ALGÈBRE - LEÇON 107 : REPRÉSENTATIONS ET CARACTÈRES D'UN GROUPE FINI SUR UN $\mathbb{C}$-ESPACE VECTORIEL. EXEMPLES

SIMON RICHE

1. Commentaires du jury (rapport 2020)

Il s'agit d'une leçon où théorie et exemples doivent apparaître. D'une part, il est indispensable de savoir dresser une table de caractères pour des petits groupes, et d'autre part, il faut savoir tirer des informations sur le groupe à partir de sa table de caractères, et éventuellement être capable de trouver la table de caractères de certains sous-groupes. Les représentations peuvent provenir d'actions de groupes sur des ensembles finis, de groupes d'isométries, d'isomorphismes exceptionnels entre groupes de petit cardinal. Inversement, on peut chercher à interpréter des représentations de façon géométrique, mais il faut avoir conscience qu'une table de caractères provient généralement de représentations complexes *a priori* non réelles. La présentation du lemme de Schur est importante et ses applications doivent être parfaitement maîtrisées.

S'ils le désirent, les candidats peuvent évoquer la transformée de Fourier en présentant par exemple les formules d'inversion, de Plancherel et de convolution.

2. Plan

Pour cette leçon les livres de Caldero–Germoni ([CG1, CG2]) sont une mine inépuisable.

2.1. **Ce qui doit apparaître.** Définition d'une représentation d'un groupe sur un corps.

Cas des groupes abéliens [1].

Lemme de Schur.

Représentations irréductibles.

Sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle (ou sur $\mathbb{C}$ si on préfère) toute représentation est isomorphe à une somme directe de représentations irréductibles (théorème de Maschke).

Caractère d'une représentation.

Sur le corps $\mathbb{C}$, deux représentations ayant même caractère sont isomorphe.

Sur le corps $\mathbb{C}$, les caractères des représentations irréductibles forment une base de l'espace des fonctions centrales. En particulier, il existe autant de représentations irréductibles non isomorphes qu'il y a de classes de conjugaison dans G.

Exemples de représentations (aussi nombreux et divers que possible).

Tables de caractères de certains groupes de petit cardinal.

Date: Année 2020–2021.

1. Voir notamment le §4.4 ci-dessous

2.2. **Ce qui peut apparaître.** Encore plus d'exemples (notamment les tables des caractères des groupes diédraux [2]).

Étude des représentations de permutation.

Liens entre table des caractères et sous-groupes distingués, sous-groupe dérivé, centre, etc. [3]

La table des caractères des groupes symétriques est à coefficients entiers [4].

Transformée de Fourier discrète [5].

3. Quelques questions bêtes auxquelles il faut absolument savoir répondre rapidement

(1) Donner un exemple de représentation d'un groupe fini qui n'est pas une somme directe de représentations irréductibles.

(2) Donner un exemple de représentation d'un groupe sur $\mathbb{C}$ qui n'est pas une somme directe de représentations irréductibles.

(3) Montrer que si ρ est une représentation complexe de dimension finie d'un groupe fini G, alors pour tout $g \in G$ l'endomorphisme $\rho(g)$ est diagonalisable. Que peut-on dire de ses valeurs propres ? Que se passe-t-il si on enlève l'hypothèse que G est fini ?

(4) La décomposition d'une représentation complexe de dimension finie d'un groupe fini en somme de sous-représentations irréductibles est-elle unique ?

(5) Si G est un groupe fini agissant sur un ensemble fini X, déterminer le caractère de la représentation de permutation associée. (Si besoin, voir l'exercice 6 pour la définition de cette représentation.)

4. Exercices

4.1. Représentations sur des corps quelconques.

Exercice 1. Considérons le groupe $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

(1) Montrer que la représentation de G sur $\mathbb{R}^2$ définie par le morphisme

$$\rho : G \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

envoyant $\overline{1}$ sur la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ est irréductible.

(2) Déterminer les endomorphismes de cette représentation. (*Indication* : il pourra être utile d'identifier $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ de la façon canonique.)

(3) La représentation de G sur $\mathbb{C}^2$ défini par le morphisme composé

$$G \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

est-elle irréductible ? Déterminer ses endomorphismes.

Exercice 2. Montrer que si G est un groupe fini admettant un sous-groupe distingué abélien d'indice d, alors toute représentation irréductible de G est de dimension inférieure ou égale à d.

---

2. Voir la feuille sur la leçon 108.
3. Voir le §4.3 ci-dessous.
4. Voir la feuille sur la leçon 125.
5. Voir encore le §4.4 ci-dessous.

Exercice 3 (Dimension des représentations irréductibles)**.** Soit G un groupe fini différent de $\{1\}$.

(1) Montrer que si $\Bbbk$ est un corps et V une représentation irréductible de G sur $\Bbbk$, alors $\dim(V) \leq |G| - 1$. (*Indication* : on pourra comparer V à la représentation régulière.)

(2) Montrer que si $\Bbbk = \mathbb{C}$, alors on a même $\dim(V) \leq \sqrt{|G| - 1}$.

(3) Fixons un corps $\Bbbk$. Le but de cette question est de montrer que si $V_1, \cdots, V_r$ sont des représentations irréductibles de G sur $\Bbbk$ deux à deux non isomorphes, alors on a
$$\dim(V_1) + \cdots + \dim(V_r) \leq |G|.$$

(a) Montrer que si V est une représentation irréductible de G sur $\Bbbk$ alors il existe une injection de G-modules $V \hookrightarrow \Bbbk G$, où $\Bbbk G$ est muni de la représentation régulière gauche. (*Indication* : on pourra commencer par montrer que V^* est isomorphe à un quotient de $\Bbbk G$.)

(b) Montrer que si $V_1, \cdots, V_s$ sont des représentations irréductibles de G (non nécessairement non isomorphes), alors toute sous-représentation de $V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$ est isomorphe à $\bigoplus_{i \in I} V_i$ pour un sous-ensemble $I \subset \{1, \cdots, s\}$. (*Indication* : si V est la sous-représentation considérée, on pourra choisir un sous-ensemble $J \subset \{1, \cdots, s\}$ maximal pour la propriété que l'intersection de V avec $\bigoplus_{j \in J} V_j$ est réduite à $\{0\}$.)

