

# Contrôlabilité de l'équation de Vlasov-Poisson en présence d'un champ extérieur

Olivier Glass

en collaboration avec  
D. Han-Kwan (ENS Paris)

Ceremade, Université Paris-Dauphine

Journées contrôle à Clermont, le 29 juin 2011.

# Equations de Vlasov-Poisson

- Système de Vlasov-Poisson dans le tore  $\mathbb{T}^n$  :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + F \cdot \nabla_v f = 0, \quad (t, x, v) \in [0, T] \times \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n,$$

$$-\Delta_x \phi(t, x) = \rho_0 - \int_{\mathbb{R}^n} f(t, x, v) dv, \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{T}^n,$$

$$F(t, x, v) = \underbrace{\nabla \phi(t, x)}_{\text{champ électrique}} + \underbrace{\tilde{F}(t, x, v)}_{\text{champ extérieur}} .$$

- $t$  est le temps,  $x$  la position,  $v$  la vitesse.
- Le système de Vlasov-Poisson décrit l'évolution d'une **fonction de distribution**  $f = f(t, x, v)$  de particules chargées, réparties dans l'espace des phases  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ , soumises à un **champ électrique auto-consistant**, sans collision.

► L'équation de Vlasov

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + F \cdot \nabla_v f = 0,$$

renvoie aux équations de Newton : les particules évoluent selon la mécanique classique, sous l'effet du champ de force  $F$ ,

► L'équation de Poisson décrit le potentiel électrique auto-consistant,

$$-\Delta_x \phi(t, x) = \rho_0 - \int_{\mathbb{R}^n} f(t, x, v) dv,$$

(on normalise en général par  $\int_{\mathbb{T}^n} \phi(t, x) dx = 0$  pour tout  $t$ ).  
Dans ce cadre,  $\rho_0$  représente un **fond neutralisant** fixe.

## Système de contrôle interne

- ▶ Système de Vlasov-Poisson dans le tore  $\mathbb{T}^n$ , avec un terme source localisé **en position** dans  $\omega \subset \mathbb{T}^n$  :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + F \cdot \nabla_v f = \mathbf{1}_\omega(x)g(t, x, v),$$

$$-\Delta_x \phi(t, x) = \rho_0 - \int_{\mathbb{R}^n} f(t, x, v) dv,$$

$$F = \nabla \phi + \tilde{F}.$$

- ▶ La source  $g$  est localisée dans  $\omega$ , de moyenne nulle et est utilisée comme **contrôle**.
- ▶ On pourrait aussi considérer un contrôle **en plus** dans l'équation de Poisson, mais cela ne change rien. Un contrôle portant uniquement sur l'équation de Poisson est plus complexe (beaucoup de conservations...)

## Question de contrôlabilité

- ▶ Question de contrôlabilité : peut-on trouver un contrôle  $u$  qui amène un état de départ  $f_0$  arbitraire vers une cible  $f_1$  arbitraire ?
- ▶ Le fond neutralisant est constant, on s'intéressera donc à des  $f_0$  et  $f_1$  de même masse totale.
- ▶ La question est donc : étant donné  $T > 0$  et deux fonctions de distribution  $f_0, f_1$  dans un certain espace  $X$ , telles que :

$$\int_{\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n} f_0(x, v) dx dv = \int_{\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n} f_1(x, v) dx dv,$$

peut-on trouver  $g = g(t, x, v)$ , supporté dans  $[0, T] \times \omega \times \mathbb{R}^n$  tel que

$$\forall t \in [0, T], \int_{\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n} g(t, x, v) dx dv = 0,$$

et tel que la solution du problème correspondant partant de  $f_0$  atteigne  $f_1$  au temps  $T$  ? Au moins pour  $\|f_0\|_X$  et  $\|f_1\|_X$  petits ?

# Difficulté principale

L'équation de transport libre

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = \mathbf{1}_\omega(x)g(t, x, v),$$

n'est pas contrôlable en général.

