

# ANALYSE – LEÇON 208 : ESPACES VECTORIELS NORMÉS, APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES, EXEMPLES

SIMON RICHE

## 1. COMMENTAIRES DU JURY (RAPPORT 2022)

Cette leçon est particulièrement vaste, et sera pour le candidat une occasion de faire des choix. Il est inutile de commencer systématiquement le plan de cette leçon par de longs rappels sur les normes : comme toutes les autres, cette leçon ne doit pas tomber dans le formalisme, mais bien proposer des résultats significatifs illustrés par des exemples bien choisis, en particulier de normes équivalentes ou non, ou de calculs de normes subordonnées. En ce qui concerne le contenu, le programme offre de nombreuses possibilités : cas de la dimension finie, intervention de la complétude (en particulier le cas hilbertien), étude de la compacité de la boule unité fermée, lien entre continuité d'une forme linéaire (ou plus généralement, d'une application linéaire de rang fini) et fermeture du noyau.

Pour les candidats solides, des prolongements possibles sont : les conséquences du théorème de Baire dans le cadre des espaces de Banach (tout particulièrement le théorème de Banach-Steinhaus et son utilisation pour construire des objets pathologiques), le théorème de Hahn-Banach et ses conséquences, la théorie des algèbres de Banach, la détermination de duals topologiques.

## 2. PLAN

### 2.1. Ce qui doit apparaître. Espaces vectoriels normés :

- définition d'une norme
- distance associée à une norme
- équivalence de normes
- exemples de sous-espaces vectoriels (stricts) denses
- Exemples<sup>1</sup> :  $\mathbb{R}^n$ ,  $\ell^p$ ,  $L^\infty$ ,  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ , etc.

Applications linéaires continues :

- caractérisation via  $\|f(x)\| \leq M\|x\|$
- définition de la norme subordonnée (et énoncé que c'est une norme)
- norme d'une composée
- exemples d'applications linéaires continues et non continues<sup>2</sup>

Cas de la dimension finie :

- les compacts sont les fermés bornés

---

*Date:* Année 2023–2024.

1. Pour ces exemples, on pourra par exemple consulter [Sk, Chap. 7, §2].

2. Voir par exemple [Po, §6.1.2].

- théorème d'équivalence des normes<sup>3</sup>
- tout sous-espace de dimension finie d'un e.v.n. est fermé
- toute application linéaire de source un e.v.n. de dimension finie est continue
- tout e.v.n. de dimension finie est complet
- théorème de Riesz sur la compacité de la boule unité

Espaces de Banach :

- définition
- exemples et contre-exemples
- fonctions bornées (ou applications linéaires) à valeurs dans un espace de Banach<sup>4</sup>
- séries dans un espace de Banach, exemple de l'exponentielle de matrices, et/ou de l'inversibilité de  $1 - x$  si  $\|x\| < 1$  dans une algèbre de Banach

Espaces de Hilbert :

- définition
- inégalité de Cauchy–Schwarz
- Théorème de représentation de Riesz

## 2.2. Ce qui peut apparaître. Espaces de Banach :

- Théorème de Banach–Steinhaus<sup>5</sup>
- Théorème de l'application ouverte<sup>6</sup>
- Théorème de l'isomorphisme de Banach<sup>7</sup>
- Théorème du graphe fermé<sup>8</sup>

Espaces de Hilbert<sup>9</sup> :

- projection sur un convexe fermé
- cas particulier : projection sur un sous-espace vectoriel fermé
- lien avec le théorème de représentabilité de Riesz
- bases hilbertiennes (exemples :  $\ell^2$ ,  $L^2_{2\pi}$ , polynômes orthogonaux, par exemple de Legendre)

Théorème d'Ascoli<sup>10</sup>

Exemples d'espaces vectoriels normés<sup>11</sup> :

- espaces de matrices
- espaces de polynômes

Espaces  $L^p$  :

- définition
- théorème de Riesz–Fischer
- le cas de  $L^p_{2\pi}(\mathbb{R})$  : théorème de Fejér.<sup>12</sup>

3. On pourra illustrer ce théorème par des preuves “à la main” que certaines normes classiques sur des espaces vectoriels de dimension finie sont équivalentes : voir par exemple [QZ, Chap. VII, §IV].

4. Voir par exemple [Go, Chap. 1, §5.2].

5. Voir par exemple [Go, Annexe A, Ex. 7-8] ou [Sk, Chap. 7, §6].

6. Voir par exemple [Go, Annexe A, Ex. 6] ou [Sk, Chap. 7, §6].

7. Voir par exemple [Go, Annexe A, Ex. 6] ou [Sk, Chap. 7, §6].

8. Voir [Sk, Chap. 7, §6].

9. On trouvera d'autres propriétés des espaces de Hilbert dans [Go, Annexe B].

10. Voir la feuille d'exercices de topologie.

11. Pour ces deux exemples, on pourra consulter la feuille d'exercices de topologie.

12. Voir la feuille sur les séries de Fourier.

Calcul différentiel :

- définition de la différentielle d'une application
- exemples de calcul de différentielles<sup>13</sup>

Dual topologique :

