Sujet de stage M2 Mathématiques

Dimensionnement par contrôle optimal d'un stockage de chaleur pour une chaussée à température de surface positive

Positionnement du problème

Sous l'impulsion du Grenelle de l'Environnement (2007) et, plus récemment, de la loi relative à la transition énergétique (2015), il est devenu nécessaire d'intégrer, lors de la phase de conception des chaussées et de dimensionnement mécanique, la considération de critères concernant l'économie de ressources non renouvelables, la réduction des émissions de gaz à effet de serre (GES) ou encore la préservation de l'environnement en phase d'exploitation. Le concept de route à énergie positive émerge également depuis peu. Dans ce cadre, le Centre d'études et d'expertise sur les risques, l'environnement, la mobilité et l'aménagement (Cerema) mène des recherches sur la récupération d'énergie dans les chaussées pour leur maintien hors-gel. L'objectif du stage est de dimensionner, sous une météorologie donnée, une capacité de stockage thermique minimale, pouvant emmagasiner l'énergie solaire thermique captée par la chaussée en été, et la restituer en hiver pour la mise hors-gel.

Modélisation du problème dans le cas 1D

On considère dans un premier temps une modélisation thermique 1D d'une chaussée chauffée par une source de chaleur q insérée Ã la profondeur y_0 :

$$\begin{cases} c(y)\theta_t(y,t) - \big(k(y)\theta_y(y,t)\big)_y = q(t)\delta(y_0), & (y,t) \in Q_T, \\ -k(0)\theta_y(0,t) = f_1(t) - f_2(t)\theta(0,t) - \sigma\varepsilon(t)\theta^4(0,t), \quad \theta_y(h_e,t) = 0, & t \in (0,T), \\ \theta(y,0) = \theta_0(y), & y \in (0,h_e), \end{cases} \tag{1}$$

où l'on note par $\theta = \theta(y,t)$ la température en Kelvin au point y et à l'instant t, et :

$$\begin{aligned} &c(y) : \text{capacité thermique volumique de la chaussée au point } y \ (J.K^{-1}.m^{-3}), \\ &k(y) : \text{conductivité thermique de la chaussée au point } y \ (W.K^{-1}.m^{-1}). \end{aligned} \tag{2}$$

Les fonctions positives f_1 et f_2 apparaissant dans la condition aux limites non linéaires en $y = 0$ sont définies par :

$$f_1(t) := (1 - A(t))R_g(t) + R_{atm}(t) + H_v(t)\theta_a(t) - L_f I(t), \qquad f_2(t) := H_v(t), \tag{3}$$

où :

$$\begin{aligned} \varepsilon, A &: \text{émissivité et albedo de la surface routière}, \\ \sigma &: \text{constante de Stefan-Boltzmann } (5.67 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2K^4}), \\ R_{atm}, R_g &: \text{rayonnement atmosphérique et global } (\mathrm{W/m^2}), \\ \theta_a &: \text{température de l'air } (K), \\ H_v &: \text{coefficient de transfert par convection } (\mathrm{W/m^2K}), \\ I &: \text{intensité de la précipitation neigeuse } (\mathrm{mm.s^{-1}}), \\ L_f &: \text{chaleur latente de fusion de la glace } (\mathrm{J.kg^{-1}}). \end{aligned}$$

L'optimisation de la source de chaleur q, par minimisation de l'énergie dépensée pour maintenir la température de surface de la chaussée au-dessus d'un seuil $\underline{\theta}$, a été étudié et illustré sur des données réelles dans [2] :

$$\begin{cases} \inf_{q \in L^1(0,T)} J(q) := \displaystyle\int_0^T q(t)dt, \\ \text{avec :} \quad q(t) \geq 0, \quad \theta(0,t) \geq \underline{\theta}, \quad \forall t \in (0,T), \quad \theta = \theta(q) \text{ résout (1)} \end{cases} \tag{4}$$

Ajoutons un stockage de chaleur défini par sa capacité thermique C dont on note θ_s sa température. En prenant en compte les pertes thermiques du stockage, on peut modéliser l'évolution temporelle de θ_s selon :

$$C\frac{d\theta_s}{dt}(t) = -A(t)\lambda_s(\theta_s(t) - \theta(y_0, t)) - p(t, \theta_s(t)), \tag{5}$$

où λ_s correspond au coefficient d'échange thermique entre le stockage (à la température θ_s) et la route (à la température $\theta(y_0, \cdot)$), A est une fonction prenant les valeurs 0 ou 1 modélisant l'activation ou non de l'échange de chaleur et p est une loi modélisant la perte thermique du stockage. On considère enfin le modèle de chaussée intégrant, en plus de la source de chaleur q appelée exogène dans la suite, l'échange thermique avec le stockage :