(c) Montrer que si $V_1, \cdots, V_s$ sont des sous-représentations irréductibles deux à deux non isomorphes de $\Bbbk G$, alors la somme $\sum_{i=1}^{s} V_i$ est directe. (*Indication* : on pourra raisonner par récurrence sur s, et utiliser la question précédente.)

(d) Conclure.

Exercice 4. Soit $\Bbbk$ un corps, et soit $n \geq 1$ un entier. On considère la représentation de $\mathfrak{S}_n$ sur $\Bbbk^n$ par permutation des coordonnées, c'est-à-dire la représentation
$$\rho : \mathfrak{S}_n \to \mathrm{GL}_n(\Bbbk)$$
où $\rho(\sigma)(e_i) = e_{\sigma(i)}$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $i \in \{1, \cdots, n\}$.

(1) On suppose tout d'abord que la caractéristique de $\Bbbk$ ne divise pas n.

(a) Montrer que
$$\Bbbk^n = \Bbbk \cdot (1, \cdots, 1) \oplus \{(x_1, \cdots, x_n) \in \Bbbk^n \mid \sum_i x_i = 0\},$$
et que chacun de ces sous-espaces est une sous-représentation.

(b) Montrer que la représentation de $\mathfrak{S}_n$ sur $\{(x_1, \cdots, x_n) \in \Bbbk^n \mid \sum_i x_i = 0\}$ est irréductible. (*Indication* : on pourra remarquer que tout vecteur non nul dans ce sous-espace a deux coordonnées non égales, puis utiliser cela pour montrer que tout sous-espace non nul stable par l'action de $\mathfrak{S}_n$ contient le vecteur $e_1 - e_2$.)

(c) En déduire que $\Bbbk^n$ est une somme directe de représentations irréductibles.

(2) On suppose maintenant que la caractéristique de $\Bbbk$ divise n.

(a) Notons $\Bbbk$ la représentation triviale de $\mathfrak{S}_n$. Déterminer tous les morphismes de représentations de $\Bbbk$ vers $\Bbbk^n$.

(b) Déterminer tous les morphismes de représentations de $\Bbbk^n$ vers $\Bbbk$.

(c) En déduire que la droite $\Bbbk \cdot (1, \cdots, 1)$ n'admet pas de supplémentaire stable par l'action de $\mathfrak{S}_n$.

4.2. **Représentations complexes.**

Exercice 5 (Nombre de représentations irréductibles)**.** Pour G un groupe fini, on note $\mathrm{Irr}(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations complexes irréductibles de G.

(1) À quelle condition a-t-on $|G| = |\mathrm{Irr}(G)|$?

(2) Quels sont les groupes finis G tels que $|\mathrm{Irr}(G)| = 1$?

(3) Montrer que le seul groupe fini G tel que $|\mathrm{Irr}(G)| = 2$ est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. (*Indication* : on pourra utiliser—après l'avoir justifié—le fait que le cardinal de toute classe de conjugaison dans un groupe fini divise le cardinal du groupe.)

(4) Montrer que les seuls groupes finis G tels que $|\mathrm{Irr}(G)| = 3$ sont $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $\mathfrak{S}_3$. (*Indication* : on pourra utiliser—après l'avoir justifié—que tout groupe d'ordre inférieur ou égal à 5 est abélien et que, en notant H et K les stabilisateurs d'un élément fixé dans chacune des classes de conjugaison non triviales de G, on a $1 = \frac{1}{|G|} + \frac{1}{|H|} + \frac{1}{|K|}$.)

Référence : pour la première question, voir [CG2, Chap. XIII, Corollaire A.1.8].

Exercice 6 (Représentation de permutation)**.** Si G est un groupe fini agissant sur un ensemble fini X, on rappelle que la *représentation de permutation* associée est la représentation de G sur l'espace vectoriel vectoriel complexe E_X de base $(\delta_x : x \in X)$ définie par

$$g \cdot \delta_x = \delta_{g \cdot x}$$

pour tous $g \in G$ et $x \in X$.

(1) On note $f : E_X \to \mathbb{C}$ l'application linéaire définie par

$$f\left(\sum_{x \in X} \lambda_x \delta_x\right) = \sum_{x \in X} \lambda_x.$$

Montrer que f est un morphisme de représentations.

(2) On note $V_X := \ker(f)$. Montrer que

$$E_X = \mathbb{C} \cdot (\sum_{x \in X} \delta_x) \oplus V_X,$$

et que chacun de ces sous-espaces est stable par l'action de G.

(3) Notons χ_X le caractère de la représentation V_X. Montrer que pour tout $g \in G$ on a

$$\chi_X(g) = |X^g| - 1,$$

où X^g est l'ensemble des points fixes de g dans X.

(4) Montrer que si l'action de G sur X n'est pas transitive, alors V_X n'est pas irréductible.

(5) Montrer que
$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|$$
est égal au nombre d'orbites de l'action de G sur X. (*Indication* : on pourra calculer de deux façons différentes la trace de $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_X(g)$, où $\rho_X : G \to \mathrm{GL}(V_X)$ est le morphisme définissant la représentation V_X.)

(6) On suppose maintenant que G agit transitivement sur X. Montrer que
$$\langle \chi_X, \chi_X\rangle = -1 + \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|^2,$$
où $\langle -, -\rangle$ désigne le produit hermitien canonique sur les fonctions de G dans $\mathbb{C}$.

(7) En déduire que V_X est irréductible si et seulement si G agit transitivement sur X et sur l'ensemble des paires d'éléments distincts de X.

(8) En déduire que dans le cas de $G = \mathfrak{S}_n$ agissant de manière standard sur $X = \{1, \cdots, n\}$, la représentation V_X est irréductible (cf. Exercice 4).

Référence : [CG2, Chap. XIII, Proposition 3.11.1].

Exercice 7. Soit G un groupe fini. On note $\mathrm{Irr}(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles complexes de G. (La classe d'isomorphisme d'une représentation ρ sera notée $[\rho]$.) On notera également $\mathrm{Aut}(G)$ le groupe des automorphismes de groupes de G (pour la loi de composition).