- définition
- théorème de Hahn–Banach<sup>14</sup>

### 3. QUELQUES QUESTIONS BÊTES AUXQUELLES IL FAUT ABSOLUMENT SAVOIR RÉPONDRE RAPIDEMENT

- (1) Quelle est l'adhérence de la boule ouverte de centre  $a$  et de rayon  $r$ ? Quel est l'intérieur de la boule fermée de centre  $a$  et de rayon  $r$ ?<sup>15</sup>
- (2) Comment démontre-t-on l'inégalité de Cauchy–Schwarz?
- (3) Quels sont les espaces vectoriels normés compacts?
- (4) Montrer que deux normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  sur un espace vectoriel  $E$  sont équivalentes si et seulement si les applications  $\text{id} : (E, \|\cdot\|_1) \rightarrow (E, \|\cdot\|_2)$  et  $\text{id} : (E, \|\cdot\|_2) \rightarrow (E, \|\cdot\|_1)$  sont continues.
- (5) Montrer que si  $E$  est un espace vectoriel et  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  sont deux normes équivalentes sur  $E$ , alors  $(E, \|\cdot\|_1)$  est complet si et seulement si  $(E, \|\cdot\|_2)$  est complet.

### 4. EXERCICES

**Exercice 1.** Dans un e.v.n., à quelle condition a-t-on  $B_f(a, r) \subset B_f(a', r')$ ?

**Exercice 2.** (1) Montrer que si  $(E, \|\cdot\|)$  est une algèbre de Banach (c'est-à-dire un espace de Banach, muni d'un produit  $E \times E \rightarrow E$  bilinéaire associatif, et tel que  $\|x \cdot y\| \leq \|x\|\|y\|$  pour tous  $x, y \in E$ ), alors le sous-ensemble  $E^\times \subset E$  des éléments inversibles est ouvert.

- (2) En déduire qu'il n'existe pas de norme sur  $\mathbb{R}[X]$  qui en fait une algèbre de Banach.

**Exercice 3.** Soit  $E$  un espace vectoriel (sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) et soient  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  deux normes sur  $E$ . On suppose que  $(E, \|\cdot\|_1)$  et  $(E, \|\cdot\|_2)$  sont des espaces de Banach, et que  $\|\cdot\|_1$  est plus fine que  $\|\cdot\|_2$  (c'est-à-dire qu'il existe  $C \in \mathbb{R}_{>0}$  tel que  $\|x\|_2 \leq C \cdot \|x\|_1$  pour tout  $x \in E$ ). Montrer que  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  sont équivalentes. (*Indication* : on pourra penser au théorème de l'isomorphisme de Banach.)

**Exercice 4.** Sur l'espace  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ , montrer que les normes  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  ne sont pas équivalentes.

Référence : [Po, §6.3, Exemples].

**Exercice 5.** Soient  $E, F$  des espaces vectoriels normés sur  $\mathbb{R}$ . Montrer qu'une application  $f : E \rightarrow F$  continue est linéaire si et seulement si  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  pour tous  $x, y \in E$ .

**Exercice 6.** (1) Montrer que pour tout  $p \geq 1$ , le sous-espace des suites presque nulles est dense dans  $\ell^p$ .

13. Voir par exemple [Go, Chap. 5, §1.4, Ex. 3, 5 et 6].

14. Voir par exemple [Po, §6.2] ou [Sk, Chap. 7, §5].

15. En cas de souci, on pourra consulter [Sk, Chap. 7, §1, Proposition 3].

- (2) Montrer que l'adhérence dans  $\ell^\infty$  du sous-espace des suites presque nulles est le sous-espace des suites qui tendent vers 0.

Référence : [Sk, Chap. 7, §2, Proposition 4].

**Exercice 7** (Théorème de Cesàro). Soit  $E$  un espace vectoriel normé, et soit  $(x_n)_{n \geq 1}$  une suite d'éléments de  $E$ . Montrer que si  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$ , alors

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$$

**Exercice 8.** Si  $E$  est un espace vectoriel normé, montrer que  $E$  est homéomorphe à chacune de ses boules ouvertes (non vides). (*Indication* : on pourra commencer par montrer que  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  est homéomorphe à  $[0, 1[.$ )

**Exercice 9** (Question posée à l'oral 2021). On considère l'application

$$f : \begin{cases} \ell^1 & \rightarrow & \ell^1 \\ (a_n)_{n \geq 0} & \mapsto & ((1 - \frac{1}{n+1})a_n)_{n \geq 0} \end{cases}$$

Montrer que cette application est bien définie, linéaire et continue, puis calculer sa norme. Existe-t-il un vecteur  $u \in \ell^1$  tel que

$$\|f(u)\| = \|f\| \cdot \|u\|?$$

**Exercice 10.** (1) Soit  $E$  un espace vectoriel normé. Montrer qu'un hyperplan de  $E$  est soit fermé, soit dense.

- (2) Donner un exemple d'hyperplan dense dans un espace vectoriel normé. (*Indication* : on pourra considérer par exemple, dans l'espace vectoriel des suites presque nulles de réels muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ , le sous-espace des suites de somme nulle.)

