}^{m} \operatorname{Re} s_j > m$ pour tout $m \in \{1, \ldots, k\}$ et admettent un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}^k$ en entier, avec des singularités en [**2**] :

$$\begin{aligned} s_1 &= 1, \\ s_1 + s_2 &= 2, 1, 0, -2, -4, -6, \ldots, \\ s_1 + \cdots + s_j &\in \mathbb{Z} \cap]-\infty, j], \ j = 3, 4, \ldots, k. \end{aligned}$$

Les valeurs aux entiers strictement positifs (avec $s_1 \ge 2$) vérifient des relations algébriques, parmi lesquelles les relations de quasi-battage, dont la plus simple s'écrit :

$$\zeta(s_1)\,\zeta(s_2) = \zeta(s_1, s_2) + \zeta(s_2, s_1) + \zeta(s_1 + s_2). \tag{16}$$

On peut régulariser les valeurs zêta multiples en tous les points $(s_1, \ldots, s_k)$ en en faisant un caractère d'une certaine *algèbre de Hopf de quasi-battages* [**26**] à valeurs dans les fonctions méromorphes d'une variable. La renormalisation de ce caractère permet alors de définir des valeurs zêta multiples renormalisées en tout $(s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{Z}^k$ qui vérifient encore les relations de quasi-battage. Ces valeurs ont de plus la propriété remarquable d'être rationnelles aux entiers négatifs ([**32**], voir aussi [**24**]).

4. Représentation matricielle

Soit J un co-idéal à gauche de l'algèbre de Hopf graduée connexe $\mathcal{H}$, c'est-à-dire un sous-espace de $\mathcal{H}$ tel que $\Delta(J) \subset \mathcal{H} \otimes J$. Si $(x_i)_{i \in I}$ est une base de J on peut l'ordonner de manière à ce que la matrice M du coproduit (carrée de taille $|I| \times |I|$ à coefficients dans $\mathcal{H}$), définie par :

$$\Delta(x_i) = \sum_{j \in I} M_{ij} \otimes x_j \tag{17}$$

soit triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale. Pour toute algèbre unitaire commutative $\mathcal{A}$ on définit alors $\Psi_J : \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{A}) \to \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \otimes J)$ par :

$$\Psi_J[f](x_j) = \sum_i f(M_{ij}) \otimes x_i. \tag{18}$$

Cette application est un morphisme d'algèbres pour le produit de convolution sur $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{A})$ et le produit matriciel [**13**]. Dans le cas où $\mathcal{A}$ est munie d'un schéma de renormalisation, la décomposition de Birkhoff d'un caractère φ à valeurs dans $\mathcal{A}$ fournit donc pour tout co-idéal à gauche J la décomposition de Birkhoff de l'endomorphisme $\widehat{\varphi} := \Psi_J[\varphi]$, à savoir :

$$\widehat{\varphi} = \widehat{\varphi_-}^{-1} \widehat{\varphi_+}. \tag{19}$$

Il est particulièrement intéressant dans la pratique de prendre un co-idéal à gauche J de dimension finie, par exemple l'espace $J = \mathcal{H}^{(n)}$ engendré par les éléments homogènes de degré $\leq n$, ou encore le plus petit co-idéal à gauche contenant un élément donné.

5. L'opérateur de Dynkin

Une algèbre de Hopf graduée $\mathcal{H}$ admet une bidérivation naturelle Y définie par $Y(x) = nx$ pour $x \in \mathcal{H}_n$. L'application $\varphi \mapsto \varphi \circ Y$ est une dérivation de $\big(\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{A}), *\big)$. Lorsque le corps de base est $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ la bidérivation Y donne naissance au sous-groupe à un paramètre d'automorphismes de $\mathcal{H}$ donné par $\theta_t(x) = e^{nt}x$ pour $x \in \mathcal{H}_n$, et $\varphi \mapsto \varphi \circ \theta_t$ est un automorphisme of $\big(\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{A}), *\big)$ pour tout $t \in k$.

