Les équations différentielles

Laurent Serlet

Janvier 2001

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Qu'est ce qu'une équation différentielle ?

C'est une équation qui s'écrit

$$H(t, y, y', \ldots, y^{(r)}) = 0 \tag{1.1}$$

Dans cette écriture r est un entier non nul appelé l'ordre de l'équation ; H est une fonction de $r+2$ variables ; y est une fonction de la variable réelle t à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$ et $y', \ldots, y^{(r)}$ sont ses dérivées. C'est bien sûr cette fonction y qui est inconnue et que l'on cherche à déterminer. Plus précisement le problème est de trouver un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et une fonction $y : t \mapsto y(t)$ dérivable sur cet intervalle jusqu'à l'ordre r et vérifiant l'équation c'est à dire

$$\forall t \in I, \;\; H(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(r)}(t)) = 0$$

En fait l'équation de forme très générale (1.1) ci-dessus est peu pratique. On préfèrera travailler avec des équations plus particulières dites du type explicite ou "résolue" (une terminologie facheuse) qui s'écrivent

$$y^{(r)} = G(t, y, y', \ldots, y^{(r-1)}) \tag{1.2}$$

Une première remarque est qu'une équation du type ci-dessus peut se ramener à une équation d'ordre 1, quitte à augmenter la dimension de l'espace où la fonction inconnue prend ses valeurs. En effet considérons l'équation (1.2) où G est une application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \cdots \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$. A la fonction y de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^d$ associons la fonction $u : I \to (\mathbb{R}^d)^r$ donnée par $u(t) = (y(t), y'(t), \ldots, y^{(r-1)}(t))$. Alors y est solution de (1.2) si et seulement si u est solution de $u' = F(t, u)$ où la fonction $F : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^d)^r \to (\mathbb{R}^d)^r$ est donnée par $F(t, (z_0, \ldots, z_{r-1})) = (z_1, \ldots, z_{r-1}, G(t, z_0, \ldots, z_{r-1}))$

1.2 Quelques problèmes concrets conduisant à des équations différentielles

La radioactivité du C^{14}

Le carbone existe dans la nature sous deux formes : le carbone C_6^{12} très majoritaire et le carbone C_6^{14} présent en infime proportion. Ce dernier se forme dans la haute atmosphere par des chocs entre neutrons haute énergie venus de l'espace et azote N_7^{14}. Ces atomes de carbone C_6^{14} se combinent à l'oxygéne pour former du dioxyde de carbone qui est respiré par les animaux et assimilés par les plantes via la photosynthèse. Certes ce C_6^{14} peut se désintgrer en redonnant de l'azote mais comme sa formation en haute atmosphère est continue, la proportion de carbone C_6^{14} dans l'atmosphere ou dans les êtres vivants est maintenue constante par les échanges avec le milieu. Cette proportion du carbone C_6^{14} dans le carbone des êtres vivants est bien connue. Quand un échantillon animal ou végétal meurt la quantité de C_6^{14} qu'il contient commence à décroitre au fur et à mesure des désintégrations de ces atomes. Notons $N(t)$ la quantité de C_6^{14} que contient l'échantillon à la date t comptée depuis la mort de l'échantillon. Le nombre de désintégrations, par unité de temps, est proportionnel à la quantité d'atomes encore présents d'ou l'équation

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t) \tag{1.3}$$

Cette équation différentielle est l'une des plus simples. La solution est une fonction exponentielle $N(t) = N(0)\exp(-\lambda\, t)$. La mesure de la quantité de C_6^{14} restant dans l'échantillon permet donc, puisque $N(0)$ et λ sont connus de déterminer la durée qui nous sépare de la mort de cet échantillon. Cette technique de datation est primordiale pour déterminer l'histoire de l'humanité.

Modèles de population

Depuis longtemps on cherche à établir des modèles fiables de population aussi bien pour la population humaine dans son ensemble que pour des populations d'espèces animales spécifiées dans des biotopes délimités. Le principe général d'évolution dans le temps d'une population $N(t)$ est que sa variation par unité de temps $\frac{dN(t)}{dt}$ est égale au nombre de naissances par unité de temps moins le nombre de décés par unité de temps plus éventuellement un terme qui rend compte des migrations par unité de temps.

Dans un modèle simpliste du à Malthus (1798) les naissances et les décés sont proportionnels à la population et s'écrivent respectivement $b\,N(t)$ et $d\,N(t)$ d'où l'équation

$$\frac{dN(t)}{dt} = b\,N(t) - d\,N(t) \tag{1.4}$$

La solution est évidemment une exponentielle. Ce modèle peut convenir pour décrire certaines populations, par exemple une population de bactéries, sur une période de temps limitée mais se prête mal à des prévisions à long terme. La faiblesse de ce modèle est qu'il ne tient pas compte de la contrainte que fait peser le milieu sur l'évolution d'une population. En effet la quantité de nourriture et d'espace que peut fournir un milieu à une population n'est pas forcément très expansible. Cela amena Verhulst en 1836 à considérer un modèle qui s'écrit :

$$\frac{dN(t)}{dt} = r\,N(t)\;(1 - \frac{N(t)}{K}) \tag{1.5}$$

Dans ce modèle, la valeur K est une valeur d'équilibre correspondant au milieu. On remarque en effet que la fonction constante égale à K est la fonction constante non nulle solution de l'équation. Des modèles plus raffinés sont envisagables. Dans une étude menée au Canada en 1978 sur les vers du bourgeon de l'épicea, l'équation différentielle proposée est

$$\frac{dN(t)}{dt} = r\,N(t)\;(1 - \frac{N(t)}{K}) - \frac{A\,(N(t))^2}{A^2 + (N(t))^2} \tag{1.6}$$

Le dernier terme est un terme de prédation lié à la densité d'oiseaux.

Imaginons un nouveau modèle où la fertilité de l'espèce varie avec la saison. Rajoutons un terme de compétition et un terme de prédation. Après normalisation on aboutit à une équation du type

$$y' = (2 + \cos t)\,y - \frac{1}{2}\,y^2 + \alpha \tag{1.7}$$

Prédateurs et proies

Nous voulons maintenant étudier les populations de deux espéces qui cohabitent, une espéce étant constituée de prédateurs et l'autre de proies. C'est le mathématicien italien Volterra qui a initié cette étude avec son ouvrage : “Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie”. Il souhaitait expliquer, grâce à des modèles, les phénomènes que le biologiste Ancona n'arrivait pas à comprendre. Si on note $N_1(t)$ l'évolution temporelle du nombre de proies et $N_2(t)$ celle des prédateurs, Volterra a proposé le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dN_1}{dt} & = & (r_1 - \gamma_1 \, N_2) \, N_1 \\ \frac{dN_2}{dt} & = & (-r_2 + \gamma_2 \, N_1) \, N_2 \end{array} \right. \tag{1.8}$$

Nous verrons ultérieurement que ce modèle fournit effectivement des informations quantitatives qui peuvent expliquer certains phénomènes a priori mystérieux.

Oscillateurs mécaniques et électriques

Les équations différentielles jouent un rôle fondamental dans toute la mécanique. Le principe fondamental de la cinématique dit que l'accélération du centre de gravité d'un solide indéformable, multiplié par sa masse, est égal à la somme des forces extérieures appliquées à ce solide. L'accélération est la dérivée seconde de la position et les forces appliquées sont souvent des fonctions de la position ce qui conduit à une équation différentielle. Par exemple pour un corps en chute libre le vecteur position $\mathbf{x}(t)$ est solution de $\mathbf{x}''(t) = \mathbf{g}$ où $\mathbf{g}$ désigne le vecteur du champ de gravitation. Il s'agit si l'on veut d'une équation différentielle mais triviale car seule la dérivée seconde figure. Elle se résout par deux intégrations successives. Si on considère la chute d'un solide de masse m soumis à un frottement fluide, proportionnel à la vitesse, l'équation devient

$$m \, \mathbf{x}''(t) + \gamma \, \mathbf{x}'(t) - m \, \mathbf{g} = 0 \tag{1.9}$$

Cette équation d'ordre 2 peut se mettre sous forme d'une équation dans $(\mathbb{R}^3)^2$ d'ordre 1. Plus précisement $\mathbf{x}$ est solution de l'équation ci-dessus si et seulement si $(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ est une solution $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ du système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{x}' & = & \mathbf{y} \\ \mathbf{y}' & = & -\frac{\gamma}{m} \, \mathbf{y} + \mathbf{g} \end{array} \right. \tag{1.10}$$

Bien souvent on rencontre en mécanique des oscillateurs. Quiconque a déjà vu en film les oscillations du pont de Tacoma et l'effondrement qui s'en suivi, est convaincu que ce sont des phénomènes importants. Du point de vue schématique, on peut se représenter un oscillateur harmonique comme un point matériel dont les mouvements hors de la position d'équilibre sont soumis à une force de rappel comme celle d'un ressort c'est à dire proportionnelle à l'allongement depuis l'équilibre. Ainsi considèrons un point matériel de masse m accroché à un ressort dont l'autre extrémité est fixe et qui peut se déplacer horizontalement sur un axe. L'équation satisfaite par la coordonnée $x(t)$ de ce point est

$$m\, x''(t) + k\, x(t) = 0 \tag{1.11}$$

Si en plus il y a un frottement visqueux, ce qui est plus réaliste, l'équation devient

$$m\, x''(t) + \gamma\, x'(t) + k\, x(t) = 0 \tag{1.12}$$

On peut imaginer qu'une force exterieure s'ajoute. Pensons au tablier du pont de Tacoma soumis aux rafales de vent. Ce genre d'oscillations forcées sont décrites par une équation de genre :

$$m\, x''(t) + \gamma\, x'(t) + k\, x(t) = b(t) \tag{1.13}$$

Ecrit sous forme de système d'ordre 1 on voit que (x, x') est solution de

$$\left\{ \begin{array}{rcc} x' & = & y \\ y' & = & -\frac{\gamma}{m}\, y - \frac{k}{m}\, x + \frac{1}{m}\, b(t) \end{array} \right. \tag{1.14}$$

Les osillateurs harmoniques se retrouvent en électricité. Considèrons un circuit RLC en série. L'intensité i qui traverse le circuit obéit à l'équation différentielle :

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + (1/C)i = 0 \tag{1.15}$$

La encore on peut imaginer que l'on force l'oscillateur en appliquant un générateur d'intensité aux bornes du circuit.

D'autres oscillateurs ont été rencontrés en électronique comme l'oscillateur de Duffing qui après normalisation des variables donne l'équation

$$x''(t) + x(t) - x^3(t) = 0 \tag{1.16}$$

Dans les années 1920, le physicien hollandais Van der Pol a étudié des oscillations dans un circuit triode qu'il a modélisé par l'équation :

$$x''(t) - (1 - x^2(t))\, x'(t) + x(t) = 0 \tag{1.17}$$

Transformée en équation d'ordre 1, on trouve le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & y \\ y' & = & (1 - x^2)\, y - x \end{array} \right. \tag{1.18}$$

Pendule oscillant

Pour un pendule ordinaire de longueur l et de masse m l'angle avec la verticale α obéit à l'équation

$$l\,\alpha'' + mg\,\sin\alpha = 0 \tag{1.19}$$

et avec amortissement cela donne

$$l\,\alpha'' + kl\,\alpha' + mg\,\sin\alpha = 0 \tag{1.20}$$

1.3 Classification des équations différentielles

On a déjà vu la notion d'ordre d'une équation différentielle qui est l'ordre maximal des dérivées de la fonction inconnue. On a vu que l'on peut se ramener à l'ordre 1 par un changement de fonction inconnue.

On dit que l'équation d'ordre 1 $y' = F(t, y)$ est linéaire si la fonction $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est affine par rapport à la seconde variable. Cela veut dire que si on identifie le vecteur $y(t)$ de $\mathbb{R}^d$ à une matrice colonne à d lignes, l'équation s'écrit

$$y' = A(t)\,y + B(t)$$

où $A(t)$ est une matrice carrée à d lignes et d colonnes qui dépend de t et $B(t)$ est une matrice colonne à d lignes qui dépend elle aussi de t. Si $B(t) = 0$ l'équation est dite linéaire homogène. Si en plus la matrice $A(t)$ ne dépend pas de t, l'équation s'écrit $y' = Ay$ où A est une matrice fixée. Il s'agit d'une équation linéaire homogène à coefficients constants. Ce type d'équation sera étudié en détail dans un chapitre ultérieur.

Même si on peut se ramener à l'ordre 1 par un procédé qui a été décrit précédemment, il est bon d'étendre le vocabulaire ci-dessus au cas de l'équation d'ordre r comme écrite en (1.2). Un qualificatif sera appliqué à cette équation si il peut être appliqué à l'équation d'ordre 1 obtenue après application du procédé de passage de l'ordre r à l'ordre 1. Plus clairement une équation linéaire d'ordre r est une équation qui s'écrit matriciellement

$$y^{(r)} = A_0(t)\,y + A_1(t)\,y' + \cdots + A_{r-1}(t)\,y^{(r-1)} + B(t)$$

où $A_0(t), A_1(t), \ldots, A_{r-1}(t)$ sont des matrices carrées à d lignes et $B(t)$ une matrice colonne à d lignes. Dans ce cas la fonction inconnue y est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et on identifie le vecteur $y(t)$ de $\mathbb{R}^d$ avec une matrice colonne à d lignes.

En fait pour beaucoup d'équations apparaissant dans la pratique, on a $d = 1$. C'est à dire que la fonction inconnue est à valeurs réelles. On dit alors que l'équation est scalaire. Par exemple l'équation linéaire scalaire d'ordre r s'écrit

$$y^{(r)} = a_0(t)\, y + a_1(t)\, y' + \cdots + a_{r-1}(t)\, y^{(r-1)} + b(t)$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}, b$ sont des fonctions à valeurs réelles. Dans le cas où la fonction b est nulle, l'équation devient une équation linéaire scalaire d'ordre r homogène. Si en plus les fonctions $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$ sont constantes, l'équation linéaire scalaire d'ordre r homogène est en plus à coefficients constants.

Revenons à la formulation générale (d'ordre 1) $y' = F(t, y)$. Si la fonction F ne depend pas de t, l'équation est dite autonome. Elle s'écrit donc $y' = F(y)$. Ce genre d'équation décrit un système dont le mécanisme d'évolution ne dépend pas du temps. Ce cas est bien sûr très fréquent. Les lois de la physique ou de la biologie par exemple ne changent pas avec le temps qui s'écoule. Le dernier chapitre étudiera en détail le cas des systèmes autonomes. Notons que si $y(t)$ est solution de $y' = F(y)$ alors $t \mapsto y(t + \alpha)$ où α est une constante réelle est aussi solution. En particulier les graphes des solutions d'une équation scalaire autonomes sont stables par les translations de vecteur paralléle à l'axe des temps.

1.4 Précisions sur la notion de solution

Reprenons une équation de forme générale

$$y' = F(t, y)$$

où F est une application continue d'un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$. On appelle solution de cette équation un couple (I, φ) où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et φ est une application dérivable de I dans $\mathbb{R}^d$ telle que pour tout $t \in I$, $(t, \varphi(t)) \in U$ et $\varphi'(t) = F(t, \varphi(t))$.

Prenons un exemple très simple : l'équation

$$y' = y^\alpha$$

où $\alpha \in]-\infty, 1[$. Cela correspond donc avec les notations ci-dessus à $F(t, y) = y^\alpha = \exp(\alpha \ln y)$ et $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Il s'agit donc de trouver un intervalle I de $\mathbb{R}$ et une application dérivable $\varphi : I \to \mathbb{R}$ vérifiant : $\forall t \in I, \varphi(t) > 0$ et $\forall t \in I,\ \varphi'(t) = [\varphi(t)]^\alpha$. Cette dernière équation s'écrit $\forall t \in I,\ \frac{d}{dt}[(1 -$

$\alpha)^{-1}\ (\varphi(t))^{1-\alpha}] = 1$. Il existe donc une constante réelle C telle pour tout $t \in I$, $(1-\alpha)^{-1}\ (\varphi(t))^{1-\alpha} = t + C$. Cela implique que $t + C > 0$ pour $t \in I$ puisque $1-\alpha > 0$ et $(\varphi(t))^{1-\alpha} > 0$. Ainsi $I \subset]-C, +\infty[$ et pour un tel I, φ est donnée par la formule

$$\varphi(t) = [(1-\alpha)(t+C)]^{1/(1-\alpha)} \tag{1.21}$$

Pour résumer, on obtient toutes les solutions de l'équation $y' = y^\alpha$ en choisissant un réel C puis un intervalle ouvert $I \subset]-C, +\infty[$ et enfin en donnant la formule (1.21).