**Exercice 11.** Soit  $E$  un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{R}$ , et soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une forme linéaire

- (1) Montrer que  $f$  est continue si et seulement si  $\ker(f)$  est fermé. (*Indication* : si  $f$  n'est pas continue, on pourra considérer une suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  de vecteurs de norme 1 telle que  $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ , puis considérer la suite  $(x_N - \frac{f(x_N)}{f(x_n)}x_n)_{n \geq N}$  où  $N$  est un entier tel que  $f(x_n) \neq 0$  pour  $n \geq N$ .)
- (2) Est-il vrai que si  $f : E \rightarrow F$  est une application linéaire continue entre espaces vectoriels normés,  $\text{im}(f)$  est fermé ?
- (3) Montrer que si  $H \subset E$  est un hyperplan, alors  $E \setminus H$  est connexe par arcs si et seulement si  $H$  n'est pas fermé. (*Indication* : on pourra utiliser (1) et l'exercice 10.)

Référence : pour (1), on pourra voir [Go, Chap. 1, §5.5, Ex. 7] ou [Po, Proposition 6.1.4]. Pour (3), voir [FGN, Ex. 2.28].

**Exercice 12.** Soit  $E$  un espace de Banach, et notons  $\mathcal{L}(E)$  l'espace vectoriel normé des endomorphismes linéaires de  $E$ . On rappelle que si  $u \in \mathcal{L}(E)$  est bijectif, alors  $u^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ . (C'est le contenu du théorème de l'isomorphisme de Banach.)

- (1) Montrer que  $\{u \in \mathcal{L}(E) \mid u \text{ est bijectif}\}$  est un ouvert de  $\mathcal{L}(E)$ . (*Indication* : penser aux séries dans un espace de Banach.)

- (2) Si  $u \in \mathcal{L}(E)$ , on appelle *spectre* de  $u$  l'ensemble des  $\lambda \in \mathbb{R}$  tels que  $u - \lambda \text{id}$  n'est pas bijectif. Montrer que ce sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  est compact. Commenter le cas particulier où  $E$  est de dimension finie.

Référence : [Go, Chap. 1, §5.2, Proposition 2] et [Go, Chap. 1, §5.5, Ex. 4].

**Exercice 13.** Soient  $a < b \in \mathbb{R}$ , et fixons des points  $x_0, \dots, x_n$ . On considère l'application linéaire

$$L : \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$$

envoyant une application  $f$  sur son polynôme d'interpolation de Lagrange en les points  $x_0, \dots, x_n$ . On munit ces deux espaces de la norme du maximum sur  $[a, b]$ . Montrer que  $L$  est continue et que

$$\|L\| = \sup_{x \in [a, b]} \left( \sum_{i=0}^n \left| \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right| \right).$$

**Exercice 14.** (1) Soit  $E$  un espace de Banach, et soient  $(E_n)_{n \geq 0}$  des sous-espaces vectoriels fermés. Montrer que si  $E = \bigcup_{n \geq 0} E_n$ , alors il existe  $p \geq 0$  tel que  $E = E_p$ . (*Indication* : on pourra penser au théorème de Baire.)

- (2) Existe-t-il une norme sur l'espace des suites de réels presque nulles qui en fait un espace de Banach ?

Référence : [Go, Annexe A, Ex. 1].

**Exercice 15** (Dual topologique). Si  $E$  est un espace vectoriel normé, on note  $E'$  son dual topologique.

- (1) Montrer qu'il existe une injection isométrique naturelle  $E \rightarrow (E')'$ . (*Indication* : on pensera au théorème d'Hahn–Banach.)
- (2) Montrer qu'il existe une isométrie bijective  $\ell^\infty \xrightarrow{\sim} (\ell^1)'$ .

Référence : Pour (1), voir [Sk, Chap. 7, §5, Corollaire 2]. Pour (2), on pourra voir [Go, Chap. 1, §5.5, Ex. 5]. Pour plus d'informations sur la dualité dans les espaces  $\ell^p$ , voir [Sk, Chap. 7, §5].

**Exercice 16.** (1) Calculer la norme (subordonnée, par rapport à la norme euclidienne standard sur  $\mathbb{R}^2$ ) de la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

- (2) A-t-on toujours  $\|A \cdot B\| = \|A\| \cdot \|B\|$  si  $A$  et  $B$  sont des matrices de même taille ?

**Exercice 17** (Applications de Banach–Steinhaus). (1) Considérons des espaces vectoriels normés  $E, F$ , avec  $E$  complet. Montrer que si  $(f_n)_{n \geq 0}$  est une suite d'applications linéaires continues convergeant simplement vers une fonction  $f$ , alors  $f$  est linéaire et continue.

- (2) On note  $\mathcal{C}_{2\pi}$  l'espace vectoriel normé des fonctions continues et  $2\pi$ -périodiques de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  (pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ ). Pour  $p \in \mathbb{Z}$  et  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$  on pose

$$c_p(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ipt} dt.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  on considère l'application linéaire  $\ell_n : \mathcal{C}_{2\pi} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par

$$\ell_n(f) = \sum_{-n \leq p \leq n} c_p(f).$$

- (a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ , l'application linéaire  $\ell_n$  est continue, de norme

$$\|\ell_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)} \right| dt.$$

- (b) Montrer que  $\|\ell_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ . (*Indication* : on pourra minorer le dénominateur dans la fraction précédente.)
- (c) En déduire qu'il existe une fonction  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$  dont la valeur de la série de Fourier en 0 ne converge pas.
- (3) Pour  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  et  $n \geq 1$ , on pose<sup>16</sup>

$$u_n(f) = n \int_0^1 f(t) dt - \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

