Notes sur la régularisation dimensionnelle

Dominique Manchon, 25 avril 2003

Introduction

On s'intéresse à une intégrale indéfinie, éventuellement divergente, sur un espace $\mathbb{R}^d$ muni d'une mesure de Lebesgue :

$$J_d(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\, dx.$$

La régularisation dimensionnelle, introduite en théorie quantique des champs au début des années 70, consiste à "prolonger la dimension dans le plan complexe". Plus précisément il s'agit de trouver une bonne correspondance :

$$\varphi \longmapsto J_-(\varphi) : w \mapsto J_w(\varphi)$$

à valeurs dans les fonctions méromorphes, qui coïncide en $w = d$ avec l'intégrale de départ $J_d(\varphi)$ losqu'elle existe, qui présente un pôle en $w = d$ lorsque l'intégrale de départ diverge, et telle que les trois *axiomes de Wilson* suivants soient vérifiés (cf [C]) :

1) *Linéarité* :

$$J_w(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda J_w(\varphi) + \mu J_w(\psi).$$

2) *Changement d'échelle* : si pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$ on pose $(H_t.\varphi)(x) = \varphi(t^{-1}x)$, alors :

$$J_w(H_t.\varphi) = t^w J_w(\varphi).$$

3) *Invariance par translation* : si pour tout $q \in \mathbb{R}^d$ on pose $(T_q.\varphi)(x) = \varphi(x - q)$, alors :

$$J_w(T_q.\varphi) = J_w(\varphi).$$

Autrement dit on veut donner un sens raisonnable à l'opération consistant moralement à "intégrer sur un espace linéaire de dimension w". Il paraît surprenant de vouloir intégrer sue un mystérieux "espace linéaire de dimension w" une fonction qui vit sur $\mathbb{R}^d$. Ce paradoxe apparaît si on cherche, pour $w \neq d$, la forme linéaire J_w sous forme d'une mesure de Radon, c'est-à-dire (via le théorème de représentation de Riesz), si on suppose que J_w est continue sur l'espace $C_c(\mathbb{R}^d)$ des fonctions continues à support compact. On pourrait alors écrire :

$$J_w(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\, d\mu_w(x),$$

où μ_w est une mesure complexe sur $\mathbb{R}^d$ à la fois invariante par translation et vérifiant :

$$\mu(tK) = t^w \mu(K)$$

pour tout compact K et tout réel positif t, ce qui est impossible si $w \neq d$. On ne peut donc pas s'attendre à ce que les formes linéaires J_w aient de bonnes propriétés topologiques pour $w \neq d$. Le procédé de régularisation dimensionnelle n'a d'ailleurs été mené à bien, à ma connaissance, qu'en se restreignant à une classe très particulière de fonctions φ, à savoir les fonctions de la forme :

$$\varphi(x) = f(A_x)$$

où f est une fonction définie sur l'espace des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^{k+1}$ (et vérifiant des conditions de croissance à préciser), où $q_1, \ldots, q_k$ est un ensemble fini de vecteurs fixés dans $\mathbb{R}^d$ (que l'on supposera euclidien ici), et où A_x est la forme quadratique sur $\mathbb{R}^{k+1}$ donnée par :

$$A_x(y_0, y_1, \ldots, y_k) = \|xy_0 + q_1y_1 + \ldots + q_ky_k\|^2.$$

Autrement dit (cf. [E]), on s'autorise à remplacer la fonction φ sur $\mathbb{R}^d$ par une fonction f définie sur un espace abstrait de formes quadratiques indépendant de la dimension d de l'espace de départ. Les vecteurs $q_1, \ldots, q_k$ correspondent aux "moments extérieurs" associés aux arêtes externes des graphes de Feynman en théorie quantique des champs.

Résumé de l'approche de P. Etingof [E]

On veut formaliser le cadre esquissé à la fin de l'introduction, en l'étendant éventuellement aux intégrales multiples, c'est-à-dire sur un espace de dimension Ld où L est un entier positif quelconque. Pour cela on part d'un espace vectoriel E de dimension finie N et d'un sous-espace $F \subset E$ de dimension M On posera $L = N - M$. Le choix d'un élément de volume dv_E sur E induit un élément de volume dA sur l'espace S^2E^* des formes bilinéaires symétriques sur E. Il en est de même sur le sous-espace F moyennant le choix d'un élément de volume v_F. Toute forme bilinéaire symétrique A sur E induit par restriction une forme bilinéaire symétrique $A_{|_F}$ sur F. On considère l'espace $\mathcal{S}(S^2_+E^*)$ des fonctions de Schwartz sur S^2E^* de support inclus dans le cône $S^2_+E^*$ des formes bilinéaires symétriques positives. On définit un opérateur I_w^{EF} de $\mathcal{S}(S^2_+E^*)$ dans $\mathcal{S}(S^2_+F^*)$ de la façon suivante : pour $\mathrm{Re}\, w > N - 1$ et pour tout $C \in S^2F^*$ on considère la fonction $\rho_w^{EF}(-, C)$ sur S^2E^*, à support dans $S^2_+E^*$, définie par :

$$\rho_w^{EF}(A, C) = \pi^{Lw/2} \frac{\Gamma_M(w/2)}{\Gamma_N(w/2)} \delta(A_{|_F} - C)(\det C)^{-(w-M-1)/2} \det A)^{(w-N-1)/2},$$

où pour tout entier n la fonction Γ_n est définie par :