Au vue de l'exemple précédent une première remarque s'impose. Il y a en général une infinité de solutions à une équation différentielle, ces solutions étant par exemple paramétrées par une constante d'intégration comme dans le cas ci-dessus. En fait dans la pratique on s'attache souvent à trouver une solution de l'équation différentielle qui satisfait en plus des conditions initiales données. Par exemple si l'équation différentielle décrit le comportement d'un système mécanique, la condition initiale traduit l'état de ce système avant l' évolution, “à l'instant zéro”. Un tel problème s'écrit donc

$$\begin{cases} y' = F(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

où t_0 et y_0 sont donnés avec $(t_0, y_0) \in U$. On appelle l'écriture précédente problème de Cauchy relatif à l'équation et à la condition initiale considérées. Une solution est alors un couple (I, φ) où I est un intervalle ouvert contenant t_0 et φ est une application dérivable sur I dans $\mathbb{R}^d$ telle que $\varphi(t_0) = y_0$ et, pour tout $t \in I$, $(t, \varphi(t)) \in U$ et $\varphi'(t) = F(t, \varphi(t))$.

Si l'équation est d'ordre r le problème de Cauchy se présente sous la forme

$$\begin{cases} y^{(r)} = F(t, y, y', \ldots, y^{(r-1)}) \\ y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, \ldots, y^{(r-1)}(t_0) = y_{r-1} \end{cases}$$

Reprenons l'exemple $y' = y^\alpha$ et ajoutons la condition initiale $y(t_0) = y_0$ avec $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 > 0$. Alors la constante C apparaissant dans la discussion précédente vaut $C = t_0 - (1-\alpha)^{-1}\ y_0^{1-\alpha}$ et la solution du problème de Cauchy est définie sur un intervalle $I \subset]C, +\infty[$ et donnée par la formule (1.21).

Une seconde remarque que l'on peut faire après l'étude de l'exemple $y' = y^\alpha$ est que les solutions peuvent être définies sur des intervalles I plus ou moins grands. On introduit alors un ordre du prolongement. Soient (I, φ) et (J, ψ) deux solutions d'une même équation différentielle. On dit que (J, ψ) prolonge (I, φ) si $I \subset J$ et si la restriction de ψ à I coincide avec φ. On appelle solution maximale une solution (I, φ) qui ne peut être prolongée par une solution (J, ψ) avec $J \supset I$ et $J \neq I$.

Théorème 1 *Toute solution se prolonge en une solution maximale.*

Dans l'exemple de $y' = y^\alpha$ une solution sur I associée à une valeur de la constante d'intégration C peut être prolongée en une solution maximale définie sur $]-C, +\infty[$.

1.5 Deux problèmes : existence et unicité

Les questions de l'existence et de l'unicité vont être au centre de ce cours. Pour l'existence on verrra que l'hypothèse de continuité de $F : U \to \mathbb{R}^d$ sur l'ouvert $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ suffit à assurer l'existence d'une solution locale au problème de Cauchy : $y' = F(t, y), y(t_0) = y_0$ (où $(t_0, y_0) \in U$). C'est le contenu du théorème de Péano que l'on démontrera au chapitre 5. Par solution locale on entend une solution du problème de Cauchy définie sur un voisinage de la valeur initiale t_0.

Il a été vu au paragraphe précédent que toute solution de prolonge en une solution maximale. Mais ce prolongement n'est pas nécessairement unique. Autrement dit un problème de Cauchy peut admettre plusieurs solutions maximales. Considérons par exemple le problème de Cauchy suivant

$$y' = 2\sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0$$

On constate aisément que, pour tous réels a, b avec $a < 0 < b$, la fonction définie par $\varphi(t) = 0$ si $t \in [a, b], \varphi(t) = (t-b)^2$ si $t \in [b, +\infty[, \varphi(t) = -(t-a)^2$ si $t \in]-\infty, a]$ est solution du problème de Cauchy ci-dessus et elle est évidemment maximales puisque définie sur $\mathbb{R}$ entier. Il y a donc au moins autant de solutions maximales de ce problème de Cauchy que de choix de réels a et b avec $a < 0 < b$.

On prouvera dans la suite de ce cours le théorème de Cauchy-Lipschitz qui donne des conditions suffisantes pour assurer l'unicité de la solution maximale d'un problème de Cauchy.

1.6 Calculs et représentations des solutions

Quand des résultats d'existence et d'unicité ont été établis pour une équation différentielle il reste à calculer ces solutions. Le mot calculer peut avoir deux sens différents : cela peut signifier trouver des formules explicites donnant la solution ou cela peut vouloir dire obtenir des estimations numériques de ces solutions. Il y a un certain nombre d'équations différentielles pour lesquelles on peut effectivement donner des solutions explicites, par exemple certaines équations linéaires. On trouve d'ailleurs des recueils de solutions d'équations différentielles. Il faut sans doute préciser ce qu'on entend par formule explicite. Dans le sens courant il s'agit d'une formule faisant intervenir les fonctions élémentaires usuelles : puissances, exponentielle, logarithme, fonctions trigonométriques et leurs inverses. Mais d'autres fonctions peuvent être considérées comme élémentaires. Les fonctions de Bessel, par exemple, sont définies par une série entière et donnent les solutions d'une famille d'équations linéaires du second ordre.

Malheureusement, il y a pléthore d'équations différentielles que l'on ne peut résoudre explicitement, par exemple les suivantes pourtant très simples d'écriture :

$$y' = y^2 - t, \quad y' = \sin(ty), \quad y' = e^{ty}$$

D'ailleurs, il suffit que penser au calcul des primitives qui est un cas d'équation différentielle dégénérée $y' = f(t)$. Par exemple pour $f(t) = \exp(-t^2)$, $f(t) = \sqrt{t^3+1}$ ou $f(t) = (\sin t)/t$, les primitives ne peuvent être exprimées à partir des fonctions usuelles. Elles sont pourtant couramment utilisées pour la résolution de problèmes.

Pour les équations différentielles que l'on ne sait résoudre explicitement, il reste le calcul numérique. Nous étudierons certains algorithmes de calcul numérique comme ceux d'Euler ou de Runge-Kutta. S'il s'agit de représenter graphiquement les solutions ou de faire des calculs à partir de celles-ci, les solutions obtenues par des algorithmes numériques rendent autant de service que les formules explicites qui nécessitent aussi des évaluations numériques. Néanmoins pour ces solutions issues de calculs numériques, il faut savoir estimer leur fiabilité c'est à dire controler les erreurs, que ce soit des erreurs dues à l'algorithme ou des erreurs de calcul.

Divers types de représentations graphiques sont utilisées pour les équations différentielles. Pour un problème de Cauchy relatif à une équation du premier ordre $y' = F(t, y)$ avec y à valeurs réelles, il est naturel de représenter une solution (I, y) par son graphe $\{(t, y(t));\ t \in I\}$ dans le plan. Une telle courbe est parfois appelée <u>courbe intégrale</u> de l'équation différentielle, sans doute parce que résoudre une équation différentielle revient bien souvent à calculer des intégrales. Si on voulait représenter toutes les solutions d'une équation $y' = F(t, y)$ cela nécessiterait de tracer une infinité de graphes, autant que de conditions initiales possibles. Cela ne peut se faire mais on peut choisir un nombre restreint de conditions initiales et tracer les graphes correspondants. On peut aussi tracer le <u>diagramme des pentes</u>. A ce sujet, remarquons que si y est solution de $y' = f(t,y)$ alors au point $(t, y(t))$ du graphe de y la tangente a pour pente $F(t, y(t))$. Le diagramme des pentes consiste donc à tracer en des points (t_n, y_n) régulièrement disposés dans le plan un petit segment de pente $F(t_n, y_n)$. Ainsi si le graphe d'une solution passe par un des ces points il sera tangent en ce point à ce petit segment. Si les nombres de points (et donc de segments) dessinés est assez grand on voit apparaître l'allure des solutions.

Considèrons maintenant une équation de premier ordre mais bi-dimensionnelle : y est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et autonome. Elle s'écrit donc, avec une fonction inconnue (x, y),

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & f_1(x,y) \\ y' & = & f_2(x,y) \end{array} \right. \tag{1.22}$$

On peut alors représenter les solutions comme des courbes paramétrées

$$\{(x(t), y(t)), t \in I\}$$

du plan. Le plan est alors qualifié d'espace des phases. Ce que l'on verra alors est l'ensemble des valeurs $(x(t), y(t))$ prises par la solution mais pas la façon dont cet ensemble est décrit quand t varie. Pour avoir cette vision il faudrait faire une représentation en trois dimensions utilisant un procédé de perspective. Pour avoir une idée de l'allure des solutions sans les calculer on peut reprendre l'idée du diagramme des pentes et tracer le champ des directions. Cela consiste, pour des points (x_n, y_n) régulièrement disposés dans le plan, à tracer en chacun de ces points un petit vecteur colinéaire à $(f_1(x_n, y_n), f_2(x_n, y_n))$. En effet si une solution passe par le point (x_n, y_n) elle sera dirigée en ce point selon le petit vecteur que l'on a tracé. Avec un nombre suffisant de points on devine l'allure des solutions.

Si l'équation est scalaire d'ordre 2, on sait qu'on se ramène au cas précédent en prenant pour nouvelle fonction inconnue (y, y') et on est donc amené à tracer dans le plan les courbes $\{(y(t), y'(t));\ t \in I\}$.

1.7 Exercices

Exercice 1 Voici une liste d'équations différentielles puis une liste de qualificatifs. Pour chaque équation dire quels qualificatifs on peut lui appliquer. Pour les équations d'ordre > 1 donner l'équation d'ordre 1 correspondante.

$$y' - \frac{2}{t+1} y = (t+1)^2$$

$$(t^2 - 1)\, y'' + t\, y' - y = 1$$

$$y' + t\, y = t^3\, y^3$$

$$y'^2 + y' - t\, y = \cos t$$

$$y' + 4\, y = e^t$$

$$y'' + \cos t\, y' + 2\, y = t$$

$$y''' + 4\, y^2 = 2$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & \sin t\, x + 3 \\ y' & = & x + 3\, y + e^t \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x^2 + 3 \\ y' & = & 2\, x + z \\ z' & = & e^x \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x'' & = & x - 5 \cos t\, y' \\ y'' & = & 3\, y + e^t \end{array} \right.$$

- explicite / implicite
- scalaire/ vectorielle (multi-dimensionnelle)
- linéaire/ homogène/ à coefficients constants
- d'ordre 1 / d'ordre 2/ d'ordre 3
- autonome

Exercice 2 Voir feuille suivante extraite de : Hubbard J.H., West B.H., Differential Equations : A dynamical systems approach. Springer-Verlag.

Exercice 3 Pour l'équation $x' = x^2 - t = f(x,t)$, dessiner des isoclines et le diagramme des pentes. Essayer de deviner l'allure des solutions.

On pose $\alpha(t) = -\sqrt{t}$ et $\beta(t) = -\sqrt{t-1}$. On notera que $\alpha'(t) < f(t, \alpha(t))$ et $\beta'(t) > f(t, \beta(t))$. Montrer que si une solution $x(t)$ vérifie $\alpha(t_0) < x(t_0) < \beta(t_0)$ pour un certain $t_0 \geq 2$ alors pour tout $t \geq t_0$, $\alpha(t) < x(t) < \beta(t)$. Que dire de $\lim_{t \uparrow +\infty} |\beta(t) - \alpha(t)|$? Quel est le comportement de $x(t)$ quand $t \uparrow +\infty$?

Exercice 4 On considère une solution de l'équation $x' = 1 + A\frac{\cos^2 x}{t^2}$. Cette équation intervient en théorie des cordes vibrantes. On suppose que la solution considérée est définie au voisinage de $+\infty$. Quel est le comportement de cette solution quand $t \uparrow +\infty$?

Chapitre 2

Quelques équations différentielles particulières

2.1 Théorème de Poincaré et applications

Nous allons d'abord étudier des équations différentielles scalaires de la forme

$$a(t,y) + y'\,b(t,y) = 0 \tag{2.1}$$

où a et b sont deux fonctions à valeurs réelles définies sur $\mathbb{R}^2$ ou plus généralement sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$. L'intégration d'une équation différentielle de ce type sera facile dans le cas suivant :

$$a(t,y) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,y), \;\; b(t,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) \tag{2.2}$$

où f est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. En effet dans ce cas l'équation (2.1) s'écrit simplement

$$\frac{d}{dt} f(t, y(t)) = 0$$

Ainsi si y est solution sur un intervalle I, il existe une une constante réelle k telle que pour tout $t \in I$, $f(t, y(t)) = k$. Autrement dit les solutions de (2.1) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ sont celle dont le graphe $\{(t, y(t));\, t \in I\}$ est inclus dans l'une des courbes $\{(t,y);\; f(t,y) = k\}$. Rappelons que ces courbes sont appelées lignes de niveau de la fonction f. La question naturelle est donc de savoir quand il existe f telle que (2.2).

Théorème 2 (de Poincaré) *Soit U un pavé de $\mathbb{R}^2$, a, b deux applications de U dans $\mathbb{R}$ continument dérivables sur U. Alors il existe une application $f:\ (t,y)\mapsto\mathbb{R}$ de U dans $\mathbb{R}$ dérivable telle que*

$$a=\frac{\partial f}{\partial t}\ \text{et}\ b=\frac{\partial f}{\partial y}$$

si et seulement si

$$\frac{\partial a}{\partial y}=\frac{\partial b}{\partial t}$$

Preuve. La condition est nécessaire à cause du théorème de Schwarz. En effet une fonction de deux variables de classe C^2 a des dérivées croisées égales.

Inversement, supposons que la condition de dérivée est satisfaite par a et b et choisissons un point (t_0,y_0) dans le pavé U. Posons alors

$$f(t,y)=\int_{t_0}^{t}a(s,y_0)\,ds+\int_{y_0}^{y}b(t,z)\,dz$$

Il est facile de vérifier que cette fonction f convient. Pour la dérivée en y c'est immédiat. Pour la dérivée en t la dérivation de la première intégrale est triviale ; pour la seconde on dérive sous le signe somme puis on utilise l'hypothèse.

Exemple. Considèrons l'équation $(t+k\,y)\,y'+(y-t)=0$ avec $k\neq 0$. Ce cas est couvert par ce qui précède car $\partial_t(t+k\,y)=\partial_y(y-t)$. On est conduit par deux intégrations à

$$f(t,y)=t\,y+k\,\frac{y^2}{2}-\frac{t^2}{2}=\frac{k}{2}\,(y+t)^2-\frac{1+k}{2k}\,t^2$$

Les courbes intégrales sont donc incluses dans une hyperbole si $1+k>0$ et dans une ellipse si $1+k<0$.

2.2 Equations à variables séparables

On appelle équation <u>à variables séparées</u> une équation de la forme

$$b(y)\,y'=a(t)$$

où a et b sont des fonctions continues définies respectivement sur des intervalles I et J. Notons A et B les primitives respectives de a et b. Alors toute solution y vérifie $A(t) = B(y)$. Si b ne s'annule pas sur J, B est strictement monotone et on peut écrire $y(t) = B^{-1}(A(t))$ qui est définie sur $A^{-1}(B(J))$.

On appelle équation à variables séparables une équation du type

$$a(t)\, c(y) - b(y)\, d(t)\, y' = 0$$

On se ramène au cas précédent en se restreignant à des intervalles où $c(y) \neq 0$ et $d(t) \neq 0$.

Exemple. Considèrons l'équation $y' = a\, y - b\, y^2$ où a et b sont deux paramètre strictement positifs. Cette équation décrit un modèle de population avec compétition. Ecartons déja les solutions constantes égales à 0 ou à a/b. Pour une solution ne prenant pas ces deux valeurs, on peut écrire l'équation sous la forme séparée

$$\frac{y'}{a\, y - b\, y^2} = 1$$

Une intégration conduit à

$$\frac{1}{a}\, \ln \left| \frac{y}{a - b\, y} \right| = t + C$$

d'où on déduit une expression explicite des solutions.

2.3 Equation linéaire du premier ordre unidimensionelle

Théorème 3 *Soit a et b deux fonctions continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. L'équation différentielle scalaire linéaire d'ordre 1 :*

$$y' = a(t)\, y + b(t)$$

a pour solutions sur I les fonctions de la forme $u + z$ où u est une solution particulière de l'équation et z est une solution de l'équation homogène associée : $z' = a(t)\, z$. Les solutions de cette équation homogène s'écrivent

$$z(t) = \lambda\, e^{A(t)}$$

où λ est une constante réelle et A est une primitive de a. De plus on obtient une solution particulière u par la formule

$$u(t) = e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} b(s)\, e^{-A(s)}\, ds$$

où $t_0 \in I$. Cette solution particulière est même la solution du problème de Cauchy de condition initiale $u(t_0) = 0$.

