PRÉPARATION À L'AGRÉGATION EXTERNE : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

SIMON RICHE

Sauf mention expresse du contraire, le contenu de cette fiche est tiré de [QZ, Chap. X].

1. Le théorème de Cauchy–Lipschitz

Le théorème de Cauchy–Lipschitz est l'outil principal pour démontrer l'existence et/ou unicité des solutions d'une équation différentielle. Notons que la preuve de ce théorème est assez subtile, et que son traitement dans beaucoup de sources (y compris dans des références tout à fait rercommandées comme [Go] et [QZ]) est parfois un petit peu approximative. Il convient donc de faire très attention !

1.1. **Solutions.** On va travailler avec des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, qu'on munit d'une norme $\|\cdot\|$. (Rappelons que toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes. De ce fait, aucune des considérations ci-dessous ne dépendra du choix de $\|\cdot\|$.) On fixe un sous-ensemble [1] $\Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ et une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$.

Définition 1.1. On appelle *solution* de l'équation

$$y' = f(t, y)$$

une paire (I, y) où I est un intervalle non-trivial [2] de $\mathbb{R}$ et $y : I \to \mathbb{R}^n$ est une fonction dérivable qui vérifie les conditions suivantes :

- pour tout $t \in I$ le point $(t, y(t))$ appartient à Ω ;
- pour tout $t \in I$ on a $y'(t) = f(t, y(t))$.

Une solution (I, y) est dite *maximale* s'il n'existe pas de solution (J, z) avec J un intervalle contenant strictement I et $z_{|I} = y$.

Remarque 1.2. (1) Il est important de remarquer que la notion de solution de l'équation différentielle dépend du choix de sous-ensemble Ω, via la première condition considérée ci-dessus.

(2) L'argument donné dans [QZ, Chap. X, preuve du Théorème III.2, p. 372] (basé sur le lemme de Zorn) implique que toute solution d'une équation différentielle est la restriction d'une solution maximale. Dans le cadre du théorème de Cauchy–Lipschitz (Théorème 1.12), cette propriété peut se voir un peu plus simplement, et sera démontrée directement.

Date: Année 2023-24.

1. Dans la pratique, Ω sera très souvent supposé ouvert, mais cela ne joue aucun rôle pour les notions considérées dans ce paragraphe, et il est parfois utile de considérer des sous-ensembles non ouverts. En fait, le cas le plus intéressant est celui où $\Omega = I \times U$ pour un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$. C'est ce cadre qui est considéré dans de nombreuses références, mais cette restriction est souvent inutile.

2. Dans ce document, un intervalle de $\mathbb{R}$ est dit "non trivial" s'il n'est ni vide ni réduit à un point.

(3) Un cas particulier important est celui des équations différentielles autonomes, où “la fonction f ne dépend pas de t”. C'est-à-dire qu'on se donne un sous-ensemble $U \subset \mathbb{R}^n$ et une fonction $g : U \to \mathbb{R}^n$, et on considère l'équation

$$y' = g(y).$$

Ceci se ramène au cadre précédent en posant $\Omega = \mathbb{R} \times U$ et en définissant $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ par $f(t, y) = g(y)$.

Étant donnés $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}^n$ tels que $(t_0, y_0) \in \Omega$, on appelle *problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

la recherche d'une solution (I, y) telle que $t_0 \in I$ et $y(t_0) = y_0$.

Le résultat suivant découle directement du thèorème fondamental de l'analyse.

Lemme 1.3. Supposons que la fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est continue. Alors pour tout couple (I, y) où I est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $y : I \to \mathbb{R}^n$ est une fonction, les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) (I, y) est une solution du problème de Cauchy (1.1) ;

(2) y est continue et pour tout $t \in I$ on a $(t, y(t)) \in \Omega$ et

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\mathrm{d}s \quad \text{pour tout } t \in I. \tag{1.2}$$

De plus, si (I, y) vérifie ces conditions alors y est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

Du fait de ce lemme, dans de nombreux problèmes théoriques on utilisera la caractérisation (2) pour vérifier qu'un couple est solution du problème de Cauchy considéré.

1.2. **Fonctions localement lipschitziennes.**

Définition 1.4. Soit $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert, et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction. On dit que f est *localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable* si pour tous $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}^n$ tels que $(t_0, y_0) \in \Omega$ il existe un voisinage V de (t_0, y_0) contenu dans Ω et $k \in \mathbb{R}_{>0}$ tels que pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $y, z \in \mathbb{R}^n$ tels que les points (t, y) et (t, z) appartiennent à V on a

$$\|f(t, y) - f(t, z)\| \leq k\|y - z\|. \tag{1.3}$$

Le résultat suivant est trivial (au vu de l'inégalité des accroissements finis, voir [Go, Chap. 2, §1.4, Théorème 6, p. 76]), mais c'est la façon la plus classique de vérifier qu'une fonction vérifie la propriété précédente.

Lemme 1.5. Soit $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert, et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Alors f est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.

1.3. **Le lemme de Gronwall.** Le lemme de Gronwall est un outil clé dans l'étude des équations différentielles, qui peut s'énoncer de la façon suivante.

Proposition 1.6 (Lemme de Gronwall)**.** Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $\varphi : I \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une fonction continue, et soit $c \in I$. Supposons qu'il existe des réels $A, B \geq 0$ tels que pour tout $t \in I$ on a

$$\varphi(t) \leq A + B \left| \int_c^t \varphi(s) \mathrm{d}s \right|.$$

Alors pour tout $t \in I$ on a

$$\varphi(t) \leq Ae^{B|t-c|}.$$

Démonstration. On démontre tout d'abord l'inégalité voulue sur l'intervalle $I_{\geq c} := I \cap [c, +\infty[$. Si cet intervalle est réduit à $\{c\}$ il n'y a rien à démontrer. Sinon, pour $t \in I_{\geq c}$ on pose

$$F(t) = A + B \int_c^t \varphi(s) \mathrm{d}s.$$

Alors F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I_{\geq c}$, et pour $t \in I_{\geq c}$ on a $\varphi(t) \leq F(t)$ par hypothèse. D'autre part, pour $t \in I_{\geq c}$ on a $F'(t) = B\varphi(t)$, et donc

$$F'(t) \leq BF(t).$$

Il s'ensuite que la fonction $G(t) = e^{-Bt}F(t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I_{\geq c}$ et vérifie

$$G'(t) = e^{-Bt}(F'(t) - BF(t)) \leq 0$$

pour tout $t \in I_{\geq c}$. Par conséquent, pour $t \in I_{\geq c}$ on a $G(t) \leq G(c)$, c'est-à-dire

$$e^{-Bt}F(t) \leq Ae^{-Bc},$$

c'est-à-dire

$$F(t) \leq Ae^{B(t-c)}.$$

Ce qui démontre l'inégalité voulue sur $I_{\geq c}$.

L'inégalité correspondante sur $I \cap]-\infty, c]$ se démontre de manière similaire, en considérant la fonction

$$\widetilde{F}(t) = A + B \int_t^c \varphi(s) \mathrm{d}s$$

à la place de F. □

1.4. **Existence et unicité locales de solutions.** On commence par l'énoncé suivant.

Théorème 1.7. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $r_0, T_0 \in \mathbb{R}_{>0}$,

$$f : [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \mathrm{B_f}(y_0, r_0) \to \mathbb{R}^n$$

une fonction continue, et soient $k, M, T \in \mathbb{R}_{>0}$. On suppose que :

- f vérifie (1.3) pour tous $t \in [t_0 - T_0, t_0 + T_0]$ et $y, z \in \mathrm{B_f}(y_0, r_0)$;
- pour tout $x \in [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \mathrm{B_f}(y_0, r_0)$ on a $\|f(x)\| \leq M$;
- $T \leq \min(T_0, \frac{r_0}{M})$.

Alors il existe une unique solution (I, y) du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

avec $I = [t_0 - T, t_0 + T]$. De plus, pour toute solution (J, z) de ce problème de Cauchy avec $J \subset [t_0 - T, t_0 + T]$ on a $z = y_{|J}$.

