Contrôlabilité d'un modèle de nageur en fluide parfait

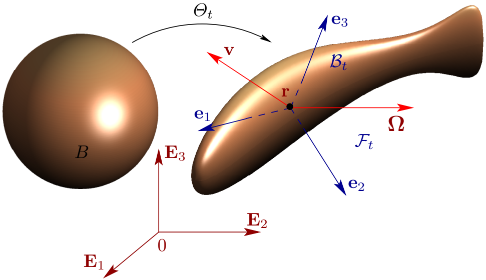
Thomas Chambrion Alexandre Munnier

Institut ÉLIE CARTAN Nancy
Université Henri Poincaré

INRIA
INRIA Nancy Grand Est

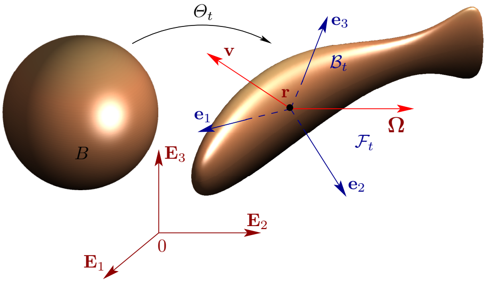
Clermont-Ferrand, Juin 2011

Cinématique



- $\mathfrak{E} := (0, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$ est Galiléen et $\mathfrak{e} := (\mathbf{r}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ est mobile.
- La position de $\mathfrak{e}$ est donnée par $\mathbf{q} := (R, \mathbf{r}) \in \mathcal{Q} := \mathrm{SO}(3) \times \mathbf{R}^3$.
- $\mathbf{v}$: vitesse du centre de gravité et $\boldsymbol{\Omega}$: vitesse angulaire (dans $\mathfrak{e}$).
- La forme du nageur est décrite par rapport à $\mathfrak{e}$.
- $\mathcal{B}_t$ est l'image de la boule unité B par Θ_t, un difféomorphisme C^1.
- Les déformations sont prescrites : $t \in \mathbf{R}_+ \mapsto \Theta_t$.

Problèmes



- Problème direct : Déterminer le *déplacement rigide* $t \mapsto (R(t), \mathbf{r}(t))$ en fonction des déformations.
- Problème de Contrôle : Déterminer les déformations faisant nager le poisson suivant une trajectoire prescrite.

Quelques références

Nager dans un fluide parfait

- Mason, Burdick 1999 ;
- Triantafyllou, Triantafyllou, Yue 2000 ;
- Kanso, Marsden, Rowley, Melli-Hubert 2005 ;
- Kanso, Marsden 2005 ;
- Melli, Rufat 2006 ;
- A. M. 2008 ; A. M. 2009 ;
- A. M. and Pinçon 2010 ;
- Chambrion and A.M. 2010 ;

et aussi Lamb, Lighthill, Wu...

Nager dans un fluide visqueux

- Khapalov 2007, 2009 ;
- Liu, Kawachi 1999 ;
- San Martin, Takahashi, Tucsnak 2007 ;

Nager dans un fluide très visqueux

- Purcell 1977 ;
- Shapere and Wilczek 1989 ;
- Alouges, Desimone, Lefebvre 2008, 2009, avec Merlet 2010 ;
- Loheac, Scheid, Tucsnak 2011 ;
- Kelly 2011.

Déformations

$\mathcal{B}_t = \Theta_t(B)$ (Θ_t un difféomorphisme C^1, B la boule unité).

On suppose que, pour tout t :

- $\Theta_t(x) \to 0$ et $\nabla\Theta_t(x) \to 0$ quand $\|x\|_{\mathbf{R}^3} \to +\infty$.
- Θ_t est isotopique à l'identité.
- On le décompose sous la forme $\Theta_t = \mathrm{Id} + \vartheta_t$.

Alors ϑ_t appartient à un ouvert de $C_0^1(\mathbf{R}^3)^3$, noté $D_0^1(\mathbf{R}^3)$.

La fonction de déformation

Les déformations sont données sous la forme d'une fonction AC $t \in [0, T] \mapsto \vartheta_t \in D_0^1(\mathbf{R}^3)^3$.