Preuve. Il est immédiat de vérifier que la fonction u définie par la formule donnée dans l'énoncé est une solution de l'équation c'est à dire $u' = a(t)\, u + b(t)$. Ensuite par une soustraction des deux équations on constate que y est solution de $y' = a(t)\, y + b(t)$ si et seulement si $z = y - u$ est solution de $z' = a(t)\, z$. Il nous reste donc à étudier cette équation dite équation homogène et à montrer que ses solutions s'écrivent $t \mapsto \lambda\, e^{A(t)}$. Il y a la solution nulle qui correspond au cas $\lambda = 0$. Considèrons maintenant une solution z non identiquement nulle. Elle est non nulle en un certain point $t_1 \in I$. Par continuité il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ où z ne s'annule pas et où l'équation s'écrit $z'/z = a(t)$. Cela conduit sur J à $\ln |z(t)| = A(t) + C$ où C est une constante d'intégration. On en déduit sur J, $|z(t)| = e^C\, e^{A(t)}$. En fait nous allons choisir J le plus grand possible, c'est à dire comme la réunion des intervalles ouverts inclus dans I contenant t_1 et où z ne s'annule pas. Si $J \neq I$ alors z s'annule en la borne droite (ou la borne gauche) de J car sinon J pourrait être prolongé. L'expression de la solution sur J montre en passant à la limite à gauche (ou à droite) en l'extrémité de J qu'une telle annulation de z est impossible. On en déduit que $J = I$ et donc que z a un signe constant sur I. L'expression de z est donc $z(t) = \varepsilon\, e^C\, e^{A(t)}$ avec $\varepsilon \in \{-1, +1\}$. En posant $\lambda = \varepsilon\, e^C$ on aboutit au résultat annoncé.$\square$

On voit très facilement que la solution du problème de Cauchy de condition initiale $u(t_0) = y_0$ est

$$u_0(t) = y_0\, e^{A(t)-A(t_0)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} b(s)\, e^{-A(s)}\, ds$$

Nous pouvons donner une interprétation en termes de gestion d'un compte en banque. Le problème de Cauchy $y' = a(t)\, y + b(t)$, $y(t_0) = y_0$ décrit l'évolution de la valeur d'un compte en banque. Celui-ci est crédité de y_0 au temps t_0. Il est rémunéré selon un taux d'intérêt dit taux spot $a(t)$ c'est à dire que si sa valeur est $y(t)$ au temps t, il gagne $a(t)\, y(t)\, dt$ sur le petit intervalle de temps $[t, t + dt]$. De plus sur ce compte on effectue "en temps continu" des dépots ou retraits donnés par la fonction $b(t)$. Notons que la quantité

$$\omega(t_0, t) = e^{A(t)-A(t_0)} = \exp \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds$$

donne la valeur au temps t de 1F placé au temps t_0. L'expression

$$y(t) = \omega(t_0, t)\, y_0 + \int_{t_0}^{t} b(s)\, \omega(s, t)\, ds$$

signifie que la valeur du compte au temps t résulte de l'actualisation à la date t de sa valeur au temps t_0 et de l'actualisation à la date t des sommes versées ou retirées entre t_0 et t.

2.4 Equations se ramenant à des équations linéaires

2.4.1 Equations de Bernoulli

Ce sont des équations de la forme $y' = p(t)\,y + q(t)\,y^\alpha$ où α est un réel différent de 1. On peut faire le changement de fonction inconnue : $z = y^{1-\alpha}$ qui ramène à une équation linéaire.

2.4.2 Equations de Riccati

Ce sont des équations de la forme $y' = a(t)\,y^2 + b(t)\,y + c(t)$. On sait résoudre cette équation dès que l'on connait une solution particulière u. On pose alors $y = u + z$. Cela conduit à une équation de Bernoulli pour z avec $\alpha = 2$. Comme indiqué ci-dessus on peut alors faire le changement d'inconnue $w = \frac{1}{z}$ qui conduit à une équation linéaire pour w.

2.5 Equations incomplétes du premier ordre

On appelle équation incomplète les équations du type $f(t, y') = 0$ ou $f(y, y') = 0$. Quand elles sont explicites, elles s'écrivent $y' = g(t)$ ce qui ramène à une recherche de primitives ou $y' = g(y)$ qui est à variables séparables. Ce sont donc les formes implicites qui sont intéressantes. Etudions par exemple le cas

$$f(y, y') = 0$$

Nous supposons que nous savons paramétrer la courbe $f(X, Y) = 0$. Par exemple considèrons $y^2 + y^2\,y'^2 = a^2$ $(a > 0)$. Cela correspond au cas $f(X, Y) = X^2 + X^2\,Y^2 - a^2$. Notons que l'équation $f(X, Y) = 0$ implique $X^2 \leq a^2$ donc X peut se paramétrer de la façon suivante : $X = a\,\cos\theta$. Alors $f(X, Y) = 0$ équivaut à $Y^2 = \tan^2\theta$. Notons qu'une solution y ne s'annule pas donc garde un signe constant. On étudiera le cas où ce signe est positif. On se place de plus sur un intervalle de temps où y' est strictement positif. D'autres solutions s'en déduisent par les changements de $y(t)$ en $-y(t)$ ou $y(-t)$ ou $-y(-t)$. La paramétrisation obtenue est donc

$$y = a\,\cos\theta,\ y' = \tan\theta,\ \theta \in]0, \pi/2[$$

En combinant les deux égalités on obtient $-a\,\cos\theta(t)\,\theta'(t) = 1$ d'où $-a\,\sin\theta(t) = t - C$. Ainsi on obtient la courbe paramètrée $t = C - a\,\sin\theta,\ y = a\,\cos\theta$ qui est l'équation d'un quart de cercle.

On peut obtenir une expression analytique en éliminant θ de la forme paramètrée. D'ailleurs cette forme analytique peut s'obtenir directement à partir de l'équation différentielle qui se ramène à une forme séparée.

2.6 Exercices

Exercice 1 Trouver les courbes intégrales de $(t\,\cos y + 3y^2)\,y' + \sin y + 2t = 0$.

Exercice 2 Montrer que le théorème de Poincaré ne s'applique pas à l'équation $(y^2 - t^2) - 2tyy' = 0$. En multipliant par $(t^2 + y^2)^{-2}$, montrer qu'il peut s'appliquer à la nouvelle équation obtenue et procéder à la résolution.

Exercice 3 Résoudre $\frac{e^y - 1}{e^y - 2}\,y' = \frac{1}{t}$

Exercice 4 Résoudre $-(1 + y^2) + (1 + t^2)\,y' = 0$

Exercice 5 Résoudre $t^2\,(1 + t^2)\,y' - 2\,y = 8$

Exercice 6 Résoudre $(1 + t^2)y' + t\,y = 2\,t^2$.

Exercice 7 On considère l'équation $(t^2 - 1)\,y'' + t\,y' - y = 1$ sur l'intervalle $]-1, 1[$. Trouver une solution particulière u de l'équation homogène associée. Procéder au changement de fonction inconnue $y = u\,z$ puis résoudre.

Exercice 8 Résoudre $y' + t\,y = t^3\,y^3$.

Exercice 9 Résoudre $3\,y' = y\,\tan t + \frac{1}{y^2}$

Exercice 10 Résoudre $(1 + t^3)\,y' - y^2 - t^2\,y = 2t$. On précisera toute les solutions maximales.

Exercice 11 On considère l'équation $|y'| + 3\,x^2\,y = 0$. Montrer qu'une solution non nulle de cette équation ne peut s'annuler. Donner toutes les solutions maximales.

Exercice 12 Une goutte d'eau sphérique s'évapore de manière proportionnelle à sa surface. Va-t-elle s'évaporer complètement en un temps fini ? En serait-il de même si l'évaporation était proportionnelle au volume ?

Exercice 13 Une colonie de bactéries se développe en gardant la forme d'un disque. Elles se reproduisent à un certain taux. Elles ne meurent pas sur la durée de l'expérience sauf celles se trouvant en périphérie qui sont victimes des agressions extérieures. Modéliser l'évolution du nombre de bactéries. Y a-t-il convergence vers un équilibre ?

Exercice 14 (Extrait du partiel d'avril 2000) On considère l'équation :
(E) $y' + y^2 - \frac{1}{t}y + \frac{1}{t^2} = 0$.

1) Cette équation est elle linéaire ? autonome ? une équation de Bernoulli ? une équation de Riccati ?
2.a) Soit y une solution de **(E)** définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}^*$. Parmi les trois fonctions suivantes :
(i) $t \mapsto -y(t)$ sur I
(ii) $t \mapsto y(-t)$ sur $-I = \{-x, x \in I\}$
(iii) $t \mapsto -y(-t)$ sur $-I$
laquelle est solution de **(E)** ?
2.b) Quelle conséquence la remarque précédente a-t-elle sur l'intervalle d'étude de l'équation **(E)** et sur l'ensemble des graphes des solutions ?
3) Trouver une solution particulière de la forme $t \mapsto t^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{Z}$.
4.a) Montrer que si y est solution de **(E)** sur I alors ou bien $y(t) = 1/t$ sur I ou bien il existe une fonction z de I dans $\mathbb{R}^*$ telle que $y = (1/t) + (1/z)$.
4.b) Quelle est alors l'équation vérifiée par z ?
4.c) Résoudre cette équation en z.
5.a) Quelles sont les solutions maximales de **(E)** sur $\mathbb{R}_+^*$?
5.b) Dessiner ces solutions.
5.c) Compléter en traçant les graphes de solutions sur $\mathbb{R}_-^*$.

Chapitre 3

Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

Le but de ce chapitre est de déterminer les solutions de l'équation différentielle linéaire multi-dimensionnelle d'ordre 1 à coefficients constants qui s'écrit

$$X' = A\,X$$

La fonction inconnue X est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{C}^d$. On identifiera librement un vecteur de $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{C}^d$ à une matrice colonne à d lignes de telle sorte que l'écriture matricielle $X' = A\,X$ a bien un sens avec A matrice carrée $d \times d$.

On étudiera aussi une équation différentielle qui se ramène au cas précédent. Il s'agit de l'équation linéaire scalaire d'ordre $d \geq 2$ à coefficients constants qui s'écrit :

$$x^{(d)} + a_{d-1}\,x^{(d-1)} + \cdots + a_1\,x' + a_0\,x = 0$$

où $a_{d-1}, \ldots, a_1\,a_0$ sont des scalaires donnés. On a vu dans le premier chapitre comment ce cas se ramène à celui évoqué précédemment.

Nous allons utiliser les notions developpées dans le cours d'algèbre linéaire, en particulier la notion d'exponentielle de matrice.

3.1 Existence et unicité de la solution

On note $\mathbb{K}$ le corps des scalaires qui sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Théorème 4 *Pour tout $x_0 \in \mathbb{K}^d$ le problème de Cauchy*

$$X' = A\,X, \quad X(0) = x_0$$

admet une unique solution définie sur $\mathbb{R}$ qui est donnée par

$$X(t) = \exp(tA)\, x_0$$

Preuve. Pour t réel et h voisin de 0, on a

$$\begin{aligned}
\exp((t+h)A) - \exp(tA) &= \exp(tA)\,(\exp(hA) - I) \\
&= \exp(tA)\,\left(h\,A + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{h^k}{k!}\,A^k\right) \\
&= h\,\exp(tA)\,A + O(h^2)
\end{aligned}$$

On en déduit que $t \mapsto \exp(tA)$ est dérivable de dérivée $t \mapsto \exp(tA)\,A$ ou encore $t \mapsto A\,\exp(tA)$ par commutativité de A et $\exp(tA)$. Ainsi la fonction $X(t)$ donnée dans le théorème est bien solution du problème de Cauchy énoncé. Il reste à voir que c'est la seule. Autrement dit, si X_1 et X_2 sont deux solutions du problème de Cauchy énoncé, leur différence $X_1 - X_2$ est nulle. Cette différence $X_1 - X_2$ est solution de $X' = A\,X,\ \ X(0) = 0$. Il s'agit donc de voir que toute solution de $X' = A\,X,\ \ X(0) = 0$ est identiquement nulle. Il suffit de poser $Y(t) = \exp(-tA)\,X(t)$. On constate que la dérivée de Y est nulle donc Y est constante. Comme elle s'annule en 0 elle est en fait identiquement nulle.

3.2 Structure de l'espace des solutions

Nous allons constater que l'ensemble des solutions de $X' = AX$ a une structure intéressante, ce qui est du à la linéarité de l'équation. Cela se produira aussi dans le cas de coefficients non constants comme on le verra ultérieurement.

Proposition 5 *L'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de $X' = A\,X$ où A est une matrice carrée $d \times d$ est un espace vectoriel de dimension d.*

Preuve. Le fait que cet ensemble de solutions soit un sous-espace vectoriel de l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}^d$ se vérifie immédiatement. Prenons une base de $\mathbb{K}^d$, $(e_1, \ldots, e_d)$ par exemple la base canonique et considèrons les d solutions $X_1, \ldots, X_d$ qui vérifient les conditions initiales respectives $X_i(0) = e_i$. Alors ces d solutions sont libres. Cela se vérifie instantanémment en évaluant en 0. Pour tout $x_0 = \sum_{i=1}^d \alpha_i\, e_i \in \mathbb{K}^d$ la combinaison linéaire $X = \sum_{i=1}^d \alpha_i\, X_i$ est une solution de $X' = AX$ qui vérifie $X(0) = x_0$ et on peut même dire la solution puisqu'on sait qu'il y a unicité. Ainsi toute solution est combinaison linéaire de $X_1, \ldots, X_d$. Au total $(X_1, \ldots, X_d)$ est une base de l'ensemble des solutions.

3.3 Expression des solutions

Nous voulons maintenant obtenir les solutions par une formule plus explicite que celle utilisant l'exponentielle de matrice qui ne révèle pas clairement la dépendance en t.

Proposition 6 *Une solution de $X' = AX$ où A est une matrice carrée complexe $d \times d$ s'écrit*

$$X(t) = \sum_{\lambda \in Sp(A)} e^{\lambda t} \, (v_0^\lambda + v_1^\lambda t + \cdots + v_{m(\lambda)-1}^\lambda t^{m(\lambda)-1})$$

où $m(\lambda)$ est égal à la multiplicité de la valeur propre λ comme racine du polynome caractéristique et $v_0^\lambda, v_1^\lambda, \ldots, v_{m(\lambda)-1}^\lambda$ sont des vecteurs du sous-espace caractéristique relatif à A et associé à la valeur propre λ c'est à dire que $(A - \lambda I)^{m(\lambda)} \, v_i^\lambda = 0$. On peut même remplacer dans ce qui précède $m(\lambda)$ par $\tau(\lambda)$ multiplicité de λ comme racine du polynome minimal de A (on a $\tau(\lambda) \leq m(\lambda)$).

Remarquons que si toute solution de $X' = AX$ est du type donné ci-dessus, une fonction de ce type n'est pas nécessairement solution de $X' = AX$.

Preuve. Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^d$ dont A est la matrice sur la base canonique. On sait par ce qui précède que $X(t) = \exp(tu)(x_0)$. Décomposons $\mathbb{C}^d$ en la somme directe des sous-espaces caractéristiques de u et écrivons x_0 selon cette décomposition :

$$x_0 = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} x_\lambda \text{ où } x_\lambda \in \mathrm{Car}(u, \lambda) = \ker(u - \lambda \, \mathrm{id})^{m(\lambda)}$$

Notons u_λ la restriction de u au sous espace caractéristique $\mathrm{Car}(u, \lambda)$. On a donc $u_\lambda = \lambda \, \mathrm{id} + n_\lambda$ où n_λ est un endomorphisme nilpotent. L'indice de nilpotence de n_λ est $\tau(\lambda)$ multiplicité de λ comme racine du polynome minimal. On a donc $n_\lambda^{\tau(\lambda)} = 0$. Notons que le sous espace $\mathrm{Car}(u, \lambda)$ est stable pour u donc aussi pour $\exp(tu)$. On a alors

$$\begin{aligned} X(t) &= \exp(tu)(x_0) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \exp(tu)(x_\lambda) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \exp(tu_\lambda)(x_\lambda) \\ &= \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} e^{t\lambda} \exp(tn_\lambda)(x_\lambda) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} e^{t\lambda} \sum_{k=0}^{\tau(\lambda)-1} (t \, n_\lambda)^k (x_\lambda) \end{aligned}$$

En notant $v_k^\lambda = n_\lambda^k(x_\lambda)$ on obtient le résultat.

Dans le cas d'une matrice A **réelle** et d'une condition initiale réelle, la solution $X(t)$ est bien-sûr réelle elle aussi. Mais la matrice A pouvant être considérée comme une matrice complexe, on dispose de l'expression de solutions X^C à valeurs complexes. Il est facile de vérifier que X^C est solution complexe si et seulement si ses parties réelle et imaginaire sont solutions réelles. En particulier les solutions réelles s'obtiennent simplement en prenant les parties réelles et imaginaires des solutions complexes. Elles sont donc de la forme

$$\begin{aligned} X(t) &= \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \cap \mathbb{R}} e^{\lambda\, t}\, P_\lambda(t) \\ &+ \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \setminus \mathbb{R}} e^{\mathrm{Re}(\lambda)\, t}\, \left(A_\lambda(t) \cos(\mathrm{Im}(\lambda)\, t) + B_\lambda(t) \sin(\mathrm{Im}(\lambda)\, t)\right) \end{aligned}$$

où $P_\lambda, A_\lambda, B_\lambda$ sont des polynomes à coefficients vectoriels de degrés respectifs strictement inférieurs à $m(\lambda)$ et même à $\tau(\lambda)$.