On va donner deux preuves de ce théorème : une sous les hypothèses énoncées ci-dessus, et une autre (plus simple) sous une hypothèse plus forte. [3]

Première preuve du Théorème 1.7. On commence par démontrer l'*existence* d'une solution. Si $y : [t_0 - T, t_0 + T] \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue prenant ses valeurs dans $\mathrm{B_f}(y_0, r_0)$, alors la fonction

$$t \mapsto y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) \mathrm{d}s$$

prend également ses valeurs dans $\mathrm{B_f}(y_0, r_0)$. En effet, pour $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ on a

$$\left\| \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) \mathrm{d}s \right\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, y(s))\| \mathrm{d}s \right| \leq M|t - t_0| \leq MT \leq r_0,$$

où on a utilisé l'hypothèse que $T \leq \frac{r_0}{M}$. On peut donc définir une suite $(y_n)_{n \geq 0}$ de fonctions de $[t_0 - T, t_0 + T]$ dans $\mathrm{B_f}(y_0, r_0)$ en posant

$$\begin{cases} y_0(t) = y_0, \\ y_m(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{m-1}(s)) \mathrm{d}s \text{ pour } m \geq 1. \end{cases}$$

On va maintenant démontrer, par récurrence sur $m \geq 1$, que pour tout $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ on a

$$\|y_m(t) - y_{m-1}(t)\| \leq M \cdot \frac{k^{m-1}|t - t_0|^m}{m!}.$$

En effet, dans le cas $m = 1$ on a

$$\|y_1(t) - y_0(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, y_0) \mathrm{d}s \right\| \leq M|t - t_0|.$$

Si on suppose l'inégalité vraie pour un entier $m \geq 1$, alors

$$\begin{aligned} \|y_{m+1}(t) - y_m(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} (f(s, y_m(s)) - f(s, y_{m-1}(s))) \mathrm{d}s \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, y_m(s)) - f(s, y_{m-1}(s))\| \mathrm{d}s \right| \\ &\leq k \left| \int_{t_0}^{t} \|y_m(s) - y_{m-1}(s)\| \mathrm{d}s \right| \\ &\leq k \left| \int_{t_0}^{t} M \frac{k^{m-1}|s - t_0|^m}{m!} \right| \\ &\leq M \frac{k^m |t - t_0|^{m+1}}{(m+1)!}, \end{aligned}$$

ce qui prouve l'inégalité voulue au rang $m + 1$ et achève la preuve.

De cet énoncé on déduit que si $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ et si $m \geq 0$ on a

$$\|y_{m+1}(t) - y_m(t)\| \leq M \frac{k^m T^{m+1}}{(m+1)!}.$$

3. Fondamentalement, les ingrédients des deux preuves sont les mêmes. La première preuve revient à refaire la preuve du théorème du point fixe (Théorème 1.8) dans le cas particulier considéré, où on peut contrôler plus finement certaines majorations et ainsi assouplir l'hypothèse sur T.

Donc la série de fonctions $\sum_{m\geq 0} z_m$ définie par

$$z_0 = y_0, \quad z_m = y_m - y_{m-1} \text{ pour } m \geq 1$$

converge normalement sur $[t_0 - T, t_0 + T]$, ce qui implique que la suite de fonctions $(y_m)_{m\geq 0}$ converge uniformément sur $[t_0 - T, t_0 + T]$. Si on note $y : [t_0 - T, t_0 + T] \to \mathrm{B_f}(y_0, r_0)$ sa limite, alors y est continue (par convergence uniforme). De plus, en passant à la limite (uniforme) dans l'égalité

$$y_m(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{m-1}(s))\mathrm{d}s$$

on obtient que

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\mathrm{d}s.$$

(Pour démontrer la convergence uniforme de la fonction $s \mapsto f(s, y_{m-1}(s))$ vers $s \mapsto f(s, y(s))$ on utilise que f vérifie (1.3) sur le domaine considéré.) Au vu du Lemme 1.3, ceci montre que $([t_0 - T, t_0 + T], y)$ est une solution du problème de Cauchy considéré.

On considère maintenant la question de l'unicité. On fixe $y : [t_0 - T, t_0 + T] \to \mathrm{B_f}(y_0, r_0)$ une fonction telle que $([t_0 - T, t_0 + T], y)$ est solution du problème de Cauchy, et on veut montrer que si (J, z) est une solution avec $J \subset [t_0 - T, t_0 + T]$ alors $z = y_{|J}$. On remarque que si (J, z) est une telle solution, alors pour $t \in J$ on a

$$\begin{aligned}\|y(t) - z(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} (f(s, y(s)) - f(s, z(s)))\mathrm{d}s \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, y(s)) - f(s, z(s))\|\mathrm{d}s \right| \leq k \left| \int_{t_0}^{t} \|y(s) - z(s)\|\mathrm{d}s \right|.\end{aligned}$$

D'après la Proposition 1.6 appliquée à la fonction $s \mapsto \|y(s) - z(s)\|$ (et à $A = 0$), on en déduit que pour tout $s \in J$ on a $\|y(s) - z(s)\| = 0$, c'est-à-dire $y(s) = z(s)$. □

La deuxième preuve du Théorème 1.7 s'appuie sur le théorème du point fixe pour les applications contractantes, dont on rappelle l'énoncé. (Pour la preuve, voir la fiche de rappels de topologie.)

Théorème 1.8. Soit (E, d) un espace métrique complet, et soit $F : E \to E$ une application telle qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que pour tous $x, y \in E$ on a

$$d(F(x), F(y)) \leq \alpha \cdot d(x, y).$$

Alors F admet un unique point fixe dans E.

Deuxième preuve du Théorème 1.7. Dans cette preuve on suppose, en plus des hypothèses du Théorème 1.7, que $T < \frac{1}{k}$. On va appliquer le Théorème 1.8 à l'espace métrique complet [4]

$$E = \mathscr{C}^0([t_0 - T, t_0 + T], \mathrm{B_f}(y_0, r_0))$$

des fonctions continues de $[t_0 - T, t_0 + T]$ dans $\mathrm{B_f}(y_0, r_0)$, pour la distance définie par

$$d(y, z) = \sup_{t\in[t_0 - T, t_0 + T]} \|y(t) - z(t)\|,$$

4. De façon générale, l'espace des fonctions continues bornées d'un espace métrique vers un espace métrique complet, muni de la distance $d(f, g) = \sup_x d(f(x), g(x))$, est complet.

et la fonction

$$\phi : E \to E$$

définie par

$$\phi(y) : t \mapsto y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\mathrm{d}s.$$

(Pour voir que cette application est bien définie il faut voir que $\phi(y)$ prend effectivement ses valeurs dans $\mathrm{B_f}(y_0, r_0)$; cela découle de la condition $TM \leq r_0$ comme dans la première preuve.) On observe que si $y, z \in E$, pour tout $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ on a

$$\|\phi(y)(t) - \phi(z)(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, y(s)) - f(s, z(s))\|\mathrm{d}s \right| \leq kTd(y, z).$$

On en déduit que $d(\phi(y), \phi(z)) \leq kTd(y, z)$. Sous notre hypothèse on a $kT < 1$, et donc ϕ est contractante. Cette application admet donc un point fixe, ce qui prouve l'existence d'une solution au problème de Cauchy au vu du Lemme 1.3.

L'unicité s'obtient en appliquant le résultat d'unicité dans le Théorème 1.8, pour les constructions similaires à celles considérées ci-dessus avec $[t_0 - T, t_0 + T]$ remplacé par J. □

1.5. **Deux variantes.** Dans ce paragraphe on va considérer deux variantes du Théorème 1.7. Tout d'abord, la preuve de l'énoncé suivant est la même que celle du Théorème 1.7.

Théorème 1.9. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $r_0, T_0 \in \mathbb{R}_{>0}$,

$$f : [t_0, t_0 + T_0] \times \mathrm{B_f}(y_0, r_0) \to \mathbb{R}^n$$

une fonction continue, et soient $k, M, T \in \mathbb{R}_{>0}$. On suppose que :
- f vérifie (1.3) pour tous $t \in [t_0, t_0 + T_0]$ et $y, z \in \mathrm{B_f}(y_0, r_0)$;
- pour tout $x \in [t_0, t_0 + T_0] \times \mathrm{B_f}(y_0, r_0)$ on a $\|f(x)\| \leq M$;
- $T \leq \min(T_0, \frac{r_0}{M})$.

