Dominique MANCHON

UMR 6620, 24 av. des Landais, 63177 Aubire cedex

Tel : 04 73 40 76 98. Adresse électronique : manchon@math.univ-bpclermont.fr

Brève synthèse et perspectives

(mars 2007)

Liste des publications

[1] D. Manchon : *Formule de Weyl pour les groupes de Lie nilpotents*, J. f.d. Reine u. Angew. Math. 418, 1991.

[2] D. Manchon : *Calcul symbolique sur les groupes de Lie nilpotents et applications*, J. Funct. Anal. 102 (1), 1991.

[3] D. Manchon : *Weyl symbolic calculus on any Lie group*, Acta Appl. Math. 30, 1993.

[4] D. Manchon : *Opérateurs pseudodifférentiels et représentations unitaires des groupes de Lie*, Bull. Soc. Math. France 123, 1995.

[5] D. Manchon : *L'algèbre de Hopf bitensorielle*, Comm. in Algebra 25 (5), 1997.

[6] M. Andler et D. Manchon : *Opérateurs aux différences finies, calcul pseudo-différentiel et représentations des groupes de Lie*, à paraître au J. Geom. and Physics.

[7] D. Manchon : *Distributions à support compact et représentations unitaires*, J. Lie Theory 9, 403-424 (1999).

[8] D. Manchon, *Front d'onde et propagation des singularités pour un vecteur-distribution*, Colloq. Math. 81 (2), 161-191 (1999).

[9] D. Manchon, *Une remarque sur l'exponentielle-étoile*, Rencontres Mathématiques de Glanon, 1997.

[10] Choix des signes pour la formalité de M. Kontsevich (avec D. Arnal et M. Masmoudi), Pac. J. Math. 203 N1, 23-66 (2002).

[11] Poisson bracket, deformed bracket and gauge group actions in Kontsevich deformation quantization, Lett. Math. Phys. **52**, 301-310 (2000).

[12] On quantization of quadratic Poisson structures (avec M. Masmoudi et A. Roux), Comm. Math. Phys. 225, 121-130 (2002).

[13] Cohomologie tangente et cup-produit pour la quantification de Kontsevich (avec Ch. Torossian), Ann. Univ. Blaise Pascal **10**, 75-106 (2003).

[14] Orbites coadjointes et variétés caractéristiques (avec A. Baklouti et S. Dhieb), J. Geom. Phys. **54**, 1-41 (2005).

[15] Hopf algebras, from basics to applications to renormalization, Proc. Rencontres Mathématiques de Glanon 2001 (Parution 2003).

[16] Birkhoff type decompositions and the Baker-Campbell-Hausdorff recursion (avec K. Ebrahimi-Fard et L. Guo), Comm. Math. Phys. **267**, 821-845 (2006).

[17] Shuffle relations for regularized integrals of symbols (avec S. Paycha), Comm. Math. Phys. **270**, 13-51 (2007).

[18] On matrix differential equations in the Hopf algebra of renormalization (avec K. Ebrahimi-Fard), Adv. Theor. and Math. Phys. **10** No 6 (à paraître).

[19] Hopf algebras in renormalisation, Encycl. Math. (à paraître).

Articles soumis ou en préparation, prépublications :

[20] Chen sums of symbols and renormalised multiple zeta values (avec S. Paycha), article soumis.

[21] Stokes' formulae on classical symbol valued forms and applications (avec Y. Maeda et S. Paycha).

[22] A Bohnenblust-Spitzer identity for noncommutative Rota-Baxter algebras solves Bogoliubov's counterterm recursion (avec K. Ebrahimi-Fard et F. Patras), en préparation.

[23] Hopf algebras and renormalisation, article de survol pour **Handbook of Algebra**, en préparation.

[24] Annulateurs et déformations (avec A. Baklouti et S. Dhieb), en préparation.

Ces travaux se répartissent essentiellement en trois domaines de recherche : opérateurs pseudo-différentiels et représentations (articles 1, 2, 3, 4, 6, 7 et 8), algèbres de Hopf (articles 5, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22 et 23) et quantification par déformation (articles 9, 10, 11, 12, 13, 14 et 24). La quantification au sens large constitue le lien qui unit les trois groupes d'articles.

1. Opérateurs pseudo-différentiels et représentations

1.1. Calcul symbolique et formule de Weyl

Les quatre premiers articles sont consacrés aux opérateurs pseudodifférentiels dans les espaces de représentations des groupes de Lie, nilpotents dans [1] et [2], quelconques dans [3] et [4]. Les deux premiers sont tirés de ma thèse de doctorat soutenue en septembre 1989 à l'université de Paris VII sous la direction de Martin Andler. Les deux suivants sont consacrés à la généralisation au cas d'un groupe de Lie quelconque des méthodes utilisées et des résultats obtenus.

Dans l'article [3] je développe pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ un calcul symbolique sur certaines classes de fonctions C^∞ sur le dual $\mathfrak{g}^*$ dont la transformée de Fourier inverse est à support compact dans $\mathfrak{g}$: les *classes de symboles analytiques* $AS_\rho^{m,Q}$ définies comme l'espace (de Fréchet) des fonctions p de classe C^∞ sur $\mathfrak{g}^*$ telles que :

$$\mathrm{supp}(\mathcal{F}^{-1}p) \subset Q$$

et telles que :

$$|D^\alpha p(\xi)| \le C_\alpha \Lambda(\xi)^{m-\rho|\alpha|}$$

avec $\Lambda(\xi) = (1 + \|\xi\|^2)^{\frac{1}{2}}$. Ici m désigne un réel quelconque et Q un compact de $\mathfrak{g}$.

