

# ANALYSE – LEÇON 228 : CONTINUITÉ, DÉRIVABILITÉ DES FONCTIONS RÉELLES D'UNE VARIABLE RÉELLE. EXEMPLES ET APPLICATIONS

SIMON RICHE

## 1. COMMENTAIRES DU JURY (RAPPORT 2022)

Au delà des théorèmes de base, le programme offre de nombreuses pistes aux candidats pour élaborer leur plan : utilisations de la continuité uniforme, fonctions convexes et leur régularité, approximation par des fonctions régulières, utilisations des formules de Taylor, liens entre caractère  $C^\infty$  et analyticité, etc.

Des exemples explicites de fonctions continues et nulle part dérivables<sup>1</sup>, de fonctions continues et croissantes à dérivée nulle presque partout<sup>2</sup>, de fonctions  $C^\infty$  à dérivées en un point prescrites, etc. sont les bienvenus dans cette leçon.

Les candidats solides pourront s'intéresser à la dérivabilité des fonctions monotones ou lipschitziennes ou à celle de l'intégrale indéfinie d'une fonction intégrable, proposer diverses applications du théorème de Baire (continuité d'une limite simple de fonctions continues, points de continuité d'une dérivée, généricité des fonctions nulle part dérivables parmi les fonctions continues ou des fonctions nulle part analytiques parmi les fonctions  $C^\infty$ , etc.)

## 2. PLAN

Les résultats centraux de cette leçon (théorème de Rolle, accroissements finis, etc.) sont relativement élémentaires. Il est cependant important de ne pas se limiter à ces choses-là, et de mettre dans le plan des choses plus consistantes également, qui montreront que vous avez assimilé des mathématiques de plus haut niveau. (Les applications du théorème de Baire donnent par exemple plusieurs choix de tels énoncés.)

### 2.1. Ce qui doit apparaître. Définitions :

- continuité,
- dérivabilité,
- dérivée d'une fonction,
- applications de classe  $\mathcal{C}^k$ .

Exemples de fonctions continues et non continues, dérivables et non dérivables, dérivables mais non  $\mathcal{C}^1$ .<sup>3</sup>

Liens entre dérivabilité et continuité.

---

*Date:* Année 2023–2024.

1. Pour un tel exemple, voir le  5.2 de cette fiche.
2. L'*escalier de Cantor* fournit un exemple de telle fonction ; pour les détails, voir par exemple [BP].
3. Pour ce dernier cas, on pourra consulter par exemple [Go, Chap. 2,  1.1, Remarque 1].

Stabilités par combinaisons linéaires, produit, inverse, composition, et formules associées pour les dérivées. Dérivée de la réciproque d'une bijection.

Notion de continuité uniforme, applications lipschitziennes, implications entre ces notions.

Une application continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Théorèmes classiques :

- théorème des valeurs intermédiaires,
- théorème de Heine (pour les segments de  $\mathbb{R}$ ),
- théorème de Rolle,
- théorème des accroissements finis,
- théorème de Darboux,<sup>4</sup>
- théorème de Weierstrass (approximation par des polynômes, et éventuellement la version trigonométrique),
- théorème de la limite de la dérivée.<sup>5</sup>

Dérivabilité de  $x \mapsto \int_a^x f(y)dy$  pour  $f$  continue par morceaux.

Lien entre croissance et dérivée positive.<sup>6</sup>

Continuité/dérivabilité de la limite d'une suite (ou série) de fonctions.

Formules de Taylor. Application aux développements limités.

Continuité et dérivabilité des intégrales à paramètres.<sup>7</sup>

**2.2. Ce qui peut apparaître.** Dérivées des fonctions usuelles. Développements limités des fonctions usuelles.<sup>8</sup>

Règle de l'Hospital.

Fonctions convexes, fonctions concaves, liens avec la croissance des dérivées. Application à quelques inégalités classiques (arithmético-géométrique, Hölder, Minkowsky).<sup>9</sup>

Existence de fonctions continues nulle part dérivables.<sup>10</sup> Exemples de telles fonctions.<sup>11</sup>

Fonctions réglées, caractérisation en termes des points de discontinuité de première espèce.<sup>12</sup>

---

4. Pour 2 démonstrations de ce théorème, voir [Go, Chap. 2, §1.5, Exercice 4]. Voir aussi [Po, Théorème 9.4.1].

5. Voir l'Exercice 2.

6. Voir par exemple [Po, Corollaire 9.3.5].

7. Voir la fiche sur les séries de Fourier, ou [Go, Chap. 3, §4.1].

8. Bien sûr, même si ces choses n'apparaissent pas dans le plan, elles doivent impérativement être connues !

9. Voir [Go, Chap. 2, §3.1, Théorèmes 2-3-4], ou [Po, §12.2].

10. Voir le §5.1 ci-dessous, [GT1, Chap. I.2, §2] ou [Go, Annexe A, Exercice 4].

11. Voir le §5.2 ci-dessous, [Go, Chap. 2, §1.5, Exercice 9] ou [Po, §9.2.4].

12. Voir [Go, Chap. 2, §3.2, Théorème 5].

Dérivation des fonctions au sens des distributions.<sup>13</sup> Illustration sur des exemples.<sup>14</sup>

Dérivation au sens des distributions de la fonction  $x \mapsto \int_0^x u(t)dt$ , où  $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ .<sup>15</sup>

Formule des sauts pour la dérivée (au sens des distributions) des fonctions ayant des discontinuités.<sup>16</sup>

Pour les candidats ambitieux : dérivabilité presque partout des fonctions à variation bornée,<sup>17</sup> voire des fonctions absolument continues.<sup>18</sup>

### 3. QUELQUES QUESTIONS BÊTES AUXQUELLES IL FAUT ABSOLUMENT SAVOIR RÉPONDRE RAPIDEMENT

(1) Calculer la dérivée de la fonction

$$x \mapsto \frac{\exp(\tan(x) - 2x^2) + \ln(x)}{1 + 3 \cos(x)^2 + \cosh(x)^3}.$$

(2) Calculer<sup>19</sup>

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\tan(x) - x}{\sin(x) - x}.$$

(3) Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  existe (et appartient à  $\mathbb{R}$ ). Montrer que  $f$  est bornée.