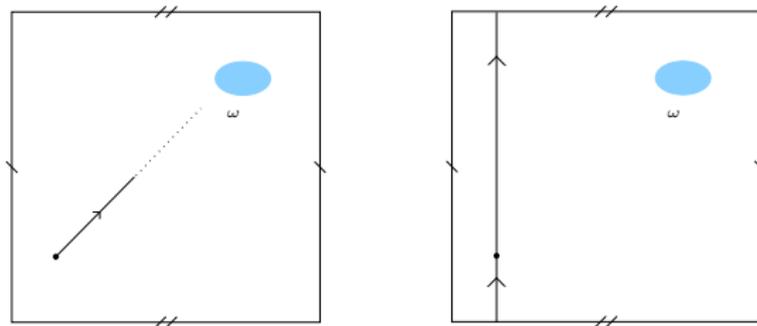
**Explication.** Cette équation se résout facilement par caractéristiques :

$$f(t, x, v) = f_0(x - tv, v) + \int_0^t \mathbf{1}_\omega(x - (t - \tau)v)g(\tau, x - (t - \tau)v, v) d\tau.$$

et alors...

# Obstructions à la contrôlabilité du linéarisé

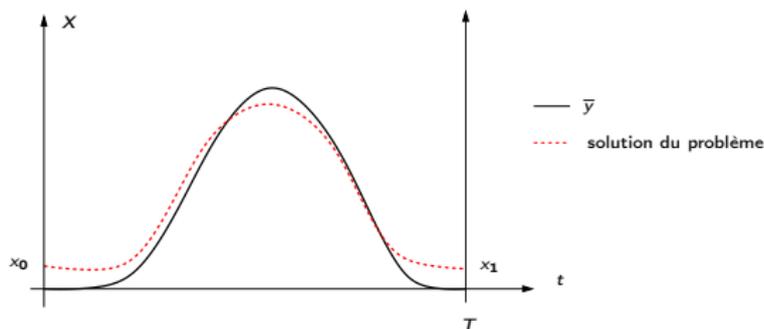
Il y a deux types d'obstruction à la contrôlabilité de cette équation :



- ▶ Les particules à **petites vitesses**  $v$  peuvent ne « pas avoir le temps » de rejoindre la zone de contrôle  $\omega$ ,
- ▶ Certaines particules à **grande vitesses**  $v$  vont dans des directions qui évitent la zone de contrôle  $\omega$ .

# La méthode du retour

- ▶ Dans de nombreux modèles on ne peut pas appliquer le schéma :  
linéarisation + contrôle du linéarisé + argument de point fixe,  
faute de contrôlabilité du linéarisé.
- ▶ La méthode du retour de J.-M. Coron consiste à trouver une trajectoire particulière du système (en forme de boucle), près de laquelle le système est contrôlable.



## Résultats anciens, cas $\tilde{F} = 0$

- ▶ **Théorème (G.)**. Si  $n = 2$  et  $\omega \neq \emptyset$ , le système est localement exactement contrôlable près de 0 dans l'espace

$$L^\infty(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2; (1 + |v|)^{\gamma+1} dx dv) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2; (1 + |v|)^\gamma dx dv),$$

en temps quelconque, pour  $\gamma > 2$ .

- ▶ **Théorème (G.)**. Si  $n \geq 1$  et  $\omega$  contient un hyperplan du tore, le système est globalement exactement contrôlable près de 0 dans l'espace

$$L^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n; (1 + |v|)^{\gamma+2} dx dv) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n; (1 + |v|)^\gamma dx dv),$$

en temps quelconque, pour  $\gamma > n$ .

## Le cas $\tilde{F}$ borné

On suppose ici que  $\tilde{F} \in L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n))$ .

- ▶ **Théorème (G.-Han-Kwan)**. Si  $n = 2$  et  $\omega \neq \emptyset$ , le système est localement exactement contrôlable près de 0 dans l'espace

$$L^\infty(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2; (1 + |v|)^{\gamma+1} dx dv) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2; (1 + |v|)^\gamma dx dv),$$

en temps quelconque, pour  $\gamma > 2$ .

- ▶ **Théorème (G.-Han-Kwan)**. Si  $n \geq 1$  et  $\omega$  contient un hyperplan du tore, le système est globalement exactement contrôlable près de 0 dans l'espace

$$L^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n; (1 + |v|)^{\gamma+2} dx dv) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n; (1 + |v|)^\gamma dx dv),$$

en temps quelconque, pour  $\gamma > n$ .