Contraintes d'auto-propulsion

La masse volumique ϱ_t dans $\mathcal{B}_t$ est donnée par (conservation de la masse) :

$$\varrho_t := \frac{\varrho}{\det(\nabla\Theta_t)\circ{\Theta_t}^{-1}}, \qquad \varrho \in C^0(\bar{B})^+.$$

Masse et tenseur d'inertie.

$$m = \int_B \varrho \,\mathrm{d}x \qquad \text{(masse du nageur)}\,;$$

$$\mathbb{I}(t) = \int_B \varrho\left[\|\Theta_t\|^2_{\mathbf{R}^3}\mathrm{Id} - \Theta_t\otimes\Theta_t\right]\mathrm{d}x \qquad \text{(tenseur d'inertie)}.$$

Contraintes d'auto-propulsion

Un couple (ϱ,ϑ) est admissible si, pour tout $t\in[0,T]$:

$$\int_B \varrho\,\Theta_t\,\mathrm{d}x = \mathbf{0} \qquad \text{et} \qquad \int_B \varrho\,\partial_t\Theta_t\times\Theta_t\,\mathrm{d}x = \mathbf{0}.$$

Le fluide

Le fluide est supposé parfait (incompressible et non visqueux).

- Masse volumique : $\varrho_f > 0$.
- Il occupe le domaine $\mathcal{F}_t := \mathbf{R}^3 \setminus \bar{\mathcal{B}}_t$.
- Écoulement potentiel

$$\mathbf{u}_t := \nabla \phi_t \qquad \text{avec} \qquad -\Delta \phi_t = 0 \text{ dans } \mathcal{F}_t.$$

Conditions aux limites

- Vitesse du nageur

$$\mathbf{w}_t = \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \Omega_i (\mathbf{e}_i \times x) + v_i \mathbf{e}_i}_{\text{mouvement rigide}} + \underbrace{\partial_t \Theta_t ({\Theta_t}^{-1})}_{\text{déformations}}.$$

- Glissement du fluide sur la surface du nageur :

$$\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{n}_t = \mathbf{w}_t \cdot \mathbf{n}_t \text{ on } \partial\mathcal{B}_t \quad \Rightarrow \quad \partial_n \phi_t = \mathbf{w}_t \cdot \mathbf{n}_t \text{ sur } \partial\mathcal{B}_t.$$

Loi de Kirchhoff

Le potentiel du fluide vérifie, pour tout $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} -\Delta \phi_t &= 0 && \text{dans } \mathcal{F}_t \\ \partial_n \phi_t &= \mathbf{w}_t \cdot \mathbf{n}_t && \text{sur } \partial \mathcal{B}_t, \end{aligned}$$

avec $\mathbf{w}_t = \sum_{i=1}^{3} \Omega_i (\mathbf{e}_i \times x) + v_i \mathbf{e}_i + \partial_t \Theta_t ({\Theta_t}^{-1})$.

Loi de Kirchhoff

$$\phi_t = \sum_{i=1}^{3} \Omega_i \psi_t^i + v_i \psi_t^{i+3} + \varphi_t,$$

avec ψ_t^i et φ_t harmoniques et vérifiant les conditions aux limites :

$$\partial_n \psi_t^i = \begin{cases} (\mathbf{e}_i \times x) \cdot \mathbf{n}_t & i = 1, 2, 3 \\ \mathbf{e}_{i-3} \cdot \mathbf{n}_t & i = 4, 5, 6. \end{cases} \quad \text{et} \quad \partial_n \varphi_t = \partial_t \Theta_t ({\Theta_t}^{-1}) \cdot \mathbf{n}_t.$$

Lagrangien du système

Le Lagrangien du système fluide-nageur est :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{R}^3} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbb{I}(t) \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2} \varrho_f \int_{\mathcal{F}_t} \|\nabla \phi_t\|^2_{\mathbf{R}^3} \, \mathrm{d}x,$$

que l'on peut réécrire comme un produit matrices vecteurs :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{v}) \mathbb{M}^r(t) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Omega} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} + (\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{v}) \mathbf{N}(t),$$

avec :

$$\mathbb{M}^r(t) := \begin{pmatrix} \mathbb{I}(t) & 0 \\ 0 & m \mathrm{Id} \end{pmatrix} + \varrho_f \left(\int_{\mathcal{F}_t} \nabla \psi^i_t \cdot \nabla \psi^j_t \, \mathrm{d}x \right)_{1 \leq i,j \leq 6}$$

$$\mathbf{N}(t) := \varrho_f \left(\int_{\mathcal{F}_t} \nabla \psi^i_t \cdot \nabla \varphi_t \, \mathrm{d}x \right)_{1 \leq i \leq 6}$$

Dynamique du système

On applique le principe de moindre Action :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = 0.$$