(4) Montrer qu'une application  $\mathcal{C}^1$  sur un segment de  $\mathbb{R}$  est lipschitzienne.

(5) Donner un exemple de fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui n'est pas la dérivée d'une fonction dérivable de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

(6) Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, et soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite d'éléments de  $I$  qui est de Cauchy. Que peut-on dire de la suite  $(f(u_n))_{n \geq 0}$  ?

### 4. EXERCICES

**Exercice 1.** Montrer qu'une fonction monotone de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  ne peut admettre qu'un nombre dénombrable de points de discontinuité.

Référence : [Po, Proposition 9.1.3].

**Exercice 2.** Soit  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue, dérivable sur  $]a, b[$ . Supposons que la fonction  $f'(t)$  admet une limite  $\ell$  quand  $t \rightarrow a$  avec  $t > a$ . Montrer que  $f$  est dérivable en  $a$ , de dérivée  $\ell$ .

13. Ici il n'est pas nécessaire de considérer la théorie générale des distributions. Ce qu'il faut expliquer est qu'à une fonction localement intégrable on peut associer une distribution, et que dans le cas des fonctions  $\mathcal{C}^1$  la dérivée au sens des distributions coïncide avec la dérivation ordinaire; voir par exemple [Zu, Chap. 3, §2.1].

14. Un exemple qu'on peut considérer est celui de la fonction d'Heaviside : voir par exemple [Zu, Chap. 3, Exemple 2.3(2)].

15. Voir l'Exercice 15, ou [Zu, Chap. 3, Exemple 2.3(1)].

16. Voir l'Exercice 16, ou [Zu, Chap. 3, Proposition 2.4].

17. Voir [GT2, Chap. I.1, §9].

18. Voir [Ru, §7.16–7.21].

19. En cas de doute, on pourra consulter [Go, Chap. 2, §2.6].

Référence : [Go, Chap. 2, §1.4, Proposition 6].

**Exercice 3** (Construction d'une "fonction plateau"). (1) Montrer que la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0; \\ \exp(-1/x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . (On pourra commencer par montrer que pour tout  $n \geq 0$ , il existe un polynôme  $P_n$  tel que  $f^{(n)}(x) = P_n(1/x) \exp(1/x)$  sur  $\mathbb{R}_{>0}$ , puis utiliser l'Exercice 2.)

(2) Montrer qu'il existe une fonction  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et telle que

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1; \\ 0 & \text{si } |x| \geq 2. \end{cases}$$

(On pourra commencer par considérer l'application  $g$  définie par  $g(x) = f(f(1) - f(x))$ .)

Référence : [Go, Chap. 2, §1.5, Exercice 3].

**Exercice 4** (Une application de l'exercice précédent). L'objectif de cet exercice est de montrer que si  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  vérifie

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx = 0$$

pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$  à support compact sur  $\mathbb{R}$ , alors  $f = 0$  dans  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  (c'est-à-dire que  $f$  est nulle presque partout). En particulier, ceci implique que l'application envoyant une fonction  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  sur la distribution  $\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$  est injective.

- (1) En utilisant l'Exercice 3, montrer qu'il existe une fonction  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  positive,  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact, et telle que  $\int_{\mathbb{R}} \rho(x)dx = 1$ .
- (2) On fixe une fonction  $\rho$  comme dans la question précédente, et pour tout  $n > 0$  on pose

$$\rho_n(x) = n\rho(nx).$$

(a) Montrer que pour  $g \in L^1(\mathbb{R})$  on a

$$(\rho_n \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} \rho(z)g\left(x - \frac{z}{n}\right) dz$$

pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$ . (Ici  $\star$  est la convolution des fonctions de  $\mathbb{R}$  and  $\mathbb{R}$ .)

(b) En déduire que pour tout  $g \in L^1(\mathbb{R})$  on a

$$\rho_n \star g \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} g$$

dans  $L^1(\mathbb{R})$ . (*Indication* : on pourra utiliser les théorèmes de Fubini et de convergence dominée, et le fait que si  $z$  est fixé on a

$$g\left(\cdot - \frac{z}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} g$$

dans  $L^1(\mathbb{R})$ , cf. feuille sur les séries de Fourier.)

(3) Fixons maintenant  $g \in L^1(\mathbb{R})$ , et supposons que

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x)dx = 0$$

pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$  à support compact sur  $\mathbb{R}$ .

(a) Montrer que si  $\rho$  est comme dans la question précédente, on a  $\rho_n \star g = 0$  pour tout  $n \geq 1$ .

(b) En déduire que  $g = 0$ .

(4) Montrer finalement que si  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  vérifie

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx = 0$$

pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$  à support compact sur  $\mathbb{R}$ , alors  $f = 0$ . (*Indication* : on pourra considérer un segment  $[a, b]$ , et multiplier  $f$  par une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact valant 1 sur  $[a, b]$  pour se ramener au cadre précédent.)

Référence : [Zu, Chap. 2, §3(i)].