## Cas d'un champ magnétique extérieur, $n = 2$

On suppose ici que  $n = 2$  et

$$\tilde{F} := b(x)v^\perp,$$

où  $v^\perp = (-v_2, v_1)$ . La force  $\tilde{F}$  représente une force magnétique, où le champ magnétique est dans la direction orthogonale au plan d'étude.

**Hypothèse.** On suppose que

- ▶ on a  $b(x) \geq 0$  sur  $\mathbb{T}^n$ .
- ▶  $\mathcal{O} := \{b > 0\}$  satisfait la **condition géométrique de contrôle** suivante : quelle que soit la direction  $e \in \mathbb{S}^1$ , pour tout  $x \in \mathbb{T}^2$ , il existe  $t > 0$  tel que

$$x + te \in \mathcal{O}.$$

**Théorème (G.-Han-Kwan).** Sous les hypothèses précédentes, le système est localement exactement contrôlable près de 0 dans l'espace

$$L^\infty(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2; (1 + |v|)^{\gamma+1} dx dv) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2; (1 + |v|)^\gamma dx dv),$$

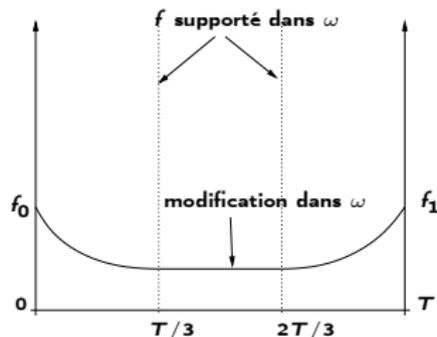
en temps quelconque, pour  $\gamma > 2$ .

## Idées de preuve. Cas 1 : $\tilde{F} = 0$ .

1. Réduction à la zéro-contrôlabilité. Le système est réversible : si  $f(t, x, v)$  est solution,  $f(T - t, x, -v)$  l'est également.

→ On se ramène au cas où :

$$f_1 = 0 \text{ dans } (\mathbb{T}^2 \setminus \omega) \times \mathbb{R}^2.$$



Il suffit en effet d'amener la solution à 0 en dehors de  $\omega$ , puis d'amener 0 à  $f_1$ . Rappelons que  $f_1$  ne peut être nul partout, puisque nous considérons une fonction de distribution de masse totale constante.

## 2. Début de construction de la solution de référence.

Pour un **potentiel donné**, on sait construire une solution de référence  $\bar{f}$  correspondante.

Soit  $\psi : [0, T] \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tel que :

$$\Delta_x \psi = 0 \text{ dans } [0, T] \times \mathbb{T}^2 \setminus \omega,$$

Soit  $Z \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$  tel que

$$\int_{\mathbb{R}^2} Z(v) dv = 1.$$

Alors on définit

$$\bar{f}(t, x, v) := Z(v)\Delta_x \psi(t, x) \text{ et } \bar{\phi}(t, x) := \psi(t, x),$$

qui satisfont

$$\partial_t \bar{f} + v \cdot \nabla_x \bar{f} + \nabla_x \phi \cdot \nabla_v \bar{f} = 0 \text{ dans } (t, x, v) \in [0, T] \times (\mathbb{T}^2 \setminus \omega) \times \mathbb{R}^2,$$

$$-\Delta_x \bar{\phi}(t, x) = \int_{\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2} \bar{f}(0, x, v) dx dv \text{ dans } [0, T] \times \mathbb{T}^2.$$

## 2. Début de construction de la solution de référence, suite.

Le but devient le suivant : déterminer un potentiel  $\psi$  tel que l'équation linéaire

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \nabla_x \psi \cdot \nabla_v f = 0,$$

soit contrôlable.

En considérant les caractéristiques, cela revient à chercher  $\psi$  tel que les caractéristiques associées :

$$\begin{aligned}\dot{X}(t, x, v) &= V(t, X(t, x, v)) \quad \text{et} \quad X(0, x, v) = x, \\ \dot{V}(t, x, v) &= \nabla \psi(t, X(t, x, v)) \quad \text{et} \quad V(0, x, v) = v,\end{aligned}$$

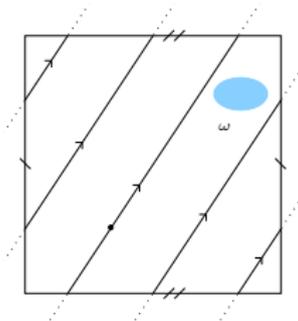
satisfassent la propriété :

toute caractéristique  $X$  passe par la zone de contrôle  $\omega$   
durant l'intervalle de temps  $[0, T]$ .