- (a) Montrer que si  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  est muni de la norme  $\|\cdot\|_{\infty}$  et  $\mathbb{R}$  de la valeur absolue, alors  $u_n$  est une forme linéaire continue, de norme majorée par  $2n$  et minorée par  $\frac{n}{2}$ . (*Indication* : pour la minoration, on pourra considérer une fonction linéaire par morceaux, oscillant entre 0 et 1 sur chaque intervalle  $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ .)
- (b) Montrer<sup>17</sup> qu'il existe  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  telle que la suite  $(u_n(f))_{n \geq 1}$  n'est pas bornée.
- (4) Soient  $E, F, G$  des espaces vectoriels normés, avec  $E$  supposé complet. Soit  $B : E \times F \rightarrow G$  une application bilinéaire telle que pour tout  $x \in E$  l'application linéaire  $B(x, -) : F \rightarrow G$  est continue, et telle que pour tout  $y \in F$  l'application linéaire  $B(-, y) : E \rightarrow G$  est continue. Montrer que  $B$  est continue.
- (5) Soit  $E$  un espace vectoriel normé (sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ), et soit  $D$  une partie de  $E$ . On suppose que pour tout  $f \in E'$  l'ensemble  $f(D) \subset \mathbb{K}$  est borné. Montrer que  $D$  est bornée (dans  $E$ ).

Référence : Pour (1)–(2)–(4), voir [Go, Annexe A, Ex. 7-8]. Pour (5), voir [Sk, Chap. 7, §6, p. 221].

**Exercice 18.** Soit  $E$  un espace vectoriel normé. Pour  $A, B \subset E$ , on pose  $A + B = \{a + b : (a, b) \in A \times B\}$ .

- (1) Montrer que si  $A$  est ouvert, alors  $A + B$  est ouvert.
- (2) Montrer que si  $A$  est compact et  $B$  fermé, alors  $A + B$  est fermé.
- (3) Que peut-on dire si  $A$  et  $B$  sont seulement supposés fermés ?

Référence : [Go, Chap. 1, §5.5, Ex. 1].

**Exercice 19** (Adjoint d'un endomorphisme continu dans un espace de Hilbert). Soit  $H$  un espace de Hilbert, et soit  $u$  un endomorphisme continu de  $H$ .

- (1) Montrer qu'il existe un unique endomorphisme continu  $u^*$  de  $H$  tel que pour tous  $x, y \in H$  on a

$$\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle.$$

16. En d'autres termes,  $\frac{u_n(f)}{n}$  est l'erreur commise lors de l'approximation de  $\int_0^1 f(t) dt$  par la somme de Riemann associée à la subdivision de l'intervalle  $[0, 1]$  en  $n$  sous-intervalles de même longueur. Rappelons que cette quantité tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

17. En d'autres termes, pour cette fonction  $f$ , l'erreur considérée ci-dessus n'est pas un  $O(\frac{1}{n})$ .

(2) Montrer que  $\|u^*\| = \|u\|$ .

Référence : [Go, Annexe B, §1, (3b)].

**Exercice 20.** On rappelle qu'une *base hilbertienne* d'un espace de Hilbert  $H$  est une famille orthonormée  $(e_i : i \in I)$  telle que  $\text{Vect}(e_i : i \in I)$  est dense dans  $H$ .

On considère l'espace  $\mathcal{L}_{\text{per}}^2(\mathbb{R})$  des fonctions mesurables de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  telles que  $f(x) = f(x+1)$  pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$  et

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty.$$

On note  $L_{\text{per}}^2(\mathbb{R})$  le quotient de  $\mathcal{L}_{\text{per}}^2(\mathbb{R})$  par le sous-espace des fonctions nulles presque partout. Il est bien connu que  $L_{\text{per}}^2(\mathbb{R})$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire hermitien

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx.$$

On fait agir le groupe  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  sur l'espace vectoriel  $L_{\text{per}}^2(\mathbb{R})$  en posant, pour  $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ,

$$\varrho(x)(f)(y) = f(x+y)$$

pour tout  $f \in L_{\text{per}}^2(\mathbb{R})$ . Montrer que l'espace  $L_{\text{per}}^2(\mathbb{R})$  possède une base hilbertienne  $(e_n : n \in \mathbb{Z})$  telle que chaque  $e_n$  est vecteur propre de  $\varrho(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

Tout ceci est simplement une reformulation de la théorie des séries de Fourier dans  $L^2$  : voir la feuille sur les séries de Fourier ou [QZ, Chap. IV, Théorème III.3(iv)].

**Exercice 21** (Norme matricielle et rayon spectral). On fixe une norme sur  $\mathbb{C}^n$ , et on note  $\|\cdot\|$  la norme subordonnée sur  $M_n(\mathbb{C})$ . Pour toute matrice  $A \in M_n(\mathbb{C})$  on note  $\rho(A)$  son rayon spectral, c'est-à-dire le module maximal d'une valeur propre de  $A$ .