3.4 Cas de l'équation scalaire d'ordre n

Pour l'équation linéaire scalaire d'ordre $d \geq 2$ à coefficients constants on peut décrire exactement l'ensemble des solutions.

Théorème 7 *Les solutions à valeurs complexes de l'équation*

$$x^{(d)} + a_{d-1}\, x^{(d-1)} + \cdots + a_1\, x' + a_0\, x = 0$$

où $a_{d-1}, \ldots, a_1\, a_0$ sont des complexes donnés forment un espace vectoriel de dimension d dont une base est donnée par la famille

$$\left\{ t \mapsto e^{\lambda\, t}\, t^j;\ \ \lambda \text{ racine de } X^d + a_{d-1}\, X^{d-1} + \cdots + a_1\, X + a_0 \text{ et } 0 \leq j < m(\lambda) \right\}$$

où $m(\lambda)$ désigne la multiplicité de λ en tant que racine du polynome $X^d + a_{d-1}\, X^{d-1} + \cdots + a_1\, X + a_0$ appelé polynome caractéristique de l'équation différentielle ci -dessus.

Preuve. La fonction scalaire x est solution de $x^{(d)} + a_{d-1}\, x^{(d-1)} + \cdots + a_1\, x' + a_0\, x = 0$ si et seulement si la fonction vectorielle

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(d-1)}(t) \end{pmatrix}$$

est solution de $X'(t) = A\,X(t)$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdot & \cdot & -a_{d-1} \end{pmatrix}$$

D'après le paragraphe précédent on peut écrire

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(d-1)}(t) \end{pmatrix} = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} e^{\lambda\, t}\,(v_0^\lambda + v_1^\lambda\, t + \cdots + v_{m(\lambda)-1}^\lambda\, t^{m(\lambda)-1})$$

où $m(\lambda)$ est égal à la multiplicité de la valeur propre λ comme racine du polynome caractéristique de A et $v_0^\lambda, v_1^\lambda, \ldots, v_{m(\lambda)}^\lambda$ sont des vecteurs de $\mathbb{C}^d$. Le calcul du polynome caractéristique de A a été effectué dans un chapitre précédent. On trouve le polynome $X^d + a_{d-1}\,X^{d-1} + \cdots + a_1\,X + a_0$. En regardant l'égalité donné par la première ligne de cette écriture matricielle on voit que $x(t)$ est effectivement combinaison linéaire des applications $\left\{t \mapsto e^{\lambda\, t}\, t^j;\;\; \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\; 0 \le j < m(\lambda)\right\}$. Le nombre de ces applications est $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} m(\lambda) = d$. On sait déja que les solutions forment un espace de dimension d. La famille génératrice exhibée précèdemment est donc une base et le théorème est prouvé.

Voyons maintenant le cas **réel.** Les solutions à valeurs réelles de l'équation

$$x^{(d)} + a_{d-1}\,x^{(d-1)} + \cdots + a_1\,x' + a_0\,x = 0$$

où $a_{d-1}, \ldots, a_1, a_0$ sont des réels donnés forment un espace vectoriel de dimension d dont une base est formée par les applications

$$t \mapsto e^{\mathrm{Re}(\lambda)\, t}\; \cos(\mathrm{Im}(\lambda)\, t)\, t^j \text{ et } t \mapsto e^{\mathrm{Re}(\lambda)\, t}\; \sin(\mathrm{Im}(\lambda)\, t)\, t^j$$

où λ est racine de $X^d + a_{d-1}\,X^{d-1} + \cdots + a_1\,X + a_0$ et $0 \le j < m(\lambda)$ où $m(\lambda)$ désigne la multiplicité de λ en tant que racine du polynome $X^d + a_{d-1}\,X^{d-1} + \cdots + a_1\,X + a_0$. Cela s'obtient à partir du cas complexe.

3.5 Cas bidimensionnel

Considèrons une matrice A 2×2 réelle. L'équation $X' = AX$ admet 0 pour solution évidente. On dit que 0 est un point d'équilibre. L'allure des solutions au voisinage de 0 dépend de la nature des valeurs propres.

- Si la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et a deux valeurs propres réelles strictement positives, 0 est un noeud répulsif.

- Si la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et a deux valeurs propres réelles strictement négatives, 0 est un noeud attractif.

- Si la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et a deux valeurs propres réelles dont une strictement positive et l'autre strictement négative, 0 est un col.

- Si la matrice A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ mais admet une unique valeur propre, 0 est un noeud dégénéré.

- Si la matrice A a deux valeurs propres complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ de partie réelle α non nulle, 0 est un foyer. Dans le cas $\alpha < 0$ le foyer est attractif. Sinon il est répulsif.

- Si la matrice A a deux valeurs propres complexes conjuguées imaginaires pures $i\beta$ et $-i\beta$, 0 est un centre.

Le lecteur se reportera aux figures en annexe pour une représentation graphique. Nous avons laissé de côté quelques cas dégénérés que le lecteur pourra facilement traiter.

3.6 Exercices

Exercice 1 Trouver la solution de l'équation $X' = A\,X$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } X(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Exercice 2 Donner la solution générale de l'équation suivante

$$-40\,x + 92\,x' - 86\,x'' + 41\,x^{(3)} - 10\,x^{(4)} + x^{(5)} = 0$$

Exercice 3 On s'intéresse au comportment prés de 0 d'un système bi-dimensionnel réel $X' = A\,X$: noeud, col, foyer, centre. Représenter dans le plan, en fonction de la trace de A et de son déterminant, les régions où les différents comportements ont lieu.

Exercice 4 On considère un système différentiel à coefficients constants $X' = A\,X$ où A est une matrice $d \times d$ réelle ou complexe. A quelle condition sur A les solutions sont elles toutes bornées pour t dans un voisinage de $+\infty$? Même question pour t dans un voisinage de $-\infty$.

Exercice 5 (Extrait du partiel d'avril 2000) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & -6 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ qui a A pour matrice sur la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^4$.
1) Calculer le polynome caractéristique de A.
2) Quelles sont les dimensions des sous-espaces propres associés aux valeurs propres de A ?
3) Quelle est la forme de la réduite de Jordan J de A. On ordonnera les valeurs propres sur la diagonale dans l'ordre croissant (les plus grandes en bas à droite) et les blocs de Jordan relatifs à une même valeur propre par taille croissante (les plus gros en bas à droite).
4) En remarquant que $e_1 \in \ker(u - 3\mathrm{id})^2 \setminus \ker(u - 3\mathrm{id})$, fabriquer une base où la matrice de u est J et dont le 4ième vecteur est e_1.
5) Préciser la matrice de passage P telle que $A = P\,J\,P^{-1}$.
6) Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\exp(tJ)$.

7) Exprimer $\exp(tA)$ en fonction de $\exp(tJ)$, P et P^{-1}.
8) Calculer la solution de

$$X' = A\,X\,; \quad X(0) = e_1$$

Chapitre 4

Théorèmes généraux

4.1 Passage à un problème de point fixe

On considère une application continue F de $\Omega \times U$ dans $\mathbb{R}^d$ où Ω et U sont des ouverts respectifs de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^d$. On fixe $t_0 \in \Omega$ et $y_0 \in U$. Notons que y, application d'un intervalle ouvert I contenant t_0 dans $\mathbb{R}^d$ est solution du problème de Cauchy

$$y' = F(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \tag{4.1}$$

si et seulement si

$$\forall t \in I, \ \ y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, y(s))\, ds$$

Ainsi on peut remplacer l'équation différentielle par une <u>équation intégrale</u>. Choisissons alors $\alpha > 0$. On note θ l'application de $\mathrm{C}([t_0-\alpha, t_0+\alpha], \mathbb{R}^d)$ dans lui-même qui à une application $y : \ [t_0-\alpha, t_0+\alpha] \to \mathbb{R}^d$ associe l'application $\theta(y)$ donnée, pour tout $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ par

$$\theta(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, y(s))\, ds \tag{4.2}$$

Alors y est solution de (4.1) sur $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$ si et seulement si $\theta(y) = y$ c'est à dire si y est un point fixe de θ. Rappelons alors un théorème classique de point fixe.

Théorème 8 (du point fixe de Lipschitz) *Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé complet, $\kappa \in [0, 1[$ et θ une application κ−contractante de E dans lui-même c'est à dire vérifiant*

$$\forall y_1, y_2 \in E, \ \ ||\theta(y_1) - \theta(y_2)|| \leq \kappa ||y_1 - y_2||$$

Considérons un fermé F de E tel que $\theta(F) \subset F$.

Alors l'application θ admet un unique point fixe sur F qui est la limite de la suite récurrente $y_{n+1} = \theta(y_n)$ quelque soit le choix du terme initial $y_0 \in F$.

Dans notre problème d'équation intégrale, E est $\mathrm{C}([t_0-\alpha, t_0+\alpha], \mathbb{R}^d)$ que l'on munit de la norme "uniforme" $||y|| = \sup_{t\in[t_0-\alpha,t_0+\alpha]} |y(t)|$. Alors

$$||\theta(y_1) - \theta(y_2)|| \leq \alpha \sup_{s\in[t_0-\alpha,t_0+\alpha]} |F(s, y_1(s)) - F(s, y_2(s))|$$

Nous pouvons alors imaginer une classe d'hypothèses sur F qui rende l'application θ contractante.

Proposition 9 *Soit B une boule fermée de $\mathbb{R}^d$ de centre y_0 et de rayon $r > 0$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant le réel t_0 et $F : I \times B \to \mathbb{R}^d$ continue. On suppose que F est lipschitzienne en sa seconde variable sur $I \times B$ au sens où il existe une constante K telle que, pour tout $t \in I$ et tout $y_1, y_2 \in B$,*

$$|F(t, y_1) - F(t, y_2)| \leq K \; |y_1 - y_2|$$

On suppose de plus que F est bornée par M sur $I \times B$. Alors si $\alpha < \inf(r/M, 1/K)$ est tel que $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[\subset I$, il existe une unique solution $y :]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[\to B$ du problème de Cauchy

$$y' = F(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

Preuve. Notons $\tilde{y}_0$ l'application constante sur $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ égale à y_0 et $\tilde{B}$ la boule de $\mathrm{C}([t_0-\alpha, t_0+\alpha], \mathbb{R}^d)$ de centre $\tilde{y}_0$ et de rayon r. La formule (4.2) définit l'application θ de $\tilde{B}$ dans $\tilde{B}$. Cela se vérifie grâce à l'inégalité $\alpha M < r$: pour $y \in \tilde{B}$,

$$||\theta(y) - \tilde{y}_0|| = \sup_{t\in[t_0-\alpha,t_0+\alpha]} \left| \int_{t_0}^{t} F(s, y(s))\, ds \right| \leq \alpha M < r$$

La condition de lipschitzianité de F et l'inégalité $K\alpha < 1$ montre que θ est contractante sur $\tilde{B}$. En effet pour $y_1, y_2 \in \tilde{B}$,

$$\begin{aligned} ||\theta(y_1) - \theta(y_2)|| &\leq \sup_{t\in[t_0-\alpha,t_0+\alpha]} \left| \int_{t_0}^{t} (F(s, y_1(s)) - F(s, y_2(s)))\, ds \right| \\ &\leq \sup_{t\in[t_0-\alpha,t_0+\alpha]} \left| \int_{t_0}^{t} K\, |y_1(s) - y_2(s)|\, ds \right| \\ &\leq \alpha K\, ||y_1 - y_2|| \end{aligned}$$

Le théorème du point fixe assure alors le résultat annoncé puisqu'il y a équivalence entre être un point fixe de θ et être solution du problème de Cauchy.

Remarque. Le théorème du point fixe donne en plus un procédé constructif et algorithmique d'obtention des solutions. En effet définissons une suite de fonctions par

$$y_{n+1}(t) = \theta(y_n)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, y_n(s))\, ds$$

le premier terme de cette suite étant la fonction constante égale à y_0. Il s'agit de la suite des itérés par l'application θ. Alors cette suite converge vers la solution sur $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ du problème de Cauchy $y' = F(t, y)$, $y(t_0) = y_0$. La convergence a lieu au sens de la topologie sur E qui est la topologie de la convergence uniforme sur $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. On pourra par exemple essayer cet algorithme dans le cas $y' = y$; $y(0) = 1$. On obtient comme approximations de la solution –qui est évidemment la fonction exponentielle– les sommes partielles du développement en série entière de l'exponentielle.

4.2 Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Ce théorème est le plus connu des théorèmes sur les équations différentielles. Ses hypothèses sont souvent satisfaites dans la pratique.

Théorème 10 (Cauchy-Lipschitz) *Soit $F : \Omega \times U \to \mathbb{R}^d$ continue où Ω et U sont des ouverts respectifs de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^d$. On suppose que F est localement lipschitzienne en sa seconde variable sur $\Omega \times U$ au sens où, pour tout $(t, y) \in \Omega \times U$, il existe un voisinage Ω_t de t dans Ω et un voisinage U_y de y dans U et une constante K telle que, pour tout $s \in \Omega_t$ et tout $y_1, y_2 \in U_y$,*

$$|F(s, y_1) - F(s, y_2)| \leq K \ |y_1 - y_2|$$

Soit $(t_0, y_0) \in \Omega \times U$. Alors les deux résultats suivants sont vérifiés :
1) existence locale : *il existe un intervalle ouvert $J_0 \subset \Omega$ contenant t_0 et une application $y : J_0 \to U$ de classe C^1 telle que*

$$\forall t \in J_0, \ y'(t) = F(t, y(t)) \text{ et } y(t_0) = y_0$$

2) unicité globale : *si y_1 et y_2 sont deux applications de classe C^1 définies sur l'intervalle ouvert $J \subset \Omega$ contenant t_0 qui vérifient*

$$\forall t \in J, \ y_1'(t) = F(t, y_1(t)), \ y_2'(t) = F(t, y_2(t)) \text{ et } y_1(t_0) = y_2(t_0) = y_0$$

alors $y_1(t) = y_2(t)$ pour tout $t \in J$.

Preuve. Ce théorème résulte essentiellement de la proposition du paragraphe précédent. On choisit d'abord une boule B dont l'adhérence $\overline{B}$ est incluse dans U_{y_0}. On choisit ensuite un intervalle ouvert I dont l'adhérence est incluse dans Ω_{t_0}. Alors la proposition du paragraphe précédent donne l'existence locale affirmée dans le 1) du théorème. La proposition donne aussi un résultat d'unicité locale qu'il faut transformer en un résultat d'unicité globale pour avoir 2). Supposons donc que y_1 et y_2 sont deux solutions sur J du même problème de Cauchy. Posons $Z = \{t \in J;\ y_1(t) = y_2(t)\}$. Le résultat d'unicité locale donné à la proposition entraine que Z est ouvert. En effet si $z \in Z$ alors y_1 et y_2 sont deux solutions du problème de Cauchy $y'(t) = F(t, y(t));\ \ y(z) = y_1(z)$ donc coincident sur un ouvert I_z contenant z. Par ailleurs Z est fermé comme ensemble où deux applications continues sont égales. Ainsi Z est ouvert, fermé et non vide dans J donc par connexité de J, il est égal à J.

Remarque 1. Si F est dérivable par rapport à sa seconde variable et si la dérivée partielle $\partial_2 F(t, y)$ est continue sur $\Omega \times U$ alors l'hypothèse de locale lipschitzianité est satisfaite. Cela résulte de l'inégalité des accroissements finis.

Remarque 2. Le théorème affirme l'existence locale d'une solution, sur un intervalle J_0. Il n'y a pas forcément de solution définie sur Ω entier. Prenons par exemple $\Omega = U = \mathbb{R}$, $F(t, y) = y^2$ et cherchons une solution au problème de Cauchy $y' = y^2$, $y(0) = a > 0$. On obtient facilement la solution $y(t) = 1/(-t + (1/a))$ définie sur $]-\infty, 1/a[$. Puisqu'on est dans les conditions d'application du théorème de Cauchy-Lipschitz, il y a unicité globale et la solution trouvée est la seule sur l'intervalle où elle est définie. Toute solution au problème de Cauchy énoncé doit donc "exploser" à gauche de $1/a$ si elle est définie jusqu'en ce point. Il n'y a donc pas de solutions du problème de Cauchy définie à droite de $1/a$. Nous reviendrons sur ces problèmes au paragraphe suivant avec la notion de solution maximale.

4.3 Existence et propriétés des solutions maximales

Rappelons qu'une solution de l'équation différentielle $y' = F(t, y)$ est un couple (I, φ) où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et φ est une application dérivable de I dans $\mathbb{R}^d$ telle que pour tout $t \in I$, $(t, \varphi(t)) \in U$ et $\varphi'(t) = F(t, \varphi(t))$. On a étudié dans l'introduction l'exemple $y' = y^\alpha$. On a vu que les solutions peuvent être définies sur des intervalles I plus ou moins grands.