**Exercice 5** (Une variante du théorème de Rolle). Soit  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(a) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . Supposons de plus que  $f$  est continue sur  $[a, +\infty[$  et dérivable sur  $]a, +\infty[$ . Montrer qu'il existe  $c \in ]a, +\infty[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

Référence : [Po, §9.3.3].

**Exercice 6** (Une application de Taylor–Lagrange). Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $\mathcal{C}^2$ . On suppose que  $f$  et  $f^{(2)}$  sont bornées (en valeurs absolues) par  $M_0$  et  $M_2$  respectivement. Montrer que  $f'$  est bornée par  $\sqrt{2M_0M_2}$ . (*Indication* : on pourra appliquer la formule de Taylor–Lagrange pour calculer  $f(x+h)$  et  $f(x-h)$ , puis chercher comment choisir  $h > 0$  de façon optimale dans ce calcul.)

Référence : [Go, Chap. 2, §1.5, Exercice 8]. (Ce résultat se généralise ensuite aux dérivées supérieures.)

**Exercice 7** (Application classique du théorème de Rolle). (1) Soit  $P$  un polynôme à coefficients réels. Montrer que si  $P$  a  $r$  racines réelles (comptées avec leurs multiplicités), alors  $P'$  a au moins  $r - 1$  racines réelles (comptées avec leurs multiplicités).

(2) Considérons un polynôme de la forme

$$P(X) = X^n + a_{n-p-1}X^{n-p-1} + \dots + a_0$$

avec  $n, p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , les  $a_i$  réels, et  $a_{n-p-1} \neq 0$ . Montrer que :

(a) si  $p$  est pair,  $P$  admet au plus  $n - p$  racines réelles (comptées avec leurs multiplicités) ;

(b) si  $p$  est impair et  $a_{n-p-1} > 0$ ,  $P$  admet au plus  $n - p - 1$  racines réelles (comptées avec leurs multiplicités) ;

(c) si  $p$  est impair et  $a_{n-p-1} < 0$ ,  $P$  admet au plus  $n - p + 1$  racines réelles (comptées avec leurs multiplicités).

(On pourra dériver  $P$  le nombre de fois nécessaire pour obtenir un polynôme dont les racines réelles sont faciles à déterminer.)

Référence : [Go, Chap. 2, §4, Problème 4].

- Exercice 8** (Théorèmes de Dini). (1) Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite croissante de fonctions réelles définies et continues sur un segment  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Montrer que si  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge simplement vers une fonction  $f$  continue sur  $I$ , alors la convergence est uniforme. (*Indication* : on pourra considérer, pour un  $\varepsilon > 0$ , l'intersection des ensembles  $F_n = \{x \in I \mid f(x) \geq f_n(x) + \varepsilon\}$ .)
- (2) Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions réelles définies, continues et croissantes sur un segment  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Montrer que si  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge simplement vers une fonction  $f$  continue sur  $I$ , alors la convergence est uniforme. (*Indication* : on pourra appliquer le théorème de Heine à la fonction  $f$ .)

Référence : [Go, Chap. 4, §3.4, Exercice 5].

- Exercice 9.** (1) Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions dérivables<sup>20</sup> de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que la suite  $(f'_n)_{n \geq 0}$  converge uniformément vers une fonction  $g$  sur  $[0, 1]$ , et qu'il existe  $x_0 \in [0, 1]$  tel que la suite  $(f_n(x_0))_{n \geq 0}$  converge. Montrer que  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge uniformément sur  $[0, 1]$  vers une fonction dérivable  $f$  telle que  $f' = g$ . (*Indication* : pour démontrer la convergence, on pourra utiliser le critère de Cauchy uniforme. Puis on démontrera la dérivabilité de la limite en revenant à la définition.)

- (2) Montrer que la fonction  $\varphi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est dérivable sur  $[-1, 1]$  et que sa dérivée est continue sur  $[-1, 1] \setminus \{0\}$ , mais pas en 0.

- (3) On choisit une bijection  $n \mapsto r_n$  de  $\mathbb{Z}_{>0}$  vers  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ . Pour tout  $n > 0$ , on considère la fonction  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2} \varphi(x - r_n).$$

Montrer que la série  $\sum_n f_n$  converge uniformément sur  $[0, 1]$  vers une fonction  $f$  qui est dérivable sur  $[0, 1]$ , et que sa dérivée est continue en tout point irrationnel de  $[0, 1]$ , et discontinue en tout point rationnel de  $[0, 1]$ .

Référence : [Go, Chap. 4, §3.4, Exercice 9]. Cet exemple montre qu'une fonction dérivée peut avoir beaucoup de points de discontinuité, même si elle vérifie le théorème des valeurs intermédiaires (cf. théorème de Darboux). L'exercice 12 montre cependant que l'ensemble des points de continuité d'une dérivée est dense.

**Exercice 10** (Une application du théorème de Darboux et des formules de Taylor aux équations différentielles). Montrer que si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction deux fois dérivable telle que  $ff'f'' = 0$  sur  $\mathbb{R}$ , alors  $f$  est une fonction affine.

(*Indication* : on pourra vérifier que si  $f''(t_0) \neq 0$ , il existe  $\gamma > 0$  tel que  $f(t) \neq 0$  et  $f'(t) \neq 0$  pour tout  $t \in ]t_0 - \gamma, t_0[ \cup ]t_0, t_0 + \gamma[$ , puis appliquer le théorème de Darboux.)

Référence : [Go, Chap. 6, §5, Problème 5].

<sup>20</sup>. On insiste sur le fait que les fonctions ne sont pas supposées  $\mathcal{C}^1$ , comme dans l'énoncé "classique" de ce type.

**Exercice 11** (Une application des formules de Taylor). Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ , et soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  qui est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , à valeurs positives, ainsi que toutes ses dérivées. Montrer que  $f$  est développable en série entière au voisinage de chaque point de  $I$ .