Nous définissons pour des fonctions à décroissance rapide et dont la transformée de Fourier inverse est à support compact un produit associatif :

$$p\#q(\xi) = \iint_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}} \mathcal{F}^{-1}p(x)\mathcal{F}^{-1}q(y)e^{i<x.y,\xi>}\,dxdy$$

où :

$$\begin{aligned} x.y &= \log(\exp x.\exp y) \\ &= x + y + \frac{1}{2}[x,y] + \cdots \end{aligned}$$

est donné par la formule de Campbell-Hausdorff. Nous montrons alors que la correspondance :

$$(p,q) \longmapsto p\#q$$

s'étend en une correspondance bilinéaire :

$$AS_{\rho_1}^{m_1,Q_1}(\mathfrak{g}^*) \times AS_{\rho_2}^{m_2,Q_2}(\mathfrak{g}^*) \longrightarrow AS_{\inf(\rho_1,\rho_2)}^{m_1+m_2,Q_1.Q_2}(\mathfrak{g}^*)$$

où m_1 et m_2 sont des réels, ρ_1 et ρ_2 sont dans $]\frac{1}{2},1]$, et Q_1, Q_2 sont des voisinages compacts suffisamment petits de 0 dans $\mathfrak{g}$.

Cette correspondance est continue pour les topologies de Fréchet, ainsi que pour une autre topologie (la topologie de Hörmander) pour laquelle les éléments à décroissance rapide forment un sous-espace dense.

Dans l'article suivant [4] on applique ce calcul symbolique à l'étude des opérateurs associés : pour toute représentation unitaire π d'un groupe de Lie G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et pour toute fonction p sur $\mathfrak{g}^*$ appartenant à une classe de symboles analytiques il est possible de donner un sens (comme opérateur non borné) à l'*opérateur de symbole p dans l'espace de la représentation π* :

$$p^{W,\pi} = \int_{\mathfrak{g}} \mathcal{F}^{-1}p(x)\pi(\exp x)\,dx$$

et on montre que le composé $p^{W,\pi} \circ q^{W,\pi}$ admet $p\#q$ comme symbole. Lorsque la représentation est irréductible et liée à une orbite coadjointe Ω par une bonne formule des caractères de Kirillov, on a pour des symboles elliptiques à valeurs réelles un analogue de la formule asymptotique de Weyl.

Plus précisément supposons que l'orbite Ω associée à la représentation π soit fermée et tempérée, et supposons que la formule des caractères de Kirillov s'écrit :

$$\operatorname{Tr} p^{W,\pi} = \int_{\Omega} J(D).p(\omega) d\beta_{\omega}$$

où J est une fonction analytique définie au voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$ vérifiant $J(x) = 1 + O(\|x\|^2)$, et où $J(D)$ est l'opérateur "différentiel d'ordre infini" correspondant :

$$J(D) = \mathcal{F}.J.\mathcal{F}^{-1}$$

Supposons également que p est un polynôme elliptique de degré m. Alors pour tout $N > 0$ il existe deux constantes positives C_1 et C_2 telles que l'on a l'estimation suivante pour $t \to \infty$:

$$\begin{aligned} N(t) = \int_{\Omega \cap \{p \leq t\}} d\beta_{\Omega} + O\Bigg(& \sup_{|t-\tau| < C_1 t^{1-\frac{1}{4m}+\varepsilon}} \Big(t^{-N} + V(\tau + C_2 \tau^{1-\frac{1}{4m}+\varepsilon}) - V(\tau) \Big)^{\frac{1}{2}} V(\tau)^{\frac{1}{2}} \\ & + \sup_{|t-\tau| < C_1 t^{1-\frac{1}{4m}+\varepsilon}} \Big(t^{-N} + V(\tau + C_2 \tau^{1-\frac{1}{4m}+\varepsilon}) - V(\tau) \Big) \Bigg), \end{aligned}$$

où $N(t)$ désigne le nombre de valeurs propres de $p^{W,\pi}$ inférieures à t, où $d\beta_{\Omega}$ désigne la mesure de Liouville normalisée sur Ω, et où $V(t)$ désigne le volume $\int_{\Omega \cap \{p \leq t\}} d\beta_{\Omega}$.

Le théorème II.2 de l'article stipule même que l'on a l'estimation :

$$N(t) = \Big(\int_{\Omega \cap \{p \leq t\}} d\beta_{\Omega} \Big) \big(1 + O(t^{-\frac{1}{4m}+\varepsilon}) \big).$$

Ce dernier résultat n'est exact que sous certaines conditions supplémentaires : il se déduit de la première estimation à condition que l'on ait une propriété de régularité pour le volume :

$$\frac{V'(t)}{V(t)} = O(\frac{1}{t}).$$

Il est dit que cette dernière propriété se déduit comme dans [1] des travaux de N. Nilsson (Ark. Mat. 5 No 32, 463-476, 1964, et Ark. Mat. 5 No 35, 527-540, 1965). Or si c'est vrai de manière évidente dans le cas nilpotent (grâce à l'existence d'une carte de Darboux globale et polynomiale pour chaque orbite coadjointe), ça ne l'est plus du tout dans le cas général. On peut déduire des travaux de J-Y. Charbonnel sur orbites fermées et orbites tempérées [Ch] que la propriété de régularité est encore vérifiée dans le cas d'un groupe Ad-algébrique.