On appelle *opérateur de Dynkin* l'endomorphisme $D = S * Y$ de $\mathcal{H}$ (où S est l'antipode). On peut montrer que pour toute algèbre commutative unitaire $\mathcal{A}$ la correspondance $\varphi \mapsto \varphi \circ D$ induit une bijection Ξ du groupe des caractères $G_{\mathcal{A}}$ sur l'algèbre de Lie des caractères infinitésimaux $\mathfrak{g}_{\mathcal{A}}$. Lorsque $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ l'inverse $\Xi^{-1} = \Gamma : \mathfrak{g}_{\mathcal{A}} \to G_{\mathcal{A}}$ est donné par la formule suivante ([**30**] § 8.2) :

$$\Gamma(\alpha) = e + \sum_{n \geq 1} \int_{0 \leq v_n \leq \cdots \leq v_1 \leq +\infty} (\alpha \circ \theta_{-v_1}) * \cdots * (\alpha \circ \theta_{-v_n})\, dv_1 \cdots dv_n. \tag{20}$$

En appliquant ceci à un élément x de $\mathcal{H}$ que l'on décompose suivant ses composantes homogènes x_k (on peut supposer $x_0 = 0$), et en utilisant l'égalité :

$$\int_{0 \leq v_l \leq \cdots \leq v_1 \leq +\infty} e^{-k_1 v_1} \cdots e^{-k_l v_l}\, dv_1 \cdots dv_l = \frac{1}{k_1(k_1 + k_2) \cdots (k_1 + \cdots + k_l)}, \tag{21}$$

on en déduit la formule explicite [**12**] :

$$\Gamma(\alpha) = e + \sum_{n \geq 1} \sum_{k_1, \ldots, k_l \in \mathbb{N}^*,\ k_1 + \cdots + k_l = n} \frac{\alpha_{k_1} * \cdots * \alpha_{k_l}}{k_1(k_1 + k_2) \cdots (k_1 + \cdots + k_l)}, \tag{22}$$

avec $\alpha_k = \alpha \circ \pi_k$, où pour tout $k \geq 0$ on désigne par π_k la projection de $\mathcal{H}$ sur la composante $\mathcal{H}_k$ de degré k. Il est ensuite facile de voir que la même formule a lieu sur le corps des rationnels, puis sur tout corps k de caractéristique zéro. L'opérateur de Dynkin a été introduit et étudié dans le cadre général des algèbres de Hopf commutatives ou cocommutatives par F. Patras et Chr. Reutenauer ([**33**], voir aussi [**12**]). Bon nombre de ses propriétés, et notamment la formule explicite (22) ci-dessus, restent valables pour une algèbre de Hopf graduée connexe quelconque.

6. Le groupe de renormalisation et la fonction Bêta

On suppose ici que le corps de base est $k = \mathbb{C}$ et que l'algèbre $\mathcal{A}$ est l'algèbre des fonctions méromorphes à une variable, munie du schéma minimal. Nous allons, en utilisant la variable complexe z, considérer le sous-groupe à un paramètre d'automorphismes de l'algèbre $\big(\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{A}), *\big)$ donné par :

$$\varphi^t(x)(z) := e^{tzn}\varphi(x)(z) \tag{23}$$

pour $x \in \mathcal{H}_n$. On note $G_{\mathcal{A}}^{\mathrm{loc}}$ l'ensemble des caractères *locaux* de $\mathcal{H}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments φ de $G_{\mathcal{A}}$ qui vérifient :

$$\frac{d}{dt}(\varphi^t)_- = 0. \tag{24}$$

Les règles de Feynman régularisées dimensionnellement vérifient cette propriété : cela vient du fait que les contretermes ne dépendent pas du choix de la masse arbitraire μ que l'on doit introduire (la *masse de 'tHooft*) pour manipuler des quantités sans dimension [**9**]. On note $G_{\mathcal{A}_-}^{\mathrm{loc}}$ les éléments φ de $G_{\mathcal{A}}^{\mathrm{loc}}$ tels que $\varphi_- = \varphi$. Pour tout $\varphi \in G_{\mathcal{A}}^{\mathrm{loc}}$ on peut alors écrire $\varphi^t = \varphi * h_t$, où la famille (h_t) est telle que son terme constant $F_t : x \mapsto \lim_{z \to 0} h_t(x)(z)$ définit un sous-groupe à un paramètre de caractères scalaires de $\mathcal{H}$, le *groupe de renormalisation* du caractère local φ. On pose alors :

$$\beta(\varphi)(x) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F_t(x). \tag{25}$$