(1) On note $\mathrm{Int}(G) \subset \mathrm{Aut}(G)$ le sous-ensemble formé des automorphismes intérieurs, c'est-à-dire de la forme $h \mapsto ghg^{-1}$ pour un $g \in G$ fixé. Montrer que $\mathrm{Int}(G)$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Aut}(G)$, isomorphe à $G/Z(G)$ (où $Z(G)$ est le centre de G).

(2) Montrer qu'il existe une action de $\mathrm{Aut}(G)$ sur $\mathrm{Irr}(G)$ qui vérifie
$$\alpha \cdot [\rho] = [\rho \circ \alpha^{-1}]$$
pour tout $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ et toute représentation irréductible ρ.

(3) Montrer que cette action est triviale sur le sous-groupe $\mathrm{Int}(G)$, et en déduire une action du groupe $\mathrm{Out}(G) := \mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Int}(G)$ sur $\mathrm{Irr}(G)$.

(4) Expliciter cette action dans le cas où $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Référence : [CG2, Chap. XIII, Ex. E.24].

Exercice 8 (Représentations de $\mathfrak{S}_n$ et de $\mathfrak{A}_n$)**.** Le but de cet exercice est d'étudier le lien entre les représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$ et de $\mathfrak{A}_n$.

(1) Montrer que pour G un groupe fini, $H \subset G$ un sous-groupe d'indice d, et $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation irréductible complexe de G, la représentation
$$\rho_{|H} : \left\{ \begin{array}{ccc} H & \to & \mathrm{GL}(V) \\ h & \mapsto & \rho(h) \end{array} \right.$$
est une somme d'au plus d représentations irréductibles qui ont toutes même dimension.

(2) On suppose maintenant que $d = 2$, et on note χ le caractère de G. Montrer qu'on a l'alternative suivante :

(a) soit il existe $g \in G \smallsetminus H$ tel que $\chi(g) \neq 0$, et alors $\rho_{|H}$ est irréductible ;

(b) soit pour tout $g \in G \smallsetminus H$ on a $\chi(g) = 0$, et alors $\rho_{|H}$ est la somme directe de deux représentations irréductibles non isomorphes de même dimension.

(*Indication* : on pourra considérer la norme de χ dans l'espace des fonctions sur G.)

(3) Dans les cas particuliers où $G = \mathfrak{S}_4$ ou $\mathfrak{S}_5$, avec $H = \mathfrak{A}_4$ ou $\mathfrak{A}_5$ respectivement, déterminer pour chaque représentation irréductible dans quel cas on se trouve.

Référence : [CG2, Chap. XIII, §D.1–2–3].

Exercice 9. Soit $\Bbbk$ un corps fini, dont on note q le cardinal. On considère le sous-groupe G du groupe des bijections de $\Bbbk$ dans lui-même formé des applications de la forme $x \mapsto ax + b$ avec $a \in \Bbbk^\times$ et $b \in \Bbbk$.

(1) Montrer que G a q classes de conjugaison, et les décrire.

(2) Montrer que le sous-ensemble K des applications de la forme $x \mapsto x + b$ est un sous-groupe distingué de G isomorphe à $(\Bbbk, +)$, et que le quotient G/K est isomorphe à $(\Bbbk^\times, \times)$.

(3) En déduire $q - 1$ représentations irréductibles complexes de dimension 1 de G, et déterminer leurs caractères.

(4) Montrer que le caractère de la représentation irréductible restante de G vaut $q - 1$ sur id, -1 sur $K \smallsetminus \{1\}$, et 0 ailleurs.

(5) Construire explicitement cette représentation en utilisant la représentation de permutation associée à l'action naturelle de G sur $\Bbbk$.

Exercice 10. Soit G un groupe fini. Soient $V_1, \cdots, V_r$ des représentants des classes d'isomorphisme de représentations complexes de G, et notons $n_1, \cdots, n_r$ leurs dimension. Montrer qu'il existe un isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres

$$\mathbb{C}G \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{M}_{n_i}(\mathbb{C}).$$

4.3. **Propriétés du groupe visibles sur la table des caractères.**

Exercice 11 (Table des caractères et sous-groupes distingués)**.** Soit G un groupe fini.

(1) Montrer que si χ est le caractère d'une représentation complexe ρ, alors on a

$$\ker(\rho) = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(e)\}.$$

(*Indication* : on pourra remarquer que $\rho(g)$ est diagonalisable, et considérer ses valeurs propres.)

(2) Montrer que la représentation régulière de G (sur un espace vectoriel de base $(\delta_g : g \in G)$, avec $g \cdot \delta_h = \delta_{gh}$) est fidèle.

(3) Montrer que tout sous-groupe distingué de G est une intersection de noyaux de représentations irréductibles de G. (*Indication* : si $K \subset G$ est un sous-groupe distingué, on pourra considérer la représentation régulière de G/K.)

(4) En déduire une méthode pour déterminer les sous-groupes distingués de G si on connait sa table des caractères.

(5) Appliquer cette méthode au groupe $\mathfrak{S}_4$.

(6) Montrer en utilisant cette méthode que $\mathfrak{A}_5$ est simple.

Référence : [CG2, Chap. XIII, Ex. E.25].

Exercice 12 (Sous-groupe dérivé et table des caractères)**.** Soit G un groupe fini.

(1) Montrer que le sous-groupe dérivé $\mathscr{D}(G)$ de G est l'intersection des noyaux des représentations complexes de dimension 1 de G. (*Indication* : on pourra considérer la représentation régulière du groupe $G/\mathscr{D}(G)$, cf. Exercice 11.)

(2) En déduire une nouvelle preuve du fait que $\mathscr{D}(\mathfrak{S}_n) = \mathfrak{A}_n$.

(3) Soit $\mathbb{F}$ un corps fini et $n \geq 1$, avec $\mathbb{F} \neq \mathbb{F}_2$ si $n = 2$. Déterminer le nombre de représentations de dimension 1 du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$.

Référence : [CG2, Chap. XIII, Ex. E.26].

Exercice 13 (Centre et table des caractères)**.** Soit G un groupe fini.

