# Contrôlabilité aux trajectoires d'un système parabolique 3x3 à coefficients non constants

Karine Mauffrey

Laboratoire de Mathématiques de Besançon

Journées Contrôle/Problèmes inverses
Clermont-Ferrand
28 juin 2011

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + Ay + Bv1_\omega & \text{dans } Q \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma \\ y(0) = y^0 & \text{dans } \Omega \end{cases}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **Cas des systèmes en cascade :**

M. González-Burgos, L. de Teresa, *Controllability results for cascade systems of m coupled parabolic PDEs by one control force.* Port. Math. 67 (2010)

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$
- Il existe $\omega^0 \subset \omega$ et $c_0 > 0$ t.q.

$\Longrightarrow$ contrôlabilité aux trajectoires

$$a_{12} \geq c_0 \text{ ou } a_{12} \leq -c_0 \text{ dans } \omega^0 \times ]0, T[$$
$$a_{23} \geq c_0 \text{ ou } a_{23} \leq -c_0 \text{ dans } \omega^0 \times ]0, T[$$

- **Un autre résultat :**

A. BENABDALLAH, M. CRISTOFOL, P. GAITAN, L. DE TERESA, *Controllability to trajectories for some systems of three or two equations by one control force.* Preprint

**Hypothèses**

- $a_{13}$ et $a_{23}$ ne dépendent pas du temps
- $\exists \alpha > 0 \,/\, \forall x \in \omega \; |a_{23}(x)| \geq \alpha$
- $\begin{cases} \nabla \left( \frac{a_{13}}{a_{23}} \right) = 0 \\ \det K \neq 0 \text{ dans } \omega_T \end{cases}$ ou $\begin{cases} \partial\omega \cap \partial\Omega = \gamma, \; |\gamma| \neq 0 \\ a_{23} \nabla \left( \frac{a_{13}}{a_{23}} \right) \cdot \nu \neq 0 \text{ sur } \gamma \end{cases}$

**Conclusion**

(1) est contrôlable aux trajectoires

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + Ay + Bv1_\omega & \text{dans } Q \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma \\ y(0) = y^0 & \text{dans } \Omega \end{cases}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

- **Cas de coefficients constants :** $a_{ij} \in \mathbb{R}$

F. AMMAR KHODJA, A. BENABDALLAH, C. DUPAIX, M. GONZÁLEZ-BURGOS, *Controllability for a class of reaction-diffusion systems : the generalized Kalman's condition.* C. R. Math. Acad. Sci. Paris 345 (2007)

**Condition de Kalman :**

$$(1) \text{ contrôlable aux trajectoires} \iff \det K \neq 0$$

- **Cas de coefficients dépendant du temps :** $a_{ij} \in C^2([0, T], \mathbb{R})$

F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, C. Dupaix, M. González-Burgos, *A generalization of the Kalman rank condition for time-dependent coupled linear parabolic systems.* Differ. Equ. Appl. 1 (2009)

$$\widetilde{K}(t) = ((B_0(t), B_1(t), B_2(t))$$

$$\begin{array}{rcl} B_0(t) & = & B \\ B_1(t) & = & A(t)B \\ B_2(t) & = & A^2(t)B - A'(t)B \end{array}$$

1. S'il existe $t_0 \in [0, T]$ t.q. $\det \widetilde{K}(t_0) \neq 0$, alors (1) est contrôlable aux trajectoires.
2. (1) est contrôlable aux trajectoires ssi il existe un ensemble $E$ dense dans $]0, T[$ t.q. $\forall t \in E \ \det \widetilde{K}(t) \neq 0$.

- **Cas de coefficients dépendant du temps :** $a_{ij} \in C^2([0,T],\mathbb{R})$

F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, C. Dupaix, M. González-Burgos, *A generalization of the Kalman rank condition for time-dependent coupled linear parabolic systems.* Differ. Equ. Appl. 1 (2009)

$$\widetilde{K}(t) = ((B_0(t), B_1(t), B_2(t)) \qquad \begin{array}{rcl} B_0(t) & = & B \\ B_1(t) & = & A(t)B \\ B_2(t) & = & A^2(t)B - A'(t)B \end{array}$$

1. S'il existe $t_0 \in [0,T]$ t.q. $\det \widetilde{K}(t_0) \neq 0$, alors (1) est contrôlable aux trajectoires.
2. (1) est contrôlable aux trajectoires ssi il existe un ensemble $E$ dense dans $]0,T[$ t.q. $\forall t \in E \ \det \widetilde{K}(t) \neq 0$.

$$\det \widetilde{K}(t) = \det K(t) + a_{13}(t)a'_{23}(t) - a_{23}(t)a'_{13}(t)$$

- Système contrôlé par 3 contrôles sur $\omega^0 \subset \omega$ :