La correspondance $z\Xi$ réalise une bijection de $G_{\mathcal{A}}^{\mathrm{loc}}$ sur $\mathfrak{g}_{\mathcal{A}_+}$, ainsi que de $G_{\mathcal{A}_-}^{\mathrm{loc}}$ sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ [**9**], [**30**]. Pour tout $\varphi \in G_{\mathcal{A}_-}^{\mathrm{loc}}$ on a en fait :

$$\beta(\varphi) = z\Xi(\varphi), \tag{26}$$

ce qui s'écrit aussi $\varphi = \Gamma\big(\frac{1}{z}\beta(\varphi)\big)$. En d'autres termes on peut retrouver explicitement, en utilisant l'inverse de la composition par l'opérateur de Dynkin, les contretermes d'un caractère local à partir de sa fonction β. La fonction β et le groupe de renormalisation peuvent aussi s'étudier dans la représentation matricielle définie plus haut [**15**].

7. Algèbres de Rota-Baxter et algèbres dendriformes

On s'intéresse aux équations (13) et (14) vérifiées respectivement par φ_- et φ_+, dans un cadre plus général. Une *algèbre de Rota-Baxter de poids* θ sur un corps k (avec $\theta \in k$) est une k-algèbre associative munie d'une application linéaire $R : A \to A$ vérifiant la relation de Rota-Baxter :

$$R(x)R(y) = R\big(R(x)y + xR(y) + \theta xy\big). \tag{27}$$

On introduit souvent l'opérateur $\tilde{R} := -\theta \,\mathrm{Id} - R$, qui est aussi un opérateur de Rota-Baxter de même poids. Les opérateurs P et $\tilde{P}$ du paragraphe précédent sont des opérateurs de Rota-Baxter de poids -1, qui ont de plus la particularité d'être idempotents. Un exemple d'algèbre de Rota-Baxter de poids $\theta = 0$ est donné par l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ muni de l'opérateur I donné par :

$$I(f)(t) := \int_0^t f(u)\, du. \tag{28}$$

La relation de Rota-Baxter (27) vérifiée par I (avec $\theta = 0$) est un avatar de l'intégration par parties. Les algèbres de Rota-Baxter rentrent dans le cadre plus général des *algèbres dendriformes* [**29**], qui sont les k-espaces vectoriels A munis de deux applications bilinéaires $\prec, \succ : A \times A \to A$ vérifiant les trois axiomes :

$$(a \prec b) \prec c = a \prec (b * c), \tag{29}$$
$$(a \succ b) \prec c = a \succ (b \prec c), \tag{30}$$
$$a \succ (b \succ c) = (a * b) \succ c, \tag{31}$$

avec $a * b := a \prec b + a \succ b$. On déduit facilement de ces axiomes l'associativité de la loi $*$. Les applications bilinéaires $\rhd$ et $\lhd$ définies par :

$$a \rhd b := a \succ b - b \prec a, \qquad a \lhd b := a \prec b - b \succ a \tag{32}$$

sont pré-Lie à gauche et pré-Lie à droite respectivement (voir [**1**] et [**5**]), c'est-à-dire que l'on a :

$$(a \rhd b) \rhd c - a \rhd (b \rhd c) = (b \rhd a) \rhd c - b \rhd (a \rhd c), \tag{33}$$
$$(a \lhd b) \lhd c - a \lhd (b \lhd c) = (a \lhd c) \lhd b - a \lhd (c \lhd b). \tag{34}$$

Le produit associatif $*$ et les produits pré-Lie $\rhd$, $\lhd$ définissent tous le même crochet de Lie :

$$[a, b] := a * b - b * a = a \rhd b - b \rhd a = a \lhd b - b \lhd a. \tag{35}$$

Toute algèbre de Rota-Baxter de poids θ est munie de deux structures d'algèbre dendriforme, données par :

$$a \prec b := aR(b) + \theta ab = -a\tilde{R}(b), \qquad a \succ b := R(a)b, \tag{36}$$
$$a \prec' b := aR(b), \qquad a \succ' b := R(a)b + \theta ab = -\tilde{R}(a)b. \tag{37}$$