La première estimation (ainsi que la deuxième dans le cas où elle est vraie) s'étend aux polynômes elliptiques seulement dans la direction du cône asymptote à Ω, grâce au fait que si p s'annule sur un voisinage conique du cône asymptote $AC(\Omega)$, alors l'opérateur $p^{W,\pi}$ est régularisant, en ce sens qu'il transforme tout vecteur-distribution en vecteur C^{∞}. La démonstration de ce théorème ([4 th. III.1]) était insuffisante dans [4] : il y manque un argument de traçabilité pour certains opérateurs, qui a été entièrement justifié par la suite dans [7] (voir plus loin).

Cette propriété suggère la définition du front d'ondes d'un vecteur-distribution :

$$WF(u) = \bigcap_{\substack{p \text{borné} \\ p^{W,\pi} u \text{vecteur } C^\infty}} \text{char } p$$

avec :

$$\text{char } p = \{\xi \in \mathfrak{g}^* / \lim_{t\to\infty} p(t\xi) = 0\}$$

et s'interprète par l'inclusion :

$$WF(u) \subset AC(\Omega)$$

pour tout vecteur-distribution u. Ceci est développé dans l'article [8] (voir ci-dessous).

Dans le cas nilpotent traité dans les articles [1] et [2] l'exponentielle sur le groupe simplement connexe est un difféomorphisme global. La condition de compacité du support de la transformée de Fourier n'est donc pas nécessaire, et on peut travailler avec des classes de symboles "ordinaires". Le point essentiel qui a permis la généralisation est un théorème d'approximation ([3], theorem II.1) selon lequel on ne perd aucune information en se restreignant à des classes de symboles analytiques : la convolution par une fonction dont la transformée de Fourier est une fonction C^∞ à support compact identiquement égale à 1 autour de l'origine fournit l'approximation souhaitée.

Ce calcul symbolique avait été suggéré dès 1980 dans le cas nilpotent par Roger Howe [Hw], et développé dès 1983 par Anders Melin dans un cadre hypoelliptique dans le cas nilpotent gradué, avec des classes de symboles différentes.

1.2. Contractions de groupes de Lie et théorie spectrale

L'article [6], écrit en commun avec Martin Andler, s'intéresse à une famille à un paramètre de groupes de Lie résolubles. La motivation est de nature physique : on s'intéresse à ce que deviennent les relations de commutation de la mécanique quantique lorsque la droite réelle est remplacée par un réseau unidimensionnel de maille $\delta > 0$, et on cherche à comprendre le passage à la limite continue $\delta \to 0$.

On se place sur $\delta(\mathbb{Z} + \lambda)$ avec $\delta > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on fixe une constante (de Planck) non nulle h et on considère les deux opérateurs :

$$D_\delta f(x) = \frac{1}{\delta}\big(f(x+\delta) - f(x)\big)$$
$$\mathbf{x}.f(x) = xf(x)$$

Les relations de commutation s'écrivent ici :

$$[D_\delta, \mathbf{x}] = (\mathrm{Id} + \delta D_\delta)$$

L'opérateur $-i\mathbf{x}$ est essentiellement anti-autoadjoint (non borné) dans $L^2(\mathbb{R})$, mais pas D_δ, dont l'adjoint est $-D_{-\delta}$. Posant :

$$\begin{aligned} p &= -ih\mathbf{x} \\ q &= -\frac{1}{2}(D_\delta + D_{-\delta}) \\ e &= -\frac{ih\delta}{2}(D_\delta - D_{-\delta}) - ih\,\mathrm{Id} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} pf(x) &= -ihf(x) \\ qf(x) &= -\frac{1}{2\delta}(f(x+\delta) - f(x-\delta)) \\ ef(x) &= -\frac{i}{h}2(f(x+\delta) + f(x-\delta)) \end{aligned}$$

on obtient alors trois opérateurs essentiellement anti-autoadjoints vérifiant les relations :

$$\begin{aligned} [p,q] &= e \\ [p,e] &= -(h\delta)^2 q \\ [q,e] &= 0 \end{aligned}$$

Les formules ci-dessus définissent par exponentiation une représentation unitaire irréductible $\widehat{\pi}^\alpha_{\delta,\lambda}$ du groupe de Lie $\widetilde{G}_\alpha$ connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\alpha$ engendrée par les éléments P, Q, E avec les relations :

$$[P,Q] = E \qquad [P,E] = -\alpha^2 Q \qquad [Q,E] = 0$$

avec $\alpha = h\delta$.

Lorsque $\alpha = 0$ nous considérons pour $G_\alpha = G_0$ une extension d'ordre 2 du groupe de Heisenberg. L'orbite coadjointe de hE^* pour $\widetilde{G}_\alpha$ est un cylindre elliptique qui tend vers l'orbite coadjointe de hE^* pour G_0, qui est la réunion des deux plans de cote $\pm h$.