Alors il existe une unique solution (I, y) du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

avec $I = [t_0, t_0 + T]$. De plus, pour toute solution (J, z) de ce problème de Cauchy avec $J \subset [t_0, t_0 + T_0]$ on a $z = y_{|J}$.

Dans la deuxième variante, on part d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et d'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ continue et localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Fixons $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}^n$ tels que $(t_0, y_0) \in \Omega$. Sous nos hypothèses il existe $T_0, r_0, k > 0$ tels que

$$[t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \mathrm{B_f}(y_0, r_0) \subset \Omega,$$

et que f vérifie (1.3) pour tous $t \in [t_0 - T_0, t_0 + T_0]$ et $y, z \in \mathrm{B_f}(y_0, r_0)$. Soit également M un majorant de la fonction continue f sur le compact $[t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \mathrm{B_f}(y_0, r_0)$. Si $T \in \mathbb{R}_{>0}$ vérifie $T \leq \min(T_0, \frac{r_0}{M})$, on appellera $[t_0 - T, t_0 + T] \times \mathrm{B_f}(y_0, r_0)$ un *cylindre de sécurité* pour le problème considéré.

Théorème 1.10. Soient t_0, y_0, r_0, T_0, k et M comme ci-dessus. Si $T \in \mathbb{R}_{>0}$ vérifie $T \leq \min(T_0, \frac{r_0}{M})$, il existe une unique solution (I, y) du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

avec $I = [t_0 - T, t_0 + T]$. De plus, cette solution prend ses valeurs dans $\mathrm{B_f}(y_0, r_0)$, et pour toute solution (J, z) de ce problème de Cauchy telle que $J \subset [t_0 - T, t_0 + T]$ on a $z = y_{|J}$.

Démonstration. La preuve est la même que pour celle du Théorème 1.7, à une (subtile) différence près liée à la Remarque 1.2(1) : dans la preuve de l'unicité on doit considérer des fonctions $y : J \to \mathbb{R}^n$ qui pourraient a priori prendre des valeurs qui sortent de la boule $\mathrm{B_f}(y_0, r_0)$. En fait, pour compléter la preuve il suffit de montrer que toute solution (J, z) avec $J \subset [t_0 - T, t_0 + T]$ prend nécessairement ses valeurs dans $\mathrm{B_f}(y_0, r_0)$. Considérons donc une telle solution, et notons $J = (t_0 - \alpha, t_0 + \beta)$ avec $0 \leq \alpha, \beta \leq T_0$. (Ici les parenthèses désignent soit "[" soit "]".) Soient également $\alpha' \leq \alpha$, $\beta' \leq \beta$ maximaux tels que $z([t_0 - \alpha', t_0 + \beta'] \cap J) \subset \mathrm{B_f}(y_0, r_0)$. Si on suppose par exemple $\beta' < \beta$, alors pour tout $t \in [t_0, t_0 + \beta']$ on a

$$\|z(t) - y_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, z(s)) \mathrm{d}s \right\| \leq M(t - t_0) \leq M\beta' < TM \leq r_0.$$

Cette inégalité étant stricte on a encore $z(t) \in \mathrm{B_f}(y_0, r_0)$ sur un voisinage de β', ce qui contredit la maximalité de ce réel. □

1.6. **Un théorème d'unicité.**

Théorème 1.11. Soit $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert, et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue et localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Soient (I_1, y_1) et (I_2, y_2) deux solutions de l'équation différentielle

$$y' = f(t, y).$$

S'il existe $t_0 \in I_1 \cap I_2$ tel que $y_1(t_0) = y_2(t_0)$, alors

$$y_{1|I_1 \cap I_2} = y_{2|I_1 \cap I_2}.$$

Démonstration. Si $I_1 \cap I_2 = \{t_0\}$ il n'y a rien à démontrer. Sinon, écrivons $I_1 \cap I_2 = (\alpha, \beta)$ où les parenthèses désignent soit "[" soit "]". Supposons pour commencer que $t_0 \in]\alpha, \beta[$. Notons

$$A = \{t \in]\alpha, \beta[\mid y_1(t) = y_2(t)\} \subset]\alpha, \beta[.$$

Alors A est non vide, et fermé dans $]\alpha, \beta[$ par continuité. On va montrer que A est également ouvert dans $]\alpha, \beta[$. En effet, si $t_1 \in A$, par le Théorème 1.10 il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon] \subset]\alpha, \beta[$ et sur lequel on a unicité de la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_1) = y_1(t_1) \end{cases}.$$

Comme les restrictions de y_1 et y_2 sont deux solutions sur cet intervalle, on en déduit que $[t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon] \subset A$, ce qui achève la preuve du fait que A est ouvert.

Par connexité de $]\alpha, \beta[$, ces deux propriétés impliquent que $A =]\alpha, \beta[$. Par continuité, on en déduit que $y_1(t) = y_2(t)$ pour tout $t \in I_1 \cap I_2$, ce qui achève la preuve dans le cas considéré.

On suppose maintenant que $I_1 \cap I_2 = [t_0, \beta)$ avec $t_0 < \beta$. D'après le Théorème 1.10, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $t_0 + \varepsilon < \beta$ pour lequel on a unicité de la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

sur $[t_0, t_0 + \varepsilon]$. Comme les restrictions de y_1 et y_2 à cet intervalle sont solution, il existe alors $t_0' \in]t_0, t_0 + \varepsilon[$ tel que $y_1(t_0') = y_2(t_0')$, ce qui permet de conclure par le cas traité précédemment.

Le cas où $I_1 \cap I_2 = (\alpha, t_0]$ avec $\alpha < t_0$ peut être traité de la même manière. □

1.7. **Le théorème de Cauchy–Lipschitz.** On peut finalement énoncer et terminer la démonstration du théorème de Cauchy–Lipschitz.

Théorème 1.12 (Théorème de Cauchy–Lipschitz)**.** Soit $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert, et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue et localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}^n$ tels que $(t_0, y_0) \in \Omega$. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution maximale. De plus, son intervalle de définition est ouvert, et toute solution de ce problème de Cauchy s'en déduit par restriction.

Démonstration. Notons E l'ensemble des solutions du problème de Cauchy considéré. Alors $E \neq \varnothing$ par le Théorème 1.10. D'après le Théorème 1.11, les solutions coïncident sur leurs intervalles communs de définition. Elles se recollent donc en une fonction sur la réunion des intervalles de définition des solutions, et il est facile de voir que cette fonction est une solution maximale du problème de Cauchy, dont toute solution se déduit par restriction. Ceci démontre l'existence et l'unicité d'une solution maximale.

Il reste à démontrer que l'intervalle de définition de la solution maximale est ouvert. Notons donc (I, y) cette solution, et supposons par l'absurde que $I = (\alpha, \beta]$ pour des réels $\alpha < \beta$. En utilisant le Théorème 1.10 appliqué au problème de Cauchy

$$\begin{cases} z' = f(t,z) \\ z(\beta) = y(\beta) \end{cases}$$

on peut prolonger y au-delà de β, ce qui est absurde. Des arguments similaires s'appliquent dans le cas où I est de la forme $[\alpha, \beta)$. □

1.8. **Un exemple.** Nous donnons maintenant un exemple (tiré de [QZ, p. 357]) montrant que la solution maximale fournie par le Théorème 1.12 n'est pas toujours globale (c'est-à-dire définie sur l'intervalle maximal auquel on aurait pu s'attendre). On fixe $x_0 \in \mathbb{R}_{>0}$, et on considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases}.$$

(Avec les notations précédentes on a $n = 1$, $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, et la fonction f est définie par $f(t, y) = y^2$. Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$, et donc localement lipschitzienne par le Lemme 1.5.) On note (I, y) la solution maximale de ce problème fournie par le Théorème 1.12.