### 3. Les grandes vitesses.

Seul un nombre fini de directions  $v_i$  dans le cercle  $\mathbb{S}$  sont telles que :

$$\exists x \in \mathbb{T}^2, \forall t \in \mathbb{R}^+, x + tv_i \notin \omega.$$



→ En laissant agir le transport libre (i.e. en prenant  $\psi = 0$ ), les caractéristiques satisfont :

$$\forall v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \text{ tel que } \frac{v}{|v|} \notin \{v_1, \dots, v_n\}, \text{ si } |v| \geq m\left(\frac{v}{|v|}\right),$$

$$\forall x \in \mathbb{T}^2, \exists t \in [0, T_0], \text{ tel que } X(t, 0, x, v) \in \omega,$$

pour une certaine fonction  $m$  continue sur  $\mathbb{S} \setminus \{v_1, \dots, v_n\}$ .

### 3. Les grandes vitesses, suite.

- ▶ On veut « traiter » les mauvaises directions  $v_i$ .
- ▶ On construit un potentiel électrique qui « ramène » les particules dans la mauvaise direction dans  $\omega$

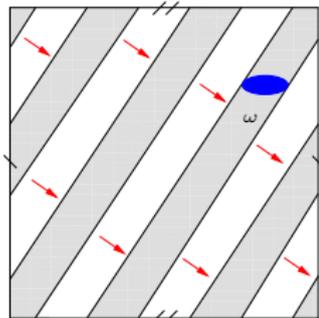


Figure: Zone incontrôlée

- ▶ On peut pour cela utiliser des résultats d'**approximation harmonique**. On définit le champ de vecteurs constant orthogonal à  $v_i$  dans la zone blanche. On peut l'approcher dans cette zone par une fonction harmonique en dehors de  $\omega$  (théorème « à la Runge »).

### 3. Les grandes vitesses, suite.

- ▶ En faisant se succéder dans le temps divers potentiels de ce type, on arrive à construire  $\psi$  tel que :

Il existe  $M > 0$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{T}^2$ , tout  $|v| \geq M$ ,  
il existe  $t \in [0, T]$  tel que

$$X(t, x, v) \in \omega.$$

- ▶ On peut même s'arranger en augmentant  $M$  pour que les particules parviennent dans  $\omega$  avec une vitesse assez importante.
- ▶ De plus, puisque l'accélération que nous avons imposée est finie :

$$\exists \tilde{M} > 0, \forall (x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2, |v| \leq M \implies \forall t, |V(t, 0, x, v)| \leq \tilde{M}.$$

#### 4. Les petites vitesses.

- ▶ Pour traiter les particules à petites vitesses, l'idée est de les accélérer pour se ramener au cas précédent.
- ▶ Il suffit pour cela de les accélérer toutes simultanément suffisamment fort.

**Lemme.** Quel que soit l'ouvert  $\omega$  non vide, il existe  $\theta \in C^\infty(\mathbb{T}^2; \mathbb{R})$  tel que

$$\begin{aligned}\Delta\theta &= 0 \text{ dans } \mathbb{T}^2 \setminus \omega, \\ \forall x \in \mathbb{T}^2 \setminus \omega, \quad |\nabla\theta(x)| &> 0.\end{aligned}$$

Ce résultat repose sur des techniques d'analyse complexe.

On déduit un  $\psi$  qui fait passer toutes les particules de vitesse inférieure à  $\tilde{M}$  en norme, à une vitesse supérieure à  $M$  :

$$\phi_3(t, x) := [M + \tilde{M} + 1]\delta_{T_1}(t)\theta(x),$$

où  $\delta_{T_1}$  la masse de Dirac au temps  $T_1$ , puis on régularise cette masse de Dirac.