Dans l'esprit de la méthode des orbites, nous montrons (à $\lambda \in [0,1[$ fixé) que la représentation $\widehat{\pi}^\alpha_{\delta,\lambda}$ du groupe de Lie $\widetilde{G}_\alpha$ tend vers la représentation π_h de G_0 associée à l'orbite coadjointe de hE^* sous G_0. Moyennant un plongement de l'espace $\ell^2\big(\delta(\mathbb{Z}+\lambda)\big)$ dans $L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R})$ construit à l'aide d'une analyse multirésolution infiniment régulière (de Littlewood-Paley) nous faisons agir toutes les représentations considérées dans $L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R})$, et nous précisons en quel sens la convergence ci-dessus a lieu.

1.3. Distributions à support compact et représentations

Nous étudions dans l'article [7] les opérateurs $\pi(\varphi)$ où π est une représentation unitaire d'un groupe de Lie, et où φ est une distribution à support compact sur le groupe. Les opérateurs pseudo-différentiels de mes articles antérieurs en sont un cas particulier.

Nous étendons la formule des caractères de Kirillov aux opérateurs $\pi(\varphi)$ (lorsque la représentation π s'y prête), moyennant une condition naturelle de transversalité du front d'onde de la distribution φ par rapport au front d'onde de la représentation π.

Dans la première partie nous donnons trois critères pour qu'une représentation unitaire π soit fortement traçable (proposition I.1). En particulier π est fortement traçable si et seulement s'il existe un entier m tel que pour toute fonction $\varphi \in C_c^m(G)$ l'opérateur $\pi(\varphi)$ est à trace.

Dans la seconde partie nous rappelons quelques résultats de R. Howe sur le front d'onde d'une représentation unitaire. Le lien entre ces deux notions est le suivant : si π est une représentation unitaire fortement traçable, son front d'onde en l'élément neutre coïncide avec le front d'onde de son caractère-distribution [Hw theorem 1.8]. Nous rappelons la démonstration de ce résultat que R. Howe donne dans le cas unimodulaire, mais qui est valable en général.

La troisième partie est consacrée à la démonstration du résultat principal (théorème III.7) : pour toute distribution φ à support compact sur G telle que :

$$WF(\varphi) \cap -WF_\pi = \emptyset,$$

l'opérateur a priori non borné $\pi(\varphi)$ que l'on peut définir sur le domaine des vecteurs C^∞ est en fait borné, et même régularisant, c'est-à-dire qu'il envoie l'espace de la représentation dans l'espace des vecteurs C^∞. Dans le cas où π est de plus fortement traçable, l'opérateur $\pi(\varphi)$ est à trace.

Dans la quatrième partie nous montrons (théorème IV.1) que toute représentation unitaire irréductible π associée à une orbite coadjointe Ω fermée et tempérée une "bonne" formule des caractères de Kirillov est fortement traçable. Utilisant le théorème III.7 nous montrons (théorème IV.3) que la formule des caractères est vérifiée pour tous les opérateurs $\pi(\varphi)$ où φ est une distribution à support compact contenu dans un voisinage convenable de l'élément neutre telle que :

$$WF(\varphi) \cap -WF_\pi = \emptyset.$$

Dans la cinquième partie nous appliquons le théorème III.7 à la restriction d'une représentation fortement traçable π à un sous-groupe fermé transverse H : si l'intersection $\mathfrak{h}^\perp \cap WF_\pi(e)$ est vide la restriction $\pi\big|_H$ est à trace, et le caractère de $\pi\big|_H$ est la restriction (au sens des distributions) du caractère de π à H.

1.4. Front d'onde et propagation des singularités pour un vecteur-distribution

Nous définissons dans l'article [8] le front d'onde d'un vecteur-distribution pour une représentation unitaire d'un groupe de Lie réel G à l'aide du calcul pseudo-différentiel mis au point dans [3] et [4]. Cette notion précise celle de front d'onde d'une représentation introduite par R. Howe [Hw]. En application nous donnons une condition suffisante pour qu'un vecteur-distribution reste un vecteur-distribution pour la restriction de la représentation à un sous-groupe fermé H, et nous donnons un théorème de propagation des singularités pour les vecteurs-distribution.

2. Algèbres de Hopf

L'article [5] est consacré à l'étude d'un exemple non trivial d'algèbre de Hopf, construit de manière fonctorielle à partir d'un espace vectoriel quelconque sur un corps de caractéristique zéro.

Etant donné un espace vectoriel V sur un corps k, on sait lui associer de manière fonctorielle une algèbre, son algèbre tensorielle $T(V)$, qui contient V de manière naturelle, et qui vérifie de plus la propriété universelle suivante : pour toute algèbre A et pour toute application linéaire f de V dans A il existe un unique morphisme d'algèbres $\overline{f}$ de $T(V)$ dans A qui prolonge f.

Une construction similaire est possible dans la catégorie des algèbres de Hopf pointées : on considère sur l'espace $T(V)$ la structure de cogèbre obtenue en dualisant la structure d'algèbre de $T(V^*)$. La comultiplication est donnée par :

$$\Delta(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \sum_{i=0}^{n} (x_1 \otimes \cdots \otimes x_j) \tilde{\otimes} (x_{j+1} \otimes \cdots \otimes x_n)$$

et la co-unité ε par le terme constant. Appliquant le foncteur "algèbre tensorielle" à la comultiplication Δ et à la co-unité ε nous munissons de manière naturelle la double algèbre tensorielle $T(T(V))$ d'une structure de bigèbre. Identifiant les puissances de l'unité c de $T(V)$ et l'unité 1 de $T(T(V))$, qui sont les éléments de type groupe de la bigèbre, on obtient une bigèbre pointée $\mathcal{A}_V$ qui se trouve être une algèbre de Hopf.