Puisque la fonction nulle est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = x^2, \\ x(t_0) = 0 \end{cases}$$

(pour n'importe quel $t_0 \in \mathbb{R}$), le Théorème 1.12 implique que y ne s'annule pas. Par le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que $y(t) > 0$ pour tout $t \in I$. On peut donc diviser par $y(t)^2$ dans l'équation vérifiée par y, et obtenir que pour tout $t \in I$ on a

$$\frac{y'(t)}{y(t)^2} = 1,$$

c'est-à-dire

$$\left(-\frac{1}{y}\right)'(t) = 1.$$

En intégrant entre 0 et t on obtient que

$$\frac{1}{x_0} - \frac{1}{y(t)} = t,$$

et donc que $\frac{1}{x_0} \notin I$ et

$$y(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$$

pour tout $t \in I$. En fait, la solution maximale de ce problème de Cauchy est définie sur l'intervalle $]-\infty, \frac{1}{x_0}[$, et est donnée sur cet intervalle par

$$t \mapsto \frac{x_0}{1 - x_0 t}.$$

Remarque 1.13. On a utilisé ci-dessus une conséquence très classique du Théorème 1.12, qu'il faut retenir : étant donné un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue et lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, si I est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ tel que $(I, 0)$ est solution de l'équation

$$y' = f(t, y)$$

(c'est-à-dire si $I \times \{0\} \subset \Omega$ et $f(t, 0) = 0$ pour tout $t \in I$), alors aucune solution non identiquement nulle d'un problème de Cauchy du type

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

avec $t_0 \in I$ ne peut s'annuler sur I.

2. Un autre théorème d'existence : le théorème d'Arzelà-Peano

Le but de cette partie est d'expliquer la démonstration du théorème d'Arzelà-Peano, qui fournit un résultat d'existence (mais non d'unicité !) pour les problèmes de Cauchy définis par une fonction f continue mais non nécessairement localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Cette preuve est plus compliquée que celle du théorème de Cauchy–Lipschitz et, dans la mesure où ce théorème n'est pas explicitement mentionné dans le programme de l'agrégation, il peut tout à fait être ignoré. (Cet énoncé est cependant nécessaire pour démontrer le Théorème 3.6 ; il faut donc l'inclure dans le plan si on veut énoncer ce dernier résultat.)

2.1. **Un résultat local.** Comme pour le cas du théorème de Cauchy–Lipschitz, on commence par démontrer un résultat *local*. On considère donc $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $T_0, r_0 \in \mathbb{R}_{>0}$, et une fonction continue

$$f : [t_0, t_0 + T_0] \times \mathrm{B_f}(y_0, r_0) \to \mathbb{R}^n.$$

On fixe également $M \in \mathbb{R}_{>0}$ un majorant de $\|f\|$ sur $[t_0, t_0 + T_0] \times \mathrm{B_f}(y_0, r_0)$.

Théorème 2.1. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une solution définie sur $[t_0, t_0 + T]$, avec $T = \min(T_0, \frac{r_0}{M})$.

Démonstration. La preuve se fait en 5 étapes.

Étape 1 : prolongement. Tout d'abord, on prolonge f en une fonction continue $\tilde{f} : [t_0, t_0+T_0]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ majorée (en norme) par M en posant, pour $t \in [t_0, t_0+T_0]$ et $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\tilde{f}(t, x) = \begin{cases} f(t, y) & \text{si } y \in \mathrm{B_f}(y_0, r_0)\,; \\ f(t, y_0 + \frac{r_0}{\|y-y_0\|} \cdot (y - y_0)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

(La preuve de la continuité de cette fonction est laissée au lecteur.)

Étape 2 : régularisation. On fixe $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, à support compact et à valeurs positives, telle que $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\mathrm{d}x = 1$. Si $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, pour $x \in \mathbb{R}^n$ on pose $\rho_k(x) = k^n \rho(kx)$, puis pour $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$ on pose

$$f_k(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(t, y)\rho_k(x - y)\mathrm{d}y. \tag{2.1}$$

(Cette intégrale est bien définie puisque la fonction intégrée est continue à support compact. Ici on a défini f_k par convolution "partielle", c'est-à-dire par rapport à la deuxième variable.) Ces fonctions ont les propriétés suivantes.

- Chaque f_k est continue et majorée (en norme) par M sur $[t_0, t_0 + T_0] \times \mathbb{R}^n$. En effet, par la formule de changement de base on a
$$f_k(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(t, x - y)\rho_k(y)\mathrm{d}y,$$
où la fonction $(t, x, y) \mapsto \tilde{f}(t, x-y)\rho_k(y)$ est continue sur $[t_0, t_0+T_0]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, et majorée par $M \cdot \rho_k$. Le résultat souhaité découle donc du théorème de continuité des intégrales à paramètres.
- Pour tout $t \in [t_0, t_0 + T_0]$ fixé et tout k, la fonction $x \mapsto f_k(t, x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. En effet, si $j \in \{1, \cdots, n\}$, la fonction
$$(t, x, y) \mapsto \tilde{f}(t, y)\rho_k(x - y)$$
est dérivable par rapport à x_j, de dérivée
$$(t, x, y) \mapsto \tilde{f}(t, y)\frac{\partial \rho_k}{\partial x_j}(x - y).$$
Si on restreint x à une boule ouverte, on peut remplacer l'intégrale par une intégrale sur une boule fermée, ce qui permet de majorer cette fonction par

une fonction intégrable. Par définition (voir (2.1)) et le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, f_k est dérivable par rapport à x_j et on a

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(t,y)\frac{\partial \rho_k}{\partial x_j}(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(t,x-y)\frac{\partial \rho_k}{\partial x_j}(y)\mathrm{d}y.$$

De même que dans le point précédent, on voit que $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$ est continue. Par le critère classique [Go, Chap. 5, §1.2, Théorème 1, p. 325], ceci implique que notre fonction est de classe $\mathscr{C}^1$, comme annoncé.

- Pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$, la suite de fonctions $(f_k)_{k\geq 1}$ converge uniformément sur $[t_0, t_0+T_0] \times K$ vers la restriction de $\tilde{f}$. En effet, pour tous $t \in [t_0, t_0+T_0]$ et $x \in K$ on a

$$\begin{aligned} f_k(t,x) - \tilde{f}(t,x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(t,x-y)\rho_k(y)\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(t,x)\rho_k(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\tilde{f}(t,x-y) - \tilde{f}(t,x)\Big)\cdot \rho_k(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\tilde{f}(t,x-\frac{z}{k}) - \tilde{f}(t,x)\Big)\cdot \rho(z)\mathrm{d}z, \end{aligned}$$

où pour la dernière égalité on a fait un changement de variable $z = ky$. Ici, puisque ρ est à support compact on peut remplacer l'intégrale sur $\mathbb{R}^n$ par une intégrale sur un compact K' (indépendant de k). Choisissons un compact $K'' \subset \mathbb{R}^n$ tel que $x - \frac{z}{k} \in K''$ pour tous $x \in K$, $z \in K'$ et $k \geq 1$. Comme $\tilde{f}$ est continue sur le compact $[t_0, t_0+T_0] \times K''$, elle y est uniformément continue par le théorème de Heine. En conséquence, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour $t \in [t_0, t_0+T_0]$ et $x, x' \in K''$ on a

$$\|x - x'\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\tilde{f}(t,x) - \tilde{f}(t,x')\| < \varepsilon.$$

Choisissons maintenant k tel que $\|\frac{z}{k}\| < \delta$ pour $z \in K'$. Alors pour $(t,x) \in [t_0, t_0+T_0] \times K$ on a

$$\|f_k(t,x) - \tilde{f}(t,x)\| < \varepsilon$$

puisque $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(z)\mathrm{d}z = 1$.

Étape 3 : application du théorème de Cauchy–Lipschitz. Pour tout $k \geq 1$, le Théorème 1.9 fournit une solution y_k du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f_k(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

définie sur $[t_0, t_0+T]$ avec $T = \min(T_0, \frac{r_0}{M})$, qui prend ses valeurs dans $\mathrm{B_f}(y_0, r_0)$. (Cette application est justifiée par le fait que f_k est de classe $\mathscr{C}^1$, comme démontré à l'étape 2, ce qui permet d'utiliser l'inégalité des accroissements finis.)

Étape 4 : application du théorème d'Ascoli. On va appliquer le théorème d'Ascoli [5] dans l'espace

$$\mathscr{C}^0([t_0, t_0+T], \mathrm{B_f}(y_0, r_0))$$

des applications continues de $[t_0, t_0+T]$ vers $\mathrm{B_f}(y_0, r_0)$ (muni de la distance donnée par la borne supérieure de la différence). Pour cela on doit vérifier que la suite (y_k) est équicontinue. Par l'inégalité des accroissements finis il suffit de vérifier que

5. Voir la fiche de rappels de topologie.

la suite $(\sup_y \|y'_k(t)\|)_{k\geq 1}$ est bornée. Cette propriété découle de l'égalité $y'_k(t) = f_k(t, y_k(t))$ conjuguée au fait que f_k est majorée en norme par M.