## 5. Utilisation de la solution de référence.

- ▶ On sait donc construire une solution de référence  $(\bar{f}, \bar{\phi})$  dont caractéristiques  $(\bar{X}, \bar{V})$  satisfont :

$$\forall (x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2, \exists t \in [0, T], \bar{X}(t, 0, x, v) \in \omega.$$

- ▶ Pour résoudre le problème de contrôle non linéaire, on cherche la solution  $f$  sous la forme

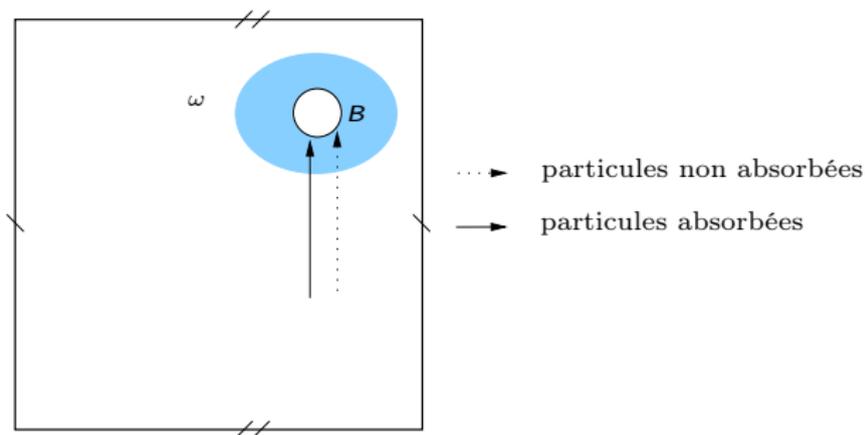
$$f = \bar{f} + w,$$

où  $w$  est une petite perturbation allant de  $f_0$  à 0.

- ▶ On utilise un procédé de point fixe (à la Ukai-Okabe '78).
- ▶ L'élément central est que les petites perturbations de  $f$  ont des caractéristiques qui satisfont encore la propriété ci-dessus.

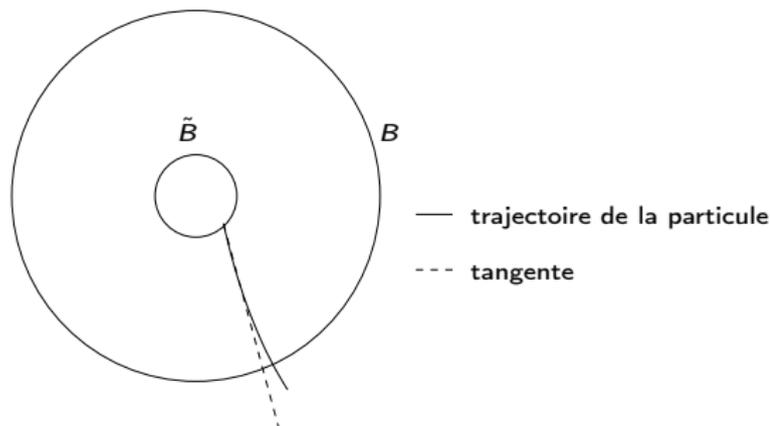
## 5. Utilisation de la solution de référence, suite.

- ▶ L'idée pour arriver à la zéro-contrôlabilité est d'absorber les particules quand elles passent dans  $\omega$ .
- ▶ Le procédé est le suivant. On distingue une boule  $B$  dans  $\omega$ . Nous laissons l'équation évoluer normalement dans  $\mathbb{T}^2 \setminus \partial B$ , mais sur la sphère  $\partial B$ , on absorbe les particules entrantes :
  - ▶ assez rapides,
  - ▶ arrivant avec une incidence suffisante.



## 5. Utilisation de la solution de référence, suite.

- ▶ Pour assurer l'électroneutralité, on émet des particules à proportion, que l'on tient piégées à l'intérieur de  $\omega$ .
- ▶ On régularise le  $f$  obtenu dans  $\omega$ . (On fait ce qu'on veut dans  $\omega$ .)
- ▶ On doit s'assurer que les particules vont toutes passer par  $B$ , avec une vitesse assez grande et une incidence suffisante.
- ▶ Pour obtenir cette propriété, on choisit en fait le potentiel  $\bar{\phi}$  correspondant à l'ouvert  $\tilde{B}$ , où  $\tilde{B}$  est une boule de même centre que  $B$ , mais de rayon très inférieur.



Idées de preuve. Cas 2 :  $\tilde{F} \in L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2))$ .