($\mathbf{q} := (R, \mathbf{r}) \in \mathcal{Q} := \mathrm{SO}(3) \times \mathbf{R}^3$ et $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in T\mathcal{Q}$). On obtient :

Dynamique

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\begin{pmatrix} R \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\widehat{\mathbf{\Omega}} \\ R\mathbf{v} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{\Omega} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = -\mathbb{M}^r(t)^{-1}\mathbf{N}(t) \tag{1}$$

où l'on a défini :

$$\widehat{\mathbf{\Omega}} := \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarques sur la dynamique

Dynamique

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\begin{pmatrix} R \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\widehat{\boldsymbol{\Omega}} \\ R\mathbf{v} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Omega} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = -\mathbb{M}^r(t)^{-1}\mathbf{N}(t)$$

- Le contrôle est la fonction $t \in [0, T] \mapsto \vartheta_t \in D_0^1(\mathbf{R}^3)$.
- Le calcul de $\mathbb{M}^r(t)$ et $\mathbf{N}(t)$ nécessite la résolution de problèmes aux limites.
- Le contrôle apparaît dans :
  - L'expression du tenseur d'inertie $\mathbb{I}(t)$;
  - Les conditions aux limites du potentiel φ_t ;
  - La définition du domaine $\mathcal{F}_t$.

Suivi de trajectoire générique

Théorème

Les éléments suivants sont donnés :

- $\bar{\varrho}$ in $C^0(\bar{B})^+$ (la masse volumique de référence du nageur) et une fonction C^1 $t \in [0,T] \mapsto \bar{\vartheta}_t \in D_0^1(\mathbf{R}^3)$ (les déformations de référence) tels que $(\bar{\varrho}, \bar{\vartheta})$ soit admissible ;
- Une fonction C^1 $t \in [0,T] \mapsto (\bar{R}_t, \bar{\mathbf{r}}_t) \in \mathrm{SO}(3) \times \mathbf{R}^3$ (la trajectoire de référence).

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un fonction $\varrho \in C^0(\bar{B})^+$ (la masse volumique réelle du nageur) et une fonction $t \in [0,T] \mapsto \vartheta_t \in D_0^1(\mathbf{R}^3)$ telles que (ϱ, ϑ) soit admissible et

- $\|\bar{\varrho} - \varrho\|_{C^0(\bar{B})} < \varepsilon$;
- $\sup_{t\in[0,T]} \left(\|\bar{\vartheta}_t - \vartheta_t\|_{C^1} + \|\bar{R}_t - R_t\|_{\mathrm{SO}(3)} + \|\bar{\mathbf{r}}_t - \mathbf{r}_t\|_{\mathbf{R}^3} \right) < \varepsilon$;

où $t \in [0,T] \mapsto (R_t, \mathbf{r}_t) \in \mathrm{SO}(3) \times \mathbf{R}^3$ est l'unique solution du système (1) avec donnée de Cauchy $(R_0, \mathbf{r}_0) = (\bar{R}_0, \bar{\mathbf{r}}_0)$ et contrôle ϑ_t.

Quelques remarques

- Les déformations sont prescrites de façon approchée.
- La régularité du contrôle $t \in [0, T] \mapsto \vartheta_t \in D_0^1(\mathbf{R}^3)$ peut être choisie de AC à analytique.
- Si les déformations ne sont pas prescrites, le suivi de trajectoire peut être réalisé avec (génériquement) au plus 5 mouvements de base.
- Il est probable que l'on puisse choisir $\varrho = \bar{\varrho}$ (masse volumique réelle = masse volumique de référence).

Plan de la démonstration

1. Identifier un nombre fini de paramètres permettant d'identifier un nageur (et sa façon de nager) : la signature du nageur.
2. Montrer que l'ensemble des signatures a une structure de sous variété (de dimension infinie) analytique connexe plongée dans un espace de Banach.
3. Montrer que la propriété d'être contrôlable est équivalente à la non annulation d'une fonction analytique en la signature.
4. Exhiber un exemple de nageur qui est contrôlable.
5. Conclure en invoquant une propriété classique des fonctions analytiques.