Le théorème d'Ascoli assure qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$ strictement croissante telle que la suite $(y_{\varphi(k)})_{k\geq 1}$ converge dans $\mathscr{C}^0([t_0, t_0+T], \mathrm{B_f}(y_0, r_0))$, c'est-à-dire converge uniformément sur $[t_0, t_0+T]$ vers une fonction y qui est continue et à valeurs dans $\mathrm{B_f}(y_0, r_0)$.

Étape 5 : conclusion. Pour conclure la preuve, on va montrer que y est une solution du problème de Cauchy considéré. Tout d'abord, on va vérifier que la suite de fonctions $(t \mapsto f_{\varphi(k)}(t, y_{\varphi(k)}(t)))_{k\geq 1}$ converge uniformément sur $[t_0, t_0+T]$ vers la fonction $t \mapsto \tilde{f}(t, y(t))$. En effet, pour tous $k \geq 1$ et $t \in [t_0, t_0+T]$ on a

$$\|f_{\varphi(k)}(t, y_{\varphi(k)}(t)) - \tilde{f}(t, y(t))\| \leq \\ \|f_{\varphi(k)}(t, y_{\varphi(k)}(t)) - \tilde{f}(t, y_{\varphi(k)}(t))\| + \|\tilde{f}(t, y_{\varphi(k)}(t)) - \tilde{f}(t, y(t))\|.$$

Dans cette inégalité, le premier terme de la somme est majoré par

$$\sup_{[t_0,t_0+T]\times \mathrm{B_f}(y_0,r_0)} \|f_{\varphi(k)} - \tilde{f}\|,$$

qui tend vers 0 quand $k \to +\infty$ par convergence uniforme sur $[t_0, t_0+T] \times \mathrm{B_f}(y_0, r_0)$ (voir l'étape 2). Pour achever la preuve, il suffit donc de montrer que

$$\|\tilde{f}(t, y_{\varphi(k)}(t)) - \tilde{f}(t, y(t))\|$$

tend vers 0 quand $k \to +\infty$, uniformément pour $t \in [t_0, t_0+T]$. Or $\tilde{f}$ est continue sur le compact $[t_0, t_0+T] \times \mathrm{B_f}(y_0, r_0)$, donc uniformément continue sur ce compact d'après le théorème de Heine. Comme la suite $(y_{\varphi(k)})_{k\geq 1}$ converge uniformément vers y sur $[t_0, t_0+T]$, on en déduit la convergence voulue.

Pour tous $k \geq 1$ et $t \in [t_0, t_0+T]$ on a

$$y_{\varphi(k)}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f_{\varphi(k)}(s, y_{\varphi(k)}(s))\mathrm{d}s.$$

Par passage à la limite (justifié par la convergence *uniforme* de la fonction sous l'intégrale) on en déduit que

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} \tilde{f}(s, y(s))\mathrm{d}s.$$

Au vu du Lemme 1.3, ceci montre que y est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = \tilde{f}(t, x) \\ x(t_0) = y_0 \end{cases}$$

sur $[t_0, t_0+T]$. Comme y prend ses valeurs dans $\mathrm{B_f}(y_0, r_0)$ et comme $\tilde{f}$ et f coïncident sur $[t_0, t_0+T] \times \mathrm{B_f}(y_0, r_0)$, on en déduit que y est effectivement solution du problème de Cauchy considéré. □

Remarque 2.2. Comme au §1.5, le Théorème 2.1 admet des variantes “à gauche”, où on travaille sur un cyclindre de la forme $[t_0 - T_0, t_0] \times \mathrm{B_f}(y_0, r_0)$, ou “symétrique”, où on travaille sur un cyclindre de la forme $[t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \mathrm{B_f}(y_0, r_0)$.

2.2. **Le théorème d'Arzelà-Peano.** Comme au §1.7, du Théorème 2.1 on déduit le résultat suivant.

Théorème 2.3. Soit $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert, et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Soient également $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}^n$ tels que $(t_0, y_0) \in \Omega$. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une solution. De plus, toute solution maximale est définie sur un intervalle ouvert.

Remarque 2.4. Pour un exemple d'équation pour lequel il n'y a pas unicité de la solution, voir par exemple [QZ, Chap. X, Remarque II.6, p. 360].

3. Étude de l'intervalle de définition de la solution maximale

Les théorèmes de Cauchy–Lipschitz et d'Arzelà–Peano assurent l'existence de solutions maximales pour des problèmes de Cauchy, mais ne disent rien sur l'intervalle sur lequel elles sont définies (au-delà de son caractère ouvert). Une fois ces théorèmes appliqués, et dans la mesure où il n'est en général pas possible de donner une formule explicite pour la solution, il reste donc à étudier cet intervalle, puis à voir ce qui peut être dit sur le comportement de la solution aux "bords" de cet intervalle.

Il existe des théorèmes généraux sur ce sujet (parfois appelés "théorèmes des bouts"), mais il est souvent possible (voire souhaitable) de traiter ces questions "à la main", comme on le fait dans le §3.1.

3.1. **Un exemple d'étude de solution.** On fixe $y_0 \in \mathbb{R}_{>0}$, et on considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{1}{t^2+y(t)^2} \\ y(0) = y_0 \end{cases}.$$

Ce problème rentre dans le cadre considéré ci-dessus, avec $n = 1$, $\Omega = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$, et la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\} & \to & \mathbb{R} \\ (t,y) & \mapsto & \frac{1}{t^2+y^2} \end{cases}.$$

Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et donc, en particulier, continue et localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable (voir le Lemme 1.5). Le Théorème 1.12 assure l'existence et l'unicité d'une solution maximale à ce problème de Cauchy, qu'on notera (I, y).

On va montrer successivement :

(1) que I contient $\mathbb{R}_{\geq 0}$;

(2) que y admet une limite ℓ quand $t \to \infty$;

(3) qu'on a $y(t) = \ell - \frac{1}{t} + \mathrm{o}(\frac{1}{t})$ au voisinage de $+\infty$.

Pour démontrer (1) on raisonne par l'absurde ; on suppose donc que I est borné à droite. On a $y'(t) \geq 0$ pour tout $t \in I$, donc y est croissante sur I. En particulier, pour $t \in I \cap \mathbb{R}_{\geq 0}$ on a $y(t) \geq y_0$, et donc

$$y'(t) = \frac{1}{t^2 + y(t)^2} \leq \frac{1}{t^2 + y_0^2} \leq \frac{1}{y_0^2}.$$

En intégrant, on en déduit que pour $t \in I \cap \mathbb{R}_{\geq 0}$ on a

$$y(t) = y_0 + \int_0^t y'(s)\mathrm{d}s \leq y_0 + \frac{t}{y_0^2}.$$

Comme I est borné à droite, y est donc majorée sur $I \cap \mathbb{R}_{\geq 0}$. Puisqu'elle est croissante, elle admet donc une limite quand t tend vers $\sup(I)$. En appliquant le théorème de la limite de la dérivée (voir [Go, Chap. 2, §1.4, Proposition 6, p. 76]), on voit que y peut se prolonger en une solution du problème de Cauchy sur $I \cup \{\sup(I)\}$, ce qui contredit la maximalité de (I, y).

Pour démontrer (2), on utilise de nouveau l'égalité

$$y(t) = y_0 + \int_0^t y'(s)\mathrm{d}s.$$

Par ailleurs, comme ci-dessus, pour tout $t \geq 0$ on a

$$0 \leq y'(t) \leq \frac{1}{t^2 + y_0^2}.$$

En particulier, y' est intégrable sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$, et donc y admet une limite quand $t \to \infty$, égale à

$$\ell = y_0 + \int_0^{+\infty} \frac{1}{s^2 + y(s)^2}\mathrm{d}s.$$

D'après cette formule, pour tout $t \geq 0$ on a

$$\ell - y(t) = \int_t^{+\infty} \frac{1}{s^2 + y(s)^2}\mathrm{d}s.$$

Puisque $\frac{1}{s^2+y(s)^2}$ est équivalent à $\frac{1}{s^2}$ en $+\infty$, on en déduit (en utilisant [Go, Chap. 3, §4.2, Théorème 3, p. 176]) que

$$\ell - y(t) \sim_{+\infty} \int_t^{+\infty} \frac{1}{s^2}\mathrm{d}s = \frac{1}{t}.$$

Ce qui établit (3).