- ▶ Le principe est qu'on peut en fait utiliser le potentiel de référence précédent **en jouant sur l'échelle de temps**.
- ▶ Soit  $\bar{\phi} : [0, T] \rightarrow W^{2,\infty}(\mathbb{T}^2)$  un potentiel fonctionnant dans le cas précédent, à support compact en temps.
- ▶ Pour  $\tau \in (0, 1)$  introduit le potentiel « rescalé » :

$$\varphi_\tau(\mathbf{t}, \mathbf{x}) := \frac{1}{\tau^2} \bar{\phi} \left( \frac{\mathbf{t}}{\tau}, \mathbf{x} \right),$$

complété par 0.

- ▶ Si on compare les caractéristiques pendant  $[0, \tau T]$  associées à  $F_1 := \nabla \varphi_\tau(t, x)$  et celles associées à  $F_2 := \nabla \varphi_\tau(t, x) + \tilde{F}(t, x)$ , on voit que

$$\|(X_1, V_1) - (X_2, V_2)\|_{L^\infty([0, \tau T])} = \mathcal{O}(\tau).$$

- ▶ On peut ainsi construire une solution de référence en présence de  $\tilde{F}$ .
- ▶ Il s'agit ensuite de reprendre la construction précédente et de vérifier qu'on parvient bien à un point fixe...

## Idées de preuve. Cas 3 : en présence d'un champ magnétique.

- ▶ On considère le cas 2D, et la force s'écrit donc :

$$F(t, x, v) = \nabla\phi(t, x) + b(x)v^\perp,$$

avec  $b \geq 0$  et  $\{b > 0\}$  satisfaisant GCC, et où

$$-\Delta_x\phi(t, x) = \rho_0 - \int_{\mathbb{R}^2} f(t, x, v) dv.$$

- ▶ Les caractéristiques satisfont

$$\begin{cases} \dot{X}(t, x, v) = V(t, x, v) \\ \dot{V}(t, x, v) = \nabla\phi(t, X(t, x, v)) + b(X(t, x, v))V(t, x, v)^\perp, \end{cases}$$

et ne se comportent donc plus du tout de la même manière à grande vitesse !

## Un premier cas simple : $b$ constant

- ▶ On s'intéresse dans un premier temps à un cas plus simple, à savoir le cas où  $b$  est une constante (strictement positive).
- ▶ En l'absence de champ électrique, les caractéristiques ne sont pas des droites (mais des courbes cycloïdales comme des cercles par exemple).
- ▶ On souhaite comme précédemment trouver un champ électrique nous permettant d'obtenir la propriété :

toute caractéristique  $X$  passe par la zone de contrôle  $\omega$   
durant l'intervalle de temps  $[0, T]$ .

- ▶ On distingue encore entre grandes et petites vitesses.

# Les grandes vitesses

- ▶ On joue ici sur les différentes **échelles de temps**.
- ▶ On considère une caractéristique sans champ électrique :

$$\begin{cases} \dot{X}(t, x, v) = V(t, x, v) \\ \dot{V}(t, x, v) = b V(t, x, v)^\perp. \end{cases}$$

- ▶ Dans ce cas, le **module** de la vitesse d'une particule est conservé dans le temps :

$$|V(t, x, v)| = |v|, \quad \forall (t, x, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2.$$

- ▶ On s'intéresse au comportement d'une caractéristique  $(X, V)(t, x, v)$  pendant un **intervalle de temps d'ordre  $c/|v|$**  :

$$|V(t, x, v) - v| = \mathcal{O}(1), \quad \left| \frac{V(t, x, v)}{|V(t, x, v)|} - \frac{v}{|v|} \right| = \mathcal{O}(1/|v|),$$

et  $|X(t, x, v) - x - tv| = \mathcal{O}(1/|v|).$

## Les grandes vitesses, suite

- ▶ Il suit que sur des intervalles de temps d'ordre  $c/|v|$ , les caractéristiques sont très proches de celles du transport libre.
- ▶ On peut alors montrer le résultat suivant.

**Lemme.** Il existe un nombre fini de directions  $v_1, \dots, v_n$  dans  $\mathbb{S}^1$  et une fonction  $m$  continue sur  $\mathbb{S} \setminus \{v_1, \dots, v_n\}$  tels que

$$\forall v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \text{ tel que } \frac{v}{|v|} \notin \{v_1, \dots, v_n\}, \text{ si } |v| \geq m \left( \frac{v}{|v|} \right), \\ \forall x \in \mathbb{T}^2, \exists t \in [0, T_0], \text{ tel que } X(t, 0, x, v) \in \omega.$$

- ▶ Il faut encore traiter les mauvaises directions  $v_1, \dots, v_n$ .