(*Indication* : on pourra chercher à majorer le reste dans la formule de Taylor–Lagrange. Pour cela, pour  $a \in I$  et  $r > 0$  tel que  $a + 2r \in I$ , on pourra écrire la formule pour les points  $a + r$  et  $a + 2r$ , puis utiliser la croissance des dérivées successives de  $f$ .)

Référence : [Po, §11.1.3].

**Exercice 12** (Une application du théorème de Baire). Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , qui converge simplement vers une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Le but de cet exercice est de montrer que l'ensemble  $D(f)$  des points de discontinuité de  $f$  est d'intérieur vide dans  $\mathbb{R}$ .

- (1) Montrer que si  $(E, d)$  est un espace métrique complet et si  $(F_n)_{n \geq 0}$  est une collection de fermés de  $E$  telle que  $\bigcup_{n \geq 0} F_n = E$ , alors la réunion des intérieurs des  $F_n$  est un ouvert dense dans  $E$ . (*Indication* : on pourra considérer le complémentaire de cet ensemble, et montrer que c'est un fermé d'intérieur vide en utilisant le théorème de Baire.)
- (2) On se place maintenant dans le cadre présenté au début de l'exercice. Pour  $\varepsilon > 0$  et  $n \geq 0$  on pose

$$F_{n,\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall p \geq n, |f_n(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon\}.$$

En utilisant la question précédente, montrer que la réunion  $\Omega_\varepsilon$  des intérieurs des  $F_{n,\varepsilon}$  est un ouvert dense de  $\mathbb{R}$ .

- (3) Montrer que si  $x \in \Omega_\varepsilon$ , il existe un voisinage  $V$  de  $x$  tel que pour tout  $y \in V$  on a  $|f(x) - f(y)| \leq 3\varepsilon$ .
- (4) En déduire que  $f$  est continue en tout point de  $\bigcap_{n > 0} \Omega_{1/n}$ , et conclure.
- (5) *Application* : montrer que si  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ , alors l'ensemble des points de continuité de  $g'$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

Référence : [Go, Annexe A, Exercice 2]. (À part pour la dernière question, toutes ces considérations s'appliquent plus généralement à des fonctions d'un espace métrique complet vers un espace métrique quelconque.)

**Exercice 13** (Une autre application du théorème de Baire). Le but de cet exercice est de montrer que si  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une application de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  il existe  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tel que  $\varphi^{(n)}(x) = 0$ , alors  $\varphi$  est polynomiale. (La réciproque est bien sûr évidente.) On suppose donc donnée une fonction  $\varphi$  vérifiant cette propriété.

- (1) Montrer que si  $n_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  et si  $(x_p)_{p \geq 0}$  est une suite de réels distincts tendant vers  $x \in \mathbb{R}$  telle que  $\varphi^{(n_0)}(x_p) = 0$  pour tout  $p$ , alors  $\varphi^{(n)}(x) = 0$  pour tout  $n \geq n_0$ . (On pourra supposer la suite strictement monotone, puis appliquer le théorème de Rolle.)
- (2) Pour  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  on pose

$$F_n = \{x \in \mathbb{R} \mid \varphi^{(n)}(x) = 0\}.$$

On note  $\Omega$  la réunion des intérieurs des  $F_n$ . Montrer que sur toute composante connexe de  $\Omega$ ,  $\varphi$  est polynomiale. (Si  $]a, b[$  est une composante connexe de

$\Omega$ , et si  $x_0 \in ]a, b[$ , on pourra trouver un polynôme  $P$  qui coïncide avec  $\varphi$  sur un voisinage de  $x_0$ , puis montrer que  $\varphi = P$  sur tout segment  $[c, d] \subset ]a, b[$ , en considérant les bornes supérieure et inférieure de  $\{t \in [c, d] \mid \forall x \in [x_0, t], \varphi(x) = P(x)\}$ .)

- (3) Montrer que le complémentaire  $F$  de  $\Omega$  n'a aucun point isolé. (On pourra raisonner par l'absurde, et utiliser la formule de Taylor pour les polynômes.)
- (4) Par l'absurde, on suppose que  $F \neq \emptyset$ .
  - (a) En appliquant le théorème de Baire, montrer qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  et des réels  $a < b$  tels que  $]a, b[ \cap F \neq \emptyset$  et  $]a, b[ \cap F \subset F_{n_0}$ .
  - (b) En utilisant les questions (1) et (3), montrer que pour tout  $x \in ]a, b[ \cap F$  et tout  $n \geq n_0$  on a  $\varphi^{(n)}(x) = 0$ .
  - (c) En utilisant la question (2), montrer que pour tout  $x \in ]a, b[ \cap \Omega$  et tout  $n \geq n_0$  on a  $\varphi^{(n)}(x) = 0$ .
  - (d) En déduire que  $]a, b[$  est inclus dans l'intérieur de  $F_{n_0}$ , et conclure.

Référence : [Go, Annexe A, Exercice 5]. Pour une preuve légèrement différente, voir [GT2, Chap. I.1, §12].

**Exercice 14.** Soit  $E$  l'algèbre des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Le but de cet exercice est de montrer que les dérivations de  $E$ , c'est-à-dire les applications linéaires  $\delta : E \rightarrow E$  qui dérivent

$$\delta(fg) = \delta(f)g + f\delta(g)$$

pour tous  $f, g \in E$ , sont exactement les applications de la forme  $f \mapsto uf'$  où  $u \in E$ .