Paramètres caractérisant les nageurs

- La masse volumique $\varrho \in C^0(\bar{B})^+$.
- La forme "au repos" $\vartheta \in D_0^1(\mathbf{R}^3)$ telle que

$$\int_B \varrho\, \Theta \,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{(centre de gravité à l'origine du repère).}$$

- Des champs de vecteurs $\mathbf{V}_i \in C_0^1(\mathbf{R}^3)^3$ $(i = 1, \ldots, n)$ tels que :

$$\int_B \varrho\, \mathbf{V}_i \,\mathrm{d}x = 0, \quad \int_B \varrho\, \Theta \times \mathbf{V}_i \,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{et} \quad \int_B \varrho\, \mathbf{V}_i \times \mathbf{V}_j \,\mathrm{d}x = 0.$$

La fonction de déformation s'écrit alors :

$$\vartheta_t := \vartheta + \sum_{i=1}^{n} s_i(t) \mathbf{V}_i,$$

où $t \in [0, T] \mapsto s_i(t) \in \mathbf{R}$ sont (momentanément) les nouveaux contrôles.

Le couple (ϱ, ϑ_t) est automatiquement admissible.

Signature d'un nageur (n est fixé)

Signature d'un nageur

C'est un triplet $c := (\varrho, \vartheta, \mathcal{V})$ tel que

- $\varrho \in C^0(\bar{B})^+$, $\vartheta \in D_0^1(\mathbf{R}^3)$ et $\mathcal{V} := (\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_n) \in (C_0^1(\mathbf{R}^3)^3)^n$
- $\int_B \varrho\, \Theta \,\mathrm{d}x = 0$, $\int_B \varrho\, \mathbf{V}_i \,\mathrm{d}x = 0$, $\int_B \varrho\, \Theta \times \mathbf{V}_i \,\mathrm{d}x = 0$ et $\int_B \varrho\, \mathbf{V}_i \times \mathbf{V}_j \,\mathrm{d}x = 0$ $(i, j = 1, \ldots, n)$.
- $\{\mathbf{V}_i \cdot \mathbf{e}_j,\ i, j = 1, \ldots, n\}$ est un système libre dans $C_0^1(\mathbf{R}^3)^3$.

On note

$$\mathcal{C}(n) \subset C^0(\bar{B})^+ \times D_0^1(\mathbf{R}^3) \times (C_0^1(\mathbf{R}^3)^3)^n$$

l'ensemble des signatures.

Théorème

$\mathcal{C}(n)$ est une sous variété analytique connexe de codimension $3(n+2)(n+1)/2$ plongée dans $C^0(\bar{B})^+ \times D_0^1(\mathbf{R}^3) \times (C_0^1(\mathbf{R}^3)^3)^n$.

Signature étendue

Pour toute signature $c \in \mathcal{C}(n)$, on note $\mathcal{S}(c)$ l'ouvert de $\mathbf{R}^n$ tel que

$$s \in \mathcal{S}(c) \quad \Leftrightarrow \quad \vartheta + \sum_{i=1}^{n} s_i \mathbf{V}_i \in D_0^1(\mathbf{R}^3).$$

Pour tout $c \in \mathcal{C}(n)$, les déformations sont données par une fonction $t \in [0,T] \mapsto s(t) := (s_1(t), \dots, s_n(t)) \in \mathcal{S}(c)$.

Signature étendue d'un nageur

On note $\mathcal{C}_X(n)$ l'ensemble des $\mathbf{c} := (c, s)$ tels que $c \in \mathcal{C}(n)$ et $s \in \mathcal{S}(c)$. Tout couple $\mathbf{c} = (c, s)$ est appelé une signature étendue.

Corollaire

$\mathcal{C}_X(n)$ est une sous variété analytique connexe de codimension $3(n+2)(n+1)/2$ plongée dans $C^0(\bar{B})^+ \times D_0^1(\mathbf{R}^3) \times (C_0^1(\mathbf{R}^3)^3)^n \times \mathbf{R}^n$.

Les données du problème en terme de signature

Soit $c \in \mathcal{C}(n)$ et une fonction de déformation

$$t \in [0,T] \mapsto s(t) := (s_1(t), \ldots, s_n(t)) \in \mathcal{S}(c).$$

On note $\mathbf{c} := (c, s) \in \mathcal{C}_X(n)$ et $\Theta_s := \mathrm{Id} + \vartheta + \sum_{i=1}^n s_i \mathbf{V}_i$.

- Les domaines $\mathcal{F}_t$ et $\mathcal{B}_t$ peuvent se réécrire $\mathcal{F}_{\mathbf{c}}$ et $\mathcal{B}_{\mathbf{c}}$.
- Le tenseur d'inertie est $\mathbb{I}(\mathbf{c})$.
- Les potentiels élémentaires (mouvement rigide) sont notés $\psi^i_{\mathbf{c}}$ $(i = 1, \ldots, 6)$.
- La matrice de masse $\mathbb{M}^r(t)$ devient $\mathbb{M}^r(\mathbf{c})$.
- Le potentiel élémentaire φ_t (déformations) se décompose sous la forme $\varphi_t = \sum_{i=1}^n \dot{s}_i \varphi^i_{\mathbf{c}}$.