## Les grandes vitesses, suite

- ▶ Dans les cas précédents ( $\tilde{F}$  nul ou borné), on traitait les mauvaises directions en faisant appel à un champ électrique « ramenant » les particules de mauvaises direction dans  $\omega$ .
- ▶ Ici,  $\nabla\phi$  est en quelque sorte « d'ordre inférieur » par rapport à  $\tilde{F} = b v^\perp$  à grande vitesse.
- ▶  $\rightarrow$  on laisse le champ magnétique agir !
- ▶ Sur une échelle de temps de l'ordre de 1, on a :

$$\left| \frac{V(t, x, v)}{|V(t, x, v)|} - \frac{v}{|v|} \right| \geq ct.$$

- ▶  $\rightarrow$  les mauvaises directions cessent de l'être sur une échelle de temps d'ordre 1.

## Les grandes vitesses, suite et fin

- ▶ On arrive alors encore au résultat suivant. On rappelle que  $(X, V)$  sont ici associées au champ magnétique seul.

**Lemme.** Il existe  $M > 0$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{T}^2$ , tout  $|v| \geq M$ , il existe  $t \in [0, T]$  tel que

$$X(t, x, v) \in \omega.$$

On peut de plus demander comme précédemment qu'au moment où la particule entre dans  $\omega$ , elle a un module de vitesse grand.

- ▶ Ici, le potentiel électrique de référence  $\psi$  nul convient !

## Les petites vitesses

- ▶ On cherche comme précédemment à accélérer toutes les particules pour se ramener au cas des grandes vitesses.
- ▶ On applique le **même** champ électrique que dans le cas où  $\tilde{F} = 0$ , c'est-à-dire un champ satisfaisant :

$$\begin{aligned}\Delta\psi &= 0 \text{ dans } \mathbb{T}^2 \setminus \omega, \\ \forall x \in \mathbb{T}^2 \setminus \omega, \quad |\nabla\psi(x)| &> 0,\end{aligned}$$

multiplié par « un Dirac en temps », ou une régularisation de celui-ci.

- ▶ Le point central est que l'on peut montrer que le champ magnétique ne perturbe pas cette accélération, c'est-à-dire que les caractéristiques correspondant à

$$F(t, x, v) = \rho_\varepsilon(t)\nabla\psi(x) + bv^\perp,$$

satisfont bien après action du champ électrique

$$\forall (x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2, \quad |v| \leq M \implies |V(T_0, 0, x, v)| \geq M.$$

## Fin du cas $b$ constant

- ▶ La suite de la construction suit de près le cas  $\tilde{F} = 0$ .
- ▶ On a un champ électrique de référence :  $\phi = 0$ , puis  $\phi = \rho_\varepsilon(t)\psi$ , puis  $\phi = 0$ ,
- ▶ On construit le  $\bar{f}$  correspondant,
- ▶ Pour  $f_0$  petit, on construit par point fixe une solution du problème de zéro-contrôlabilité partant de  $f_0$ , qui reste proche de  $\bar{f}$ ,
- ▶ On en déduit le cas général.

## Le cas d'un $b$ variable

- Considérons le cas plus général où :

$$b \geq 0 \text{ sur } \mathbb{T}^2 \text{ et}$$

$\mathcal{O} := \{x / b(x) > 0\}$  satisfait la condition géométrique de contrôle :

$$\forall e \in \mathbb{S}^1, \forall x \in \mathbb{T}^2, \exists t > 0, x + te \in \mathcal{O}.$$

Dans le cas précédent ( $b$  constant) le champ magnétique intervient de deux manières :

- **On le subit** dans certaines parties de la preuve : pour montrer que

$$|X(t, 0, x, v) - x - tv| = \mathcal{O}(1/|v|),$$

ou que le champ électrique « accélérateur » fonctionne.

- **On utilise** sa présence pour faire disparaître les « mauvaises directions ».