- (1) Montrer que si  $u \in \mathcal{C}^\infty$ , l'application  $f \mapsto uf'$  est bien une dérivation de  $E$ .
- (2) Montrer que toute dérivation de  $E$  s'annule sur les fonctions constantes.
- (3) (a) Montrer que si  $u \in E$  vérifie  $u(0) = 0$ , alors il existe  $v \in E$  telle que  $u(x) = xv(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . (*Indication* : on pourra utiliser un résultat de régularité des intégrales à paramètres.)
  - (b) En déduire que si  $u \in E$  vérifie  $u(0) = u'(0) = 0$ , alors il existe  $v \in E$  telle que  $u(x) = x^2v(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
- (4) Montrer que si  $f, g \in E$  vérifient  $f'(0) = g'(0)$ , alors  $\delta(f)(0) = \delta(g)(0)$ .
- (5) Montrer que pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}$ , la quantité

$$u(x_0) := \frac{\delta(f)(x_0)}{f'(x_0)}$$

où  $f \in E$  est telle que  $f'(x_0) \neq 0$  ne dépend pas du choix de  $f$ .

- (6) Montrer que  $u$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , et conclure.

Référence : [GT2, Chap. I.1, §22].

## 5. COMPLÉMENTS : APPLICATIONS CONTINUES MAIS DÉRIVABLES EN AUCUN POINT

**5.1. Existence via le théorème de Baire.** Dans cette partie (pour laquelle on peut se référer à [GT1, Chap. I.2, §2] ou [Go, Annexe A, Exercice 4]) on explique comment on peut montrer qu'il existe des fonctions  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  qui sont continues et dérivables en aucun point, en utilisant le théorème de Baire.

Commençons par rappeler l'énoncé du théorème de Baire.



**Théorème 1** (Théorème de Baire). Soit  $X$  un espace métrique complet. Si  $(U_n)_{n \geq 0}$  est une famille de parties de  $X$  telles que chaque  $U_n$  est ouvert et dense, alors  $\bigcap_{n \geq 0} U_n$  est dense dans  $X$ .

On considère l'espace vectoriel normé  $\mathcal{C}$  des fonctions continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ , muni de  $\|\cdot\|_\infty$ . On rappelle que  $\mathcal{C}$  est un espace de Banach.

Pour  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  on pose

$$\Omega_n := \{f \in \mathcal{C} \mid \forall t \in [0, 1], \exists s \in [0, 1], |f(t) - f(s)| > n|t - s|\}.$$

**Lemme 1.** Pour tout  $n \geq 0$ ,  $\Omega_n$  est un ouvert dense de  $\mathcal{C}$ .

*Démonstration.* Fixons  $n \geq 0$ .

Pour commencer on va montrer que  $\Omega_n$  est ouvert, où en d'autres termes que son complémentaire est fermé. Considérons donc une suite  $(f_p)_{p \geq 0}$  d'éléments du complémentaire de  $\Omega_n$ , qui converge vers une fonction  $f \in \mathcal{C}$ . On va montrer que  $f \notin \Omega_n$ , c'est-à-dire qu'il existe  $t \in [0, 1]$  tel que pour tout  $s \in [0, 1]$  on a

$$|f(t) - f(s)| \leq n|t - s|.$$

Pour tout  $p \geq 0$ , puisque  $f_p \notin \Omega_n$  il existe  $t_p \in [0, 1]$  tel que pour tout  $s \in [0, 1]$  on a  $|f_p(t_p) - f_p(s)| \leq n|t_p - s|$ . Puisque  $[0, 1]$  est compact, il existe  $\varphi : \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  strictement croissante et  $t \in [0, 1]$  tels que  $t_{\varphi(p)} \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} t$ . Montrons que ce "t" vérifie la propriété voulue. Pour cela on fixe  $s \in [0, 1]$ . Par convergence uniforme (donc simple) on a  $f_{\varphi(p)}(s) \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} f(s)$ . Par ailleurs, on a

$$f_{\varphi(p)}(t_{\varphi(p)}) \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} f(t).$$

En effet, soit  $\varepsilon > 0$ . Par continuité de  $f$  en  $t$ , il existe  $\eta > 0$  tel que si  $|x - t| < \eta$  alors  $|f(x) - f(t)| < \varepsilon/2$ . Il existe également  $N > 0$  tel que pour  $p \geq N$  on a

$$|t_{\varphi(p)} - t| < \eta \quad \text{et} \quad \|f_{\varphi(p)} - f\|_\infty < \varepsilon/2.$$

On a alors pour  $p \geq N$

$$|f_{\varphi(p)}(t_{\varphi(p)}) - f(t)| < |f_{\varphi(p)}(t_{\varphi(p)}) - f(t_{\varphi(p)})| + |f(t_{\varphi(p)}) - f(t)| < \varepsilon,$$

ce qui prouve la convergence voulue.

Finalement, en passant à la limite dans l'inégalité  $|f_{\varphi(p)}(t_{\varphi(p)}) - f_{\varphi(p)}(s)| \leq n|t_{\varphi(p)} - s|$  on trouve que  $|f(t) - f(s)| \leq n|t - s|$ , ce qui achève la preuve que  $f \notin \Omega_n$ .

Il reste maintenant à montrer que  $\Omega_n$  est dense dans  $\mathcal{C}$ . Pour commencer, remarquons que les fonctions lipschitziennes sont denses dans  $\mathcal{C}$ . En effet les fonctions polynomiales sont denses (d'après le théorème de Weierstrass), et toute fonction polynomiale (plus généralement, toute fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ ) est lipschitzienne d'après le théorème des accroissements finis, puisque sa dérivée est bornée sur le compact  $[0, 1]$ . Pour conclure, il suffit donc de montrer que les fonctions lipschitziennes sont dans l'adhérence de  $\Omega_n$ .