(1) Soit ρ une représentation complexe de G de dimension finie, et soit χ son caractère. Montrer que pour $g \in G$ on a

$$|\chi(g)| = \chi(e) \quad \Leftrightarrow \quad \rho(g) \in \mathbb{C} \cdot \mathrm{id}.$$

(*Indication* : on pourra remarquer que $\rho(g)$ est diagonalisable, et considérer ses valeurs propres.)

(2) Avec les notations précédentes, montrer que si $|\chi(g)| = \chi(e)$, alors $ghg^{-1}h^{-1} \in \ker(\rho)$ pour tout $h \in G$.

(3) En déduire que $Z(G)$ est l'intersection des $\{g \in G \mid |\chi(g)| = \chi(e)\}$ où χ parcourt l'ensemble des représentations irréductibles de G.

Référence : [CG2, Chap. XIII, Ex. E.28].

Exercice 14. Soit G un groupe fini.

(1) Montrer que s'il existe un corps $\Bbbk$ algébriquement clos et une représentation irréductible de G sur $\Bbbk$ qui est fidèle, alors $Z(G)$ est cyclique.

(2) En utilisant l'Exercice 11, montrer que s'il existe une représentation irréductible complexe ρ, de caractère χ, telle que $\chi(g) \neq \chi(e)$ pour tout $g \neq e$, alors $Z(G)$ est cyclique.

Référence : [CG2, Chap. XIII, Ex. E.29].

4.4. **Représentations des groupes abéliens.**

Exercice 15 (Dualité des groupes abéliens finis)**.** Si A est un groupe abélien fini [6], on note $\widehat{A}$ l'ensemble des morphismes de groupes de A dans $\mathbb{C}^\times$.

(1) Montrer que la multiplication des fonctions munit $\widehat{A}$ d'une structure de groupe abélien fini.

(2) Montrer que $\widehat{A}$ s'identifie à l'ensemble des représentations irréductibles de A, et en déduire que $|\widehat{A}| = |A|$.

(3) Montrer qu'il existe un isomorphisme canonique $A \xrightarrow{\sim} \widehat{\widehat{A}}$.

6. Pour cet exercice on ne suppose pas connu le théorème de structure des groupes abéliens finis. En fait ce théorème peut se démontrer par ces méthodes, voir [CG2, Chap. XIII, Théorème A.1.14].

(4) Montrer que si A est un groupe abélien fini et $B \subset A$ un sous-groupe, alors le morphisme de restriction $\widehat{A} \to \widehat{B}$ est surjectif. (*Indication* : on pourra considérer le noyau de ce morphisme.)

Référence : [CG2, Chap. XIII, Prop. A.1.3 et A.1.9, Théorème A.1.13].

Exercice 16 (Transformée de Fourier discrète)**.** Pour un groupe abélien fini A, on note $\mathbb{C}[A]$ l'algèbre des fonctions de A dans $\mathbb{C}$. On munit cette algèbre du produit scalaire hermitien défini par

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} \overline{f(a)} g(a).$$

On fixe un tel groupe A, et on considère l'application linéaire

$$\mathscr{F} : \mathbb{C}[A] \to \mathbb{C}[\widehat{A}]$$

définie par

$$\mathscr{F}(f) = \big(\chi \mapsto \sum_{a \in A} f(a)\chi(a)\big).$$

(1) Le but de cette question est de montrer que $\mathscr{F}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

  (a) Montrer que pour $a, b \in A$ on a

$$\sum_{\chi \in \widehat{A}} \chi(ba^{-1}) = |A|\delta_{a,b}.$$

  (*Indication* : on pourra identifier A à $\widehat{\widehat{A}}$, cf. Exercice 15, et utiliser l'orthonormalité des caractères.)

  (b) En déduire que pour $f, g \in \mathbb{C}[A]$ on a

$$\langle \mathscr{F}(f), \mathscr{F}(g)\rangle = |A|\langle f, g\rangle.$$

  (c) Conclure.

  (d) Montrer que la réciproque de $\mathscr{F}$ est donnée par

$$\mathscr{F}^{-1}(g) = \frac{1}{|A|} \sum_{\chi \in \widehat{A}} g(\overline{\chi}) \cdot \chi.$$

  (*Indication* : on pourra utiliser—après l'avoir justifié—que pour $f \in \mathbb{C}[A]$ on a $f = \sum_{\chi \in \widehat{A}} \langle \chi, f\rangle \chi$.)

(2) On définit une opération $\star$ sur $\mathbb{C}[A]$ en posant

$$(f \star g)(a) = \sum_{\substack{x,y \in A \\ xy=a}} f(x)g(y).$$

  (a) Montrer que $(\mathbb{C}[A], +, \star)$ est une algèbre associative.

  (b) Montrer que pour $f, g \in \mathbb{C}[A]$ on a $\mathscr{F}(f \star g) = \mathscr{F}(f) \cdot \mathscr{F}(g)$, où à droite on considère le produit usuel dans $\mathbb{C}[\widehat{A}]$.

  (c) En déduire que $\mathscr{F}$ est un isomorphisme d'algèbres de $(\mathbb{C}[A], +, \star)$ vers $\mathbb{C}[\widehat{A}]$.

Référence : [CG2, Chap. XIII, Théorème A.1.28]. L'application $\mathscr{F}$ est appelée *transformée de Fourier discrète* par analogie avec la transformée de Fourier usuelle, et les propriétés ci-dessus peuvent être vues comme des analogues de propriétés bien connues de la transformée de Fourier. Cette construction a des applications importantes en informatique, voir notamment [CG2, Chap. XIII, Exercice E.10] pour plus de détails.

5. Complément : réalisation réelle d'une représentation complexe

Référence : [CG2, Chap. XIV, §2].

5.1. **Représentations réalisables sur $\mathbb{R}$.** Soit G un groupe fini, et (V, ρ) une représentation irréductible de G sur le corps $\mathbb{C}$. (Comme d'habitude, on suppose que V est de dimension finie.) On dira que V est *réalisable sur* $\mathbb{R}$ s'il existe une base de V dans laquelle les matrices de tous les endomorphismes $\rho(g)$ $(g \in G)$ sont à coefficients réels. Notre but va être de donner une condition sur le caractère de V qui permet de détecter si cette représentation est réalisable sur $\mathbb{R}$ ou non.