- (1) Montrer que  $\rho(A) \leq \|A\|$ .
- (2) En déduire que pour tout  $k \geq 1$  on a  $\rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k}$ .
- (3) Montrer que si  $\rho(A) < 1$ , alors  $A^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ . (*Indication* : on pourra utiliser la décomposition de Dunford.)
- (4) On fixe  $\varepsilon > 0$ , et on pose  $A_\varepsilon = \frac{1}{\rho(A) + \varepsilon} A$ . Montrer que pour  $k$  assez grand on a  $\|A_\varepsilon^k\| \leq 1$ , et en déduire qu'alors  $\|A^k\|^{1/k} \leq \rho(A) + \varepsilon$ .
- (5) En déduire que  $\|A^k\|^{1/k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \rho(A)$ .
- (6) Démontrer le *théorème de Householder* : si  $A \in M_n(\mathbb{C})$  et  $\varepsilon > 0$ , il existe une norme sur  $\mathbb{C}^n$  telle que, pour la norme subordonnée  $\|\cdot\|$ , on a  $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$ . (*Indication* : on pourra commencer par traiter le cas où  $A$  est triangulaire supérieure.)
- (7) En déduire que  $\rho(A)$  est l'infimum de  $\|A\|$  sur l'ensemble de toutes les normes subordonnées sur  $M_n(\mathbb{C})$ .

Ces résultats sont à la base de nombreuses méthodes de résolution effective ou approchée de systèmes linéaires. On pourra trouver des démonstrations dans [Ci, Théorème 1.5.2] et [Se, Théorème 4.2.1].

**Exercice 22.** Le but de cet exercice est de montrer que tout espace métrique est isométrique à un fermé d'un espace vectoriel normé. On fixe donc un espace métrique  $(X, d)$ , et un point  $\omega \in X$ . On note  $\mathcal{F}$  l'ensemble des parties finies non vides de  $X$ , et on définit  $\mathcal{B}(\mathcal{F})$  comme le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions bornées de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathbb{R}$ . On munit  $\mathcal{B}(\mathcal{F})$  de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{A \in \mathcal{F}} |f(A)|.$$

Pour  $x \in X$ , on considère l'application

$$f_x : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$$

définie par

$$f_x(A) = d(x, A) - d(\omega, A).$$

- (1) Montrer que  $f_x$  appartient à  $\mathcal{B}(\mathcal{F})$  pour tout  $x \in X$ . (*Indication* : on pourra montrer plus précisément que  $|f_x(A)| \leq d(x, \omega)$  pour tout  $A$ .)
- (2) Montrer que l'application  $x \mapsto f_x$  est une isométrie de  $X$  vers  $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ .
- (3) On note  $E$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{B}(\mathcal{F})$  engendré par les applications  $(f_x : x \in X)$ . Montrer que l'image de l'application  $x \mapsto f_x$  est fermée dans  $E$ .

Référence : [GT, p. 38-39].

**Exercice 23** (Sujet AP17, Partie I, Question 2). Soit  $A$  une matrice symétrique dans  $M_d(\mathbb{R})$ .

- (1) En utilisant une matrice orthogonale adaptée, montrer que

$$\|A\|_2 = \sup_{\lambda \in \mathcal{V}} |\lambda|$$

où  $\mathcal{V}$  est l'ensemble des valeurs propres de  $A$ .

- (2) En déduire que

$$|\text{Tr}(A)| \leq d \cdot \|A\|_2.$$

**Exercice 24.** Soient  $E, F$  des espaces de Banach, et soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire.

- (1) Montrer que le graphe  $\text{Gr}(f) = \{(x, f(x)) : x \in E\}$  est l'ensemble des paires  $(x, y) \in E \times F$  telles que pour toute forme linéaire continue  $\ell : F \rightarrow \mathbb{R}$  on a  $\ell(y) = \ell \circ f(x)$ . (*Indication* : On pourra utiliser le théorème de Hahn–Banach.)
- (2) En déduire que si  $\ell \circ f$  est continue pour toute forme linéaire continue  $\ell : F \rightarrow \mathbb{R}$ , alors  $f$  est continue. (*Indication* : On pourra utiliser le théorème du graphe fermé.)

Référence : [Sk, Chap. 7, §6, p. 220].

**Exercice 25.** Soit  $E$  un espace de Banach, et soient  $F, F' \subset E$  des sous-espaces vectoriels fermés tels que  $E = F \oplus F'$ . Montrer que les applications de projection  $E \rightarrow F$  et  $E \rightarrow F'$  sont continues. (*Indication* : on pourra utiliser le théorème de l'isomorphisme de Banach.)

Référence : [Br, p. 22].



**Exercice 26.** Soient  $H_1$  et  $H_2$  des espaces de Hilbert, et  $u : H_1 \rightarrow H_2$  une application linéaire qui admet un dual, c'est-à-dire telle qu'il existe une application linéaire  $v : H_2 \rightarrow H_1$  telle que

$$\langle u(x), y \rangle_2 = \langle x, v(y) \rangle_1$$

pour tous  $x \in H_1$  et  $y \in H_2$ . Montrer que  $u$  est continue. (*Indication* : on pourra utiliser le théorème du graphe fermé et, pour vérifier la propriété voulue, l'inégalité de Cauchy-Schwarz.)

## 5. COMPLÉMENTS : THÉORÈMES DE L'APPLICATION OUVERTE, DE L'ISOMORPHISME DE BANACH, ET DU GRAPHE FERMÉ

**5.1. Théorème de Baire.** Commençons par rappeler l'énoncé du théorème de Baire.

**Théorème 1** (Théorème de Baire). Soit  $X$  un espace métrique complet. Si  $(U_n)_{n \geq 0}$  est une famille de parties de  $X$  telles que chaque  $U_n$  est ouvert et dense, alors  $\bigcap_{n \geq 0} U_n$  est dense dans  $X$ . De façon équivalente, si  $(F_n)$  est une famille de parties de  $X$  telles que chaque  $F_n$  est fermé et d'intérieur vide, alors  $\bigcup_{n \geq 0} F_n$  est d'intérieur vide.