3.2. **Le théorème de Cauchy–Lipschitz global.** On va maintenant voir une version du théorème de Cauchy–Lipschitz qui assure l'existence d'une solution globale, sous l'hypothèse que la fonction est "globalement lipschitzienne." Ici on va obtenir cet énoncé comme conséquence du Théorème 1.12, mais on peut aussi modifier la preuve pour le démontrer directement ; voir par exemple [Ro, Exercice 60] [6].

On considère donc un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$, un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, et une fonction

$$f : I \times U \to \mathbb{R}^n$$

continue qui vérifie la propriété suivante : pour tout segment $J \subset I$ il existe $k \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que pour tout $t \in J$ et tous $y, z \in U$ on a

$$\|f(t, y) - f(t, z)\| \leq k\|y - z\|.$$

6. Notons que dans cette rérérence il n'est pas supposé que I est ouvert. Cet exercice est l'Exercice 59 dans la première édition du livre.

Théorème 3.1. Sous les hypothèses ci-dessus, pour tous $t_0 \in I$ et $y_0 \in U$ le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur I. De plus, toute solution de ce problème de Cauchy s'en déduit par restriction.

Démonstration. D'après le Théorème 1.12 notre problème de Cauchy admet une unique solution maximale ; ce qu'il reste à voir est que cette solution est définie sur I. On raisonne par l'absurde, en supposant que son intervalle de définition est un intervalle I' inclus strictement dans I. Pour fixer les idées on va supposer que la borne à droite de I', qu'on notera β, est strictement inférieure à celle de I (et donc, en particulier, finie) ; le cas où c'est la borne à gauche qui est différente se traite de la même manière.

Soit $J = [t_0, \beta] \subset I$, et notons k un réel comme dans l'énoncé pour ce choix de segment. Pour tout $t \in [t_0, \beta[$ on a alors

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} y'(s)\mathrm{d}s = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\mathrm{d}s, \tag{3.1}$$

et donc

$$\|y(t)\| \leq \|y_0\| + \int_{t_0}^{t} \|f(s, y(s))\|\mathrm{d}s.$$

D'autre part, pour tout $s \in [t_0, \beta[$ on a

$$\|f(s, y(s)) - f(s, y_0)\| \leq k \cdot \|y(s) - y_0\|,$$

et donc

$$\|f(s, y(s))\| \leq \|f(s, y_0)\| + k \cdot \|y(s) - y_0\| \leq \|f(s, y_0)\| + k \cdot \|y_0\| + k\|y(s)\|, \tag{3.2}$$

ce qui implique donc que si $t \in [t_0, \beta[$ on a

$$\|y(t)\| \leq \|y_0\| + k\|y_0\|(\beta - t_0) + \int_{t_0}^{\beta} \|f(s, y_0)\|\mathrm{d}s + k \cdot \int_{t_0}^{t} \|y(s)\|\mathrm{d}s.$$

En appliquant ensuite le lemme de Gronwall (Proposition 1.6) à la fonction $\varphi : [t_0, \beta[\to \mathbb{R}_{\geq 0}$ définie par $\varphi(t) = \|y(t)\|$ on en déduit que pour tout $t \in [t_0, \beta[$ on a

$$\|y(t)\| \leq \left(\|y_0\| + k\|y_0\|(\beta - t_0) + \int_{t_0}^{\beta} \|f(s, y_0)\|\mathrm{d}s \right) e^{k(t-t_0)}.$$

Ceci montre que y est bornée sur $[t_0, \beta[$, ce qui (au vu de (3.2)) implique que la fonction $s \mapsto f(s, y(s))$ est également bornée sur cet intervalle, et donc intégrable. Au vu de (3.1), ceci montre que y admet une limite quand $t \to \beta$ (avec $t < \beta$). Cette fonction se prolonge donc en une fonction sur $I' \cup \{\beta\}$, dont on voit facilement (en utilisant le théorème de la limite de la dérivée, comme au §3.1) qu'elle est solution de notre problème de Cauchy. Ce qui contredit la maximalité de la solution. □

Remarque 3.2. Dans la pratique, quand ce théorème s'applique, on vérifie souvent l'hypothèse sur f en montrant qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ et que la fonction $x \mapsto d_x f$ est bornée sur $I \times U$. (Ceci repose sur l'inégalité des accroissements finis.)

Le Théorème 3.1 implique en particulier la version linéaire du théorème de Cauchy–Lipschitz, sous la forme suivante.

Théorème 3.3. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, et soient

$$A : I \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \quad B : I \to \mathbb{R}^n$$

des applications continues. Soient également $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = A(t)y + B(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur I. De plus, toute solution de ce problème de Cauchy s'en déduit par restriction.

Ce théorème peut également se démontrer directement, en adaptant la preuve du Théorème 1.12 ; voir par exemple [Po, Théorème 35.2]. En faisant cela on se rend compte qu'on n'a pas besoin de supposer I ouvert, et qu'on peut remplacer $\mathbb{R}^n$ par un espace de Banach général. (Dans ce cas, il faut supposer que A prend ses valeurs dans les endomorphismes *continus* de cet espace.)

3.3. **Un premier résultat de "sortie de tout compact".** On commence par un énoncé dont la preuve est relativement élémentaire (au sens où elle ne nécessite pas le théorème d'Arzelà–Peano), tiré de [Po, Théorème 34.4.1].

On considère un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, et une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ continue et localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.

Théorème 3.4. Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ avec $a < b$, et soit $y :]a, b[\to \mathbb{R}^n$ une fonction telle que $(]a, b[, y)$ est solution de l'équation

$$y' = f(t, y).$$

S'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $b - \varepsilon > a$ et $\{(t, y(t)) : t \in]b - \varepsilon, b[\}$ est contenu dans un compact K contenu dans Ω, alors il existe $c > b$ tel que y se prolonge en une solution de l'équation sur $]a, c[$.

La preuve du Théorème 3.4 va utiliser le fait général suivant.

Lemme 3.5. Soit E un espace métrique complet, soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ avec $\alpha < \beta$, et soit $g :]\alpha, \beta[\to E$ une fonction uniformément continue. Alors g se prolonge en une fonction continue sur $]\alpha, \beta]$.

Démonstration. Il suffit de montrer que g admet une limite quand t tend vers β (avec $t < \beta$), c'est-à-dire qu'il existe $x \in E$ tel que pour toute suite $(t_n)_{n \geq 0}$ de réels dans $]\alpha, \beta[$ qui tend vers β, la suite $(g(t_n))_{n \geq 0}$ tend vers x. Or si $(t_n)_{n \geq 0}$ est une telle suite, alors elle est de Cauchy, donc la suite $(g(t_n))_{n \geq 0}$ est de Cauchy (puisque g est uniformément continue), donc cette suite converge (puisque E est complet). Il reste à démontrer que la limite de la suite $(g(t_n))_{n \geq 0}$ ne dépend pas du choix de suite $(t_n)_{n \geq 0}$. Soient donc $(t_n)_{n \geq 0}$ et $(t'_n)_{n \geq 0}$ deux telles suites, et notons x, resp. x', la limite de la suite $(g(t_n))_{n \geq 0}$, resp. $(g(t'_n))_{n \geq 0}$. Si $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour $n \geq N$ on a

$$d(g(t_n), x) \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad d(g(t'_n), x) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Puisque g est uniformément continue, il existe $\delta > 0$ tel que pour $t, t' \in]\alpha, \beta[$ on a

$$|t - t'| < \delta \quad \Rightarrow \quad d(g(t), g(t')) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Puisque $(t_n)_{n\geq 0}$ et $(t'_n)_{n\geq 0}$ ont même limite, il existe N' tel que $|t_n - t'_n| < \delta$ pour $n \geq N'$. Si $n \geq \max(N, N')$ on a alors $d(g(t_n), g(t'_n)) < \frac{\varepsilon}{3}$, et donc $d(x, x') < \epsilon$. Ce qui montre finalement que $x = x'$ et achève la preuve. □