Soit donc  $f$  une fonction lipschitzienne, et soit  $k$  un réel tel que

$$|f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x - y|$$

pour tous  $x, y \in [0, 1]$ . Pour  $j \geq 1$ , notons  $\epsilon_j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction continue affine par morceaux qui est affine sur chaque intervalle  $[\frac{u}{2j^2}, \frac{u+1}{2j^2}]$  ( $u \in \{0, \dots, 2j^2 - 1\}$ ),

qui vaut 0 en chaque  $\frac{2u}{2j^2}$  ( $u \in \{0, \dots, j^2\}$ ) et  $\frac{1}{j}$  en chaque  $\frac{2u+1}{2j^2}$  ( $u \in \{0, \dots, j^2-1\}$ ). On a  $\|\varepsilon_j\|_\infty = \frac{1}{j}$ , et donc

$$f + \varepsilon_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} f.$$

D'autre part, si  $j$  est tel que  $\frac{j}{2} - k > n$  on a  $f + \varepsilon_j \in \Omega_n$ . En effet, fixons  $t \in [0, 1]$ . Supposons pour commencer que  $\varepsilon_j(t) \leq \frac{1}{2j}$ , et notons  $u \in \{0, \dots, j^2-1\}$  un entier tel que  $|t - \frac{2u+1}{2j^2}| \leq \frac{1}{j^2}$ . On a alors

$$\begin{aligned} \left| (f + \varepsilon_j) \left( \frac{2u+1}{2j^2} \right) - (f + \varepsilon_j)(t) \right| &= \left| f \left( \frac{2u+1}{2j^2} \right) - f(t) + \frac{1}{j} - \varepsilon_j(t) \right| \\ &\geq \left| \frac{1}{j} - \varepsilon_j(t) \right| - \left| f \left( \frac{2u+1}{2j^2} \right) - f(t) \right| \geq \frac{1}{2j} - \frac{k}{j^2}, \end{aligned}$$

donc

$$\left| \frac{(f + \varepsilon_j) \left( \frac{2u+1}{2j^2} \right) - (f + \varepsilon_j)(t)}{t - \frac{2u+1}{2j^2}} \right| \geq \frac{j}{2} - k > n.$$

Si  $\varepsilon_j(t) \geq \frac{1}{2j}$ , on choisit un entier  $u \in \{0, \dots, j^2\}$  tel que  $|t - \frac{2u}{2j^2}| \leq \frac{1}{j^2}$ , et on observe de même que

$$\left| \frac{(f + \varepsilon_j) \left( \frac{2u}{2j^2} \right) - (f + \varepsilon_j)(t)}{t - \frac{2u}{2j^2}} \right| \geq \frac{j}{2} - k > n,$$

ce qui achève la preuve.  $\square$

On en déduit finalement le résultat voulu.

**Théorème 2.** L'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables est dense dans  $\mathcal{C}$  (et donc, en particulier, non vide).

*Démonstration.* Le théorème de Baire assure que  $\bigcap_{n \geq 0} \Omega_n$  est dense dans  $\mathcal{C}$ . Pour conclure, il suffit donc de montrer que les fonctions dans cette intersection ne sont dérivables en aucun point de  $[0, 1]$ . En d'autres termes, on doit montrer que si  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est dérivable en un point, alors il existe  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tel que  $f \notin \Omega_n$ .

Supposons donc que  $f$  est dérivable en un point  $x \in [0, 1]$ , de dérivée  $f'(x)$ . On considère la fonction  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$g(t) = \begin{cases} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} & \text{si } t \neq x; \\ f'(x) & \text{si } t = x. \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur  $[0, 1] \setminus \{x\}$  comme quotient de fonctions continues (avec un dénominateur qui ne s'annule pas), et en  $x$  par définition de la dérivée. Puisque  $[0, 1]$  est compact, la fonction continue  $g$  doit être bornée : il existe  $M > 0$  tel que  $|g(t)| \leq M$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . On a alors, pour tout  $t \neq x$ ,

$$|f(t) - f(x)| \leq M \cdot |t - x|.$$

Cette inégalité est bien sûr vraie également si  $t = x$ . Donc si  $n > M$ , on a  $f \notin \Omega_n$ , ce qui achève la preuve.  $\square$

**5.2. Exemple explicite.** On va maintenant donner un exemple explicite d'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui est continue mais nulle part dérivable (en suivant [Go, Chap. 2, §1.5, Exercice 9]).

Pour cela, on commence par considérer la fonction  $\Delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui est 1-périodique et dont la restriction à  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  est donnée par  $\Delta(x) = |x|$ . Cette fonction est continue sur  $\mathbb{R}$ . (Elle est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{\frac{k}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$ , mais non dérivable en chaque  $\frac{k}{2}$ .) On pose ensuite

$$f(x) = \sum_{p \geq 0} \frac{1}{2^p} \Delta(2^p x).$$

Ici, puisque  $\|\Delta\|_\infty = \frac{1}{2}$ , la série est normalement convergente, ce qui assure que  $f$  est bien définie et (puisque  $\Delta$  est continue, et puisqu'on a convergence uniforme) qu'elle est continue sur  $\mathbb{R}$ . Il reste à montrer qu'elle n'est dérivable en aucun point de  $\mathbb{R}$ . Puisque  $f$  est 1-périodique, il suffit de considérer les points dans  $[0, 1[$ . Soit donc  $x \in [0, 1[$ . Rappelons que  $x$  possède une écriture dyadique<sup>21</sup> :

$$x = \sum_{k \geq 1} \frac{\varepsilon_k}{2^k} \quad \text{où } \varepsilon_k \in \{0, 1\} \text{ pour tout } k.$$

On pose alors

$$x'_n = \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon_k}{2^k}, \quad x''_n = x'_n + \frac{1}{2^n},$$

de sorte que les suites  $(x'_n)_{n \geq 1}$  et  $(x''_n)_{n \geq 1}$  convergent vers  $x$ , et  $x'_n \leq x \leq x''_n$  pour tout  $n \geq 1$ .