Le produit associatif $*$ correspondant est donné par $a * b = aR(b) + R(a)b + \theta ab$ pour les deux structures[(6)]. Revenant à l'équation (13) que nous cherchons à généraliser, on cherche donc dans $A[[t]]$, où A est une algèbre de Rota-Baxter avec unité, les solutions des deux équations :

$$x = 1 + tR(ax), \qquad y = 1 - tR(ya). \tag{38}$$

Il est commode de rajouter une unité fictive $\mathbf{1}$ à l'algèbre dendriforme A, telle que $\mathbf{1} \succ a = a \prec \mathbf{1} = a$ pour tout $a \in A$ et $\mathbf{1} * \mathbf{1} = \mathbf{1}$. Les expressions $\mathbf{1} \prec \mathbf{1}$ et $\mathbf{1} \succ \mathbf{1}$ ne sont toutefois pas définies. On note $\overline{A} = A \oplus k\mathbf{1}$, et on prolonge l'opérateur R à $\overline{A}$ en posant $R(\mathbf{1}) = 1$. Si maintenant X et Y sont les solutions respectives dans $\overline{A}[[t]]$ des équations :

$$X = \mathbf{1} + ta \prec X, \qquad Y = \mathbf{1} - tY \succ a, \tag{39}$$

alors $x := R(X)$ et $y := R(Y)$ sont les solutions respectives dans $A[[t]]$ des deux équations (38). Les éléments X et Y ainsi définis ont des propriétés combinatoires très riches, parmi lesquelles j'en citerai deux :

1. Pour tout $a \in A$ posons $\ell^{(1)}(a) = r^{(1)}(a) = a$, puis récursivement $\ell^{(n+1)}(a) = \big(\ell^{(n)}(a)\big) \rhd a$ et $r^{(n+1)}(a) = a \lhd \big(r^{(n)}(a)\big)$. On a alors [**16**] :

$$X = \mathbf{1} + \sum_{n \geq 1} t^n \sum_{\substack{i_1 + \cdots + i_k = n \\ i_1, \ldots, i_k > 0}} \frac{r^{(i_k)}(a) * \cdots * r^{(i_1)}(a)}{i_1(i_1 + i_2) \cdots (i_1 + \cdots + i_k)}, \tag{40}$$

$$Y = \mathbf{1} + \sum_{n \geq 1} (-1)^n t^n \sum_{\substack{i_1 + \cdots + i_k = n \\ i_1, \ldots, i_k > 0}} \frac{\ell^{(i_1)}(a) * \cdots * \ell^{(i_k)}(a)}{i_1(i_1 + i_2) \cdots (i_1 + \cdots + i_k)}. \tag{41}$$

---

(6) Une algèbre de Rota-Baxter de poids θ est en fait une algèbre *tri-dendriforme*, pour laquelle on dispose de trois applications bilinéaires $<, \diamond, >$ vérifiant sept axiomes. Les deux structures dendriformes sont obtenues via $\prec = < + \diamond$ et $\succ = >$ (resp. $\prec' = <$ et $\succ' = \diamond + \succ$) [**11**].

2. (Développement de Magnus version pré-Lie, [**18**]) On a $X = \exp^*(\Omega')$ et $Y = \exp^*(-\Omega')$, où Ω' vérifie l'équation récursive :

$$\Omega' = \frac{L_\rhd[\Omega']}{\exp(L_\rhd[\Omega']) - 1}(ta) = \sum_{m\geq 0} \frac{B_m}{m!} L_\rhd[\Omega']^m(ta), \tag{42}$$

avec $L_\rhd[\Omega'] := \Omega' \rhd -$. Les B_m sont les nombres de Bernoulli. Les premiers termes du développement (42) s'écrivent :

$$\Omega' = ta - \frac{t^2}{2} a \rhd a + t^3 \left(\frac{1}{4}(a \rhd a) \rhd a + \frac{1}{12} a \rhd (a \rhd a) \right) + O(t^4). \tag{43}$$