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{y} = \Delta \widehat{y} + A\widehat{y} + \widehat{v} 1_{\omega^0} & \text{dans } Q \\ \widehat{y} = 0 & \text{sur } \Sigma \\ \widehat{y}(0) = y^0, \ \widehat{y}(T) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}, \quad \widehat{v} = \begin{pmatrix} \widehat{v}_1 \\ \widehat{v}_2 \\ \widehat{v}_3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

- Système homogène :

$$\begin{cases} \partial_t Y = \Delta Y + AY & \text{dans } Q \\ Y = 0 & \text{sur } \Sigma \\ Y(0) = y^0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{3}$$

- Fonctions de troncature :

$$\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \qquad \eta \in C_c^\infty([0, T])$$

$$\begin{cases} \operatorname{supp}(\theta) \subset \omega \\ 0 \leq \theta \leq 1 \\ \theta = 1 \text{ dans } \omega^0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \leq \eta \leq 1 \\ \eta = 1 \ \text{ sur } [0, T/4] \\ \eta = 0 \ \text{ sur } [3T/4, T] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \Delta \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} F_3 \ \ \text{dans } \omega_T \\ \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = 0 \ \ \text{sur } \partial\omega_T := \partial\omega \times (0, T) \\ \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}(T) = 0$$

$$\begin{cases} \partial_t \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \Delta \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} F_3 \ \text{ dans } \omega_T \\ \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = 0 \ \text{ sur } \partial\omega_T := \partial\omega \times (0, T) \\ \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}(T) = 0$$

$$F_3(0) = F_3(T) = 0$$

$$\begin{cases} \partial_t \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \Delta \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} F_3 \text{ dans } \omega_T \\ \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = 0 \text{ sur } \partial\omega_T := \partial\omega \times (0, T) \\ \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}(T) = 0$$

$$F_3(0) = F_3(T) = 0$$

## Contrôle pour (1)

$$v = \partial_t F_3 - \Delta F_3 - a_{31} F_1 - a_{32} F_2 - a_{33} F_3 - \rho_3$$

$$
\begin{cases}
\partial_t z = \Delta z + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} \rho_1 - \frac{a_{13}}{a_{23}}\rho_2 \\ \rho_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_{23} \end{pmatrix} u & \text{dans } \omega_T \\
z = 0 & \text{sur } \partial\omega_T \\
z(0) = 0
\end{cases}
\tag{4}
$$

$$
\begin{aligned}
b_{11} &= \frac{a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}}{a_{23}} \\
b_{12} &= \frac{\det K}{a_{23}^2} + (\Delta - \partial_t)\left(\frac{a_{13}}{a_{23}}\right) + 2\nabla\left(\frac{a_{13}}{a_{23}}\right).\nabla \\
b_{21} &= a_{21} \\
b_{22} &= \frac{a_{21}a_{13} + a_{22}a_{23}}{a_{23}}
\end{aligned}
$$

$$\begin{cases} \partial_t z = \Delta z + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} \rho_1 - \frac{a_{13}}{a_{23}} \rho_2 \\ \rho_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_{23} \end{pmatrix} u & \text{dans } \omega_T \\ z = 0 & \text{sur } \partial\omega_T \\ z(0) = 0 & \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}}{a_{23}} \\ b_{12} &= \frac{\det K}{a_{23}^2} + (\Delta - \partial_t)\left(\frac{a_{13}}{a_{23}}\right) + 2\nabla\left(\frac{a_{13}}{a_{23}}\right).\nabla \\ b_{21} &= a_{21} \\ b_{22} &= \frac{a_{21}a_{13} + a_{22}a_{23}}{a_{23}} \end{aligned}$$

## Contrôle pour (1)

$$v = \partial_t u - \Delta u - a_{31} z_1 - \left(a_{32} + \frac{a_{13}a_{31}}{a_{23}}\right) z_2 - a_{33} u - \rho_3$$

Système adjoint de (4) :

$$\begin{cases} -\partial_t \phi_1 = \Delta\phi_1 + b_{11}\phi_1 + b_{21}\phi_2 & (L_1) \\ -\partial_t \phi_2 = \Delta\phi_2 + b_{12}^*\phi_1 + b_{22}\phi_2 & (L_2) \\ \phi_{|\partial\omega_T} = 0 \\ \phi(T) = \phi^0 \end{cases} \qquad \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Système adjoint de (4) :

$$\begin{cases} -\partial_t \phi_1 = \Delta\phi_1 + b_{11}\phi_1 + b_{21}\phi_2 + f_1 & (L_1) \\ -\partial_t \phi_2 = \Delta\phi_2 + b_{12}^{*}\phi_1 + b_{22}\phi_2 + f_2 & (L_2) \\ \phi_{|\partial\omega_T} = 0 \\ \phi(T) = \phi^0 \end{cases} \qquad \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