**Lemme 2.** La suite  $\left( \frac{f(x''_n) - f(x'_n)}{x''_n - x'_n} \right)_{n \geq 1}$  ne converge pas.

*Démonstration.* On a

$$f(x''_n) - f(x'_n) = \sum_{p \geq 0} \frac{1}{2^p} (\Delta(2^p x''_n) - \Delta(2^p x'_n)).$$

Si  $p \geq n$ , on a  $\Delta(2^p x'_n) = \Delta(2^p x''_n) = 0$  puisque  $2^p x'_n$  et  $2^p x''_n$  sont des entiers.

Maintenant si  $p < n$  on a

$$\Delta(2^p x'_n) = \Delta \left( \sum_{k=p+1}^n \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}} \right), \quad \Delta(2^p x''_n) = \Delta \left( \frac{1}{2^{n-p}} + \sum_{k=p+1}^n \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}} \right).$$

Si  $\varepsilon_{p+1} = 0$ , on remarque qu'on a

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{k=p+1}^n \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}} &\leq \frac{1}{2^{n-p}} + \sum_{k=p+1}^n \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}} \\ &\leq \frac{1}{2^{n-p}} + \sum_{k=p+2}^n \frac{1}{2^{k-p}} = \frac{1}{2^{n-p}} + \frac{1}{2^2} \sum_{k=0}^{n-p-2} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

donc

$$\Delta(2^p x''_n) - \Delta(2^p x'_n) = \frac{1}{2^{n-p}}.$$

21. On rappelle au passage qu'un réel dans  $[0, 1[$  possède toujours une écriture dyadique, mais que celle-ci n'est pas unique ; par exemple on a  $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}$ .

Si  $\varepsilon_{p+1} = 1$  on a

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{k=p+1}^n \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}} \leq \frac{1}{2^{n-p}} + \sum_{k=p+1}^n \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}} \leq \frac{1}{2^{n-p}} + \sum_{k=p+1}^n \frac{1}{2^{k-p}} = 1,$$

et donc

$$\Delta(2^p x_n'') - \Delta(2^p x_n') = -\frac{1}{2^{n-p}}.$$

Dans les deux cas on a  $\Delta(2^p x_n'') - \Delta(2^p x_n') = (-1)^{\varepsilon_{p+1}} \frac{1}{2^{n-p}}$ , et donc

$$f(x_n'') - f(x_n') = \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^{\varepsilon_{p+1}},$$

puis

$$\frac{f(x_n'') - f(x_n')}{x_n'' - x_n'} = \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^{\varepsilon_{p+1}}.$$

Ceci prouve que la suite  $\left( \frac{f(x_n'') - f(x_n')}{x_n'' - x_n'} \right)_{n \geq 1}$  ne converge pas.  $\square$

Ce lemme implique que  $f$  n'est pas dérivable en  $x$ . En effet, si elle l'était, en observant que

$$\begin{aligned} & \frac{f(x_n'') - f(x_n')}{x_n'' - x_n'} - f'(x) \\ &= \frac{(f(x_n'') - f(x) - (x_n'' - x)f'(x)) - (f(x_n') - f(x) - (x_n' - x)f'(x))}{x_n'' - x_n'} \end{aligned}$$

et en utilisant les majorations

$$\begin{aligned} |f(x_n'') - f(x) - (x_n'' - x)f'(x)| &= |x_n'' - x| \cdot \left| \frac{f(x_n'') - f(x)}{x_n'' - x} - f'(x) \right| \\ &\leq |x_n'' - x_n'| \cdot \left| \frac{f(x_n'') - f(x)}{x_n'' - x} - f'(x) \right| \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |f(x_n') - f(x) - (x_n' - x)f'(x)| &= |x_n' - x| \cdot \left| \frac{f(x_n') - f(x)}{x_n' - x} - f'(x) \right| \\ &\leq |x_n'' - x_n'| \cdot \left| \frac{f(x_n') - f(x)}{x_n' - x} - f'(x) \right| \end{aligned}$$

on voit qu'on aurait

$$\frac{f(x_n'') - f(x_n')}{x_n'' - x_n'} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f'(x).$$

Ceci étant faux,  $f$  n'est pas dérivable en  $x$ .

## 6. QUELQUES EXERCICES SUR LA DÉRIVATION AU SENS DES DISTRIBUTIONS

Il y a quelques années, la notion de “dérivation au sens des distributions” avait été ajoutée au menu de cette leçon. Elle a disparu depuis, mais cette notion peut toujours être évoquée si le candidat le souhaite. Les exercices ci-dessus illustrent quelques propriétés intéressantes.

**Exercice 15** (Dérivée d’une intégrale au sens des distributions). On rappelle que  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  désigne l’ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui sont localement intégrables, c’est-à-dire dont la restriction à tout compact de  $\mathbb{R}$  est intégrable. On rappelle également que si  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ , la distribution associée à  $f$  est l’application linéaire envoyant une fonction  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mathcal{C}^\infty$  à support compact sur

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx.$$

- (1) (Question préliminaire) Que peut-on dire de la dérivabilité (au sens usuel) de la fonction  $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$  si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction localement intégrable donnée? (Discuter selon  $f$ , et donner des exemples et contre-exemples.)<sup>22</sup>
- (2) Montrer que si  $v \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ , alors l’application  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$u(x) = \int_0^x v(t)dt$$

est continue. (*Indication* : on pourra utiliser le théorème de convergence dominée.)