Preuve du Théorème 3.4. On fixe ε et K comme dans l'énoncé, et on pose $M = \sup_K \|f\|$. On a $\|y'(t)\| \leq M$ pour tout $t \in]b-\varepsilon, b[$, et donc par l'inégalité des accroissements finis y est M-lipschitzienne (en particulier, uniformément continue) sur $]b-\varepsilon, b[$. D'après le Lemme 3.5, y se prolonge par continuité en b. Notons ℓ la limite de y en b. On a alors $(b, \ell) \in K$, et donc $(b, \ell) \in \Omega$. De plus, pour $t \in]a, b[$ on a $y'(t) = f(t, y(t))$, et donc

$$y'(t) \xrightarrow[t\to b]{} f(b, \ell).$$

Par le théorème de la limite de la dérivée, le prolongement de y à $]b-\varepsilon, b]$ est de classe $\mathscr{C}^1$, et ce prolongement est solution du problème de Cauchy considéré sur $]b-\varepsilon, b]$. Soit maintenant z la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(b) = \ell \end{cases},$$

voir le Théorème 1.12. Alors y est une restriction de z, qui est définie sur un intervalle ouvert, ce qui permet de prolonger y à droite de b. □

3.4. **Un résultat "d'explosion près du bord".** On va maintenant démontrer un résultat "d'explosion" de la solution (en suivant [QZ, Chap. X, §III.2]), dont la preuve repose sur le théorème d'Arzelà–Peano, dans le cadre suivant. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, et soit $f :]a, b[\times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue.

Théorème 3.6. Soit (I, y) une solution maximale de l'équation

$$y' = f(t, y).$$

Notons $I =]T_*, T^*[$. Alors :

- ou bien $T^* = b$, ou bien $T^* < b$ et $\lim_{t\to T^*} \|y(t)\| = +\infty$;
- ou bien $T_* = a$, ou bien $T_* > a$ et $\lim_{t\to T_*} \|y(t)\| = +\infty$.

Démonstration. Les deux cas sont similaires ; nous ne considérerons donc que le premier. On raisonnera par l'absurde, en supposant donc que $T^* < b$ et qu'on n'a pas $\lim_{t\to T^*} \|y(t)\| = +\infty$. Alors il existe $C > 0$ et une suite $(t_k)_{k\geq 0}$ de réels dans I, qui converge vers T^*, et tels que $\|y(t_k)\| \leq C$ pour tout k. Fixons $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $T_* < \alpha < T^* < \beta < b$, et $M \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $\|f(t, x)\| \leq M$ pour tous $t \in [\alpha, \beta]$ et $x \in \mathrm{B_f}(0, C+1)$. On fixe également k_1 tel que $t_{k_1} \geq \alpha$ et $t_{k_1} + \frac{1}{M} > T^*$. On note

$$Q = [t_{k_1}, \beta] \times \mathrm{B_f}(y(t_{k_1}), 1).$$

Alors si $(t, x) \in Q$ on a $t \in [\alpha, \beta]$ et $\|x\| \leq \|y(t_{k_1})\| + \|x - y(t_{k_1})\| \leq C + 1$, ce qui implique que $\sup_Q \|f\| \leq M$.

On applique le Théorème 2.1 au point $(t_{k_1}, y(t_{k_1})) \in Q$ pour obtenir une solution z du problème de Cauchy

$$\begin{cases} z' = f(t, z) \\ z(t_{k_1}) = y(t_{k_1}) \end{cases}$$

définie sur $[t_{k_1}, t_{k_1} + T]$ avec $T = \min(\beta - t_{k_1}, \frac{1}{M})$. On a alors $t_{k_1} + T > T^*$. En effet, si $T = \beta - t_{k_1}$ alors $t_{k_1} + T = \beta > T^*$; sinon on a $T = \frac{1}{M}$, et $t_{k_1} + \frac{1}{M} > T^*$

par hypothèse. On peut donc prolonger y en posant

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y(t) & \text{si } t \in]T_*, t_{k_1}] \,; \\ z(t) & \text{si } t \in [t_{k_1}, t_{k_1} + T], \end{cases}$$

ce qui fournit une solution de notre équation définie sur un intervalle contenant strictement I. Ceci contredit la maximalité de y. □

3.5. **Application.** On considère de nouveau $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, et $f :]a, b[\times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue.

Corollaire 3.7. Si f est bornée alors toute solution maximale de l'équation

$$y' = f(t, y)$$

est globale, c'est-à-dire définie sur l'intervalle $]a, b[$.

Démonstration. Soit (I, y) une solution maximale, et notons $I =]T_*, T^*[$. Notons également M un majorant de $\|f\|$.

Supposons par l'absurde que $T^* < b$, et fixons $t_0 \in I$. Alors si $t \in [t_0, T^*[$ on a

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) \mathrm{d}s,$$

et donc

$$\|y(t)\| \leq \|y(t_0)\| + M(t - t_0) \leq \|y(t_0)\| + M(T^* - t_0).$$

Ceci contredit le Théorème 3.6. On en déduit donc que $T^* = b$.

On montre de même que $T_* = a$. □

Remarque 3.8. Si on suppose de plus f localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, on peut remplacer la référence au Théorème 3.6 par une référence au Théorème 3.4.

4. Exercices

4.1. **Équations différentielles ordinaires.**

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que l'équation $y' = f(y)$ admet une solution définie sur $\mathbb{R}$ et bornée. Montrer qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0) = 0$.

Référence : [Go, Chap. 6, §5, Problème 2].

Exercice 2 (Un exemple de linéarisation : les petits mouvements du pendule)**.** On fixe $a \in]0, \pi[$, et on considère l'équation différentielle vérifiée par l'angle que fait avec la verticale un pendule simple lâché sans vitesse initiale à l'instant t, avec l'angle initial a :

$$\begin{cases} x''(t) = -\sin(x(t)) \\ x(0) = a \\ x'(0) = 0 \end{cases}.$$

(1) Montrer que le problème de Cauchy considéré admet une unique solution globale (c'est-à-dire définie sur $\mathbb{R}$). (*Indication* : on pourra penser au théorème de Cauchy–Lipschitz global.) Dans la suite de cet exercice on notera x cette solution globale.

(2) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a
$$x'(t)^2 = 2(\cos x(t) - \cos a).$$
(3) En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $|x(t)| \leq a$. (*Indication* : on pourra utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.)

(4) On considère maintenant le problème "linéarisé" associé à ce problème de Cauchy :
$$\begin{cases} y''(t) = -y(t) \\ y(0) = a \\ y'(0) = 0 \end{cases}.$$
Montrer que ce problème de Cauchy admet admet une unique solution globale, et la calculer explicitement. Dans la suite de cet exercice on notera y cette solution globale.

(5) Montrer que le vecteur
$$Z = \begin{pmatrix} x - y \\ x' - y' \end{pmatrix}$$
vérifie une équation de la forme
$$Z'(t) = AZ(t) + B(t)$$
pour une certaine matrice A antisymétrique (constante) et une fonction $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

(6) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a
$$|x(t) - y(t)| \leq \frac{a^3}{6}|t|.$$
(*Indication* : on pourra appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction $t \mapsto e^{-tA}Z(t)$, en considérant la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ et en utilisant la majoration classique $|z - \sin(z)| \leq \frac{|z|^3}{6}$.)

Référence : [Ro, Exercice 45] [7]. Cet exercice (corrigé !) contient une discussion de la méthode utilisée, et certains compléments sur cet exemple.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(t, 0, 0) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que toute solution non identiquement nulle de l'équation
$$y'' = f(t, y, y')$$
a ses zéros isolés. (*Indication* : on pourra montrer que si $y(t_0) = 0$, alors $y'(t_0) \neq 0$.)

Référence : [Go, Chap. 6, §1.3, Exercice 2].

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, et soient f et g deux solutions globales de l'équation
$$y' = f(t, y).$$
Montrer que s'il existe $t_0 \in R$ tel que $f(t_0) < g(t_0)$, alors $f(t) < g(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. (*Indication* : on pourra utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.)