La première chose à remarquer est que si (V, ρ) est réalisable sur $\mathbb{R}$, alors la trace de chaque $\rho(g)$ appartient à $\mathbb{R}$, et donc le caractère associé à V est à valeurs dans $\mathbb{R}$. Par contre, cette condition n'est pas suffisante pour assûrer que la représentation est réalisable sur $\mathbb{R}$, comme on va le voir ci-dessous ; la réponse est plus subtile que cela.

5.2. **Réalisabilité sur $\mathbb{R}$ et formes quadratiques invariantes.** Rappelons que si (V, ρ) est une représentation de G, une forme bilinéaire φ est dite G-invariante si pour tous $v, w \in V$ et $g \in G$ on a

$$\varphi(\rho(g)(v), \rho(g)(w)) = \varphi(v, w).$$

Un premier critère permettant de détecter si une représentation irréductible est réalisable sur $\mathbb{R}$ est donné par la proposition suivante.

Proposition 1. La représentation irréductible (V, ρ) est réalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe une forme bilinéaire symétrique non nulle G-invariante sur V.

Démonstration. Supposons tout d'abord que la représentation est réalisable sur $\mathbb{R}$, et soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base dans laquelle les endomorphismes $\rho(g)$ ont tous une matrice à coefficients dans $\mathbb{R}$. Soit φ_0 la forme bilinéaire symétrique sur V qui vérifie $\varphi_0(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$ pour tous $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, et définissons la forme bilinéaire φ en posant

$$\varphi(v, w) = \sum_{g \in G} \varphi_0(\rho(g)(v), \rho(g)(w)).$$

Il est facile de vérifier que φ est symétrique et G-invariante. Il reste à voir qu'elle est non nulle. Pour cela, on remarque que pour tout vecteur $v \in V \smallsetminus \{0\}$ dont toutes les coordonnées dans la base $(e_1, \cdots, e_n)$ sont réelles, $\varphi_0(v, v)$ appartient à $\mathbb{R}_{>0}$. Ceci implique que $\varphi(e_1, e_1)$ appartient à $\mathbb{R}_{>0}$, et donc que φ est non nulle.

Réciproquement, supposons qu'il existe une forme bilinéaire symétrique φ sur V qui est non nulle et G-invariante. Choisissons un produit scalaire hermitien [7] ψ_0 sur

7. Dans nos conventions, un produit scalaire hermitien est semi-linéaire à gauche, et linéaire à droite.

V, et définissons la forme sesquilinéaire ψ en posant

$$\psi(v,w)=\sum_{g\in G}\psi_0(\rho(g)(v),\rho(g)(w)).$$

Il n'est pas difficile de vérifier que ψ est encore un produit scalaire hermitien, et qu'il est G-invariant au sens où il vérifie

$$\psi(\rho(g)(v),\rho(g)(w))=\psi(v,w)$$

pour tous $v,w\in V$ et $g\in G$.

Puisque ψ est un produit scalaire hermitien, pour tout $v\in V$, il existe un unique vecteur $f(v)\in V$ tel que

$$\varphi(v,w)=\psi(f(v),w)$$

pour tout $w\in V$. Cette construction définit une application de V dans V, dont il est facile de vérifier qu'elle est semi-linéaire et non nulle. Le fait que φ est G-invariante implique que $f\circ\rho(g)=\rho(g)\circ f$ pour tout $g\in G$. En particulier, ceci implique que f^2 est un endomorphisme de représentation de V, et donc (par le lemme de Schur) est égal à $\lambda\cdot\mathrm{id}$ pour un certain $\lambda\in\mathbb{C}$. Par ailleurs, pour tous $v,w\in V$ on a

$$\psi(f^2(v),w)=\varphi(f(v),w)=\varphi(w,f(v))=\psi(f(w),f(v)),$$

et donc

$$\psi(f^2(v),w)=\psi(f(w),f(v))=\overline{\psi(f(v),f(w))}=\overline{\psi(f^2(w),v)}=\psi(v,f^2(w)).$$

En particulier, si $v\in V$ est tel que $f(v)\neq 0$, l'égalité

$$\overline{\lambda}\psi(v,v)=\psi(f^2(v),v)=\psi(f(v),f(v)),$$

où $\psi(v,v)$ et $\psi(f(v),f(v))$ sont des réels strictement positifs, montre que $\lambda\in\mathbb{R}_{>0}$.

Considérons maintenant V comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (de dimension $2\dim_{\mathbb{C}}(V)$). Alors f est un endomorphisme de V pour cette structure, qui vérifie $f^2=\lambda\cdot\mathrm{id}$. Donc f est diagonalisable, de valeurs propres $\pm\sqrt{\lambda}$. Notons V_+ et V_- les sous-espaces propres associés aux valeurs propres $\sqrt{\lambda}$ et $-\sqrt{\lambda}$ respectivement. Puisque f est semi-linéaire, pour tout $v\in V$ on a

$$f(iv)=-if(v),$$

ce qui implique que $v\in V_+$ si et seulement si $iv\in V_-$. En particulier la multiplication par i (vue comme endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel V) induit un isomorphisme de V_+ sur V_-, ce qui implique que $\dim_{\mathbb{R}}(V_+)=\dim_{\mathbb{C}}(V)$ et que $V=V_+\oplus iV_+$. D'autre part, pour tout $g\in G$, la relation $f\circ\rho(g)=\rho(g)\circ f$ implique que $\rho(g)$ (vu comme endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel V) stabilise V_+. Donc si $(e_1,\cdots,e_n)$ est une $\mathbb{R}$-base de V_+, c'est également une $\mathbb{C}$-base de V, et pour tout $g\in G$ la matrice de $\rho(g)$ dans cette base est également la matrice (dans cette même base, mais vue comme $\mathbb{R}$-base de V_+) de $\rho(g)_{|V_+}$, et est donc à coefficients réels. □

Remarque. Au cours de la preuve de la Proposition 1 on a montré que toute forme bilinéaire symétrique non nulle G-invariante sur V est non dégénérée. En fait on peut le voir directement, même sans l'hypothèse que la forme est symétrique. En effet, si φ est une forme bilinéaire sur V, l'apllication $x\mapsto(y\mapsto\varphi(x,y))$ définit une application linéaire $V\to V^*$. Le fait que φ est G-invariante est équivalent au fait que cette application est un morphisme de représentations, où V^* est muni de la structure de représentation duale de (V,ρ), voir [CG2, Chap. XIII, §1.3, (b)]. Si c'est le cas, son noyau est donc une sous-G-représentation de V. Puisqu'il n'est pas égal à V (puisque φ est non nulle) il est donc réduit à $\{0\}$, ce qui se traduit par le fait que φ est non dégénérée.