## Lemme 1

Sous l'hypothèse $(H)$, pour tous $\phi^0 \in (L^2(\omega))^2$ et $f \in (L^2(\omega_T))^2$

$$\int_{\omega_T} \pi^p |\phi_1|^2 \leq e^{C\mathcal{H}_0} \left( \int_{\omega_T} \pi^{p-3} |\phi_2|^2 + \int_{\omega_T} \pi^p |f|^2 \right),$$

$$\mathcal{H}_0 = 1 + T + \|b_{11}\|_\infty + \|b_{21}\|_\infty + \|b_{22}\|_\infty + \frac{\|\det K\|_\infty}{\alpha^2} + \left\|(\Delta + \partial_t)\left(\frac{a_{13}}{a_{23}}\right)\right\|_\infty + \left\|\nabla\left(\frac{a_{13}}{a_{23}}\right)\right\|_\infty .$$

## Lemme 1

Sous l'hypothèse $(H)$, pour tous $\phi^0 \in (L^2(\omega))^2$ et $f \in (L^2(\omega_T))^2$

$$\int_{\omega_T} \pi^p |\phi_1|^2 \leq e^{C\mathcal{H}_0} \left( \int_{\omega_T} \pi^{p-3} |\phi_2|^2 + \int_{\omega_T} \pi^p |f|^2 \right),$$

$$\mathcal{H}_0 = 1 + T + \|b_{11}\|_\infty + \|b_{21}\|_\infty + \|b_{22}\|_\infty + \frac{\|\det K\|_\infty}{\alpha^2} + \left\| (\Delta + \partial_t) \left( \frac{a_{13}}{a_{23}} \right) \right\|_\infty + \left\| \nabla \left( \frac{a_{13}}{a_{23}} \right) \right\|_\infty.$$

## Lemme 2

Pour tous $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$

$$\|\phi(t_1)\|^2_{(L^2(\omega))^2} \leq e^{2\mu_A(t_2 - t_1)} \|\phi(t_2)\|^2_{(L^2(\omega))^2} + e^{2\mu_A(T - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} \|f(t)\|^2_{(L^2(\omega))^2} \mathrm{d}t,$$

$$\mu_A = 1 + \|b_{11}\|_\infty + \|b_{21}\|_\infty + \|b_{22}\|_\infty + \frac{\|\det K\|_\infty}{\alpha^2} + \left\| (\Delta + \partial_t) \left( \frac{a_{13}}{a_{23}} \right) \right\|_\infty + \left( 1 + \left\| \nabla \left( \frac{a_{13}}{a_{23}} \right) \right\|_\infty \right)^2.$$

$$
\begin{cases}
\partial_t z = \Delta z + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} \rho_1 - \frac{a_{13}}{a_{23}} \rho_2 \\ \rho_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_{23} \end{pmatrix} u \\
z_{|\partial\omega_T} = 0 \\
z(0) = 0
\end{cases}
\tag{4}
$$

$$
\rho = -(\Delta\theta)\widehat{y} - 2\nabla\theta \cdot \nabla\widehat{y} + (\eta\,\Delta\theta - \eta'\theta)Y + 2\eta\nabla\theta \cdot \nabla Y
$$

- Système contrôlé par 3 contrôles sur $\omega^0 \subset \omega$ :

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{y} = \Delta \widehat{y} + A\widehat{y} + \widehat{v} 1_{\omega^0} & \text{dans } Q \\ \widehat{y} = 0 & \text{sur } \Sigma \\ \widehat{y}(0) = y^0, \ \widehat{y}(T) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}, \quad \widehat{v} = \begin{pmatrix} \widehat{v}_1 \\ \widehat{v}_2 \\ \widehat{v}_3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

- Système homogène :

$$\begin{cases} \partial_t Y = \Delta Y + AY & \text{dans } Q \\ Y = 0 & \text{sur } \Sigma \\ Y(0) = y^0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{3}$$

- Fonctions de troncature :

$$\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \qquad \qquad \eta \in C_c^\infty([0, T])$$

$$\begin{cases} \text{supp}(\theta) \subset \omega \\ 0 \leq \theta \leq 1 \\ \theta = 1 \text{ dans } \omega^0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \leq \eta \leq 1, \ \eta(t) \leq C(T-t)^{p/2} \\ \eta = 1 \ \text{ sur } [0, T/4] \\ \eta = 0 \ \text{ sur } [3T/4, T] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + Ay + Bv1_\omega & \text{dans } Q \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma \\ y(0) = y^0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{1}$$

## Contrôle pour (1)

$$v = \partial_t u - \Delta u - a_{31} z_1 - \left( a_{32} + \frac{a_{13} a_{31}}{a_{23}} \right) z_2 - a_{33} u - \rho_3$$