Pour une preuve, on pourra consulter [Sk, Chap. 5, §2, p. 115] ou [Go, Annexe A].

Rappelons également qu'une partie  $C$  d'un espace vectoriel  $E$  est dite *convexe* si pour tous  $x, y \in C$  et  $t \in [0, 1]$  on a  $tx + (1 - t)y \in C$ . La preuve de l'énoncé suivant est un exercice classique et facile, laissé au lecteur. (En cas de souci, on pourra consulter [Go, Chap. 1, §5.5, Ex. 6].)

**Lemme 1.** Si  $E$  est un espace vectoriel normé et  $C \subset E$  une partie convexe, alors  $\overline{C}$  et  $\overset{\circ}{C}$  sont convexes.

**5.2. Théorème de l'application ouverte.** Rappelons que si  $X, Y$  sont des espaces métriques, une application  $f : X \rightarrow Y$  est dite *ouverte* si pour tout ouvert  $U \subset X$ , la partie  $f(U) \subset Y$  est ouverte.

**Théorème 2** (Théorème de l'application ouverte). Soient  $E$  et  $F$  des espaces de Banach. Toute application  $f : E \rightarrow F$  linéaire, continue et surjective est ouverte.

*Démonstration.* *Étape 1* : si  $B$  est la boule unité ouverte de  $E$ , on a  $0 \in \overset{\circ}{f(B)}$ .

Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et toute partie  $A$  de  $E$  ou  $F$  on note  $\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}$ . Puisque

$$E = \bigcup_{n > 0} nB,$$

par surjectivité et linéarité on a

$$F = \bigcup_{n > 0} nf(B),$$

et donc

$$F = \bigcup_{n > 0} n\overline{f(B)}.$$

Le théorème de Baire (appliqué à  $F$ ) implique alors qu'il existe  $n > 0$  tel que  $n\overline{f(B)}$  est d'intérieur non vide. Il est clair que ceci implique que  $\overset{\circ}{f(B)} \neq \emptyset$ . Puisque  $B$  est stable par  $-\text{id}_E$ ,  $f(B)$  est stable par  $-\text{id}_F$ , et il en est donc de même pour  $\overline{f(B)}$ ,

puis pour  $\overline{f(\overset{\circ}{B})}$ . De même, puisque  $B$  est convexe, il en est de même pour  $f(B)$ , puis pour  $\overline{f(B)}$  par le Lemme 1. Si  $x \in \overline{f(\overset{\circ}{B})}$ , on a donc

$$0 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-x) \in \overline{f(\overset{\circ}{B})},$$

ce qui achève la première étape.

*Étape 2 : il existe  $k \in \mathbb{R}_{>0}$  tel que pour tout  $y \in F$ , il existe  $x \in E$  tel que  $y = f(x)$  et  $\|x\| \leq k\|y\|$ .*

D'après l'étape 1, il existe un réel  $r > 0$  tel que  $B_o(0, r) \subset \overline{f(B)}$ . On va montrer plus précisément que le réel  $k = 2/r$  convient. Pour cela, on fixe un élément  $y \in F$ , et on construit par récurrence des suites  $(x_n)_{n \geq 0}$  et  $(y_n)_{n \geq 0}$  d'éléments de  $E$  et  $F$  respectivement qui vérifient

$$x_0 = 0, \quad y_0 = y$$

et les conditions suivantes pour tout  $n \geq 0$  :

$$(1) \quad y_{n+1} = y_n - f(x_{n+1}), \quad \|x_{n+1}\| \leq \frac{4}{3r}\|y_n\|, \quad \|y_{n+1}\| \leq \frac{1}{3}\|y_n\|.$$

Pour cela, si  $y_n = 0$  on pose  $x_{n+1} = 0$  et  $y_{n+1} = 0$ , de sorte que les conditions (1) sont bien satisfaites au rang  $n$ . Sinon, on remarque que  $\frac{3r}{4\|y_n\|}y_n \in B_o(0, r)$  ; il existe donc  $z \in B$  tel que

$$(2) \quad \left\| f(z) - \frac{3r}{4\|y_n\|}y_n \right\| \leq \frac{r}{4}.$$

Si on pose  $x_{n+1} = \frac{4\|y_n\|}{3r}z$ , la deuxième condition dans (1) est satisfaite. On pose ensuite  $y_{n+1} = y_n - f(x_{n+1})$  pour que la première condition soit satisfaite. La condition (2) assure alors que la troisième condition dans (1) est satisfaite.