On introduit alors un ordre du prolongement. Soient (I, φ) et (J, ψ) deux solutions d'une même équation différentielle. On dit que (J, ψ) prolonge (I, φ) si $I \subset J$ et si la restriction de ψ à I coincide avec φ. On appelle solution maximale une solution (I, φ) qui ne peut être prolongée par une solution (J, ψ) avec $J \supset I$ et $J \neq I$.

Théorème 11 *Toute solution se prolonge en une solution maximale.*

Nous ne prouverons pas ce théorème ici. Il découle du théorème de Zorn mais peut aussi se démontrer sans ce dernier. Nous allons nous concentrer dans la suite sur le cas où les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz sont satisfaites. Cela simplifie les problèmes d'existence et d'unicité de la solution maximale. A propos de ce point d'unicité, rappelons un exemple évoqué dans l'introduction. Nous avons vu qu'un problème de Cauchy peut admettre plusieurs solutions. Par exemple le problème de Cauchy suivant

$$y' = 2\sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0$$

On constate aisément que, pour tous réels a, b avec $a < 0 < b$, la fonction définie par $\varphi(t) = 0$ si $t \in [a, b]$, $\varphi(t) = (t-b)^2$ si $t \in [b, +\infty[$, $\varphi(t) = -(t-a)^2$ si $t \in]-\infty, a]$ est solution du problème de Cauchy ci-dessus. Il y a donc autant de solution de ce problème de Cauchy que de choix de réels a et b avec $a < 0 < b$. Toutes ces solutions sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier et donc sont bien-sûr maximales. Dans le cadre des hypothèses de Cauchy-Lipschitz tout se simplifie.

Théorème 12 *Soit Ω et U sont des ouverts respectifs de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^d$ et $F : \Omega \times U \to \mathbb{R}^d$ continue et localement lipschitzienne en sa seconde variable sur $\Omega \times U$. Soit $(t_0, y_0) \in \Omega \times U$.*

Alors il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy

$$y'(t) = F(t, y(t)) \text{ et } y(t_0) = y_0$$

Preuve. Commençons par l'unicité. Rappelons que sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, il y a unicité globale c'est à dire que deux solutions d'un même problème de Cauchy coincident sur l'intervalle où elles sont toutes deux définies. Considèrons deux solutions maximales (J_1, y_1) et (J_2, y_2) du problème de Cauchy $y'(t) = F(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$ où les deux intervalles ouverts J_1 et J_2 contiennent t_0. Alors y_1 et y_2 coincident sur $J_1 \cap J_2$. On peut alors fabriquer une solution y_3 sur $J_1 \cup J_2$ en posant que la restriction de y_3 à J_1 coincide avec y_1 et que la restriction de y_3 à J_2 coincide avec y_2. Cette solution contredit la maximalité de (J_1, y_1) et (J_2, y_2) quand

J_1 ou J_2 est strictement inclus dans $J_1 \cup J_2$. On peut donc conclure que $J_1 = J_2 = J_1 \cup J_2$.

Passons maintenant à la construction de la solution maximale. Considérons toutes les solutions du problème de Cauchy que nous noterons $\{(J_\lambda, y_\lambda);\ \lambda \in \Gamma\}$. Cet ensemble n'est pas vide car le théorème de Cauchy-Lipschitz affirme l'existence locale au problème de Cauchy. Posons alors

$$\tilde{J} = \bigcup_{\lambda \in \Gamma} J_\lambda$$

Pour $t \in \tilde{J}$, il existe $\lambda \in \Gamma$ tel que $t \in J_\lambda$ et on pose alors $\tilde{y}(t) = y_\lambda(t)$. On définit ainsi une application $\tilde{y}$ de $\tilde{J}$ dans $\mathbb{R}^d$. En effet pour $t \in \tilde{J}$, si il existe $\lambda \in \Gamma$ et $\lambda' \in \Gamma$ tels que $t \in J_\lambda$ et $t \in J_{\lambda'}$, alors $y_\lambda(t) = y_{\lambda'}(t)$ par l'unicité énoncée au théorème de Cauchy-Lipschitz. Cela montre que le procédé de définition de $\tilde{y}$ est légitime. La fonction $\tilde{y}$ obtenue est solution du problème de Cauchy sur tout intervalle ouvert J_λ donc sur $\tilde{J}$. Cette solution est maximale par construction même.

Donnons maintenant une propriété des solutions maximales. Leur maximalité impose un certain type de comportement au voisinage d'un bout de l'intervalle sur laquelle elle est définie.

Théorème 13 ("des bouts") *Soit* $F : \ \Omega \times U \to \mathbb{R}^d$ *continue où* Ω *et* U *sont des ouverts respectifs de* $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{R}^d$. *On suppose que* F *est localement lipschitzienne en sa seconde variable sur* $\Omega \times U$. *Soit* $y\ :\ ]\tau, \beta[\to U$ *une solution maximale de l'équation* $y' = F(t, y)$. *On suppose que* $\beta \in \Omega$.

Alors pour tout compact $K \subset U$, *il existe* $\gamma < \beta$ *tel que* $y([\gamma, \beta[) \subset U \setminus K$. *On dira que la solution "sort de tout compact".*

En particulier si $U = \mathbb{R}^d$, *alors* $\lim_{t \uparrow \beta} |y(t)| = +\infty$.

Preuve. Par l'absurde, supposons qu'il existe un compact $K \subset U$ tel que, pour tout $\gamma < \beta$ tel que $y([\gamma, \beta[) \cap K \neq \emptyset$ ce qui implique l'existence de $t_\gamma \in [\gamma, \beta[$ tel que $y(t_\gamma) \in K$. En particulier on peut obtenir une suite t_n convergeant vers β telle que $y(t_n) \in K$. Par compacité et quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $y(t_n)$ converge vers $y_1 \in K$. On peut trouver un intervalle I inclus dans Ω et contenant β et une boule $B(y_1, r)$ de rayon r centée en y_1 et incluse dans U tels que F est lipschitzienne de rapport K sur $I \times B(y_1, r)$ et bornée par M sur $I \times B(y_1, r)$. Considèrons $\alpha < \inf(r/2M, 1/K)$ tel que $]\beta - 2\alpha, \beta + 2\alpha[\subset I$. Il existe un entier n tel que $t_n \in]\beta - \alpha/2, \beta[$ et $|y(t_n) - y_1| < r/2$. Comme $B(y(t_n), r/2) \subset B(y_1, r)$, F est lipschitzienne de rapport K sur $I \times B(y(t_n), r/2)$ et bornée par M sur

$I \times B(y(t_n), r/2)$. Alors la proposition préparatoire au théorème de Cauchy-Lipschitz entraine qu'il existe une solution $\hat{y}$ du problème de Cauchy $\hat{y}' = F(t, \hat{y})$, $\hat{y}(t_n) = y(t_n)$ définie sur $]t_n - \alpha, t_n + \alpha[\subset]\beta - 2\alpha, \beta + 2\alpha[\subset I$. Cette solution $\hat{y}$ coincide avec y au point t_n et même par l'unicité de Cauchy-Lipschitz sur tout $]t_n - \alpha, \beta[$. Elle se raccorde donc à y et permet de définir un prolongement de y à droite de β puisque $t_n + \alpha > \beta - (\alpha/2) + \alpha = \beta + (\alpha/2) > \beta$.

Nous allons énoncer un résultat assurant l'existence d'une solution définie "partout" dans le cas où F est dominée par une fonction linéaire. Mais auparavant nous formulons un lemme souvent utile dans la théorie des équations différentielles.

Théorème 14 (Lemme de Gronwall) *Soit ϕ et β deux applications continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, telles que, pour tout $t \in I$,*

$$\phi(t) \leq \beta(t) + k \int_{t_0}^{t} \phi(s)\, ds$$

où k est une constante réelle donnée et $t_0 \in I$. Alors on a, pour $t \geq t_0$,

$$\phi(t) \leq \beta(t) + k \int_{t_0}^{t} \beta(s)\, e^{k(t-s)}\, ds$$

Preuve. Notons $\theta(t) = \int_{t_0}^{t} \phi(s)\, ds$. Alors la dérivée de $\theta(t)\ e^{-kt}$ est $\phi(t)\ e^{-kt} - k\,\theta(t)\, e^{-kt}$ qui est plus petit que $e^{-kt}\,\beta(t)$ par hypothèse. L'intégration entre t_0 et t donne alors $\theta(t)\ e^{-kt} \leq \int_{t_0}^{t} \beta(s)\, e^{-ks}\, ds$. Cette majoration de $\theta(t)$ combinée à l'hypothèse $\phi(t) \leq \beta(t) + k\,\theta(t)$ donne le résultat.

Passons au résultat sur les équations différentielles.

Proposition 15 *Soit $F : \quad \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continue où Ω est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose que F est localement lipschitzienne en sa seconde variable sur $\Omega \times \mathbb{R}^d$ et que, pour tout intervalle borné $J \subset \Omega$, il existe deux réels A_J et B_J vérifiant*

$$|F(t, x)| \leq A_J\, |x| + B_J$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $t \in J$.

Alors une solution maximale de l'équation $y' = F(t, y)$ est définie sur Ω tout entier.

Preuve. Si une solution maximale y est définie sur un intervalle I strictement inclus dans Ω, le théorème des bouts entraine que $y(t)$ tend vers $+\infty$ au voisinage d'une des extrémités de I, par exemple celle de droite disons $\beta = \sup I < \sup \Omega$. Mais pour tout $t \in]t_0, \beta[$,

$$\begin{aligned}
|y(t)| &= \left| y(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(s, y(s))\, ds \right| \\
&\leq |y(t_0)| + \int_{t_0}^{t} (A\,|y(s)| + B)\, ds \\
&\leq |y(t_0)| + B\,(t - t_0) + A \int_{t_0}^{t} |y(s)|\, ds
\end{aligned}$$

en utilisant hypothèse. Il en résulte par le lemme de Gronwall que

$$|y(t)| \leq |y(t_0)| + B\,(t - t_0) + A \int_{t_0}^{t} [|y(t_0)| + B\,(s - t_0)] \exp(A(t - s))\, ds$$

ce qui contredit le fait que $y(t)$ explose au voisinage de β.

4.4 Le théorème de Péano

Dans ce paragraphe nous allons prouver un théorème très général qui donne l'existence locale d'une solution à l'équation differentielle $y' = F(t, y)$ sous la seule hypothèse de continuité de F. Dans ce contexte très général il n'y a pas d'unicité au problème de Cauchy. Rappelons nous par exemple le cas de $y' = 2\sqrt{|y|}$ étudié précèdemment. Nous commencons par un résultat de topologie que nous énoncons dans le cadre particulier qui nous intéresse.

Théorème 16 (Ascoli) *On considère une famille H de l'ensemble $C([a,b], \mathbb{R}^d)$ des applications continues du compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^d$. Cet ensemble $C([a,b], \mathbb{R}^d)$ est muni de la norme de la convergence uniforme. Alors la famille H est relativement compacte –ce qui signifie que l'adhérence $\overline{H}$ de H est compacte– si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites*

1. *la famille H est équibornée :*

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall f \in H,\ \forall t \in [a,b],\ |f(t)| \leq M$$

2. *la famille H est équicontinue :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall f \in H,\ \forall s, t \in [a,b],\ |s - t| \leq \eta \Rightarrow |f(s) - f(t)| \leq \varepsilon$$

Preuve. Nous allons démontrer que les deux conditions de bornitude et d'équicontinuité impliquent la relative compacité. L'autre sens – qui ne sera pas utilisé dans la suite– est plus facile et laissé en exercice au lecteur.

Il s'agit de montrer qu'étant donnée une suite (f_n) d'éléments de H, il est possible d'en extraire une sous-suite convergeant (uniformément). Fixons une suite (t_n) dense dans $[a,b]$, par exemple une numérotation des rationnels de $[a,b]$. Pour p entier, la suite $(f_n(t_p))_{n\geq 1}$ est bornée par M donc on peut en extraire une sous-suite $(f_{n_k^p}(t_p))_{k\geq 1}$ convergente. En procédant par récurrence sur p on peut imposer que la suite d'indices $(n_k^{p+1})_{k\geq 1}$ soit extraite de la suite $(n_k^p)_{k\geq 1}$. Le procédé diagonal consite alors à poser $n_k = n_k^k$. La suite (n_k) a ses termes à partir du rang p qui sont extraits de (n_k^p). Donc $(f_{n_k}(t_p))_{k\geq 1}$ converge et ceci pour tout p. Nous allons voir que la suite (f_{n_k}) est de Cauchy pour la norme uniforme. Soit $\varepsilon > 0$. On note η la quantité associée à ε par la définition d'équicontinuité. Par densité de (t_n), il est possible de trouver L tel que tout $t \in [a,b]$ soit proche à moins de η près d'un élément de la famille $\{t_p,\ p \leq L\}$. Prenons alors N tel que pour $n_p, n_q \geq N$, $|f_{n_p}(t_i) - f_{n_q}(t_i)| \leq \varepsilon$ pour tout $i \leq L$. Alors pour $t \in [a,b]$ choisissons un entier $i(t) \leq L$ tel que $|t_{i(t)} - t| < \eta$ et écrivons

$$\begin{aligned}
&|f_{n_p}(t) - f_{n_q}(t)| \\
&\leq \quad \left|f_{n_p}(t) - f_{n_p}(t_{i(t)})\right| + \left|f_{n_p}(t_{i(t)}) - f_{n_q}(t_{i(t)})\right| + \left|f_{n_q}(t_{i(t)}) - f_{n_q}(t)\right| \\
&\leq \quad \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon
\end{aligned}$$

Cela montre bien que la suite (f_{n_k}) est de Cauchy pour la norme uniforme et donc qu'elle converge ce qui achève la preuve du théorème d'Ascoli. On peut maintenant passer au théorème de Péano.

Théorème 17 (Péano) *Soit $F :\ \Omega \times U \to \mathbb{R}^d$ continue où Ω et U sont des ouverts respectifs de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^d$ et $(t_0, y_0) \in \Omega \times U$.*

Alors il existe un voisinage J de t_0 dans Ω et une application $y :\ J \to U$ solution du problème de Cauchy

$$\forall t \in J,\ y'(t) = F(t, y(t)) \text{ et } y(t_0) = y_0$$

Plus précisément, si $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[\times B(y_0, r)$ a son adhérence incluse dans $\Omega \times U$ et si

$$M\,\alpha < r \text{ avec } M = \sup\{|F(s,x)|;\ (s,x) \in]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[\times B(y_0, r)\}$$

alors il existe une solution définie sur $J =]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$.

Preuve. Placons nous sur le voisinage $T =]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[\times B(y_0, r)$ comme spécifié dans le théorème. Il est appelé parfois "tonneau de sécurité". Son existence est facile à établir. Il suffit de voir que F est bornée sur un voisinage compact de (t_0, y_0) par continuité puis on restreint ce voisinage en un tonneau du type cherché de façon à satisfaire la condition énoncée. Fixons $\varepsilon > 0$. Notons que F est uniformément continue sur $\overline{T} = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B}(y_0, r)$ c'est à dire qu'il existe η tel que si $|s - t| \leq \eta$ et $|x - x'| \leq \eta$ alors $|F(s, x) - F(t, x')| < \varepsilon$. Nous allons exhiber une "solution approchée à ε près du problème de Cauchy sur $J =]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$". Nous allons construire cette application φ_ε sur $[t_0, t_0+\alpha[$, l'autre moitié de J se traitant de la même manière. On considère une partition $t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t_0 + \alpha$ de pas $h = \alpha/N < \inf(\eta, \eta/M)$. On pose alors $x_0 = y_0$ et, pour $0 \leq p \leq N - 1$, $x_{p+1} = x_p + h\, F(t_p, x_p)$. On voit que $|x_{p+1} - x_p| \leq h\, M < \eta$. On définit ensuite sur $[t_0, t_0 + \alpha]$ la fonction φ_ε comme affine sur chaque $[t_p, t_{p+1}]$, continue, dérivable à droite et telle que $\varphi_\varepsilon(t_p) = x_p$. Pour $t \in [t_p, t_{p+1}[$ la dérivée à droite est $\varphi'_{\varepsilon,d}(t) = (\varphi_\varepsilon(t_{p+1}) - \varphi_\varepsilon(t_p))/h = F(t_p, x_p)$. Ainsi en utilisant la continuité uniforme de F,

$$|\varphi'_{\varepsilon,d}(t) - F(t, \varphi_\varepsilon(t))| = |F(t_p, x_p) - F(t, \varphi_\varepsilon(t))| < \varepsilon$$

L'inégalité obtenue est vraie pour tout $t \in [t_0, t_0 + \alpha[$ et justifie pour φ_ε le nom de "solution approchée à ε près". On va maintenant considérer une suite de solutions approchées à ε prés pour une suite de ε tendant vers 0. Notons φ_n au lieu de $\varphi_{1/n}$. Ces applications sont définies sur $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ et à valeurs dans $B(y_0, r)$ car $|x_p - x_0| \leq p\, h\, M \leq N\, h\, M = \alpha M < r$. On va appliquer le théorème d'Ascoli à la suite $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ de $C([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \mathbb{R}^d)$. Notons déja qu'elle est équibornée. Par ailleurs remarquons que

$$|\varphi'_{n,d}(t)| \leq |\varphi'_{n,d}(t) - F(t, \varphi_n(t))| + |F(t, \varphi_n(t))| \leq \frac{1}{n} + M \leq 1 + M$$

Rappelons alors une version fine de l'inégalité des accroissements finis.