$$\begin{cases} c(y)\dfrac{\partial\theta}{\partial t}(y,t) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(k(y)\dfrac{\partial\theta}{\partial y}(y,t)\right) = \left(q(t) + A(t)\lambda_s(\theta_s(t) - \theta(y_0,t))\right)\delta(y_0), & (y,t) \in Q_T, \\ -k(0)\dfrac{\partial\theta}{\partial y}(0,t) = f_1(t) - f_2(t)\theta(0,t) - \sigma\varepsilon(t)\theta^4(0,t),\ \dfrac{\partial\theta}{\partial y}(h_e,t) = 0, & t \in (0,T), \\ \theta(y,0) = \theta_0(y), & y \in (0,h_e), \\ C\dfrac{d\theta_s}{dt}(t) = -A(t)\lambda_s(\theta_s(t) - \theta(y_0,t)) - p(t,\theta_s(t)), & t \in (0,T). \end{cases} \tag{6}$$

Dès lors, on souhaite optimiser C et la source q selon le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} \inf\limits_{C,A,q}\left(\epsilon_1 C + (1-\epsilon_1)\displaystyle\int_0^T q(t)dt\right), \text{ soumis à :} \\ C > 0,\ A(t) \in \{0,1\},\ q(t) \geq 0,\ \theta_{C,A,q}(0,t) \geq \underline{\theta},\ \forall t \in (0,T), \\ |\theta_s(T) - \theta_s(0)| \leq d,\ \theta_{C,A,q} \text{ résout (6)} \end{cases} \tag{7}$$

où $\epsilon_1 > 0$ et $d \geq 0$ est un réel positif (petit) donné permettant de maintenir le stockage à sa température initiale après un an (T).

Modélisation du problème dans le cas 2D

Un échangeur de chaleur [1] a été développé par le Cerema sur un démonstrateur situé à Egletons (voir figure 1). Cet échangeur consiste à faire circuler un fluide caloporteur dans une des couches poreuses de la chaussée (voir schéma 2).

Figure 1: Le démonstrateur d'Egletons.

On peut modéliser cet échangeur en 2D (voir figure 3) via le modèle :

$$\begin{cases} C_i\dfrac{\partial\theta}{\partial t}(x,y,t) - \lambda_i\Delta\theta(x,y,t) = 0, \quad i \in \{1,3,4\}, \\ C_2\dfrac{\partial\theta}{\partial t}(x,y,t) + C_f v\dfrac{\partial\theta}{\partial x}(x,y,t) - (\lambda_2 + \phi_2\lambda_f)\Delta\theta(x,y,t) = 0, \end{cases} \tag{8}$$

où C_i, λ_i, ϕ_i, C_f, λ_f, v et K représentent respectivement la chaleur spécifique, la conductivité thermique et la porosité de la couche i, la chaleur spécifique et la conductivité thermique du fluide et la vitesse de Darcy du fluide selon l'axe x (ici supposée indépendante de x et y). Comme mentionné dans la figure 3, les conditions aux limites du problème (8) sont des conditions de Neumann homogènes exceptées pour le bord ($x = 0$, $e_1 \leq y \leq e_1 + e_2$) et la surface de la route ($y = 0$). Pour la première, on impose la température d'injection du fluide :

$$\forall\, e_1 \leq y \leq e_1 + e_2,\ \forall\, t \geq 0,\ \theta(0,y,t) = \theta_f(t). \tag{9}$$

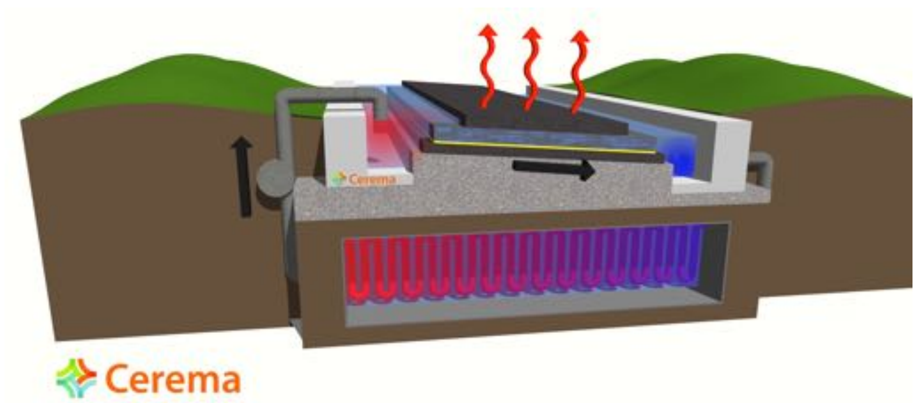

Figure 2: Schéma de principe de l'échangeur de chaleur (cas du chauffage).