Lorsque le corps est de caractéristique nulle, l'antipode est d'ordre infini et admet une expression explicite : on définit S_0 comme l'unique antimorphisme d'algèbres tel que :

$$S_0\big|_{T(V)} = -I + 2u\varepsilon$$

et l'*opérateur de césure* U comme l'unique dérivation de $\mathcal{A}_V$ telle que :

$$U\big|_{T(V)} = (I - u\varepsilon) * (I - u\varepsilon)$$

où l'étoile désigne le produit de convolution [Ab, Sw]. On a alors : (Théorème I.3) :

$$S = (\exp -U).S_0$$

La construction est fonctorielle, et l'algèbre de Hopf pointée $\mathcal{A}_V$ ainsi construite vérifie la propriété universelle suivante : pour tout espace vectoriel V sur k, pour toute algèbre de Hopf pointée $\mathcal{H}$ et pour tout morphisme de cogèbres f de $T(V)$ dans $\mathcal{H}$ il existe un unique morphisme d'algèbres de Hopf $\overline{f}$ de $\mathcal{A}_V$ dans $\mathcal{H}$ qui prolonge f. On peut enlever le mot "pointée" dans l'énoncé en remplaçant $\mathcal{A}_V$ par $\tilde{\mathcal{A}}_V$, obtenue à partir de $T(T(V))$ en rajoutant formellement les inverses des éléments de type groupe (§ I.6).

Le deuxième résultat est le théorème I.5, qui met en évidence une famille d'éléments primitifs : on montre que pour tout tenseur symétrique $v \in T(V)$ l'élément $\varphi(U)v$ est primitif, où φ est la série entière définie par :

$$\varphi(z) = \frac{1 - e^{-z}}{z}$$

J'avais conjecturé dans cet article que cette famille engendrait l'algèbre de Lie des éléments primitifs de $\mathcal{A}_V$. Cette conjecture a été infirmée par Loïc Foissy, qui a mis en évidence un élément primitif de type différent.

Dans la deuxième partie nous mettons en évidence, dans le cas où l'espace vectoriel V est de dimension finie, un couplage de Hopf entre $\mathcal{A}_V$ et $\mathcal{A}_{V^*}$, dont le noyau contient l'idéal engendré par l'ensemble des $\varphi(U)v$, $v \in S^{(2)}(V)$. (Théorème II.1).

Grâce aux travaux d'A. Connes et D. Kreimer, puis (entre autres) de L. Foissy, A. Frabetti, Chr. Brouder... sur les algèbres de Hopf intervenant en théorie des champs (renormalisation), l'algèbre de Hopf bitensorielle, objet a priori un peu exotique, s'insère maintenant dans un cadre très naturel. Cette algèbre de Hopf s'est récemment révélée être une sous-algèbre de Hopf d'un modèle non-commutatif d'algèbre de Hopf de Connes-Kreimer, à savoir l'algèbre de Hopf des forêts d'arbres enracinés plans construite par Loïc Foissy (ou plus exactement sa version décorée par V). Il a montré l'autodualité de cette algèbre de Hopf, alors que $\mathcal{A}_V$ ne l'est pas : il y a un énorme choix de couplages de Hopf entre $\mathcal{A}_V$ et $\mathcal{A}_{V^*}$ mais L. Foissy a montré qu'ils étaient tous dégénérés.

Ces développements récents m'ont conduit à m'intéresser aux travaux d'A. Connes et D. Kreimer sur la renormalisation [CK1], [CK2]. J'ai rédigé l'article [15] pour un mini-cours à l'université Los Andes de Bogota en décembre 2002, dans lequel je redémontre plusieurs de leurs résultats (à savoir la décomposition de Birkhoff et la formule du type scattering) dans le cadre général des algèbres de Hopf graduées connexes (et même filtrées connexes en ce qui concerne la décomposition de Birkhoff). Cet article se veut pédagogique et emprunte beaucoup à la littérature existante, en particulier N. Jacobson, M.E. Sweedler, S. Montgomery, L. Foissy, et bien sûr à A. Connes et D. Kreimer. Les résultats ne sont pas nouveaux à proprement parler, mais le cadre est plus large que celui des graphes de Feynman.

Dans l'article [16] nous montrons, dans ce cadre général, que la décomposition de Birkhoff s'exprime entièrement à l'aide d'une bijection non-linéaire $\chi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ où $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie pro-nilpotente des *caractères infinitésimaux* de l'algèbre de Hopf filtrée connexe de départ, à valeurs dans une algèbre commutative $\mathcal{A}$ munie d'un *schéma de renormalisation*, i.e. d'une décomposition :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_- \oplus \mathcal{A}_+$$

où $\mathcal{A}_-$ et $\mathcal{A}_+$ sont deux sous-algèbres. Nous étudions cette bijection (dite récursion de Baker-Campbell-Hausdorff) pour elle-même. Nous montrons plus généralement que pour tout opérateur linéaire $R : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ respectant la filtration et pour tout scalaire θ non nul il existe une unique bijection $\chi = \chi_{R,\theta} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, en général non linéaire, qui vérifie :

$$e^{\theta X} = e^{R\bigl(\chi(X)\bigr)} e^{(\theta I - R)\bigl(\chi(X)\bigr)}.$$

