SUJET DE STAGE DE MASTER 2 EN MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

1. Titre - Encadrement

Titre: Une méthode variationnelle d'ordre un pour résoudre des problèmes de contrôle et des problèmes inverses

Encadrant: Pr. Arnaud Münch
Email: arnaud.munch@math.univ-bpclermont.fr
Page web: http://math.univ-bpclermont.fr/ munch/
Unité de rattachement: Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand
Laboratoire de rattachement: Laboratoire de Mathématiques - Equipe EDP et Analyse numérique
Période de stage: Premier semestre 2018
Contact: Les personnes intéressées sont invitées à envoyer un CV et une lettre de motivation.
Prolongation possible en thèse: Oui.

2. Contexte scientifique

L'équation de la chaleur posée sur un domaine borné et régulier Ω de $\mathbb{R}^N$ est contrôlable à zéro en un temps arbitraire: précisément, pour tout $T > 0$, toute donnée initiale y_0 de $L^2(\Omega)$ et tout sous-domaine ω de Ω, il existe un contrôle $f \in L^2(\omega \times (0,T))$ tel que la solution de

$$\begin{cases} y_t - \Delta y = f\, 1_\omega \quad \text{dans} \quad Q_T := \Omega \times (0,T) \\ y = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_T, \quad y(\cdot,0) = y_0 \quad \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

vérifie $y(\cdot,T) = 0$ dans Ω (voir [2]). En faisant usage de la théorie de la dualité, le contrôle de norme L^2-minimale est donné par $v = \varphi 1_\omega$ où φ minimise la fonctionnelle

$$J(\varphi) := \frac{1}{2}\|\varphi\|^2_{L^2(\omega\times(0,T))} + (y_0, \varphi(\cdot,0))_{L^2(\Omega)} \tag{2.2}$$

parmi toutes les solutions du problème rétrograde

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta\varphi = 0 \quad \text{dans} \quad Q_T := \Omega \times (0,T) \\ \varphi = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \times (0,T), \quad \varphi(\cdot,T) = \varphi_T \quad \text{in} \quad \Omega \end{cases} \tag{2.3}$$

avec φ_T dans un espace H tel que $J(\varphi) < \infty$.

La recherche du point critique de J peut se faire en résolvant une formulation mixte traduisant les conditions d'optimalités. Les variables sont φ et un multiplicateur de Lagrange λ prenant en compte la contrainte (2.3). Cette formulation est expliquée en détail dans [1].

D'un point de vue numérique, cette approche permet d'obtenir une approximation convergente (pour la norme L^2) du contrôle de norme L^2-minimale. En revanche, telle quelle, elle nécessite une approximation L^2 de la quantité $-\varphi_t - \Delta\varphi$, soit une approximation H^1 en temps et H^2 en espace.

Heureusement, il est possible d'éviter le recours à une approximation H^2 en écrivant l'équation de la chaleur comme un système d'ordre un:

$$-\varphi_t - \nabla\cdot\boldsymbol{p} = 0, \quad \boldsymbol{p} - \nabla\varphi = 0, \qquad (x,t) \in \Omega \times (0,T). \tag{2.4}$$

Date: 19-10-2016.

La formulation mixte sous-jacente fait alors apparaître deux multiplicateurs (afin de traiter ces deux contraintes égalités) et requiert seulement des approximations H^1 en temps et espace. Cette stratégie est utilisée dans [3] dans le cadre proche d'un problème inverse pour l'équation de la chaleur.

Le but de ce stage est de proposer, en adaptant [1] et [3], une formulation mixte d'ordre un équivalente au système d'optimalité pour J, puis de l'étudier d'un point de vue théorique et numérique, et enfin de la mettre en œuvre informatiquement.

Si le temps le permet, cette étude pourra se prolonger avec le système de Stokes et de Navier-Stokes, abordé dans [4].

3. Articulation du stage, Pré-Requis

Le stage pourra s'articuler de la façon suivante :

- Familiarisation avec les notions de contrôlabilite et d'observabilité pour des équations et systèmes de nature parabolique à travers la lecture de quelques articles et ouvrages de référence tel que [2].
- Lecture détaillée de l'article [1] proposant une caractérisation dite variationnelle de la contrôlabilité, bien adaptée notamment à une mise en œuvre numérique, puis de l'article [3] qui remplace, dans le cadre d'un problème inverse, l'équation (2.3) par le système (2.4).
- Etude théorique et numérique de la formulation mixte d'ordre un obtenue en réécrivant [1] dans le cadre de [3].
- Mise en œuvre numerique et discussions.
- Extensions éventuelles au cas du système de Stokes et Navier-Stokes.

Ce travail de stage requiert des compétences à la fois en optimisation (théorie des EDPs, Calcul des variations), en analyse numérique (méthode des éléments finis) ainsi que le goût du calcul scientifique (programmation avec par exemple Freefem ou Matlab) . Il est approprié aux étudiants d'un Master 2 en EDP et/ou Analyse numérique et/ou Calcul scientifique

References

[1] A. Münch, D. Souza, A mixed formulation for the direct approximation of the control of minimal L^2-weighted norm for the linear heat equation, Advances in computational mathematics, 2016.

[2] J-.M. Coron, Control and nonlinearity, AMS, 2007.

[3] A. Münch, D. Souza, Inverse problems for linear parabolic equations using mixed formulations - Part 1 : Theoretical analysis, J. Ill-posed and Inverse problems, 2016.

[4] E. Fernandez-Cara, A. Münch, D. Souza On the numerical controllability of the two-dimensional heat, Stokes and Navier-Stokes equations, J. of scientific computing, 2016.