SUJET DE STAGE DE MASTER 2 EN MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

1. Titre - Encadrement

Titre: Résolution d'équations aux dérivées partielles par une méthode type moindres-carrées et applications à des problèmes de contrôle

Encadrant: Pr. Arnaud Münch
Email: arnaud.munch@math.univ-bpclermont.fr
Page web: http://math.univ-bpclermont.fr/ munch/
Unité de rattachement: Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand
Laboratoire de rattachement: Laboratoire de Mathématiques - Equipe EDP et Analyse numérique
Période de stage: Premier semestre 2018
Contact: Les personnes intéressées sont invitées à envoyer un CV et une lettre de motivation.
Prolongation possible en thèse: Oui.

2. Contexte scientifique

Ce stage concerne la résolution d'équations aux dérivées partielles par une méthode de type moindres-carrées. A titre d'exemple, considérons la situation bien connue du système de Stokes instationnaire

$$\begin{cases} \mathbf{y}_t - \nu\Delta\mathbf{y} + \nabla\pi = \mathbf{f}\, 1_\omega, \quad \nabla\cdot\mathbf{y} = 0 \quad \text{dans} \quad Q_T := \Omega\times(0,T) \\ \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Sigma_T, \quad \mathbf{y}(\cdot,0) = \mathbf{y}_0 \quad \text{in} \quad \Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

où $\mathbf{y}$ désigne le vecteur vitesse d'un fluide, π la pression correspondante, $\mathbf{f}$ une force extérieure. 1_ω désigne la fonction indicatrice de ω, sous-domaine de Ω. Ce système admet une solution faible unique $(\mathbf{y},\pi)$ de régularité

$$(\mathbf{y},\pi) \in \mathcal{A}_0 := \left(C^0\left([0,T];\mathbf{H}\right) \cap L^2\left(0,T;\mathbf{V}\right)\right) \times L^2(0,T;U),$$

$\mathbf{H},\mathbf{V},U$ étant des espaces appropriées. L'approximation numérique de ce problème est classique en introduisant des méthodes de type Lagrangien puis une discrétisation en espace puis en temps (voir [1]).

L'approximation du système 2.1 peut également être abordée en minimisant par rapport à $(\mathbf{y},\pi)\in\mathcal{A}_0$ la quantité

$$\|\mathbf{y}_t - \nu\Delta\mathbf{y} + \nabla\pi - \mathbf{f}\, 1_\omega\|^2_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega\times(0,T))} + \|\nabla\cdot\mathbf{y}\|^2_{L^2(\Omega\times(0,T))} \tag{2.2}$$

menant à une méthode de type moindres-carrées selon la terminologie de [2]. Ce problème extremal se reformule de la façon équivalente suivante:

$$\inf_{(\mathbf{y},\pi)\in\mathcal{A}} E(\mathbf{y},\pi) = \frac{1}{2}\iint_{Q_T} \left(|\mathbf{v}_t|^2 + |\nabla\mathbf{v}|^2 + |\nabla\cdot\mathbf{y}|^2\right) d\mathbf{x}\, dt \tag{2.3}$$

avec $\mathcal{A} := \{(y,\pi)\in\mathcal{A}_0, y(\cdot,0) = y_0\}$ et où le correcteur $\mathbf{v}$ est solution de

$$\begin{cases} -\mathbf{v}_{tt} - \Delta\mathbf{v} + (\mathbf{y}_t - \nu\Delta\mathbf{y} + \nabla\pi - \mathbf{f}\, 1_\omega) = 0, \quad \text{dans} \quad Q_T, \\ \mathbf{v} = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_T, \quad \mathbf{v}_t = 0 \quad \text{sur} \quad \Omega\times\{0,T\}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Date: 19-10-2016.

On montre en effet que l'unique point critique de E est la solution du système de Stokes. Cela réduit la résolution de (2.1) à la construction d'une suite minimisante pour E. Chaque itérée requiert simplement la résolution du problème elliptique espace-temps (2.4) en la variable $\mathbf{v}$.

Remarquablement, cette approche de type moindres carrées, permet d'aborder la contrôlabilité de (2.1) où la force $\mathbf{f}$ est désormais une inconnue de façon à ce que $\mathbf{y}(\cdot, T) = 0$. En effet, il suffit de rajouter comme inconnue à E la variable $\mathbf{f} \in L^2$ et la condition $\mathbf{y}(\cdot, T) = 0$ à l'espace $\mathcal{A}$! Ce problème est étudié d'un point de vue théorique et numérique dans [5, 6] adaptant [4] traitant le cas de l'équation de la chaleur. On montre notamment la convergence forte de toute suite minimisante de E vers la solution de (2.1).

Le but de ce stage est de comprendre cette approche dans le cas de l'équation de la chaleur et du système plus général de Stokes (2.1) puis de l'adapter à des situations non linéaires telles que le système de Navier-Stokes ou celle considérée dans [3].

3. Articulation du stage, Pré-Requis

Le stage pourra s'articuler de la façon suivante :

- Familiarisation avec les méthodes de type moindres-carrés dans des cas simples par la lecture d'articles de référence puis familiarisation à la notion de contrôlabilité pour des EDP instationnaires.
- Lecture détaillée des articles [6, 4] puis étude numérique et eventuellement mise en œuvre informatique.
- Etude de l'extension éventuelle de cette approche moindres-carrées à des situations non-linéaires.

Ce travail de stage requiert des compétences à la fois en optimisation (théorie des EDPs, Calcul des variations), en analyse numérique (méthode des éléments finis) ainsi que le goût du calcul scientifique (programmation avec par exemple Freefem ou Matlab) . Il est approprié aux étudiants d'un Master 2 en EDP et/ou Analyse numérique et/ou Calcul scientifique

References

[1] R. Glowinski, Numerical methods for nonlinear variational problems, Springer, Berlin, 2008.

[2] D. Bochel, M. Gunzburger, Least-squares finite element methods. Springer, New-York, 2009.

[3] E. Fernandez-Cara, A. Münch, Numerical null controllability of semi-linear 1D heat equations: fixed points, least squares and Newton methods, Mathematical control and related field, 2012

[4] A. Münch, P. Pedregal, Numerical null controllability of the heat equation through a least squares and variational approach. European J. Applied Mathematics. 2014

[5] A. Münch, P. Pedregal, A least-squares formulation for the approximation of null controls for the Stokes system, C. R. Acad. Sci. 2013.

[6] A. Münch, A least-squares formulation for the approximation of null controls for the Stokes system, Mathematics of controls, Signal and System, 2015.