En utilisant la première condition de (1), on vérifie facilement par récurrence sur  $n$  que

$$(3) \quad y_n = y - f\left(\sum_{k=0}^n x_k\right) \text{ pour tout } n \geq 0,$$

et la troisième condition implique que

$$\|y_n\| \leq \frac{1}{3^n}\|y\| \text{ pour tout } n \geq 0,$$

de sorte que  $y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ . En reportant cette inégalité dans la deuxième condition de (1) on obtient que

$$\|x_{n+1}\| \leq \frac{4}{3^{n+1}r}\|y\| \text{ pour tout } n \geq 0,$$

de sorte que

$$\sum_{n \geq 0} \|x_n\| \leq k\|y\|.$$

Puisque  $E$  est complet, ceci implique que la série  $\sum_{n \geq 0} x_n$  converge, et que si on note  $x$  sa limite on a  $\|x\| \leq k\|y\|$ . En passant à la limite dans (3), par continuité de  $f$  on obtient finalement que  $y = f(x)$ , puisque  $y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

*Étape 3 : Conclusion.*

Soit  $U$  une partie ouverte de  $E$ , et soit  $y$  dans  $f(U)$ . On alors  $y = f(x)$  pour un  $x \in U$ . Fixons également un réel  $r' > 0$  tel que  $B_o(x, r') \subset U$ . Si  $z \in B_o(y, \frac{r'}{k})$ , la propriété démontrée dans l'étape 2 assure qu'il existe  $x' \in E$  tel que  $f(x') = z - y$  et  $\|x'\| < r'$ . On a alors  $z = f(x' + x)$ , et  $x' + x \in B_o(x, r') \subset U$ , de sorte que  $z \in f(U)$ . Ceci montre que  $f(U)$  est ouvert, et achève donc la preuve.  $\square$

**Remarque 1.** Il n'est pas difficile de vérifier que si  $E$  et  $F$  sont des espaces vectoriels normés quelconques, toute application linéaire  $f : E \rightarrow F$  qui est ouverte est surjective.

En plus des théorèmes ci-dessous, le Théorème 2 a par exemple la conséquence suivante. Notons  $\ell_0(\mathbb{Z})$  l'ensemble des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  de nombres complexes qui tendent vers 0 en  $\pm\infty$ . Le Lemme de Riemann-Lebesgue assure que pour toute fonction  $f \in L^1_{2\pi}$  la suite  $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$  appartient à  $\ell_0(\mathbb{Z})$ .

**Proposition 1.** Il existe des suites  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  dans  $\ell_0(\mathbb{Z})$  qui ne sont les coefficients de Fourier d'aucune fonction de  $L^1_{2\pi}$ .

*Démonstration.* Considérons l'application  $T$  de  $L^1_{2\pi}$  dans  $\ell_0(\mathbb{Z})$  donnée par  $f \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ . Cette application est linéaire. Il découle également de la théorie des séries de Fourier<sup>18</sup> qu'elle est injective. De plus, si on munit  $\ell_0(\mathbb{Z})$  de la norme donnée par

$$\|(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|$$

(qui est bien définie puisque chaque suite dans  $\ell_0(\mathbb{Z})$  est bornée), alors il est facile de voir que

$$\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_1$$

(où on a défini la norme  $\|f\|_1$  comme dans la feuille sur les séries de Fourier). L'application linéaire  $T$  est donc continue.

Il est bien connu que  $L^1_{2\pi}$  est un espace de Banach, et  $\ell_0(\mathbb{Z})$  est un sous-espace fermé de l'espace de Banach  $\ell^\infty(\mathbb{Z})$  (voir par exemple l'Exercice 6), et est donc également un espace de Banach. Si on suppose par l'absurde que  $T$  est surjective, alors elle est ouverte par le Théorème 2, ce qui implique que l'image de la boule unité contient un voisinage de 0, et donc la boule ouverte de centre 0 et de rayon  $\varepsilon$  pour un certain  $\varepsilon > 0$ . On en déduit qu'il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $f \in L^1_{2\pi}$  on a

$$(4) \quad \|f\|_1 \leq C \cdot \sup_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|.$$

En effet, si  $f \in L^1_{2\pi}$ , on a

$$\left\| \frac{\varepsilon}{2\|T(f)\|_\infty} T(f) \right\|_\infty < \varepsilon,$$

donc il existe  $g \in L^1_{2\pi}$  telle que  $\|g\|_1 < 1$  et

$$T(g) = \frac{\varepsilon}{2\|T(f)\|_\infty} T(f).$$

Par injectivité de  $T$  on a alors

$$g = \frac{\varepsilon}{2\|T(f)\|_\infty} \cdot f,$$

<sup>18</sup>. Ceci est une application classique du théorème de Fejèr; voir la feuille sur les séries de Fourier.

puis en prenant les normes on en déduit (4) avec  $C = \frac{2}{\varepsilon}$ .

En particulier, pour

$$f = \sum_{k=-m}^m e_k$$

( $m$ -ième noyau de Dirichlet) on a  $|c_n(f)| \leq 1$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . D'autre part on a

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin((m+1/2)x)}{\sin(x/2)} \right| dx,$$

qui tend vers  $+\infty$  quand  $m \rightarrow +\infty$  (voir l'Exercice 17(2)). On a donc obtenu une contradiction, ce qui prouve que  $f$  n'est pas surjective.  $\square$

**5.3. Théorème de l'isomorphisme de Banach.** On obtient facilement l'énoncé suivant comme corollaire du Théorème 2.

**Théorème 3** (Théorème de l'isomorphisme de Banach). Soient  $E, F$  des espaces de Banach. Si  $f : E \rightarrow F$  est une application linéaire continue et bijective de  $E$  dans  $F$ , l'application réciproque  $f^{-1} : F \rightarrow E$  est continue.