  Chaque $\varphi^i_{\mathbf{c}}$ est harmonique et $\partial_n \varphi^i_{\mathbf{c}} = \mathbf{V}_i(\Theta_s^{-1}) \cdot \mathbf{n}$ sur $\partial\mathcal{B}_{\mathbf{c}}$.

La dynamique en terme de signature

On introduit la matrice

$$\mathbb{N}(\mathbf{c}) = \left(\varrho_f \int_{\mathcal{F}_{\mathbf{c}}} \nabla \psi^i_{\mathbf{c}} \cdot \nabla \varphi^j_{\mathbf{c}} \, \mathrm{d}x \right)_{\substack{1 \leq i \leq 6 \\ 1 \leq j \leq n}}$$

et on peut réécrire la dynamique :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \begin{pmatrix} R \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\widehat{\mathbf{\Omega}} \\ R\mathbf{v} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{\Omega} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = -\mathbb{M}^r(\mathbf{c})^{-1}\mathbb{N}(\mathbf{c})\dot{s}.$$

Proposition

Les matrices $\mathbb{M}^r(\mathbf{c})$ et $\mathbb{N}(\mathbf{c})$ sont analytiques en la signature étendue $\mathbf{c}$.

Contrôle géométrique

La signature $c \in \mathcal{C}(n)$ est fixée.

- On introduit la base canonique $(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$ de $\mathbf{R}^n$ et on cherche le contrôle comme solution du problème de Cauchy :

$$\dot{s}(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)\mathbf{f}_i, \qquad s(0) = 0.$$

Les fonctions $t \in [0, T] \mapsto \lambda_i(t) \in \mathbf{R}$ sont les nouveaux contrôles.

- La dynamique s'écrit sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \begin{pmatrix} R \\ \mathbf{r} \\ s \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)\mathbf{Z}_c^i(R, s). \tag{2}$$

- s (c'est à dire la forme du nageur) fait maintenant parti de l'état du système.

Contrôle géométrique

- L'EDO est posée sur $\mathcal{M}(c) := \mathrm{SO}(3) \times \mathbf{R}^3 \times \mathcal{S}(c)$ (une variété analytique de dim $6+n$).
- Les champs de vecteurs $\mathbf{Z}_c^i(R, s)$ sont analytiques sur $\mathcal{M}(c)$ (constants en $\mathbf{r}$).

On note $\mathcal{Z}(c)$ la famille $(\mathbf{Z}_c^i)_{1 \leq i \leq n}$.

Lemme

S'il existe $\zeta \in \mathcal{M}(c)$ tel que $\dim \mathrm{Lie}_\zeta \mathcal{Z}(c) = 6+n$, alors l'orbite de $\mathcal{Z}(c)$ passant par le point $\zeta \in \mathcal{M}(c)$ est égale à toute la variété $\mathcal{M}(c)$. Dans ce cas, $\dim \mathrm{Lie}_\zeta \mathcal{Z}(c) = 6+n$ pour tout $\zeta \in \mathcal{M}(c)$.

Définition

Une signature $c \in \mathcal{C}(n)$ est contrôlable s'il existe $\zeta \in \mathcal{M}(c)$ tel que $\dim \mathrm{Lie}_\zeta \mathcal{Z}(c) = 6+n$.

Démonstration du lemme

- $\dim \mathrm{Lie}_\zeta \mathcal{Z}(c)$ ($\zeta = (R, \mathbf{r}, s)$) ne dépend ni de R ni de $\mathbf{r}$, seulement de s.
- Théorème de l'orbite (cas analytique) : $\dim \mathrm{Lie}_\zeta \mathcal{Z}(c)$ est constante sur les orbites (= dimension de l'orbite).
- Tout orbite rencontre tous les points de $\mathcal{S}(c)$.
- Théorème de Rashevsky Chow : Si $\mathrm{Lie}_\zeta \mathcal{Z}(c) = T_\zeta \mathcal{M}(c)$ pour tout $\zeta \in \mathcal{M}(c)$ alors tout orbite de $\mathcal{Z}(c)$ est égale à $\mathcal{M}(c)$.

Corollaire

S'il existe une signature $c \in \mathcal{C}(n)$ contrôlable, alors l'ensemble des signatures contrôlables de $\mathcal{C}(n)$ est un sous ensemble ouvert et dense (pour la topologie induite).