Référence : [Go, Chap. 6, §1.3, Exercice 3].

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante, de classe $\mathscr{C}^1$, qui admet un unique zéro noté a.

7. Cet exercice est l'Exercice 44 dans la première édition du livre.

(1) Montrer que si (I, y) est une solution non constante de l'équation $y' = f(y)$, alors y prend ses valeurs soit dans $]-\infty, a[$, soit dans $]a, +\infty[$.

(2) Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 > a$, et considérons une solution maximale (I, y) du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}.$$

On note $I =]\alpha, \beta[$.

(a) Montrer que y est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme croissant de I sur son image.

(b) Montrer que $\alpha = -\infty$, et que $\lim_{t \to -\infty} y(t)$ existe.

(c) Montrer que $y(t) \xrightarrow[t \to \beta]{} +\infty$. (*Indication* : si $\beta < \infty$, on pourra raisonner par l'absurde et essayer de prolonger y. Si $\beta = +\infty$ on pourra minorer y par une fonction affine.)

(d) Montrer que si $t_0 \in I$, pour tout $t \geq t_0$ dans I on a

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{f(s)} \mathrm{d}s = t - t_0.$$

(e) En déduire que $\beta < \infty$ ssi $\int_{y_0}^{+\infty} \frac{1}{f(s)} \mathrm{d}s < \infty$.

(3) Étudier de même les solutions dans le cas où $y_0 < a$.

Référence : [Po, §34.5.3].

Exercice 6 (Solutions périodiques pour les équations homogènes)**.** Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, et soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. Soit également (I, y) une solution de l'équation $y' = f(y)$. Montrer que s'il existe $t_1 < t_2$ dans I tels que $y(t_1) = y(t_2)$, alors y admet un prolongement à $\mathbb{R}$ en une solution périodique de l'équation. (*Indication* : on pourra considérer une solution maximale (J, z) dont (I, y) est la restriction, puis considérer la fonction $w : J + (t_1 - t_2) \to \mathbb{R}^n$ définie par $w(t) = z(t + t_2 - t_1)$.)

Référence : [Po, §34.5.2].

Exercice 7. Soit (I, y) une solution maximale de l'équation $y'' + 2y^3 = 0$ qui n'est pas identiquement nulle.

(1) Montrer que la fonction $y'^2 + y^4$ est constante sur I.

(2) En déduire que y et y' sont bornées sur I, puis que $I = \mathbb{R}$.

(3) Montrer que les zéros de y sont isolés. (*Indication* : on pourra utiliser l'Exercice 3.)

(4) Montrer que la fonction y s'annule. (*Indication* : si on suppose que y est toujours strictement négative sur $\mathbb{R}$, on pourra contredire le fait qu'elle est bornée.)

(5) Montrer que y n'admet pas de plus grand zéro. (*Indication* : on pourra raisonner par l'absurde, et contredire le fait que y et y' sont bornées.)

(6) Montrer que y est périodique. (*Indication* : on pourra se ramener au cas où y a trois zéros consécutifs a, b, c avec $y(t) > 0$ pour $t \in]a, b[$ et $y(t) < 0$ pour $t \in]b, c[$, et montrer que $y'(a) = y'(c)$, puis utiliser l'Exercice 6.

Référence : [Po, §34.6.4B].

Exercice 8. Déterminer les solutions sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$y' \ln(t) + 2ty^2 - \frac{y}{t} = 0.$$

(*Indication* : on pourra poser $y(t) = z(t)\ln(t)$.)

Référence : [Go, Chap. 6, §5, Problème 1].

4.2. **Équations différentielles linéaires.**

Exercice 9. On considère une fonction continue T-périodique $A : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, et l'équation différentielle

$$Y' = A(t)Y$$

avec Y une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^n$. Montrer que ce système admet une solution Y telle qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$Y(t+T) = \lambda \cdot Y(t)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Référence : [Go, Chap. 6, §2.3, Exercice 6].

Exercice 10. Résoudre l'équation différentielle

$$(1-t^2)y' + ty = 0$$

sur $\mathbb{R}$.

Référence : [Go, Chap. 6, §2.3, Exercice 1].

Exercice 11. Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, et soient

$$a, b : I \to \mathbb{R}$$

des fonctions continues. On s'intéresse à l'équation différentielle

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

sur I.

(1) Montrer que toute solution non identiquement nulle de cette équation a ses zéros isolés.
(2) Montrer que toute solution non identiquement nulle de cette équation a un nombre fini de zéros sur chaque segment $J \subset I$.
(3) Montrer que si y, z sont deux solutions non identiquement nulles de cette équation sur I et s'il existe $a \in I$ tel que $y(a) = z(a) = 0$, alors y et z sont proportionnelles.
(4) Montrer que si y, z sont deux solutions non identiquement nulles et non proportionnelles de cette équation sur I, alors z s'annule toujours entre deux zéros distincts de y. (*Indication* : on pourra par l'absurde considérer deux zéros successifs de y entre lesquels z ne s'annule pas, puis étudier la fonction y/z sur cet intervalle.)

Référence : [Po, §36.3.8].

5. Commentaires du jury (rapport 2023)

5.1. **Leçon 220 - Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires.** Cette leçon nécessite d'être soigneusement préparée. Bien entendu, la théorie de Cauchy–Lipschitz non linéaire en est le fondement, et comporte plusieurs points subtils (passages du local au global, phénomènes d'explosion en temps fini, etc.) qui requièrent une attention particulière. La leçon étant orientée vers l'étude d'exemples, il convient d'éviter cependant d'y consacrer une trop large portion du plan.

Le nombre des exemples proposés aura avantage à être restreint : il ne s'agit pas de présenter une longue compilation d'exemples à peine effleurés, mais d'en analyser avec soin un petit nombre, choisis pour leur intérêt et dans un souci d'illustrer des méthodes variées.

Des exemples de résolutions explicites peuvent bien sûr être proposés, mais l'intitulé appelle également des études qualitatives d'équations différentielles non linéaires d'ordre 1 ou 2, sans forcément toujours se limiter au pendule ou au mo dèle de Lotka–Volterra.

Il est important d'avoir compris comment l'étude d'une équation d'ordre 2 se ramène à celle d'un système différentiel d'ordre 1.

Dans les exemples d'études proposés, on a tout intérêt à mettre en évidence l'utilisation d'éléments géométriques pour construire l'allure des trajectoires : champs de vecteurs, points d'équilibre, barrières, isoclines, intégrales premières, et bien sûr, à faire des dessins ! Le cas autonome mérite une attention particulière, avec en particulier la recherche de trajectoires périodiques.

5.2. **Leçon 221 - Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.** La théorie de Cauchy–Lipschitz linéaire est une porte d'entrée obligée pour cette leçon. Elle constitue un des premiers triomphes historiques de l'utilisation de la complétude (méthode des approximations successives), et un exemple fondamental d'intervention de la dimension finie en analyse. Sans que cet aspect devienne trop envahissant, les candidates et candidats pourront proposer quelques exemples de résolutions explicites : cas des coefficients constants (qui mobilise fortement la réduction des endomorphismes), utilisation de séries entières, variation des constantes, etc.

Même dans le cadre linéaire, les études qualitatives présentent un grand intérêt et fournissent de nombreuses possibilités : étude du comportement asymptotique des solutions (pour lequel le lemme de Gronwall est un outil d'une grande efficacité), de la distribution des zéros, etc.

Les candidates et candidats solides pourront s'intéresser à la linéarisation d'équations non linéaires au voisinage d'un point d'équilibre, proposer des exemples de problèmes aux limites (théorie de Sturm–Liouville) ou d'études d'équations aux dérivées partielles linéaires.

6. Ressources utiles sur ce thème

`https://www.math.univ-toulouse.fr/~fboyer/_media/enseignements/agreg/cours_edo_agreg_fboyer.pdf`

Références

[Go] X. Gourdon, *Les maths en tête, Analyse, 3ème édition*, Ellipses, 2020.

[Po] A. Pommellet, *Agrégation de Mathématiques - Cours d'analyse*, Ellipses, 1994.

[QZ] H. Queffélec, C. Zuily, *Analyse pour l'agrégation, 3ème édition*, Dunod, 2008.

[Ro] F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*, deuxième édition, Cassini, 2003.