*Démonstration.* Puisque  $f$  est ouverte, pour tout ouvert  $U \subset E$  l'ensemble

$$(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$$

est ouvert dans  $F$ ; l'image inverse de tout ouvert par  $f^{-1}$  est donc ouverte, ce qui montre que cette application est continue, comme souhaité.  $\square$

**Remarque 2.** L'hypothèse que les espaces  $E$  et  $F$  sont de Banach est réellement nécessaire pour que le Théorème 3 soit vrai. Par exemple, considérons le cas

$$E = F = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$$

(espace des applications continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ ), avec la norme  $\|\cdot\|_{\infty}$  pour  $E$  et la norme  $\|\cdot\|_1$  pour  $F$ . (Il est bien connu que  $E$  est complet, mais que  $F$  ne l'est pas.) L'application  $\text{id} : E \rightarrow F$  est bien sûr linéaire et bijective, et elle est continue puisque

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_{\infty}$$

pour toute  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ . Mais la bijection réciproque  $\text{id} : F \rightarrow E$  n'est pas continue. En effet, si on définit pour  $n \geq 1$  la fonction  $f_n$  comme étant la fonction affine par morceaux qui vaut 1 sur  $[0, \frac{1}{n+1}]$ , 0 sur  $[\frac{2}{n+1}, 1]$ , et donnée par

$$f_n(x) = 2 - (n+1)x$$

sur  $[\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}]$ , alors  $f_n$  est continue, et

$$\|f_n\|_1 = \frac{3}{2(n+1)},$$

de sorte que la suite  $(f_n)$  vers vers 0 dans l'espace vectoriel normé  $F$ . Pourtant, cette suite n'a pas de limite dans  $E$ , puisqu'elle converge simplement vers la fonction *non continue* valant 1 en 0 et 0 sur  $]0, 1]$ .

Pour des applications du Théorème 3, on pourra consulter les Exercices 3, 12 et 25.

5.4. **Théorème du graphe fermé.** Enfin, on obtient l'énoncé suivant comme corollaire du Théorème 3.

**Théorème 4** (Théorème du graphe fermé). Soient  $E, F$  des espaces de Banach, et soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire dont le graphe

$$\text{Gr}(f) = \{(x, f(x)) : x \in E\} \subset E \times F$$

est fermé dans  $E \times F$ . Alors  $f$  est continue.

*Démonstration.* Supposons que  $\text{Gr}(f) \subset E \times F$  est fermé. Puisque  $E \times F$  est un espace de Banach, il en est alors de même pour  $\text{Gr}(f)$ . L'application  $p : \text{Gr}(f) \rightarrow E$  induite par la projection sur le premier facteur est continue et bijective; par le Théorème 3, l'application réciproque  $p^{-1} : E \rightarrow \text{Gr}(f)$  est donc continue. Puisque  $f$  est la composée de  $p^{-1}$  avec l'application  $\text{Gr}(f) \rightarrow F$  induite par la projection sur le 2ème facteur, qui est clairement continue, cela implique que  $f$  est continue.  $\square$

**Remarque 3.** (1) Pour tous espaces vectoriels normés  $E, F$  et toute application linéaire continue  $f : E \rightarrow F$ , le graphe  $\text{Gr}(f)$  est fermé dans  $E \times F$ . En effet, si  $((x_n, y_n))_{n \geq 0}$  est une suite de vecteurs de  $E \times F$  qui admet une limite  $(x, y)$  et telle que  $(x_n, y_n) \in \text{Gr}(f)$  pour tout  $n$ , alors on a  $y_n = f(x_n)$  pour tout  $n$ , et en passant à la limite on en déduit que  $y = f(x)$  par continuité. Le Théorème 4 affirme que l'implication réciproque est vraie sous l'hypothèse que  $E$  et  $F$  sont des espaces de Banach.

- (2) L'exemple considéré dans la Remarque 2 fournit également un contre-exemple au Théorème 4 si on enlève l'hypothèse que  $E$  est de Banach. En effet, prenons encore une fois

$$E = F = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}),$$

mais avec la norme  $\|\cdot\|_1$  sur  $E$  et la norme  $\|\cdot\|_\infty$  sur  $F$ . Comme expliqué dans cette remarque l'application linéaire  $\text{id} : E \rightarrow F$  n'est pas continue. Pourtant, son graphe est fermé, puisque c'est l'image par l'homéomorphisme d'échange des facteurs du graphe de l'application continue  $\text{id} : F \rightarrow E$ .

Pour des applications du Théorème 4, on pourra consulter les Exercices 24 et 26.

#### RÉFÉRENCES

- [Br] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle - Théorie et applications*, Masson, 1983.  
[Ci] P. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Masson, 1985.  
[FGN] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices de mathématiques - Oraux X-ENS - Analyse 3*, Cassini, 2014.  
[GT] S. Gonnord, N. Tosel, *Thèmes d'analyse pour l'agrégation - Topologie et analyse fonctionnelle*, Ellipses, 1996.  
[Go] X. Gourdon, *Les maths en tête - Analyse*, Ellipses, 1994.  
[Po] A. Pommellet, *Agrégation de Mathématiques - Cours d'analyse*, Ellipses, 1994.  
[QZ] H. Queffélec, C. Ziuly, *Analyse pour l'agrégation, 3ème édition*, Dunod, 2007.  
[Se] D. Serre, *Les matrices, théorie et pratique*, Dunod, 2001.  
[Sk] G. Skandalis, *Topologie et analyse, 3ème année*, Dunod, 2004.