SUJET DE STAGE DE MASTER 2 EN MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

1. Titre - Encadrement

Titre: Estimation numérique de constantes d'observabilité pour des EDP linéaires

Encadrant: Pr. Arnaud Münch
Email: arnaud.munch@math.univ-bpclermont.fr
Page web: http://math.univ-bpclermont.fr/ munch/
Unité de rattachement: Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand
Laboratoire de rattachement: Laboratoire de Mathématiques - Equipe EDP et Analyse numérique
Période de stage: Premier semestre 2018
Contact: Les personnes intéressées sont invitées à envoyer un CV et une lettre de motivation.
Prolongation possible en thèse: Oui.

2. Contexte scientifique

La propriété de contrôlabilité de nombreuses EDP linéaires est liée à celle de l'observabilité du système adjoint correspondant: par exemple, la contrôlabilité distribuée à zéro de l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \mathbf{y}_t - \Delta \mathbf{y} = \mathbf{f}\, 1_\omega \quad \text{dans} \quad Q_T := \Omega \times (0,T) \\ \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Sigma_T, \quad \mathbf{y}(\cdot,0) = \mathbf{y}_0 \quad \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

est équivalente à l'existence d'une constante $C_{obs} > 0$ tel que :

$$\|\boldsymbol{\varphi}(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \; C_{obs}\, \|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L^2(\omega\times(0,T))} \tag{2.2}$$

pour toute solution $\boldsymbol{\varphi}$ du problème rétrograde

$$\begin{cases} -\boldsymbol{\varphi}_t - \Delta \boldsymbol{\varphi} = 0 \quad \text{dans} \quad Q_T := \Omega \times (0,T) \\ \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Sigma_T, \quad \boldsymbol{\varphi}(\cdot,T) = \boldsymbol{\varphi}_T \quad \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{2.3}$$

avec $\boldsymbol{\varphi}_T$ dans $L^2(\Omega)$. Ici, ω désigne un ouvert non vide de Ω, un domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^N$.

La constante d'observabilité C_{obs}, qui est reliée au coût du contrôle $\mathbf{f}$ est en fait donnée par:

$$C_{obs}^{-1} = \inf_{\boldsymbol{\varphi}_T \in L^2(Q_T)} \frac{\|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L^2(\omega\times(0,T))}}{\|\boldsymbol{\varphi}(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega)}} \tag{2.4}$$

Le but du stage est de comprendre et de mettre en œuvre une méthode d'approximation numérique de la constante C_{obs}^{-1}. Cela permet d'évaluer le coût du contrôle par rapport à divers paramètres (le temps de contrôlabilité T, la mesure de ω, etc) ou bien encore de conjecturer la contrôlabilité d'un système d'EDP donné !

Deux exemples sont en particulier visés:

- Le comportement de la constante d'observabilité par rapport à T et ε de l'équation de transport avec un contrôle frontière f

$$\begin{cases} y_t - \varepsilon y_{xx} + M y_x = 0, \qquad (x,t) \in (0,1)\times(0,T), \\ y(1,t) = f(t), \qquad\qquad\qquad\qquad t \in (0,T), \end{cases} \tag{2.5}$$

Date: 19-10-2016.

considérée dans [1]. La contrôlabilité y est montré, uniformément par rapport à ε, lorsque le temps T est suffisamment grand. Il s'agit içi d'évaluer numériquement le temps minimal de contrôlabilité lorsque $\varepsilon \to 0^+$ selon le signe de M.

- Le comportement de la constante d'observabilité par rapport aux nombres de contrôles pour l'opérateur d'élasticité en dimension deux d'espace.

$$\begin{cases} \mathbf{y}_{tt} - \mu\Delta\mathbf{y} - (\lambda+\mu)\nabla div\mathbf{y} = 0, & (\mathbf{x},t) \in \Omega \times (0,T), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ \mathbf{y} = \mathbf{f}, & (\mathbf{x},t) \in \partial\Omega \times (0,T). \end{cases} \tag{2.6}$$

La contrôlabilité exacte a lieu lorsque l'on utilise deux contrôles, i.e. lorsque $\mathbf{f} = (f_1, f_2) \in \mathbf{L}^2(\partial\Omega \times (0,T))$, $f_1 \neq 0, f_2 \neq 0$ ([2], chapitre 4). En revanche, la question de la contrôlabilité de (2.6) avec un seul contrôle reste ouverte. Si la constante d'observabilité reste bornée lorsqu'un des deux contrôles tend vers zéro (par exemple $\|f_2\|_{L^2} \to 0$), on pourra conjecturer que le système de l'élasticité (2.6) reste contrôlable avec un seul contrôle.

3. Articulation du stage, Pré-Requis

Le stage pourra s'articuler de la façon suivante :

- Familiarisation avec les notions de contrôlabilite et d'observabilité pour des équations et systèmes de nature hyperbolique et parabolique à travers la lecture de quelques articles et ouvrages de référence tel que [5].
- Lecture des articles [3] et [4] proposant une caractérisation dite variationnelle de la contrôlabilité, bien adaptée notamment à une mise en œuvre numérique.
- Adaptation de [3] et [4] pour les systèmes (2.5) et (2.6).
- Etude du problème d'optimisation (2.4) et détermination d'une méthode/algorithme permettant de le résoudre.
- Mise en œuvre d'une méthode d'approximation pour résoudre C_{obs} et discussions dans les deux cas décrits ci-dessous.

Ce travail de stage requiert des compétences à la fois en optimisation (théorie des EDPs, Calcul des variations), en analyse numérique (méthode des éléments finis) ainsi que le goût du calcul scientifique (programmation avec par exemple Freefem ou Matlab) . Il est approprié aux étudiants d'un Master 2 en EDP et/ou Analyse numérique et/ou Calcul scientifique

References

[1] JM. Coron, S. Guerrero, Singular optimal control: a linear 1-D parabolic-hyperbolic example, Asymptotic. Anal. 2005.

[2] JL. Lions, Contrôlabilité exacte - Perturbations et stabilisation de systèmes distribués - Tome 1, Masson 1988.

[3] N. Cindea, E. Fernandez-Cara, A. Münch, Numerical controllability of the wave equation through primal methods and Carleman estimates, Esaim:Cocv, 2013.

[4] A. Münch, D. Souza, A mixed formulation for the direct approximation of the control of minimal L^2-weighted norm for the linear heat equation, Advances in computational mathematics, 2016.

[5] J-.M. Coron, Control and nonlinearity, AMS, 2007.