La seconde, en surface de chaussée, est donnée par :

$$\lambda_1 \frac{\partial \theta}{\partial y}(x,0,t) = \sigma\varepsilon(t)\theta^4(x,0,t) + H_v(t)(\theta(x,0,t) - \theta_a(t)) - R_{atm}(t) - (1 - A(t))R_g(t) + L_f I(t) \tag{10}$$

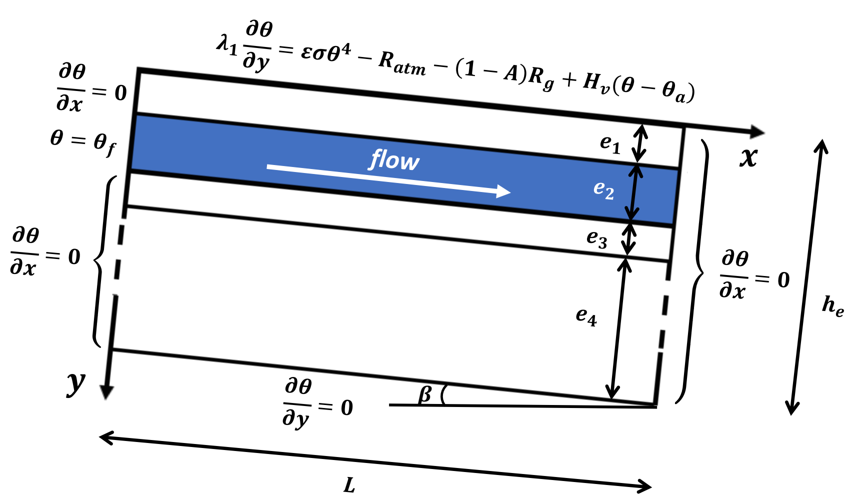

Figure 3: Schéma de la structure de chaussée avec les conditions aux limites (θ_f, θ_a sont respectivement la températures d'injection du fluide et la température d'air.

Dans ce contexte, l'énergie de chauffage a pour expression :

$$J_2(\theta_f) = ve_2C_f \int_0^T \int_{e_1}^{e_1+e_2} \big(\theta_f(t) - \theta_{\theta_f}(L,y,t)\big)\, dydt, \tag{11}$$

et le problème de contrôle pour minimiser l'énergie de chauffage peut être le suivant :

$$\begin{cases} \inf\limits_{\theta_f \in L^1(0,T)} J_2(\theta_f), \text{ soumis à :} \\ \theta_f(t) \geq 0,\ \theta_{\theta_f}(x,0,t) \geq \underline{\theta},\ \forall (x,t) \in (0,L)\times(0,T),\ \theta_{\theta_f} \text{ résout } (8)-(10). \end{cases} \tag{12}$$

On peut bien entendu ajouter le stockage à ce problème et adapter le problème 7.

References

[1] S. Asfour, F. Bernardin, and E. Toussaint, *Experimental validation of 2d hydrothermal modelling of porous pavement for heating and solar energy retrieving applications*, Road Materials and Pavement Design, (2018), pp. 1–17.

[2] F. Bernardin and A. Münch, *Modeling and optimizing a road de-icing device by a nonlinear heating*, ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, to appear (2018).

1 Travail à réaliser

- Travail bibliographique sur le contrôle optimal des équations paraboliques et en particulier l'équation de la chaleur
- Resituer théoriquement le problème 7 au regard de cette bibliographie, et traiter les problèmes d'existence et d'unicité de contrôles.
- Proposer une méthode numérique pour le calcul du contrôle et la mettre en oeuvre dans le cas de jeux de données réalistes tant sur le plan des propriétés physiques de la chaussée (épaisseurs, matériaux) que des données météorologiques.
- Réaliser le travail précédent pour le problème 12. Si le temps le permet, étudier également le problème avec ajout du stockage.
- Rédaction d'un projet d'article et d'un rapport de recherche.

2 Conditions de travail

- Lieu de travail : Département Laboratoire de Clermont-Ferrand (Cerema Centre-Est), situé à Clermont-Ferrand dans la zone du Brézet
- Restauration possible à quelques kilomètres (cantine administrative) ou sur place (salle de convivialité)
- Durée probable : 5 mois en 2019 (février-juin)
- Rémunération : environ 500 euros nets par mois

3 Contacts

- Frédéric Bernardin, Département Laboratoire de Clermont-Ferrand (Cerema), frederic.bernardin@cerema.fr, 04 73 42 10 87
- Arnaud Münch, Laboratoire de Mathématiques (Université Clermont Auvergne), arnaud.munch@uca.fr, 04 73 40 70 76