$$\Gamma_n(z) = (2\pi)^{n(n-1)/4} \prod_{l=0}^{n-1} \Gamma(z + l/2).$$

Si $F=\{0\}$ on convient que le déterminant de l'unique forme quadratique $*$ sur F est égal à 1, et on écrira simplement $\rho_w^{E0}(A,*)=\rho_w^{E0}(A)$. Moyennant cette convention on remarque que l'on a :

$$\rho_w^{EF}(A,C)=\delta(A_{|_F}-C)\frac{\rho_w^{E0}(A)}{\rho_w^{F0}(C)}.$$

Toujours pour $\mathrm{Re}\, w>N-1$ on définit l'opérateur I_w^{EF} par :

$$I_w^{EF}(f)(C)=\int_{S_+^2(E)}\rho_w^{EF}(A,C)f(A)\,dA.$$

La quantité ci-dessus est bien définie pour C définie positive, et s'étend par continuité à $C\in S_+^2F^*$. Enfin on étend $I_w^{EF}(f)(C)$ en une fonction entière dans tout le plan complexe grâce à des intégrations par parties successives à l'aide de l'opérateur différentiel à coefficients constants $\Delta=\det\partial$, où det est le déterminant sur $S^2(F^\perp)$. L'égalité cruciale est la suivante (la variable étant A et le paramètre C) :

$$\Delta\rho_w^{EF}(A,C)=\pi^N\rho_{w-2}^{EF}(A,C)$$

pour tout w avec $\mathrm{Re}\, w>N+1$. Si on a trois sous-espaces $G\subset F\subset E$ on établit facilement l'égalité entre opérateurs :

$$I_w^{EG}=I_w^{FG}\circ I_w^{EF}.$$

La proposition suivante établit le lien avec l'intégrale sur un espace de dimension Ld que nous voulions régulariser au départ :

Proposition 1 (P. Etingof).
Soit $w=d$ un entier positif, soit V un espace réel euclidien de dimension d, et soit β le produit scalaire euclidien sur V. Alors pour tout $f\in\mathcal{S}(S_+^2E^*)$ et pour tout $y\in\mathrm{Hom(F,V)}$ on a :

$$I_d^{EF}(f)(y^*\beta)=\int_{x\in\mathrm{Hom}(E,V),\,x_{|_F}=y}f(x^*\beta)\,dx.$$

Posant $\varphi(x)=f(x^*\beta)$ il est donc raisonnable de voir $I_w^{EF}(f)(y^*\beta)$ comme "l'intégrale L-uple de φ en dimension w avec paramètres externes y". En d'autres termes, avec les notations de l'introduction :

$$I_w^{EF}(f)(y^*\beta)=J_{Lw}(\varphi).$$

L'étape suivante consiste à passer des fonctions rapidement décroissantes f à des fonctions qui apparaissent naturellement avec les graphes de Feynman, et qui sont en général des fractions rationnelles du type :

$$f(A)=\frac{P(A)}{\prod_{j=1}^{l}\left(\mathrm{Tr}(AB_j)+m_j^2\right)}$$

avec $m_j \neq 0$, P polynôme et $B_j \in S^2_+(E)$ telles que $\sum t_j B_{j}{}_{|_{F^\perp}}$ soit non dégénérée pour $t_j > 0$. Dans ce cas on peut encore définir $I^{EF}_w(f)$ comme fonction *méromorphe* de w, à l'aide d'un polynôme de Bernstein-Sato. Voir [E § 3].

Revenons à des fonctions de Schwartz : il est possible, en utilisant à la fois la proposition 1 et la définition, d'écrire l'intégrale w-dimensionnelle comme une vraie intégrale d-dimensionnelle avec un certain poids : on imagine ici que w est une dimension complexe autour de d et on pose $w = d - z$.

Proposition 2.

$$I^{EF}_{d-z}(f)(y^*\beta) = \int_{x \in \mathrm{Hom}(E,V),\, x_{|_F} = y} f(x^*\beta) \left(\pi^{-Lz/2} \frac{\Gamma_M(\frac{d-z}{2})\Gamma_N(d/2)}{\Gamma_N(\frac{d-z}{2})\Gamma_M(d/2)} (\det y^*\beta)^{z/2} (\det x^*\beta)^{-z/2}\right) dx.$$

Ce résultat n'est pas incompatible avec les remarques de l'introduction, car le poids (i.e. le terme entre les grandes parenthèses) dépend des "données extérieures", c'est-à-dire de y. En revenant à la fonction de départ φ définie sur $\mathbb{R}^{Ld} = \{x \in \mathrm{Hom}(E,V),\, x_{|_F} = y\}$ par $\varphi(x) = f(x^*\beta)$ la proposition 2 se reformule ainsi :

$$J_{L(d-z)}(\varphi) = \int_{x \in \mathrm{Hom}(E,V),\, x_{|_F} = y} \varphi(x) \left(\pi^{-Lz/2} \frac{\Gamma_M(\frac{d-z}{2})\Gamma_N(d/2)}{\Gamma_N(\frac{d-z}{2})\Gamma_M(d/2)} (\det y^*\beta)^{z/2} (\det x^*\beta)^{-z/2}\right) dx.$$

Dans cette dernière égalité le poids dépend clairement de la fonction φ par l'intermédiaire des données extérieures y. Il vaut bien entendu 1 en $z = 0$.

Les axiomes de Wilson dans le formalisme d'Etingof

Le premier axiome (la linéarité) est vérifié par construction.

Références

[C] J. Collins, *Renormalization*, Cambridge (1989).

[E] P. Etingof, *Notes on dimensional regularization*, in P. Deligne et al., *Quantum fields and strings : a course for mathematicians vol. I*, AMS/IAS, 597-607 (1999).