Cette bijection se réduit à l'identité si $\mathfrak{g}$ est commutative, et la factorisation ci-dessus coïncide avec la décomposition de Birkhoff lorsque R est l'opérateur de Rota-Baxter de poids $\theta = 1$ défini par la composition à gauche par la projection sur $\mathcal{A}_-$. En application nous donnons une formule pour la solution de l'équation $y = 1 + R(ya)$ dans une algèbre associative filtrée complète quelconque, où R est un opérateur de Rota-Baxter de poids θ quelconque. Ceci nous permet de généraliser à la fois les formules récursives de Magnus (correspondant à $\theta = 0$) et l'identité de Spitzer (correspondant à $\theta \neq 0$, mais dans un cadre commutatif). Ces idées sont reprises dans [22] mais sans récursivité, en faisant appel à l'idempotent de Dynkin $D = S * Y$, où S est l'antipode et Y l'opérateur de graduation (dans une algèbre de Hopf graduée connexe *commutative*). Le rapprochement des démarches de [16] et [22] devrait mener vers une compréhension non-récursive de l'application non-linéaire χ elle-même. Dans [18] nous nous intéressons à la fonction β de Connes-Kreimer et au groupe de renormalisation dans un cadre matriciel. Ces objets sont définis pour une certaine classe de caractères de l'algèbre de Hopf graduée connexe de départ, ceux qui présentent une propriété de localité. Dans ce cadre, l'algèbre $\mathcal{A}$ est l'algèbre des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$, $\mathcal{A}_+$ est l'algèbre des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ qui sont holomorphes en $z = 0$, et $\mathcal{A}_- = z^{-1}\mathbb{C}[z^{-1}]$ (schéma dit "minimal").

Dans [17] nous appliquons la décomposition de Birkhoff-Connes-Kreimer à l'étude des relations de mélange pour des intégrales itérées à la Chen de symboles classiques. Dans [20] nous l'appliquons à des sommes itérées plutôt qu'à des intégrales, ce qui nous conduit à considérer une algèbre de Hopf de quasi-shuffles. En application nous proposons une définition pour des valeurs zêta multiples aux entiers négatifs qui vérifient les relations de quasi-shuffle habituelles, par exemple :

$$\zeta(-1,-3) + \zeta(-3,-1) + \zeta(-4) = \zeta(-1)\zeta(-3),$$

et qui sont toutes rationnelles. Le lien (crucial) entre sommes et intégrales est assuré par la formule d'Euler-MacLaurin. Les valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers négatifs sont bien connues, nous donnons la formule suivante pour deux arguments :

$$\zeta(-a,-b) = \frac{1}{b+1}\sum_{s=0}^{b+1} C_{b+1}^{s} B_s \zeta(-a-b+s-1) + \zeta(-a)\zeta(-b) + (-1)^{a+1}\frac{a!b!}{2(a+b+2)!}B_{a+b+2},$$

où les B_s sont les nombres de Bernoulli. Par exemple,

$$\zeta(0,0) = \frac{3}{8}, \qquad \zeta(-2,0) = \frac{7}{720}, \qquad \zeta(0,-2) = -\frac{7}{720},$$
$$\zeta(-1,-3) = \frac{1}{840}, \qquad \zeta(-2,-2) = 0, \qquad \zeta(-3,-1) = -\frac{19}{10080}.$$

3. Quantification par déformation

Dans le court article [9], on montre que sur une variété de Poisson M munie d'un étoile-produit bidifférentiel, la série exponentielle-étoile "naïve" :

$$e^{*f} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} f^{*n}$$

converge pour toute fonction f de classe C^∞ dans $C^\infty(M)[[\hbar]]$ muni de la topologie de la convergence C^∞ de chaque coefficient (sans hypothèse d'uniformité). L'exponentielle-étoile que l'on considère habituellement s'écrit plutôt $e^{*\frac{1}{\hbar}f}$ et n'a de sens que pour des étoile-produits convergents, pour lesquels $\hbar$ est une vraie constante et non pas un paramètre de déformation formel.

Dans l'article [10], avec D. Arnal et M. Masmoudi, nous précisons les signes qui apparaissent dans les formules explicites donnant le L_∞-quasi-isomorphisme $\mathcal{U}$ de Kontsevich. Tout 2-tenseur de Poisson formel $\hbar\gamma$ induit un étoile-produit $*_\gamma$ explicite via le morphisme de formalité $\mathcal{U}$. Dans l'article [13] avec Ch. Torossian nous donnons une démonstration détaillée de la formule du cup-produit donnée dans [Ko] au § 8.1, qui dit que la dérivée du morphisme de formalité $\mathcal{U}$ en le 2-tenseur de Poisson formel $\hbar\gamma$ réalise un isomorphisme d'algèbres graduées commutatives entre les deux cohomologies tangentes correspondantes, savoir la cohomologie de Poisson donnée par γ d'une part, et la cohomologie de Hochschild de l'étoile-produit $*_\gamma$ d'autre part.

Dans l'article [11], j'exprime la différence entre le crochet de Poisson et le crochet déformé à l'aide d'un terme de dérivée seconde du quasi-isomorphisme $\mathcal{U}$ de Kontsevich. J'explicite également une action du groupe des difféomorphismes formels (premier groupe de jauge) sur l'ensemble des étoile-produits obtenus par la méthode de Kontsevich.