Les solutions des équations (39) permettent à leur tour de résoudre des équations dendriformes d'ordre supérieur, comme par exemple [**17**] :

$$X = a + t(X \succ b + c \prec X), \tag{44}$$

ou encore :

$$X = a_{00} + \sum_{q=1}^{m} t^q \big(...(X \succ a_{q1}) \succ a_{q2} \cdots \big) \succ a_{qq}. \tag{45}$$

Ce n'est pas un hasard si les formules (40) et (41) ont une forte ressemblance avec la formule (22) : cela vient du fait que l'algèbre dendriforme libre à un générateur a avec unité $\mathbf{1}$ est munie d'une structure naturelle d'algèbre de Hopf cocommutative graduée connexe, dans laquelle l'opérateur de Dynkin tranforme $\big(...(a \succ a) \succ \cdots \big) \succ a$ (n termes) en $\ell^{(n)}(a)$ et $a \prec \big(a \prec \cdots (a \prec a)...\big)$ (n termes) en $r^{(n)}(a)$ ([**19**], [**20**]).

8. Conclusion

Les techniques de renormalisation en théorie des champs ont prouvé leur efficacité depuis plus d'un demi-siècle. Elles ont donné lieu à une formulation mathématique qui en retour s'applique à d'autres domaines comme la théorie des nombres. Les développements combinatoires que nous avons rapidement passés en revue concernent n'importe quel caractère de n'importe quelle algèbre de Hopf graduée connexe. De plus, hormis l'opérateur de Dynkin et le groupe de renormalisation, on peut généraliser ceci sans effort au cadre des algèbres de Hopf filtrées connexes. Il faut toutefois souligner que les règles de Feynman en théorie des champs ne constituent pas un caractère quelconque de l'algèbre de Hopf sous-jacente : d'autres propriétés, de nature géométrique et *motivique*, entrent en jeu (voir [**10**], [**3**]).

Références

[1] A.A. Agrachev and R.V. Gamkrelidze, *Chronological algebras and nonstationary vector fields*, J. Sov. Math 17 No. 1, 1650-1675 (1981).

[2] S. Akiyama, S. Egami, Y. Tanigawa, *Analytic continuation of multiple zeta functions and their values at non-positive integers*, Acta Arith. **98**, 107-116 (2001).

[3] P. Aluffi, M. Marcolli, *Algebro-geometric Feynman rules*, arxiv:0811.2514.

[4] N. N. Bogoliubov, O. S. Parasiuk, *On the multiplication of causal functions in the quantum theory of fields*, Acta Math. **97**, 227-266 (1957).

[5] F. Chapoton, M. Livernet, *Pre-Lie algebras and the rooted trees operad*, Int. Math. Res. Not. 2001, 395-408 (2001).

[6] J. Collins, *Renormalization*, Cambridge monographs in math. physics, Cambridge (1984).

[7] A. Connes, D. Kreimer, *Hopf algebras, Renormalization and Noncommutative Geometry*, Comm. in Math. Phys. **199**, 20-242 (1998).

[8] A. Connes, D. Kreimer, *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem. I. The Hopf algebra structure of graphs and the main theorem*, Comm. Math. Phys. 210, no. 1, 249-273 (2000).

[9] A. Connes, D. Kreimer, *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem. II. The β-function, diffeomorphisms and the renormalization group*, Comm. Math. Phys. 216 , no. 1, 215-241 (2001).

[10] A. Connes, M. Marcolli, *Noncommutative Geometry, Quantum Fields and Motives*, Colloquium Publications, Amer. Math. Soc. (2007).

[11] K. Ebrahimi-Fard, *Loday-type algebras and the Rota-Baxter relation*, Lett. Math. phys. 61, 139-147 (2002).

[12] K. Ebrahimi-Fard, J. Gracia-Bondia, F. Patras, *A Lie theorietic approach to renormalization*, Comm. Math. Phys. Vol. 276 no. 2, 519-549 (2007).

[13] K. Ebrahimi-Fard, L. Guo, *Matrix representation of renormalization in perturbative quantum field theory*, arXiv:hep-th/0508155 (2005).

[14] K. Ebrahimi-Fard, L. Guo, D. Manchon, *Birkhoff type decompositions and the Baker-Campbell-Hausdorff recursion*, Comm. Math. Phys. **267**, 821-845 (2006).