- (3) (a) Montrer que si  $A > 0$  et si  $\varphi : [-A, A] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  telle que  $\varphi(A) = \varphi(-A) = 0$  alors on a

$$\int_{-A}^A u(x)\varphi'(x)dx = - \int_{-A}^A v(x)\varphi(x)dx.$$

- (b) En déduire que  $u' = v$  au sens des distributions.

Référence : [Zu, Chap. 3, Exemple 2.3(1)].

**Exercice 16** (Formule des sauts). On considère une suite strictement croissante  $(x_j)_{j \geq 1}$  de réels qui tend vers  $+\infty$ , et on pose pour  $j \geq 0$  :

$$\Omega_j = \begin{cases} ]-\infty, x_1[ & \text{si } j = 0; \\ ]x_j, x_{j+1}[ & \text{si } j \geq 1. \end{cases}$$

Pour tout  $j \geq 0$ , on choisit une fonction  $f_j : \Omega_j \rightarrow \mathbb{R}$  qui est de classe  $\mathcal{C}^1$ , et telle que  $f'_j$  est intégrable sur  $\Omega_j$ .

- (1) Montrer que pour tout  $j \geq 1$ , les limites

$$f(x_j^-) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_j \\ x < x_j}} f_{j-1}(x) \quad \text{et} \quad f(x_j^+) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_j \\ x > x_j}} f_j(x)$$

existent. (*Indication* : On pourra utiliser la formule de Taylor avec reste intégral à l’ordre 1.)

<sup>22</sup>. En cas de doute, voir [Go, Chap. 3, §1.2, Théorème 2].

(2) Pour tout  $j \geq 1$  on pose

$$\sigma_j = f(x_j^+) - f(x_j^-).$$

On considère les fonctions  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définies presque partout en posant

$$f(x) = f_j(x), \quad g(x) = f'_j(x) \quad \text{si } x \in \Omega_j.$$

L'objectif de cette question est de montrer que la dérivée  $f'$  de  $f$  au sens des distributions vérifie

$$(1) \quad f' = g + \sum_{j \geq 1} \sigma_j \delta_{x_j}$$

où  $\delta_{x_j}$  est la distribution de Dirac au point  $x_j$  (qui envoie une fonction  $\varphi$  sur  $\varphi(x_j)$ ). (La somme dans le membre de droite, appliquée à une fonction à support compact, n'a qu'un nombre fini de termes non nuls ; cette somme a donc bien un sens dans les distributions.)

- (a) Montrer que  $f$  et  $g$  sont localement intégrables, de sorte que les distributions associées ont bien un sens.  
 (b) On fixe  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui est  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact. Montrer que pour  $j \geq 1$  on a

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(t)\varphi'(t)dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_j+\varepsilon}^{x_{j+1}-\varepsilon} f(t)\varphi'(t)dt,$$

et que

$$\int_{-\infty}^{x_1} f(t)\varphi'(t)dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{x_1-\varepsilon} f(t)\varphi'(t)dt.$$

(Indication : on pourra appliquer le théorème de convergence dominée.)

- (c) Avec  $\varphi$  comme précédemment, montrer que pour  $j \geq 1$  et  $\varepsilon > 0$  tel que  $x_j + \varepsilon < x_{j+1} - \varepsilon$  on a

$$\begin{aligned} \int_{x_j+\varepsilon}^{x_{j+1}-\varepsilon} f(t)\varphi'(t)dt &= f(x_{j+1}-\varepsilon)\varphi(x_{j+1}-\varepsilon) \\ &\quad - f(x_j+\varepsilon)\varphi(x_j+\varepsilon) - \int_{x_j+\varepsilon}^{x_{j+1}-\varepsilon} g(t)\varphi(t)dt, \end{aligned}$$

et que pour  $\varepsilon > 0$  on a

$$\int_{-\infty}^{x_1-\varepsilon} f(t)\varphi'(t)dt = -f(x_1+\varepsilon)\varphi(x_1+\varepsilon) - \int_{-\infty}^{x_1-\varepsilon} g(t)\varphi(t)dt.$$

- (d) En déduire que pour tout  $j \geq 1$  on a

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(t)\varphi'(t)dt = f(x_{j+1}^-)\varphi(x_{j+1}) - f(x_j^+)\varphi(x_j) - \int_{x_j}^{x_{j+1}} g(t)\varphi(t)dt,$$

et que

$$\int_{-\infty}^{x_1} f(t)\varphi'(t)dt = f(x_1^-)\varphi(x_1) - \int_{-\infty}^{x_1} g(t)\varphi(t)dt.$$

- (e) Démontrer finalement la formule (1).

Référence : [Zu, Chap. 3, Proposition 2.4].

## RÉFÉRENCES

- [BP] M. Briane et G. Pagès, *Analyse. Théorie de l'intégration*, 7ème édition, De Boeck, 2018.
- [GT1] S. Gonnord et N. Tosel, *Thèmes d'analyse pour l'agrégation – Topologie et analyse fonctionnelle*, Ellipses, 1996.
- [GT2] S. Gonnord et N. Tosel, *Thèmes d'analyse pour l'agrégation – Calcul différentiel*, Ellipses, 1998.
- [Go] X. Gourdon, *Les maths en tête – Analyse*, Ellipses, 1994.
- [Po] A. Pommellet, *Agrégation de Mathématiques – Cours d'analyse*, Ellipses, 1994.
- [Ru] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Dunod, 1998.
- [Zu] C. Zuily, *Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles*, Dunod, 2002.