Proposition 18 *Soit φ une application de l'intervalle compact $[a, b]$ dans l'espace vectoriel normé $(F, ||\cdot||)$ et g une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que φ et g sont continues et admettent en tout point $t \in]a, b[$ une dérivée à droite qui vérifie*

$$||\varphi'_d(t)|| \leq g'_d(t)$$

Alors

$$||\varphi(b) - \varphi(a)|| \leq g(b) - g(a)$$

Cette proposition entraine que pour $s, t \in [t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ et tout entier $n \geq 1$,

$$|\varphi_n(s) - \varphi_n(t)| \leq (M+1)\,|s-t|$$

ce qui implique l'équicontinuité de la suite $(\varphi_n)_{n\geq 1}$. Le théorème d'Ascoli entraine qu'une sous-suite $(\varphi_{n_k})_{k\geq 1}$ converge uniformément, disons vers φ_∞. Posons $\psi_n(t) = \varphi_n(t) - y_0 - \int_{t_0}^t F(s, \varphi_n(s))\,ds$. Alors $\psi'_{n,d}(t) = \varphi'_{n,d}(t) - F(t, \varphi_n(t))$ est en norme inférieur à $1/n$ sur $]t_0-\alpha, t_0+\alpha[$. Par l'inégalité des accroissements finis on en déduit pour tout $t \in]t_0-\alpha, t_0+\alpha[$,

$$|\varphi_n(t) - y_0 - \int_{t_0}^t F(s, \varphi_n(s))\,ds| = |\psi_n(t) - \psi_n(t_0)| \leq \frac{1}{n}\alpha$$

Nous faisons ensuite tendre n vers $+\infty$ le long de la sous-suite (n_k). Comme φ_n converge uniformément vers φ_∞ sur $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ le long de la sous-suite (n_k) et compte tenu de la continuité uniforme de F, les fonctions $F(\cdot, \varphi_n(\cdot))$ convergent uniformément vers $F(\cdot, \varphi_\infty(\cdot))$. On peut donc passer à la limite sous l'intégrale (on aurait pu également utiliser le théorème de convergence dominée qui nous aurait dispensé de l'uniformité de la convergence). On obtient

$$\varphi_\infty(t) = y_0 + \int_{t_0}^t F(s, \varphi_\infty(s))\,ds$$

pour tout $t \in]t_0-\alpha, t_0+\alpha[$. On a donc obtenu une solution φ_∞ du problème de Cauchy $y' = F(t,y),\ y(t_0) = y_0$ sur $]t_0-\alpha, t_0+\alpha[$.

4.5 Exercices

Exercice 1 On considère l'équation $y' = \max(t, y)$.
1) Discuter l'existence, l'unicité, le domaine de définition de la solution maximale vérifiant une condition initiale donnée.
2) Trouver les expressions analytiques des solutions et dessiner les graphes de solutions typiques.

Exercice 2 On considère le problème de Cauchy

$$\theta'' = -\sin\theta,\ \ \theta(0) = 0,\ \theta'(0) = \alpha > 0$$

1) Quelle est la situation physique qui correspond à cette équation ?
2) Mettre cette équation sous forme d'un système bi-dimensionnel d'ordre 1.
3) Montrer que le problème de Cauchy énoncé a une unique solution maximale définie sur $\mathbb{R}$.

4) Exprimer ${\theta'}^2$ en fonction de θ.
5) On suppose d'abord $\alpha > 2$.

a) Montrer que θ est strictement croissante.

b) Prouver que la limite de θ en $+\infty$ est $+\infty$.

c) Prouver qu'il existe un unique t_0 tel que $\theta(t_0) = 2\pi$ que l'on exprimera comme une intégrale.

d) Montrer que θ' est périodique de période t_0.

e) Dessiner le graphe d'une telle solution et représenter les trajectoires correspondantes dans l'espace des phases.

6) Traiter maintenant le cas $\alpha \in]0, 2[$. Montrer que θ est périodique et exprimer sa période à l'aide d'une intégrale. Dessiner le graphe et les trajectoires correspondantes dans l'espace des phases.
7) Que se passe-t-il dans le cas $\alpha = 2$?
8) Comment traiter le cas d'autres conditions initiales ?

Exercice 3 On considère l'équation $y' = \sin(t\,y) = F(t, y)$.
1) Discuter l'existence, l'unicité, le domaine de définition de la solution maximale vérifiant une condition initiale donnée.
2) On appelle barrière supérieure une fonction β telle que $\beta'(t) > F(t, \beta(t))$. On appelle barrière inférieure une fonction α telle que $\alpha'(t) < F(t, \alpha(t))$. On appelle entonnoir un couple (α, β) où α est une barrière inférieure et β une barrière supérieure.

Expliquer cette terminologie.

3) Pour l'équation étudiée, montrer qu'un entonnoir (α_k, β_k) est fourni par

$$\alpha_k(t) = \frac{2k\pi}{t}, \quad \beta_k(t) = \frac{2k\pi + 3\pi/2}{t}$$

4) Montrer qu'il y a au plus une solution comprise entre β_k et α_{k+1}.

Chapitre 5

Les équations différentielles linéaires

5.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'étudier les équations du type

$$y' = A(t)\, y + b(t)$$

où A est une application continue d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble des matrices carrées $d \times d$ et b est une application continue de I dans $\mathbb{R}^d$. On traitera également l'équation scalaire d'ordre n

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = d(t)$$

qui se ramène au cas précédent. Nous commencons par un résultat général.

Théorème 19 *Soit un intervalle ouvert Ω de $\mathbb{R}$, A une application continue de Ω dans l'ensemble des matrices carrées réelles $d \times d$ et b une application continue de Ω dans $\mathbb{R}^d$. Soit également $t_0 \in \Omega$ et $x_0 \in \mathbb{R}^d$.*

Alors il existe une unique solution y définie sur Ω au problème de Cauchy $y' = A(t)\, y + b(t)$, $y(t_0) = x_0$

Preuve. Posons $F(t, x) = A(t)\, x + b(t)$. La continuité de A et b entraine que, pour tout intervalle borné $J \subset \Omega$, il existe deux réels A_J et b_J tels que $|F(t, x)| \leq A_J\, |x| + b_J$. Le résultat annoncé résulte alors de l'un des corollaires du théorème des bouts énoncé au chapitre précédent.

Nous allons commencer par étudier l'équation $y' = A(t)\, y$ que l'on appelle équation linéaire homogène associée à l'équation $y' = A(t)\, y + b(t)$. L'équation complète sera traitée dans un second temps par la méthode “de variation de la constante”.

5.2 Equation homogène : résolution par résolvante

Théorème 20 *Soit un intervalle ouvert Ω de $\mathbb{R}$, A une application continue de Ω dans l'ensemble des matrices carrées $d \times d$ et $t_0 \in \Omega$. Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation linéaire homogène $y' = A(t)\, y$.*

Alors $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel. L'application de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}^d$ qui à $y \in \mathcal{S}$ associe $y(t_0)$ est un isomorphisme d'espace vectoriel. En particulier $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel de dimension d et on obtient une base $\{y_1, \dots, y_d\}$ de l'espace des solutions en prenant des conditions initiales $x_1, \dots, x_d$ en t_0 –c'est à dire $y_i(t_0) = x_i$– qui sont linéairement indépendantes.

Preuve. Il est très facile de vérifier que $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel. L'application proposée est trivialement linéaire. Sa bijectivité résulte de l'existence et l'unicité de la solution au problème de Cauchy.

Proposition 21 *Soit un intervalle ouvert Ω de $\mathbb{R}$, A une application continue de Ω dans l'ensemble des matrices carrées $d \times d$, $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation linéaire homogène $y' = A(t)\, y$. Soit $t_0, t \in \Omega$*

Alors l'application de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ qui à $x \in \mathbb{R}^d$ associe $y(t)$ où y est l'unique solution du problème de Cauchy $y' = A(t)\, y$, $y(t_0) = x$ est une application linéaire appelée <u>résolvante</u> de l'équation homogène et notée $R(t, t_0)$ ainsi que sa matrice dans la base canonique à laquelle on l'identifie. Toute solution de $y' = A(t)\, y$ s'écrit donc $y(t) = R(t, t_0)\, y(t_0)$. Pour tous $r, s, t, t_0 \in \Omega$, la résolvante satisfait les propriétés suivantes
(i) $R(t, t)$ est l'identité
(ii) $R(r, s) \circ R(s, t) = R(r, t)$
(iii) $R(s, t)$ est inversible d'inverse $R(s, t)^{-1} = R(t, s)$
(iv) Si $\{e_1, \dots, e_d\}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^d$ et y_i la solution de $y' = A(t)\, y$ de condition initiale $y_i(t_0) = e_i$ alors $R(t, t_0)$ a pour colonnes $y_1(t)|, \dots, |y_d(t)$.
(v) $R(t, t_0)$ dépend continument du couple (t, t_0)
(vi) la fonction $U\ :\ t \mapsto R(t, t_0)$ est l'unique solution de l'équation

$$U'(t) = A(t)\, U(t), \ \ U(t_0) = I$$

Preuve. La plupart des assertions se vérifient très facilement. (iii) se déduit de (i) et (ii). Pour (iv) il suffit par unicité de vérifier que la matrice proposée convient. Pour (v) on utilise (ii) pour se ramener à la continuité séparément en t et en t_0 –ce qui d'ailleurs se réduit à une vérification compte tenu de (iii). Enfin pour la continuité en t on utilise (iv).

Notons que si A ne dépend en fait pas de t, le résultat est déja connu avec $R(t,t_0) = \exp(t-t_0)\,A$. La proposition qui suit donne une généralisation de ce résultat.

Proposition 22 *Soit un intervalle ouvert Ω de $\mathbb{R}$, A une application continue de Ω dans l'ensemble des matrices carrées $d \times d$, telle que pour tous $s, t \in \Omega$, $A(s)\,A(t) = A(t)\,A(s)$.*

Alors la résolvante de l'équation linéaire homogène $y' = A(t)\ y$ est donnée par

$$R(t,t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^t A(s)\,ds\right)$$

c'est à dire que la solution du problème de Cauchy $y' = A(t)\ y$, $y(t_0) = x_0$ est donnée par

$$y(t) = R(t,t_0)\,x_0 = \exp\left(\int_{t_0}^t A(s)\,ds\right)\,x_0$$

Preuve. Notons $B(t) = \int_{t_0}^t A(s)\,ds$. Fixons $t_1 \in \Omega$ et posons $Z(t) = A(t_1)\,B(t) - B(t)\,A(t_1)$. En dérivant en t on voit que Z est constante donc $Z(t_1) = Z(t_0) = 0$ c'est à dire $A(t_1)\,B(t_1) = B(t_1)\,A(t_1)$. Cela vaut pour tout $t_1 \in \Omega$. On utilise ensuite cette propriété pour montrer par récurrence sur l'entier n que la dérivée de B^n est $n\,B^{n-1}\,A = nA\,B^{n-1}$. Alors

$$Z(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t A(s)\,ds\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{B(t)^n}{n!}$$

a une série dérivée

$$\sum_{n\geq 1} \frac{A\,B(t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

qui converge normalement sur tout compact inclus dans Ω. La dérivation de la série se fait donc terme à terme

$$Z'(t) = \sum_{n\geq 1} \frac{A\,B(t)^{n-1}}{(n-1)!} = A\,\exp(B(t)) = A\,Z(t)$$

ce qui achève la preuve.

Proposition 23 (Théorème de Liouville) *Soit un intervalle ouvert Ω de $\mathbb{R}$, A une application continue de Ω dans l'ensemble des matrices carrées $d \times d$.*

Le déterminant de la résolvante de l'équation linéaire homogène $y' = A(t)\,y$ est donné pour tout $t \in \Omega$, par

$$\det R(t,t_0) = \exp \int_{t_0}^{t} Tr(A(s))\; ds$$

Preuve. La définition du déterminant $\det(I+H)$ montre que la différentielle du déterminant en l'identité I est $\det'(I)\cdot H = \mathrm{Tr}(H)$. En une matrice inversible A la différentielle du déterminant est donnée par $\det'(A)\cdot H = \det A\ \mathrm{Tr}(A^{-1}\,H)$. Posons alors $\Delta(t) = \det R(t,t_0)$. Alors

$$\begin{aligned}
\Delta'(t) &= \det'[R(t,t_0)]\cdot \partial_t R(t,t_0) \\
&= \det[R(t,t_0)]\ \mathrm{Tr}[R(t,t_0)^{-1}\,\partial_t R(t,t_0)] \\
&= \Delta(t)\ \mathrm{Tr}[R(t,t_0)^{-1}\,A(t)\,R(t,t_0)] \\
&= \Delta(t)\ \mathrm{Tr}[A(t)]
\end{aligned}$$

Il suffit alors d'intégrer cette équation scalaire pour obtenir le résultat annoncé.
Remarque. Le théorème de Liouville est vrai dans le cas général et ne suppose pas que les matrices $A(\cdot)$ commutent deux à deux. D'ailleurs dans ce cas particulier le résultat est clair compte tenu de la forme de la résolvante.

Proposition 24 *Soit un intervalle ouvert Ω de $\mathbb{R}$, A une application continue de Ω dans l'ensemble des matrices carrées $d\times d$, $y_1,\dots,y_d$ des solutions de $y' = A(t)\,y$ et $H(t)$ la matrice dont les colonnes sont ces d solutions. Alors*

$$\det H(t) = \det H(t_0)\ \exp \int_{t_0}^{t} Tr(A(s))\; ds$$

En particulier l'indépendance linéaire des solutions $y_1,\dots,y_d$ équivaut à l'indépendance linéaire des vecteurs $y_1(t),\dots,y_d(t)$ pour un réel $t \in \Omega$ quelconque.

Preuve. Cela résulte du théorème de Liouville en écrivant $H(t) = R(t,t_0)\,H(t_0)$.

5.3 Résolution de l'équation inhomogène

Théorème 25 *Soit un intervalle ouvert Ω de $\mathbb{R}$, A une application continue de Ω dans l'ensemble des matrices carrées $d\times d$, b une application continue de Ω dans $\mathbb{R}^d$. Soit également $t_0 \in \Omega$ et $x_0 \in \mathbb{R}^d$.*

Alors l'unique solution y sur Ω du problème de Cauchy

$$y' = A(t)\, y + b(t),\; y(t_0) = x_0$$

est donnée par la formule

$$y(t) = R(t, t_0)\, x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, s)\, b(s)\, ds$$

Preuve. La vérification s'effectue en dérivant la fonction y fournie.

5.4 Cas de l'équation scalaire d'ordre n

Nous considèrons maintenant l'équation linéaire scalaire d'ordre n

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = d(t)$$

où $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0, d$ sont des applications continues de l'intervalle ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Un problème de Cauchy pour cette équation fait intervenir la condition initiale

$$y^{(n-1)}(t_0) = \alpha_{n-1}, \ldots, y'(t_0) = \alpha_1, y(t_0) = \alpha_0$$

On sait que y est solution de l'équation linéaire scalaire d'ordre n si et seulement si la matrice colonne $Y(t) = (y(t)|y'(t)|\cdots|y^{(n-1)}(t))^T$ est solution de $Y'(t) = A(t)\, Y(t) + b(t)$ avec $b(t) = (0|0|\cdots|d(t))^T$ et

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \cdots & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}$$

La condition initiale s'écrit alors $Y(t_0) = (\alpha_0|\alpha_1|\cdots|\alpha_{n-1})^T$. On peut aussi considérer l'équation homogène associée :

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = 0$$

qui correspond pour la variable vectorielle $Y(t)$ à l'équation linéaire multidimensionnelle homogène $Y'(t) = A(t)\, Y(t)$. La matrice résolvante s'écrit

$$R(t, t_0) = (U_0(t)|U_1(t)|\cdots|U_{n-1}(t))$$

Dans cette écriture, la matrice colonne $U_j(t) = (u_j(t)|u_j'(t)|\cdots|u_j^{(n-1)}(t))^T$ est la solution qui correspond à $U_j(t_0) = e_j$ où e_j est le j-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, c'est à dire que u_j est solution de l'équation scalaire d'ordre n avec condition initiale $u_j^{(i)}(t_0) = \mathbf{1}_{\{i=j\}}$.