Signature contrôlable

Proposition

Soit $c \in C(n)$ une signature contrôlable. Alors

- Pour toute fonction de référence $t \in [0,T] \mapsto (\bar{R}_t, \bar{\mathbf{r}}_t, \bar{s}_t) \in \mathrm{SO}(3) \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^n$;
- Et pour tout $\varepsilon > 0$;

Il existe n C^1 fonctions $\lambda_i : [0,T] \to \mathbf{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ telles que :

1. $\left(\|\bar{R}_t - R_t\|_{\mathrm{SO}(3)} + \|\bar{\mathbf{r}}_t - \mathbf{r}_t\|_{\mathbf{R}^3} + \|\vartheta_{\bar{s}(t)} - \vartheta_{s(t)}\|_{C^1} \right) < \varepsilon$;
2. $R_T = \bar{R}_T$, $\mathbf{r}_T = \bar{\mathbf{r}}_T$ and $s_T = \bar{s}_T$;

où $t \in [0,T] \mapsto (R_t, \mathbf{r}_t, s_t) \in \mathcal{M}(c)$ est l'unique solution de l'EDO (2) avec données de Cauchy $R_0 = \bar{R}_0 \in \mathrm{SO}(3)$, $\mathbf{r}_0 = \bar{\mathbf{r}}_0 \in \mathbf{R}^3$ et $s_0 = \bar{s}_0 \in \mathcal{S}(c)$.

Déformations *presque* rigides

Soit $c := (\varrho, \vartheta, \mathcal{V}) \in \mathcal{C}(5)$ telle que $\mathcal{V} := (\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_5)$ avec

- $\mathbf{V}_i|_{\partial B}(x) := \mathbf{e}_i \times (x + \vartheta(x))$ $(i = 1, 2, 3)$;
- $\mathbf{V}_i|_{\partial B}(x) := \mathbf{e}_{i-3}$ $(i = 4, 5)$.

Proposition

Il existe $\varrho \in C^0(\bar{B})^+$ et $\vartheta \in D^1_0(\mathbf{R}^3)$ tels que c soit contrôlable.

Corollaire

Presque toutes les signatures de $\mathcal{C}(5)$ sont contrôlables.

Démonstration du Théorème principal

On rappelle que :

- $\bar{\varrho} \in C^0(\bar{B})^+$ est la masse volumique de référence du nageur.
- $t \in [0, T] \mapsto \bar{\vartheta}_t \in D^1_0(\mathbf{R}^3)$ sont les les déformations de référence ;
- $t \in [0, T] \mapsto (\bar{R}_t, \bar{\mathbf{r}}_t) \in \mathrm{SO}(3) \times \mathbf{R}^3$ est la la trajectoire de référence.

Les étapes de la démonstration consistent en :

- compléter $(\bar{\varrho}, \bar{\vartheta}_0)$ par $\bar{\mathcal{V}} := (\partial_t \bar{\vartheta}_0, V_2, \ldots, V_5)$ pour en faire une signature $\bar{c}$ dans $\mathcal{C}(5)$.
- Arbitrairement proche de $\bar{c}$, il existe une signature $c^0 := (\varrho, \vartheta^0, \mathcal{V}^0)$ contrôlable avec $\mathcal{V}^0 := (\mathbf{V}^0_1, \ldots, \mathbf{V}^5_0)$.
- On nage pendant un temps t_1 petit. On choisit comme forme de référence (à suivre) $\vartheta^0 + t\mathbf{V}^0_1$ qui, par construction, est proche de $\bar{\vartheta}_t \approx \bar{\vartheta}_0 + t\partial_t \bar{\vartheta}_0$. On note $\vartheta^1 = \vartheta^0 + t_1 \mathbf{V}^0_1$.
- On complète (ϱ, ϑ^1) par $\mathcal{V}^1 := (\partial_t \bar{\vartheta}_{t_1}, \mathbf{V}^2_2, \ldots, \mathbf{V}^1_5)$ de telle sorte que $c^1 := (\varrho, \vartheta^1, \mathcal{V}^1)$ soit contrôlable.
- On itère le processus.

Conclusion

- Pour une trajectoire de référence donnée, on ne sait pas en général déterminer le contrôle.
- On peut montrer l'existence d'un contrôle optimal (Théorème de Filippov).
- Le résultat se généralise aux nageurs en fluide très visqueux (Stokes stationnaire) : Modèle pour les microorganismes.