[15] K. Ebrahimi-Fard, D. Manchon, *On matrix differential equations in the Hopf algebra of renormalization*, Adv. Theor. Math. Phys. vol. 10 No 6, 879-913 (2006).

[16] K. Ebrahimi-Fard, D. Manchon, *The combinatorics of Bogoliubov's recursion in renormalization*, CIRM 2006 workshop "Renormalization and Galois Theory", Org. F. Fauvet, J.-P. Ramis. arxiv:0710.3675.

[17] K. Ebrahimi-Fard, D. Manchon, *Dendriform equations*, prépublication arxiv:0805.0762.

[18] K. Ebrahimi-Fard, D. Manchon, *A Magnus- and Fer- type formula in dendriform algebras*, Found. Comput. Math. (paru en ligne, 2008).

[19] K. Ebrahimi-Fard, D. Manchon, F. Patras, *A noncommutative Bohnenblust-Spitzer identity for Rota-Baxter algebras solves Bogoliubov's recursion*, J. Noncomm. Geom. (à paraître). arXiv.0705.1265.

[20] K. Ebrahimi-Fard, D. Manchon, F. Patras, *New identities in dendriform algebras*, J. of Algebra 320, 708-727 (2008). arXiv:0705.2636 [math.CO].

[21] H. Figueroa, J.M. Gracia-Bondía, *Combinatorial Hopf algebras in Quantum Field Theory I*, Reviews of Mathematical Physics **17**, 881-976 (2005).

[22] L. Foissy, *Les algèbres de Hopf des arbres enracinés décorés I + II*, thèse, Univ. de Reims (2002), et Bull. Sci. Math. **126**, no. 3, 193–239 et no 4, 24–288 (2002).

[23] G. Green, *Researches on the Vibrations of Pendulums in Fluid Media*, Royal Society of Edinburgh Transactions, 315-324 (1836).

[24] L. Guo and B. Zhang, *Renormalization of multiple zeta values*, arxiv:math.NT/0606076 (2006).

[25] K. Hepp, *Proof of the Bogoliubov-Parasiuk theorem on renormalization*, Comm. Math. Phys. **2**, 301-326 (1966).

[26] M. Hoffman, *Quasi-shuffle products*, J. Algebraic Combin. **11**, 49-68 (2000).

[27] G. 'tHooft, M. Veltman, *Regularization and renormalization of gauge fields*, Nucl. Phys. **B44** 189-213 (1972).

[28] D. Kreimer, *On the Hopf algebra structure of perturbative quantum field theories*, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998).

[29] J-L. Loday, *Dialgebras*, Lect. Notes Math. 1763, Springer (Berlin), 7-66 (2001).

[30] D. Manchon, *Hopf algebras and renormalisation*, Handbook of algebra, Vol. 5 (M. Hazewinkel ed.), 365-427 (2008).

[31] D. Manchon, *Hopf algebras in renormalisation*, Encyclopædia of Mathematics (paraître).

[32] D. Manchon, S. Paycha, *Nested sums of symbols and renormalised multiple zeta values*, article soumis.

[33] F. Patras, Chr. Reutenauer, *On Dynkin and Klyachko idempotents in graded bialgebras*, Adv. Appl. Math. **28**, 560-579 (2002).

[34] M. Sakakibara, *On the Differential equations of the characters for the Renormalization group*, Mod.Phys.Lett. A19, 1453-1456 (2004).

[35] M. E. Sweedler, *Hopf algebras*, Benjamin, New-York (1969).

[36] W. Van Suijlekom, *The Hopf algebra of Feynman graphs in quantum electrodynamics*, Lett. Math. Phys. **77**, 265-281 (2006).

[37] W. Van Suijlekom, *Renormalization of gauge fields: a Hopf algebra approach*, arXiv:hep-th/0610137 (2006).

[38] W. Zimmermann, *Convergence of Bogoliubov's method of renormalization in momentum space*, Comm. Math. Phys. **15**, 208-234 (1969).

---

25 novembre 2008

Dominique Manchon, Université Blaise Pascal, C.N.R.S.-UMR 6620, 63177 Aubière, France
E-mail : `manchon@math.univ-bpclermont.fr` • *Url :* `http://math.univ-bpclermont.fr/~manchon/`