5.3. **Formes bilinéaires sur une représentation.** Pour aller plus loin, nous devons maintenant étudier les formes bilinéaires sur (l'espace vectoriel sous-jacent à) une représentation. Soit donc (V, ρ) une représentation complexe de G (pas nécessairement irréductible). Notons $\mathrm{Bil}(V)$ l'espace vectoriel des formes $\mathbb{C}$-bilinéaires $V \times V \to \mathbb{C}$. On définit une nouvelle représentation de G, d'espace vectoriel sous-jacent $\mathrm{Bil}(V)$, en posant pour $g \in G$ et $\varphi \in \mathrm{Bil}(V)$,

$$\xi(g)(\varphi)(v,w) = \varphi(\rho(g^{-1})(v), \rho(g^{-1})(w)) \quad \text{pour } v, w \in V.$$

(On vérifiera bien sûr que ceci définit effectivement une représentation.)

On note maintenant $\mathrm{Bil}^{\mathrm{s}}(V)$ le sous-espace vectoriel de $\mathrm{Bil}(V)$ constitué des formes bilinéaires symétriques, et $\mathrm{Bil}^{\mathrm{a}}(V)$ celui constitué des formes bilinéaires antisymétriques.

Lemme 1. On a

$$\mathrm{Bil}(V) = \mathrm{Bil}^{\mathrm{s}}(V) \oplus \mathrm{Bil}^{\mathrm{a}}(V).$$

De plus, $\mathrm{Bil}^{\mathrm{s}}(V)$ et $\mathrm{Bil}^{\mathrm{a}}(V)$ sous des sous-représentations de $\mathrm{Bil}(V)$.

Démonstration. Il est clair qu'une forme bilinéaire qui est à la fois symétrique et antisymétrique est nulle ; on a donc $\mathrm{Bil}^{\mathrm{s}}(V) \cap \mathrm{Bil}^{\mathrm{a}}(V) = \{0\}$. D'autre part si φ est une forme bilinéaire, en définissant φ_1 et φ_2 par

$$\varphi_1(v,w) = \frac{1}{2}\big(\varphi(v,w) + \varphi(w,v)\big), \quad \varphi_2(v,w) = \frac{1}{2}\big(\varphi(v,w) - \varphi(w,v)\big)$$

pour $v, w \in V$, on a $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, et φ_1, resp. φ_2, est symétrique, resp. antisymétrique. Ceci montre que $\mathrm{Bil}(V) = \mathrm{Bil}^{\mathrm{s}}(V) + \mathrm{Bil}^{\mathrm{a}}(V)$, et achève donc la preuve de la première affirmation.

La deuxième affirmation se vérifie par un calcul simple, laissé au lecteur. □

On dispose donc de deux nouvelles représentations de G, d'espaces vectoriels sous-jacents $\mathrm{Bil}^{\mathrm{s}}(V)$ et $\mathrm{Bil}^{\mathrm{a}}(V)$. Notons χ_V le caractère de la représentation V, $\chi_{\mathrm{Bil}^{\mathrm{s}}(V)}$ celui de la représentation sur $\mathrm{Bil}^{\mathrm{s}}(V)$, et $\chi_{\mathrm{Bil}^{\mathrm{a}}(V)}$ celui de la représentation sur $\mathrm{Bil}^{\mathrm{a}}(V)$.

Lemme 2. Pour tout $g \in G$ on a

$$\chi_{\mathrm{Bil}^{\mathrm{s}}(V)} = \frac{\chi_V(g^{-1})^2 + \chi_V(g^{-2})}{2}, \quad \chi_{\mathrm{Bil}^{\mathrm{a}}(V)} = \frac{\chi_V(g^{-1})^2 - \chi_V(g^{-2})}{2}.$$

Démonstration. Fixons $g \in G$. L'endomorphisme $\rho(g)$ est diagonalisable ; notons $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de V constituée de vecteurs propres pour cet endomorphisme, et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres associées. Pour tous $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ on note $\varphi_{i,j}$ l'unique forme blinéaire $V \times V \to \mathbb{C}$ qui vérifie

$$\varphi_{i,j}(e_k, e_l) = \delta_{i,k}\delta_{j,l}$$

pour tous $k, l \in \{1, \cdots, n\}$. Il n'est pas difficile de voir que :
- la famille $(\varphi_{i,j} : i, j \in \{1, \cdots, n\})$ forme une base de $\mathrm{Bil}(V)$;
- la famille $(\frac{1}{2}(\varphi_{i,j} + \varphi_{j,i}) : i, j \in \{1, \cdots, n\},\ i \leq j)$ forme une base de $\mathrm{Bil}^{\mathrm{s}}(V)$;
- la famille $(\frac{1}{2}(\varphi_{i,j} - \varphi_{j,i}) : i, j \in \{1, \cdots, n\},\ i < j)$ forme une base de $\mathrm{Bil}^{\mathrm{a}}(V)$.

Maintenant, pour tous $k, l \in \{1, \cdots, n\}$ on a

$$\begin{aligned}\xi(g)(\varphi_{i,j})(e_k, e_l) = \varphi_{i,j}(\rho(g^{-1})(e_k), \rho(g^{-1})(e_l)) = \varphi_{i,j}((\lambda_k)^{-1}e_k, (\lambda_l)^{-1}e_l) \\ = (\lambda_k\lambda_l)^{-1}\delta_{i,k}\delta_{j,l} = (\lambda_i\lambda_j)^{-1}\delta_{i,k}\delta_{j,l}.\end{aligned}$$

On a donc $\xi(g)(\varphi_{i,j}) = (\lambda_i\lambda_j)^{-1}\varphi_{i,j}$; en d'autres termes, chaque $\varphi_{i,j}$ est un vecteur propre de $\xi(g)$, de valeur propre associée $(\lambda_i\lambda_j)^{-1}$.