## Le cas d'un $b$ variable, suite

- ▶ Dans la partie où l'on subit le champ électrique on montre, après quelques complications techniques, que l'on peut obtenir les mêmes estimées :

- ▶  $|X(t, 0, x, v) - x - tv| = \mathcal{O}(1/|v|),$

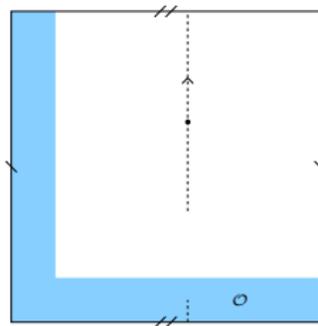
- ▶ Après utilisation du champ électrique  $\psi$ , on a

$$\forall (x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2, |v| \leq M \implies |V(T_0, 0, x, v)| \geq M.$$

- ▶ Le point central du théorème est que sous la condition géométrique de la zone  $\mathcal{O}$ , on peut encore bénéficier de l'effet du champ électrique pour dévier les mauvaises directions.

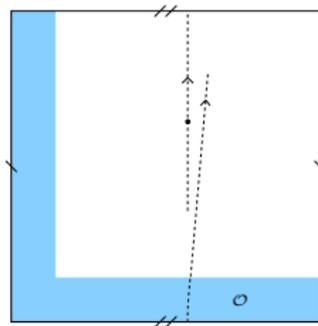
## Le cas d'un $b$ variable, suite

- ▶ On montre encore que sur une échelle de temps d'ordre 1, les mauvaises directions sont suffisamment déviées.
- ▶ L'idée est la suivante. Supposons  $\nabla\phi = 0$ . En dehors de  $\mathcal{O}$ , les trajectoires sont des droites parcourues à vitesse constante.
- ▶ Les trajectoires rectilignes vont naturellement dans la zone  $\mathcal{O}$ .



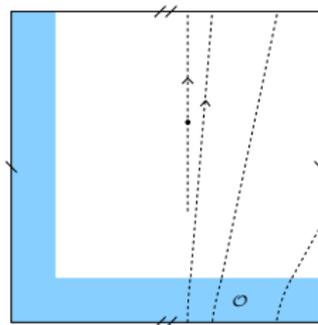
## Le cas d'un $b$ variable, suite

- ▶ Une fois dans la zone, elles y restent un temps d'ordre  $\mathcal{O}(1/|v|)$ .
- ▶ Cela dévie la vitesse de l'ordre de  $\mathcal{O}(1)$ , mais la **direction de la vitesse** de seulement  $\mathcal{O}(1/|v|)$ .



## Le cas d'un $b$ variable, suite

- ▶ Mais sur un intervalle de temps d'ordre 1, une particule fait de l'ordre de  $\mathcal{O}(|v|)$  passages dans  $\mathcal{O}$ .
- ▶ On parvient alors à montrer que sur une période de temps d'ordre 1, la déviation de la direction de la vitesse est de l'ordre de  $\mathcal{O}(1)$ .



## Le cas d'un $b$ variable, fin

- ▶ On peut donc là encore utiliser comme champ électrique de référence le champ donné par  $\phi = 0$ , puis  $\phi = \rho_\varepsilon(t)\psi$ , puis  $\phi = 0$ ,
- ▶ Puis on construit,  $\bar{f}$ , une stratégie de point fixe, etc.

## Quelques problèmes ouverts

- ▶ Que faire avec un contrôle **plus simple** (par le champ électromagnétique) ? Quitte à être moins ambitieux (contrôler des moments, stabiliser en un sens faible) ?
- ▶ Que dire de la contrôlabilité de l'équation de Vlasov-Maxwell

$$\begin{cases} \partial_t f + \hat{v} \cdot \nabla_x f + \operatorname{div}_v \left[ \left( E + \frac{1}{c} \hat{v} \wedge B \right) f \right] = 1_\omega G \\ \partial_t E + c \operatorname{curl} B = - \int f \hat{v} dv, \quad \partial_t B + c \operatorname{curl} E = 0, \\ \operatorname{div} E = \rho_0 - \int f dv, \quad \operatorname{div} B = 0, \end{cases}$$

avec  $\hat{v} = \frac{v}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}}$  ? Sous quelle condition géométrique ? Pour  $c$  très grand ?

- ▶ Peut-on dire quelque chose de l'équation de Boltzmann ? Dans certains régimes ?