Si $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sont n solutions de l'équation linéaire homogène scalaire du n-ième ordre

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = 0$$

alors la matrice

$$H(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \cdots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & & \varphi_n(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

a un déterminant $W(t) = \det H(t)$ appelé Wronskien des n solutions $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ qui vaut

$$W(t) = W(t_0)\ \exp - \int_{t_0}^{t} a_{n-1}(s)\, ds$$

Cela résulte du corollaire du théorème de Liouville vu précèdemment en remarquant qu'ici $\mathrm{Tr}(A(s)) = -a_{n-1}(s)$.

Application. Considérons l'équation du second ordre $y''+p(t)\, y'+q(t) = 0$ et deux solutions u et v. Alors on sait par le Wronskien que

$$u(t)\, v'(t) - u'(t)\, v(t) = c\ \exp - \int_{t_0}^{t} p(s)\, ds$$

Ainsi si une solution est connue, par exemple u, on obtient une autre solution v linéairement indépendante –donc au total on obtient une base des solutions– en résolvant l'équation ci-dessus. Celle-ci n'est plus que du premier ordre (mais avec second membre).

Passons maintenant à l'équation linéaire scalaire d'ordre n avec second membre

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = d(t)$$

On sait que l'inconnue vectorielle associée $Y(t)$ est donnée par la formule

$$Y(t) = R(t, t_0)\, Y(t_0) + \int_{t_0}^{t} R(t, s)\, b(s)\, ds$$

Pour obtenir $y(t)$ il suffit d'écrire l'égalité donnée par la première ligne de cette écriture vectorielle. Prenons par exemple le cas de l'équation d'ordre 2 :

$$y'' + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = d(t)$$

Fixons le réel t_0 et considèrons une base $\{u, v\}$ des solutions de l'équation homogène avec conditions initiales

$$u(t_0) = 1,\ u'(t_0) = 0,\ v(t_0) = 0,\ v'(t_0) = 1$$

On sait alors que la résolvante s'écrit

$$R(t, t_0) = \begin{pmatrix} u(t) & v(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{pmatrix}$$

dont le déterminant $w(t)$ est le Wronskien des deux solutions u, v. Alors la réécriture du résultat général précédent montre que la solution du problème de Cauchy

$$y'' + a_1(t)\, y' + a_0\, y = d(t),\ \ y(t_0) = \alpha_0,\ y'(t_0) = \alpha_1$$

est donnée par

$$y(t) = \alpha_0\, u(t) + \alpha_1\, v(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{u(s)\, v(t) - u(t)\, v(s)}{u(s)\, v'(s) - u'(s)\, v(s)} d(s)\, ds$$

5.5 Exercices

Exercice 1 On considère le sytème bi-dimensionnel :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & (1+t)\, x - t\, y + e^t\, (1+t) \\ y' & = & t\, x + (1-t)\, y + e^t\, (1+t) \end{array} \right.$$

1) Ecrire ce système sous forme vectorielle.
2) Quelle est la résolvante du système vectoriel homogène?
3) Vérifier sur cet exemple le théorème de Liouville.
4) Donner la solution du système complet.

Exercice 2 On considère une équation linéaire scalaire homogène du second ordre $y'' + a(t)\, y' + b(t)\, y = 0$.
1) Montrer que $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ satisfait $X' = A(t)\, X$ où $A(t)$ est une matrice à préciser.
2) Dans quel cas a-t-on $A(t)\, A(s) = A(s)\, A(t)$ pout tout s et t ?

Exercice 3 On considère l'équation :

$$t^2\, y'' + (t - t^3)\, y' - (t^2 + 1)\, y = (t^2 - 1)\, e^{t^2/2}$$

1) Montrer que $u:\ t \mapsto 1/t$ est solution de l'équation linéaire homogène associée.
2) En posant $y = u\, z$ montrer que la nouvelle fonction inconnue est solution d'une équation linéaire d'ordre 1 que l'on résoudra.
3) En déduire la solution générale de l'équation du second ordre étudiée, sur un intervalle ne contenant pas 0.
4) Quelles sont les solutions définies sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4 (facultatif) Procéder à la résolution sur $]0, 1[$ de l'équation :

$$t\,(t - 2)\, y'' + (3t - 2)\, y' + y = \frac{2}{(t + 1)^3}$$

en remarquant que $u:\ t \mapsto 1/(t - 2)$ est solution de l'équation linéaire homogène associée.

Exercice 5 On considère l'équation de Bessel

$$t^2\, y'' + t\, y' + (t^2 - \nu^2)\, y = 0$$

où ν est un paramètre entier naturel.
1) Quelle est la structure de l'espace des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ et de l'espace des solutions sur $\mathbb{R}_-^*$?

2.a) On considère deux solutions φ_1 et φ_2 sur $\mathbb{R}_+^*$. Exprimer, pour t réel,

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix}$$

en fonction de $W(1)$ et de t.

2.b) Montrer que si φ_1 et φ_2 se prolongent toutes deux de façon continuement dérivable en 0 alors elles sont proportionnelles.
3) On suppose qu'on dispose d'une solution sur $\mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, t^k$$

développable en série entière.

3.a) Quelles relations sont vérifiées par les coefficients a_k ?

3.b) Que donnent les relations précèdentes dans les cas suivants : $\nu = 0$, $\nu = 1$, $\nu \geq 2$?

3.c) Dans chacun des cas précédents montrer que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ développables en série entière a une structure de droite vectorielle. On notera φ_ν un de ses générateurs.

4) On considère maintenant une solution sur $\mathbb{R}$.

4.a) Montrer qu'elle s'écrit $\lambda\,\varphi_\nu$ sur $\mathbb{R}_+^*$ où λ est une constante réelle et quélle s'écrit $\mu\,\varphi_\nu$ sur $\mathbb{R}_-^*$ où μ est une constante réelle.

4,b) Dans le cas $\nu \in \{0, 1, 2\}$ montrer que $\lambda = \mu$.

4.c) Quelle est la dimension de l'espace des solutions sur $\mathbb{R}$ dans le cas précédent puis dans le cas $\nu \geq 3$?

Exercice 6 1) On considère une solution non identiquement nulle y d'une équation linéaire $y'' + a_1\,y' + a_2\,y = 0$.

1.a) Montrer qu'entre deux zéros de y, la dérivée y' admet un zéro.

1.b) En déduire que les zéros de y sont isolés c'est à dire que l'ensemble des zéros n'a pas de point d'accumulation.

2) Que se passe-t-il quand on opère dans l'équation $y'' + a_1\,y' + a_2`\,y = 0$ où a_1 est continuement dérivable et a_2 continue, le changement de fonction inconnue $z = y\,\exp(A_1/2)$ où A_1 désigne une primitive de a_1 ?

3) On considère dorénavant une solution non identiquement nulle y_1 de l'équation $y'' + q_1(t)\,y = 0$ où q_1 est une application continue donnée et y_2 une solution non identiquement nulle de l'équation $y'' + q_2(t)\,y = 0$ où q_2 est une certaine application continue. On suppose que $q_1 \leq q_2$ et que y_1 admet deux zéros consécutifs en t_1 et t_2. On voudrait établir qu'alors y_2 s'annule sur $]t_1, t_2[$. Si ce n'est pas le cas on pourra supposer par exemple que y_1 et y_2 sont strictement positives sur $]t_1, t_2[$.

3.a) Montrer alors que la fonction $f = y_1/y_2$ peut être définie sur $]t_1, t_2[$ et calculer sa dérivée.

3.b) Montrer que le numérateur de f' a une dérivée positive, qu'il est positif en t_1 et négatif en t_2.

3.c) En déduire que $q_1 = q_2$ sur $]t_1, t_2[$ et que y_1 et y_2 sont proportionnelles sur $]t_1, t_2[$.

4) On considère une solution x non identiquement nulle de l'équation $x'' + q(t)\,x = 0$ où la fonction continue q vérifie $0 < a \leq q \leq b$ pour deux constantes a et b.

4.a) En comparant d'abord avec les solutions de $x'' + a\,x = 0$ montrer que x s'annule sur tout intervalle de longueur supérieure à $\pi/\sqrt{a}$.

4.b) Montrer ensuite que deux zéros consécutifs de x sont séparés d'au moins $\pi/\sqrt{b}$.

5) On considère l'équation de Bessel sur $\mathbb{R}_+^*$

$$t^2\, y'' + t\, y' + (t^2 - \nu^2)\, y = 0$$

où ν est un paramètre réel positif.

5.a) Que devient cette équation par le changement de fonction inconnue $y = u/\sqrt{t}$.

5.b) Montrer que dans le cas $\nu < 1/2$, toute solution y a au moins un zéro sur tout intervalle de longueur π et que la suite croissante (t_n) des zéros vérifie

$$\lim_{n\to+\infty} (t_{n+1} - t_n) = \pi$$

5.c) Quelles sont les solutions de l'équation de Bessel dans le cas $\nu = 1/2$?

5.d) Montrer que dans le cas $\nu > 1/2$, la suite croissante (t_n) des zéros vérifie encore $\lim_{n\to+\infty}(t_{n+1} - t_n) = \pi$.

Chapitre 6

Les systèmes autonomes

6.1 Généralités

Les systèmes autonomes que nous allons étudier sont des équations différentielles de la forme $y' = F(y)$ où la fonction inconnue est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et F est une application <u>continument différentiable</u> (c'est à dire de classe C^1) d'un ouvert U de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$.

Le caractère autonome de ces équations fait que les solutions sont stables par une translation de leur variable. Plus clairement si $y :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}^d$ est une solution et θ un réel alors l'application $\tilde{y} :\ t \mapsto y(t+\theta)$ sur $]\alpha - \theta, \beta - \theta[$ est aussi solution. Autrement dit on peut librement changer d'origine des temps.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz et ses corollaires entraine le résultat suivant.

Proposition 26 *Pour tous $y_0 \in U$ et $t_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy : $y' = F(y)$; $y(t_0) = y_0$.*

L'ensemble des valeurs prises $y(]\alpha, \beta[)$ par une solution maximale y définie sur $]\alpha, \beta[$ est appelé une <u>orbite</u>. Remarquons que tout point $y_0 \in U$ appartient à une seule orbite. En effet si deux solutions y_1 et y_2 passent par y_0 c'est à dire que $y_1(t_1) = y_2(t_2) = y_0$ alors $y_1(\cdot) = y_2(\cdot + t_2 - t_1)$ car ce sont deux solutions qui coincident au temps t_1.

Si $a \in \mathbb{R}^d$ est tel que $F(a) = 0$ alors la fonction constante égale à a est une solution et a est appelé <u>point d'équilibre</u>. Il s'agit d'un type de solution qui sera recherché au début de toute étude. Si l'équation différentielle décrit un certain système physique, l'existence d'un point d'équilibre a signifie que si on place le système dans l'état a, il reste indéfiniment dans cette état. Une motivation supplémentaire pour étudier les points d'équilibre est la remarque suivante. Supposons qu'une solution maximale y est définie jusqu'en $+\infty$ et qu'elle admette une limite $L \in \mathbb{R}^d$ en $+\infty$. Alors la dérivée a pour limite $F(L)$ par continuité de F et cette limite ne peut être que 0. Ainsi la limite L vérifie $F(L) = 0$. C'est un point d'équilibre. Par exemple le système qui régit l'équation du pendule (un point matériel fixé à une tige qui tourne librement en son autre extrémité) : $x' = y; \quad y' = -\sin x$ admet les deux points d'équilibre $(0, 0)$ et $(\pi, 0)$. L'intuition physique nous fait dire que ces deux équilibres sont bien différents : l'un est stable et l'autre instable. Dans le premier cas une petite perturbation entrainera un petit mouvement, pas dans le second. L'étude de la stabilité d'un équilibre sera un des objectifs de ce chapitre.

Un autre type particulier de solution est décrit dans la proposition suivante : celles qui sont homéomorphes au cercle.

Proposition 27 *Soit $y : I \to U$ une solution maximale de $y' = F(y)$ non injective c'est à dire $\exists t_1 > t_0,\ y(t_1) = y(t_0)$.*

Alors y est périodique : $I = \mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = y(t + t_1 - t_0)$.

Preuve. Il suffit de remarquer que y et $y(\cdot + t_1 - t_0)$ sont deux solutions qui coincident en t_0 donc sont égales.

6.2 Obtention d'orbites

Rappelons le théorème "des bouts". Considèrons une solution maximale $y :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}^d$ de $y' = F(y)$ où F est une application continument différentiable d'un ouvert U de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$. On sait que si β n'est pas $+\infty$ alors pour tout compact $K \subset U$ il existe $\gamma \in]\alpha, \beta[$ tel que $y(]\gamma, \beta[) \subset U \setminus K$. En particulier si $U = \mathbb{R}^d$ et $\beta \neq +\infty$ alors $\lim_{t \uparrow \beta} |y(t)| = +\infty$.

Ce théorème permet en particulier de montrer que si l'application continument différentiable $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est à croissance controlée linéairement c'est à dire $\forall x \in \mathbb{R}^d,\ |F(x)| \leq A\,|x| + B$ pour deux constantes A et B alors les solutions maximales de $y' = F(y)$ sont définies sur $\mathbb{R}$.

Nous allons maintenant donner un autre théorème qui assure le même type de résultat. Pour une équation scalaire il correspond au cas où F est décroissante.

Proposition 28 *Soit $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une application continument différentiable telle que pour un certain produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathbb{R}^d$,*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d,\ \langle x - y, F(x) - F(y) \rangle \leq 0$$

Alors les solutions de $y' = F(y)$ sont définies jusqu'en $+\infty$.

Preuve. Considérons une solution maximale $\varphi :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}^d$. Alors pour tous $s, t \in]\alpha, \beta[$ on a

$$\langle \varphi(s) - \varphi(t), \varphi'(s) - \varphi'(t) \rangle \leq 0$$

Il s'en suit par un calcul de dérivée que, pour h fixé, l'application $t \mapsto |\varphi(t+h) - \varphi(t)|^2$ est décroissante. En passant à la limite $h \downarrow 0$, l'application $t \mapsto |\varphi'(t)|^2$ est décroissante. Supposons $\beta < +\infty$. Comme $|\varphi'|$ est bornée au voisinage à gauche de β, le critère de Cauchy entraine que φ a une limite en β ce qui contredit le théorème des bouts.

La description des orbites d'un système devient souvent facile quand on dispose d'une intégrale première. On dira que l'application $H : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une intégrale première de l'équation $y' = F(y)$, F étant définie sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^d$ si c'est une application différentiable qui vérifie

$$\forall x \in U, \quad H'(x) \cdot F(x) = 0$$

Cela revient à dire que H est constante sur les orbites ou encore que toute orbite est incluse dans une ligne de niveau de H.

Un exemple bien connu est celui où H est l'énergie mécanique d'un système conservatif. Par exemple pour le pendule parfait $\theta'' + \sin\theta = 0$ qui se transforme en un système pour (θ, θ'), on peut prendre

$$H((x_1, x_2)) = \frac{1}{2} x_2^2 - \cos x_1$$

Pour l'équation des prédateurs et proies

$$\begin{cases} x' &= & x\,(1-y) \\ y' &= & -y\,(1-x) \end{cases}$$

on peut vérifier que $H((x, y)) = xy \exp -(x+y)$ fournit une intégrale première.

6.3 Stabilité par linéarisation

Le problème est d'étudier le comportement au voisinage d'un point d'équilibre. Considérons d'abord une équation linéaire homogène $y' = Ay$ où A est une matrice $d \times d$ réelle. Dans ce cas 0 est un point d'équilibre. Les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$ et peuvent s'exprimer par une formule explicite : $y(t) = \exp(tA)\, y(0)$. Dans un chapitre précédent, on s'est interrogé sur le comportement à long terme d'une solution partant d'un point autre que 0, par exemple proche de 0. On a vu que toute solution tend vers 0 quand $t \uparrow +\infty$ si et seulement si les valeurs propres complexes de la matrice A ont toutes une partie réelle strictement négative. Comme ce critère est simple on aimerait l'étendre aux systèmes non linéaires. L'idée est de comparer les solutions d'un système non linéaire aux solutions d'un système linéaire approximant.

Considérons comme d'habitude l'équation $y' = F(y)$ où F est continument dérivable sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^d$ et supposons que $a \in U$ est un point d'équilibre i.e. $F(a) = 0$. Par la formule de Taylor $F(x) = F'(a) \cdot (x - a) + |x - a|\, \varepsilon(x)$ où ε a pour limite 0 en a. Nous sommes donc amenés à comparer les solutions de l'équation initiale et celles du système linéarisé en a qui est, par définition, l'équation

$$y' = F'(a) \cdot (y - a)$$

Le théorème qui suit donne un cas où le système complet a localement le même comportement que le système linéarisé.