En calculant la trace de $\xi(g)_{|\mathrm{Bil}^{\mathrm{s}}(V)}$ dans la base

$$\left(\frac{1}{2}(\varphi_{i,j} + \varphi_{j,i}) : i, j \in \{1, \cdots, n\},\ i \leq j\right),$$

on trouve que

$$\begin{aligned}\chi_{\mathrm{Bil}^{\mathrm{s}}(V)}(g) &= \sum_{i \leq j}(\lambda_i\lambda_j)^{-1} = \sum_i \lambda_i^{-2} + \sum_{i<j}(\lambda_i\lambda_j)^{-1} \\ &= \sum_i \lambda_i^{-2} + \frac{1}{2}\left(\left(\sum_i \lambda_i^{-1}\right)^2 - \sum_i \lambda_i^{-2}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_i \lambda_i^{-1}\right)^2 + \sum_i \lambda_i^{-2}\right) \\ &= \frac{1}{2}(\chi_V(g^{-1})^2 + \chi_V(g^{-2})).\end{aligned}$$

Un calcul très similaire montre que, de même,

$$\chi_{\mathrm{Bil}^{\mathrm{a}}(V)}(g) = \frac{1}{2}(\chi_V(g^{-1})^2 - \chi_V(g^{-2})),$$

ce qui achève la preuve. □

5.4. **Formes bilinéaires invariantes.** Notons b, resp. b_{s}, resp. b_{a}, la dimension de l'espace vectoriel des formes bilinéaires G-invariantes, resp. des formes bilinéaires symétriques G-invariantes, resp. des formes bilinéaires antisymétriques G-invariantes, sur V.

Proposition 2. On a

$$b = b_{\mathrm{s}} + b_{\mathrm{a}}.$$

De plus, si (V, ρ) est irréductible on a

$$b = \begin{cases} 1 & \text{si } \chi_V \text{ est à valeurs dans } \mathbb{R}\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. L'espace vectoriel des formes bilinéaires G-invariantes sur V est le sous-espace vectoriel $\mathrm{Bil}(V)^G \subset \mathrm{Bil}(V)$ constitué des points fixes de G pour son action sur $\mathrm{Bil}(V)$. On a donc

$$b = \dim(\mathrm{Bil}(V)^G).$$

De même on a

$$b_{\mathrm{s}} = \dim(\mathrm{Bil}^{\mathrm{s}}(V)^G), \quad b_{\mathrm{a}} = \dim(\mathrm{Bil}^{\mathrm{a}}(V)^G),$$

où comme ci-dessus l'exposant “G” désigne les vecteurs invariants. D'après le Lemme 1 on a

$$\mathrm{Bil}(V)^G = \mathrm{Bil}^{\mathrm{s}}(V)^G \oplus \mathrm{Bil}^{\mathrm{a}}(V)^G,$$

ce qui implique que $b = b_{\mathrm{s}} + b_{\mathrm{a}}$.

Comme noté déjà dans la Remarque 5.2, l'application $\varphi \mapsto (v \mapsto (w \mapsto \varphi(v,w)))$ induit un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\mathrm{Bil}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V^*),$$

dont il est facile de voir que c'est un morphisme de G-représentations (où l'espace $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V^*)$ est muni de la structure de représentation sur l'espace des applications linéaires entre représentations, voir [CG2, Chap. XIII, §1.3, (c)]). On en déduit un isomorphisme

$$\mathrm{Bil}(V)^G \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V^*)^G = \mathrm{Hom}_G(V, V^*)$$

(où le terme de droite désigne l'espace des morphismes de représentations ; l'identification devrait être évidente, sinon, voir [CG2, Chap. XIII, Proposition 1.4.6]).

Supposons maintenant que V est irréductible. Il est alors facile de voir que V^* est également irréductible, de sorte que le lemme de Schur assure que

$$\dim(\mathrm{Hom}_G(V, V^*)) = \begin{cases} 1 & \text{si } V \text{ et } V^* \text{ sont isomorphes comme } G\text{-représentations ;} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Maintenant, si χ_V est le caractère de V, celui de V^* est l'application $g \mapsto \overline{\chi_V(g)}$ (voir si besoin [CG2, Chap. XIII, Lemme 2.3.1]). Ces deux représentations sont isomorphes si et seulement si elles ont même caractère, c'est-à-dire si et seulement si χ_V est à valeurs réelles, ce qui permet de conclure. □

On peut par ailleurs calculer la dimension de l'espace des formes bilinéaires symétriques ou antisymétriques invariantes en utilisant le caractère calculé au Lemme 2, comme suit.

Proposition 3. Supposons que (V, ρ) est irréductible, et que χ_V est à valeurs réelles. La dimension de l'espace vectoriel des formes bilinéaires symétrique, resp. antisymétriques, G-invariantes sur V est

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \chi_V(g^2)\right), \quad \text{resp. } \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \chi_V(g^2)\right).$$

Démonstration. Comme dans la preuve de la Proposition 2, l'espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques G-invariantes sur V est le sous-espace vectoriel

$$\mathrm{Bil}^{\mathrm{s}}(V)^G \subset \mathrm{Bil}^{\mathrm{s}}(V)$$

constitué des points fixes de G pour son action sur $\mathrm{Bil}^{\mathrm{s}}(V)$. D'autre part on a un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_G(\mathbb{C}, \mathrm{Bil}^{\mathrm{s}}(V)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bil}^{\mathrm{s}}(V)^G$$

déterminé par $f \mapsto f(1)$, où $\mathbb{C}$ désigne la représentation triviale de G. (L'inverse envoie une forme bilinéaire symétrique φ sur l'application linéaire $x \mapsto x \cdot \varphi$.) Maintenant, la théorie de base des caractères (voir par exemple [CG2, Proposition 2.5.4]) nous assure que

$$\dim(\mathrm{Hom}_G(\mathbb{C}, \mathrm{Bil}^{\mathrm{s}}(V))) = \langle \chi_{\mathrm{triv}}, \chi_{\mathrm{Bil}^{\mathrm{s}}(V)} \rangle,$$

où χ_{triv} est le caractère de la représentation triviale et $\langle -, - \rangle$ le produit hermitien standard des caractères. On en déduit que

$$\dim(\mathrm{Bil}^{\mathrm{s}}(V)^G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\mathrm{Bil}^{\mathrm{s}}(V)}(g) = \frac{1}{2|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g^{-1})^2 + \chi_V(g^{-2})$$
$$= \frac{1}{2|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g)^2 + \chi_V(g^2).$$

Puisque V est irréductible et χ_V est à valeurs réelles, on a

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g)^2 = \langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1.$$

Il s'ensuit que

$$\dim(\mathrm{Bil}^{\mathrm{s}}(V)^G) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g^2) \right),$$

comme annoncé.