Soit V un espace vectoriel réel. L'identification de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}l(V)$ avec les champs de vecteurs linéaires sur V s'étend en une surjection linéaire (en général non bijective) J de $\Lambda^2\mathfrak{g}$ vers les 2-tenseurs quadratiques. Lorsque $r \in \Lambda^2(\mathfrak{g})$ est une r-matrice classique (à savoir $[r,r]=0$), $J(r)$ est une structure de Poisson quadratique. Dans l'article [12], avec M. Masmoudi et A. Roux, nous montrons que la structure de Poisson quadratique sur $\mathbb{R}^3$, à savoir :

$$P = (x_1^2 + x_2x_3)\partial_2 \wedge \partial_3$$

n'est pas image par J d'une r-matrice classique, infirmant ainsi une assertion de Bhaskara et Rama selon laquelle toute structure de Poisson quadratique devait s'écrire $J(r)$ avec $[r,r]=0$.

Enfin l'article [14] (travail commun avec A. Baklouti et S. Dhieb) s'inscrit dans la problématique suivante : il s'agit d'associer un module $\mathcal{M}$ sur une algèbre déformée une sous-variété co-isotrope $V(\mathcal{M})$ et une sous-variété de Poisson $VA(\mathcal{M})$ de la variété de Poisson sous-jacente. Ce programme est mis en oeuvre dans le cadre algébrique plat, c'est-à-dire lorsque l'algèbre $\mathcal{A}$ considérée est une déformation $A[[\nu]]$ de l'algèbre A des polynômes sur C^d. La prise en compte d'une involution semi-linéaire sur $\mathcal{A}$ permet de plus de faire vivre ces variétés affines sur le corps des réels. Nous donnons plusieurs exemples qui établissent la compatibilité de cette approche avec les méthode des orbites de Kirillov dans le cadre des variétés de Poisson linéaires. Nous montrons notamment (à l'aide de travaux antérieurs de N.V. Pedersen) que dans le cas du dual d'une algèbre de Lie nilpotente, toute orbite coadjointe peut s'écrire $VA(\mathcal{M})$ où $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{A}$-module bien choisi. La démarche inverse (quantifier une sous-variété co-isotrope pour obtenir un idéal à gauche de l'algèbre déformée) a été récemment mise en oeuvre indépendamment par Bordemann, Ginot, Halbout, Herbig et Waldmann d'une part, par Cattaneo et Felder d'autre part [BGHHW], [CF].

Perspectives

1. Reste optimal dans la formule de Weyl

Dans [5] l'estimation du reste dans la formule asymptotique de Weyl est loin d'être optimale. Dans le cas classique le reste optimal a été obtenu par Hörmander [Hr] grâce à l'introduction des opérateurs Fourier-intégraux.

Cela nous amène à donner un sens (comme opérateurs non bornés) aux opérateurs Fourier-intégraux dans notre contexte :

$$\mathcal{A}^{\pi}_{p,S} = \iint_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*} p(x,\xi) e^{iS(x,\xi)} \pi(\exp x)\, dx\, d\xi$$

où S est une phase positivement homogène de degré 1 en ξ sans points critiques pour $\xi \neq 0$, et p appartient à une certaine classe de symboles sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$ et vérifie $p(x,\xi) = 0$ pour tout x hors d'un certain voisinage compact de l'origine dans $\mathfrak{g}$. Pour tout symbole $a \in AS_1^{1,K}(\mathfrak{g}^*)$ à valeurs réelles admettant un développement asymptotique en termes positivement homogènes :

$$a(\xi) \sim \sum_j a_{1-j}(\xi)$$

il est possible, en suivant [Hr], d'approximer l'opérateur $e^{-ita^{W,\pi}}$ par une famille de Fourier-intégraux du type ci-dessus. Dans [Hr] l'utilisation de la phase stationnaire (et un théorème taubérien d'Ikehara) permet d'en déduire la formule de Weyl avec reste optimal. La difficulté consiste à adapter ces méthodes au cadre ci-dessus. On est amené à conjecturer la formule suivante :

$$N(t) = \Big(\int_{\Omega\cap\{p\leq t\}} d\beta_\Omega\Big)\big(1 + O(t^{-\frac{1}{m}})\big)$$

Les résultats de Helffer et Robert [H-R] pour des symboles quasi-homogènes suggèrent même un raffinement de cette conjecture dans le cas nilpotent de rang r :

$$N(t) = \Big(\int_{\Omega\cap\{p\leq t\}} d\beta_\Omega\Big)\big(1 + O(t^{-\frac{1}{m}\frac{r}{r-1}})\big)$$

ce qui nous redonne le reste optimal en $t^{-2/m}$ dans le cas classique, c'est à dire dans le cas du groupe de Heisenberg, nilpotent de rang $r = 2$. Mon étudiant en thèse Bérenger Aubin s'est attaqué à ces questions dans sa thèse (soutenue le 2 novembre 2006) : Après avoir défini les opérateurs Fourier-Intégraux dans les espaces de représentations comme ci-dessus, il obtient une amélioration partielle du reste :

$$N(t) = \Big(\int_{\Omega\cap\{p\leq t\}} d\beta_\Omega\Big)\big(1 + O(t^{-\frac{1}{2m}+\varepsilon})\big)$$

modulo une hypothèse forte de régularité sur la fonction de comptage N qu'il serait bon, comme dans le cadre originel des variétés compactes, de démontrer en même temps.

2. Autres questions relatives aux opérateurs pseudo-différentiels

Si p est un symbole elliptique classique et si π est une représentation fortement traçable, la fonction $z \mapsto \mathrm{Tr}(p^{W,\pi})^{-z}$ est holomorphe pour $\mathrm{Re}\, z$ assez grande. Cette fonction admet-elle un prolongement méromorphe, et si oui où sont ses pôles?

Si le prolongement méromorphe existe (on peut l'espérer au moins dans le cadre ad-algébrique, grâce aux travaux de J-Y. Charbonnel [Ch]), y a-t-il un analogue du résidu de Wodzicki (éventuellement d'ordre supérieur) pour les opérateurs pseudo-différentiels dans ce contexte? Dans le même ordre d'idées, pour une représentation unitaire fortement traçable π y a-t-il un réel d_π tel que pour tout symbole d'ordre $-d_\pi$ l' opérateur pseudo-différentiel $p^{W,\pi}$ admette une trace de Dixmier?

De façon plus générale, un domaine de recherches assez vaste consiste à étudier les triplets spectraux $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ (au sens d'A. Connes) où $\mathcal{A}$ est l'algèbre des symboles classiques d'ordre zéro (ou son produit tensoriel avec une algèbre de matrices $k \times k$), $\mathcal{H}$ est l'espace d'une représentation unitaire irréductible π fortement traçable (ou son produit tensoriel par $\mathbb{C}^k$), et D est un opérateur elliptique d'ordre 1.

3. Quantification par déformation

Les pistes ouvertes par l'article [14] sont multiples : dans [24] nous montrons que pour un groupe de Lie réel résoluble exponentiel la variété de Poisson caractéristique $VA(\pi)$ est égale à l'adhérence de Zariski de l'orbite coadjointe associée. Ce résultat implique la bicontinuité pour une forme "unitaire" de l'application de Dixmier. La collaboration avec les chercheurs de la faculté des sciences de Sfax va aussi porter sur les points suivants :

- étude du comportement des variétés caractéristiques V et VA par rapport aux opérations d'induction et de restriction.

- étude d'autres exemples dans le cas Poisson linéaire, notamment résolubles et semi-simples.

- étude d'exemples non linéaires : algèbre de Heisenberg quantique d'A. Rosenberg (qui peut se voir comme une déformation d'une variété de Poisson quadratique de dimension deux), algèbres de Sklyanin...

Dans une direction différente, on peut se demander si l'approche de la formalité pour $\mathbb{R}^d$ par D. Tamarkin ne pourrait pas s'adapter à des situations singulières, par exemple le quotient de $\mathbb{R}^d$ par un groupe fini. Pour une structure de Poisson invariante par ce groupe on pourrait comparer la cohomologie de Poisson du quotient (au sens de B. Fresse [Fr]) avec la cohomologie de Hochschild de l'algèbre déformée, en espérant une version singulière de la "cohomologie tangente de Kontsevich" [13]. Les travaux récents de V. Ginzburg et D. Kaledin montrent une identification en degrés, 0, 1, et 2 dans le cas où d est pair et où la structure de Poisson provient de la structure symplectique standard.

Quelques références

[Ab] E. Abe, *Hopf algebras*, Cambridge, 1980.

[BGHHW] M. Bordemann, G. Ginot, G. Halbout, H-C. Herbig, S. Waldmann, *Star-représentations sur des sous-variétés co-isotropes*, math.QA/0309321 (2003).

[CF] A. Cattaneo, G. Felder, *Coisotropic submanifolds in Poisson geometry and branes in the Poisson sigma model*, math.QA/0309180 (2003).

[Ch] J-Y. Charbonnel, *Orbites fermées et orbites tempérées II*, J. Funct. Anal. 138, 213-222, 1996.

[CK1] A. Connes, D. Kreimer, *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem I. The Hopf algebra structure of graphs and the main theorem*, Comm. Math. Phys. **210**, 249-273 (2000).

[CK2] A. Connes, D. Kreimer, *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem I. The β functions, diffeomorphisms and the renormalization group*, Comm. Math. Phys. **216**, 215-241 (2001).

[F-Sh] , B. Feigin et B. Shoikhet, *Deformation quantization with traces and vanishing of the wheels*, math.QA/0004081.

[Fr] B. Fresse, *Théorie des opérades de Koszul et homologie des algèbres de Poisson*, Ann. Math. Univ. Blaise Pascal **13**, No 2, 237-312 (2006).

[Hr] L. Hörmander, *The spectral function of an elliptic operator*, Acta Math. 121, 1968.

[Hw] R. Howe, *Wave front sets of representations of Lie groups*, in *Automorphic forms, representation theory and Arithmetic*, Tata Inst. fund. res. stud. math. 10, Bombay 1981.

[H-R] B. Helffer & D. Robert, *Propriétés asymptotiques du spectre d'opérateurs pseudodifférentiels sur $\mathbb{R}^n$*, Comm. P.D.E. 7(7), 1982.

[Ko] M. Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds I*, prépublication, q-alg. 9709040.

[Sh] B. Shoikhet, *Vanishing of the Kontsevich integrals of the wheels*, math.QA/0007080

[Sw] M.E. Sweedler, *Hopf algebras*, Benjamin, 1969.