Un calcul très similaire montre que

$$\dim(\mathrm{Bil}^{\mathrm{a}}(V)^G) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g^2) \right),$$

ce qui achève la preuve. □

5.5. **Indicatrice de Frobenius–Schur.** Considérons encore une fois une représentation irréductible (V, ρ) de G, de caractère associé χ_V. Au vu des Propositions 1 et 2, on voit que 3 situations sont possibles :

- le caractère χ_V n'est pas à valeurs réelles ; alors V n'est pas réalisable sur $\mathbb{R}$, et il n'existe aucune forme bilinéaire G-invariante non nulle sur V ;
- le caractère χ_V est à valeurs réelles et V est réalisable sur $\mathbb{R}$; dans ce cas il existe (à scalaire près) une unique forme bilinéaire G-invariante non nulle sur V, et elle est symétrique ;
- le caractère χ_V est à valeurs réelles et V n'est pas réalisable sur $\mathbb{R}$; dans ce cas il existe (à scalaire près) une unique forme bilinéaire G-invariante non nulle sur V, et elle est antisymétrique.

Pour déterminer plus facilement dans lequel de ces cas on se trouve, on introduit la notion suivante. L'*indicatrice de Frobenius–Schur* de (V, ρ) est le nombre complexe

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{FS}}(V, \rho) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g^2).$$

Théorème 1. La valeur de $\mathrm{Ind}_{\mathrm{FS}}(V, \rho)$ est :

- 0 si χ_V n'est pas à valeurs réelles ;
- 1 si χ_V est à valeurs réelles et V est réalisable sur $\mathbb{R}$;
- -1 si χ_V est à valeurs réelles et V n'est pas réalisable sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Supposons que χ_V n'est pas à valeurs réelles. Alors d'après la Proposition 2 on a $\mathrm{Bil}(V)^G = 0$, et donc a fortioti

$$\mathrm{Bil}^{\mathrm{s}}(V)^G = 0 = \mathrm{Bil}^{\mathrm{a}}(V)^G.$$

Comme dans la preuve de la Proposition 3, on a donc
$$\langle \chi_{\mathrm{triv}}, \chi_{\mathrm{Bil}^{\mathrm{s}}(V)} - \chi_{\mathrm{Bil}^{\mathrm{a}}(V)} \rangle = 0.$$
En calculant cette quantité comme dans la Proposition 3, on obtient l'égalité $\mathrm{Ind}_{\mathrm{FS}}(V, \rho) = 0$, comme désiré.

Supposons maintenant que χ_V est à valeurs réelles. Alors si V est réalisable sur $\mathbb{R}$ on a
$$\dim(\mathrm{Bil}^{\mathrm{s}}(V)^G) = 1, \quad \dim(\mathrm{Bil}^{\mathrm{a}}(V)^G) = 0,$$
et sinon on a
$$\dim(\mathrm{Bil}^{\mathrm{s}}(V)^G) = 0, \quad \dim(\mathrm{Bil}^{\mathrm{a}}(V)^G) = 1.$$
Au vu de la Proposition 3, cela implique que $\mathrm{Ind}_{\mathrm{FS}}(V, \rho)$ vaut 1 dans le premier cas, et -1 dans le deuxième. □

5.6. **Le cas des groupes non abéliens d'ordre** 8**.** Rappelons qu'il existe exactement 2 groupes non abéliens d'ordre 8 à isomorphisme près, à savoir le groupe diédral D_4 et le groupe des quaternions $\mathbb{H}_8$. Rappelons également que ces deux groupes ont la même table de caractères (voir par exemple [CG2, Chap. XIII, Ex. E.21]). Cependant ils peuvent être distingués si on prend en compte les indicatrices de Frobenius–Schur. En effet, si on note (V_1, ρ_1), resp. (V_2, ρ_2), l'unique (à isomorphisme près) représentation irréductible de D_4, resp. $\mathbb{H}_8$, de dimension 2, alors on a
$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{FS}}(V_1, \rho_1) = 1, \quad \mathrm{Ind}_{\mathrm{FS}}(V_2, \rho_2) = -1.$$
Ceci peut bien sûr se vérifier par le calcul, mais on peut également le voir de façon plus sophistiquée comme suit.

On a décrit les représentations irréductibles des groupes diédraux (donc en particulier de D_4) dans la feuille de la leçon 108 ; il est clair d'après cette description que toutes ces représentations sont réalisables sur $\mathbb{R}$, et donc que leurs indicatrices de Frobenius–Schur valent 1. D'autre part, la représentation (V_2, ρ_2) est décrite explicitement dans [CG2, Chap. XIII, Ex. E.13]. On voit sur cette description que chacune des matrices des endomorphismes $\rho_2(g)$ est de déterminant 1 ; la forme volume canonique sur V_2 est donc $\mathbb{H}_8$-invariante. Celle-ci est une forme bilinéaire antisymétrique non nulle ; cette représentation n'est donc pas réalisable sur $\mathbb{R}$.

6. Autres ressources sur cette leçon

`http://math.univ-lyon1.fr/~caldero/Agregexterne/Lecon-107-Rep-caract.pdf`

`https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~harari/enseignement/agreg15/repgroupes.pdf`

Références

[CG1] P. Caldero et J. Germoni, *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries, Tome I*, Calvage & Mounet, 2017.

[CG2] P. Caldero et J. Germoni, *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries, Tome II*, Calvage & Mounet, 2018.