Théorème 29 *Soit F une application continument différentiable sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^d$ et $a \in U$ tel que $F(a) = 0$. On suppose que toute valeur propre complexe de la matrice $F'(a)$ a une partie réelle strictement négative.*

Alors il existe une norme $|\cdot|$ issue d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathbb{R}^d$ et un réel $\delta > 0$ tel que pour tout x_0 dans la boule de centre a et de rayon δ, la solution du problème de Cauchy $y' = F(y), y(0) = x_0$ vérifie pour tout $t > 0$,

$$|y(t) - a| \le e^{-\alpha\, t}\, |x_0 - a|$$

où α est un réel strictement inférieur à toutes les valeurs absolues des parties réelles des valeurs propres complexes de $F'(a)$.

En particulier la solution décrite tend vers a en $+\infty$.

Nous commençons par un lemme.

Lemme 30 *Soit un endomorphisme u de $\mathbb{R}^d$. On suppose que toute valeur propre complexe λ de u vérifie $\beta < Re(\lambda) < \alpha$ pour deux réels fixés β et α.*

Alors il existe un produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$ noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\beta\, \langle x, x \rangle \le \langle u(x), x \rangle \le \alpha\, \langle x, x \rangle$.

Preuve du lemme. Précisons que par valeur propre complexe de u on entend valeur propre complexe de sa matrice dans la base canonique de

$\mathbb{R}^d$ c'est à dire une racine du polynome caractéristique de u. On se donne d'abord deux réels $\tilde{\beta}$ et $\tilde{\alpha}$ tels que pour toute valeur propre complexe λ de u on a : $\beta < \tilde{\beta} < \lambda < \tilde{\alpha} < \alpha$. Notons $\tilde{u}$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^d$ dont la matrice sur la base canonique de $\mathbb{C}^d$ est égale à la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Il existe une base $(b_1, \dots, b_d)$ de $\mathbb{C}^d$ sur laquelle la matrice de $\tilde{u}$ est triangulaire supérieure, disons avec des $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ sur la diagonale et des coefficients t_{ij} au dessus. Nous allons "écraser les coefficients au dessus de la diagonale" pour se ramener à une matrice "presque diagonale". Plus précisement on se donne $\varepsilon > 0$ et on pose alors, pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$, $f_k = r^k\, b_k$ où r est un réel strictement positif que nous fixerons ultérieurement. On a alors pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$

$$\tilde{u}(f_j) = r^j\, \tilde{u}(b_j) = r^j\, \left(\lambda_j b_j + \sum_{i<j} t_{ij} b_i\right) = \lambda_j f_j + \sum_{i<j} t_{ij} r^{j-i} f_i$$

Ainsi la matrice de $\tilde{u}$ dans la base $(f_1, \dots, f_d)$ est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ et des coefficients au dessus de la diagonale qui sont $s_{ij} = r^{j-i}\, t_{ij}$ et peuvent être tous rendus inférieurs en module à ε en prenant r suffisamment petit. On définit un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ sur $\mathbb{C}^d$ (c'est à dire une forme sesquilinéaire définie positive) en posant pour $x, y \in \mathbb{C}^d$,

$$\langle x|y \rangle = \sum_{k=1}^{d} \overline{x}_k\, y_k \text{ pour } x = \sum_{k=1}^{d} x_k\, f_k, \text{ et } y = \sum_{k=1}^{d} y_k\, f_k$$

Autrement dit ce produit scalaire a pour matrice la matrice identité dans la base $(f_1, \dots, f_d)$ qui est donc de ce fait orthonormée. On a alors

$$\langle \tilde{u}(x)|x \rangle = \sum_{k} \overline{\lambda_k}\, |x_k|^2 + \sum_{i<j} \overline{s_{ij}\, x_j}\, x_i$$

Cette dernière somme qui comporte $d(d-1)/2$ termes est majorée en module par $\varepsilon\ (d(d-1)/2)\ \langle x|x \rangle$ car $|s_{ij}| \leq \varepsilon$. On en déduit que

$$\left(\tilde{\beta} - \varepsilon \frac{d(d-1)}{2}\right) \langle x|x \rangle \leq \mathrm{Re}\langle \tilde{u}(x)|x \rangle \leq \left(\tilde{\alpha} + \varepsilon \frac{d(d-1)}{2}\right) \langle x|x \rangle$$

On peut choisir ε assez petit pour que

$$\beta < \tilde{\beta} - \varepsilon \frac{d(d-1)}{2} < \tilde{\alpha} + \varepsilon \frac{d(d-1)}{2} < \alpha$$

On vérifie facilement que l'on définit un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur $\mathbb{R}^d$ en posant $\langle x,y\rangle = \mathrm{Re}\langle x|y\rangle$. Il répond aux exigences du lemme.

Passons à la **preuve du théorème.** Quitte à effectuer une translation nous nous ramenons à $a=0$. Nous choisissons un réel strictement positif α qui est strictement inférieur à toutes les valeurs absolues des parties réelles des valeurs propres complexes de $F'(a)$. Puis nous prenons $\eta > \alpha$ qui lui aussi est strictement inférieur à toutes les valeurs absolues des parties réelles des valeurs propres complexes de $F'(a)$. Puisque toute valeur propre complexe de $F'(0)$ a une partie réelle inférieure à $-\eta$, le lemme précédent montre l'existence d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur $\mathbb{R}^d$ telle que $\langle F'(0)\cdot x, x\rangle \leq -\eta\ \langle x,x\rangle$. La norme $|\cdot|$ associée à ce produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur $\mathbb{R}^d$ est celle annoncée dans le théorème. En effet nous pouvons écrire $F(x) = F'(0)\cdot x + |x|\,\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(\cdot)$ est une fonction de limite nulle en 0. Ensuite nous choisissons $\delta > 0$ de façon que sur la boule fermée $\overline{B}(0,\delta)$ de centre 0 et de rayon δ, la fonction $\varepsilon(\cdot)$ est inférieure en norme à $\eta-\alpha$. Alors nous avons pour tout $x \in \overline{B}(0,\delta)$,

$$\langle F(x), x\rangle = \langle F'(0)\cdot x, x\rangle + \langle |x|\,\varepsilon(x), x\rangle \leq -\eta\langle x,x\rangle + (\eta-\alpha)\,|x|^2 \leq -\alpha|x|^2$$

Pour $x_0 \in \overline{B}(0,\delta)$ considérons la solution maximale du problème de Cauchy $y' = F(y), y(0) = x_0$. Notons $\theta = \sup\{t > 0, y(t) \in \overline{B}(0,\delta)\}$. La solution maximale étudiée est bien définie jusqu'au temps θ par le théorème des bouts. Pour $t \in]0,\theta[$ nous avons

$$\frac{d}{dt}|y(t)| = \frac{d}{dt}\sqrt{\langle y(t), y(t)\rangle} = \frac{\langle y'(t), y(t)\rangle}{|y(t)|} = \frac{\langle F(y(t)), y(t)\rangle}{|y(t)|} \leq -\alpha|y(t)|$$

Par suite

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\alpha t}\,|y(t)|\right] = e^{\alpha t}\ \left[\frac{d}{dt}(|y(t)|) + \alpha|y(t)|\right] \leq 0$$

La négativité de la dérivée entraine la décroissance de la fonction et donc pour tout $t \in]0,\theta[$, $|y(t)|e^{\alpha t} \leq |y(t_0)| \leq \delta$. Cela prouve que la solution maximale étudiée reste en fait dans la boule compacte $\overline{B}(0,\delta)$ et elle est donc définie pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ $(\theta = +\infty)$. On conclut donc, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $|y(t)| \leq e^{\alpha t}\,|y(t_0)|$.

En fait un théorème plus difficile appelé théorème de linéarisation de Hartman affirme que si toutes les valeurs propres complexes de $F'(a)$ ont une partie réelle non nulle le système $y' = F(y)$ et son linéarisé $y' = F'(a)\cdot(y-a)$ sont topologiquement équivalents au voisinage du point d'équilibre a ce qui signifie qu'au voisinage du point a les solutions de $y' = F(y)$ ont même allure que celle du système $y' = F'(a)\cdot(y-a)$.

6.4 Stabilité par fonction de Lyapounov

Comme dans le paragraphe précédent le problème est l'étude locale au voisinage d'un point d'équilibre. Nous introduisons un nouvel outil.

Soit F une application continument différentiable sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^d$ et $a \in U$ tel que $F(a) = 0$. On dit que $L : W \to \mathbb{R}$ définie sur un voisinage $W \subset U$ de a est une fonction de Lyapounov pour $y' = F(y)$ au voisinage de a si

(i) L est continument différentiable sur W
(ii) L admet un unique minimum absolu en a
(iii) $\forall x \in W \setminus \{a\},\ L'(x) \cdot F(x) < 0$

Théorème 31 *Dans le cas ci-dessus, il existe un voisinage V de a inclus dans W tel que pour tout $x_0 \in V$ la solution du problème de Cauchy $y' = F(y), y(0) = x_0$ vérifie*

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = a$$

Preuve. Nous choisissons d'abord $\varepsilon > 0$ pour que la boule fermée $\overline{B}(a,\varepsilon)$ soit incluse dans W. Puis nous appelons w le point de la sphère $\partial B(a,\varepsilon)$ où la fonction continue L atteint son minimum. Par (ii) on sait que $L(w) > L(a)$. Nous allons voir que l'ensemble $V = \{x \in B(a,\varepsilon);\ L(x) < L(w)\}$ qui est un voisinage borné de a répond aux exigences de l'énoncé. Prenons $y_0 \in V$ et considérons la solution maximale y, définie sur l'intervalle ouvert I, du problème de Cauchy $y' = F(y),\ y(0) = y_0$. Soit $\gamma = \sup\{t \in I,\ y(t) \in V\}$ le temps de sortie de V. Pour tout $t \in]0, \gamma[$, on a en utilisant (i) et (iii),

$$\frac{d}{dt}[L(y(t))] = L'(y(t)) \cdot y'(t) = L'(y(t)) \cdot F(y(t)) < 0 \text{ d'où } L(y(t)) < L(y_0) < L(w)$$

Par conséquent $\gamma < \sup I$ est impossible. La solution maximale y reste donc incluse dans l'ensemble borné V. Le théorème des bouts implique alors $\sup I = +\infty$. Ainsi pour tout $t \geq 0$, $y(t)$ est défini et appartient à V. Supposons que $y(t)$ ne tende pas vers a quand t tend vers $+\infty$. Alors il existe une suite (t_n) strictement croissante telle que $\inf_n |y(t_n) - a| > 0$. Quitte à construire la suite (t_n) par récurrence on supposera même que $t_{n+1} - t_n \geq 1$ pour tout n. Comme pour tout n, $y(t_n)$ appartient à la boule compacte $\overline{B}(a,\varepsilon)$, il existe une sous suite $(y(t_{n(k)}))$ qui converge vers une limite différente de a que nous noterons q. Par un calcul précédent on sait que $L(y(t_{n(k)}))$ décroit donc tend vers une limite qui est $L(q)$ puisque L est continue. Celle limite $L(q)$ est différente de $L(a)$ par (ii). Mais le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $t \mapsto L(y(t))$ entraine l'existence de $c_k \in]t_{n(k)}, t_{n(k+1)}[$ tel que

$$L(y(t_{n(k+1)})) - L(y(t_{n(k)})) = L'(y(c_k)) \cdot F(y(c_k)) \ . (t_{n(k+1)} - t_{n(k)})$$

Le membre de gauche tend vers $L(q) - L(q) = 0$ et on rappelle que $t_{n(k+1)} - t_{n(k)} \geq 1$. Par conséquent $= L'(y(c_k)) \cdot F(y(c_k)) \to 0$. Or par compacité $y(c_k)$ tend vers une limite q' le long d'une certaine sous-suite. On a alors $L'(q') \cdot F(q') = 0$. Par (iii) cela implique que $q' = a$. La limite de la fonction décroissante $t \mapsto L(y(t))$ est donc égale à la fois à $L(q') = L(a)$ et à $L(q) \neq L(a)$. Cette absurdité conclut la preuve du théorème.

6.5 Problèmes

Exercice 1 On considère le système

$$\begin{cases} x' &= a\,x - b\,x\,y \\ y' &= -c\,y + d\,x\,y \end{cases}$$

où a, b, c, d sont des constantes positives.
1) Discuter l'existence et l'unicité des solutions maximales avec condition initiale donnée.
2) Montrer qu'une solution avec conditions initiales strictement positives reste dans ce quart de plan. Dorénavant on se restreindra à ce quart de plan.
3) Trouver le(s) point(s) d'équilibre et discuter la nature du système linéarisé au voisinage de l'équilibre.
4) Découper le quart de plan en régions où x' et y' sont de signe constant.
5) Montrer que $H(x, y) = x^c e^{-dx} y^a e^{-by}$ est une intégrale première.
6) Etudier $y \mapsto y^a e^{-by}$ et $x \mapsto x^c e^{-dx}$. En déduire que toute orbite reste dans un compact et que les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$.
7) Montrer que les solutions maximales sont périodiques.
8) Calculer les valeurs moyennes de x et y sur une période.
9) Que se passe-t-il si on fait les changements $a \to a - \varepsilon, \ c \to c + \varepsilon$? Interprétation.

Exercice 2 (Examen juin 98) On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= x\,(x^2 - y - 1) \end{cases}$$

1.a) Quelle équation scalaire du second ordre ce système permet-il d'étudier ?
1.b) Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique-t-il à ce système ?
1.c) Montrer que si $(x(t), y(t))$ est solution alors $(-x(-t), y(-t))$ est également solution. Quelle propriété de symétrie en déduit-on pour l'ensemble des orbites ?
2.a) Quels sont les points d'équilibre de ce système ?
2.b) Comment s'écrit le système linéarisé au voisinage de chacun de ses points d'équilibre ?
2.c) Déterminer la nature de ces systèmes linéarisés (centre, noeud, col, foyer...) et dessiner l'allure des solutions de ces systèmes linéarisés.
3) Découper le plan en régions où x' et y' gardent un signe constant.
4.a) Montrer qu'une condition nécessaire pour qu'une solution (non constante) soit incluse dans la parabole $y = a\,x^2 + b$ est $(a, b) = (-1, 1)$ ou $(a, b) = (1/2, -1/2)$.
4.b) Montrer que la parabole $y = -x^2 + 1$ est effectivement la réunion de 5 orbites.
4.c) Les solutions associées aux 5 orbites décrites à la question précèdente sont-elles définies sur $]-\infty, +\infty[$ tout entier.
4.d) Qu'en est-il pour la parabole $y = (x^2 + 1)/2$?
5.a) Montrer que la solution partant de $(c, 0)$ pour $c \in]0, 1[$ coupe en temps fini la demi-droite $\{x = 0;\ y < 0\}$.
5.b Montrer en fait qu'une telle solution est périodique.
6.a) Montrer que la fonction $H(x, y) = (2y - x^2 + 1)\,(y + x^2 - 1)^2$ est une intégrale première du système différentiel.
6.b) En déduire que toute orbite non bornée est asymptote à l'une des paraboles $y = -x^2 + 1$ ou $y = (x^2 + 1)/2$.

Exercice 3 (Examen juin 99) Préliminaires :

(i) Soit φ une application dérivable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que φ et φ' ont des limites finies en $+\infty$. Montrer que $\lim_{+\infty} \varphi' = 0$.

(ii) Soit φ une application dérivable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{+\infty} \varphi' = -\infty$. Montrer que $\lim_{+\infty} \varphi = -\infty$.

(iii) Soit φ une application continument dérivable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que φ' est périodique de période T. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\int_0^T \varphi'$ pour que φ soit périodique de période T.

On étudie maintenant l'équation de Liénard $x'' + f(x)\,x' + x = 0$ où l'application f est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

et on fait les hypothèses suivantes :

(i) $f(0) \neq 0$

(ii) F est impaire

(iii) Il existe une réel $\alpha > 0$ tel que F est strictement positive et strictement croissante sur $]\alpha, +\infty[$

(iv) F est strictement négative sur $]0, \alpha[$

(v) F tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

1.a) Y a-t-il des cas répondant aux hypothèses supposées où l'équation de Liénard est linéaire ?

1.b) Qu'appelle t-on problème de Cauchy pour l'équation de Liénard ?

1.c) On pose **dorénavant** $y = x' + F(x)$. Montrer que le système d'ordre 1,

$$\begin{cases} x' &= y - F(x) \\ y' &= -x \end{cases}$$

d'inconnues x et y est équivalent à l'équation de Liénard. Nous appelerons ce système "système de Liénard".

2.a) Enoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour une équation différentielle autonome $u' = H(u)$ avec $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de fonction inconnue u à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Si on utilise le terme "localement lipschitzien" on rappelera sa définition.

2.b) Dans le cadre d'application du théorème de Cauchy-Lipschitz que peut on dire sur la (les ?) solution(s ?) maximale(s ?) d'un problème de Cauchy.

2.c) Le théorème de Cauchy-Lipschitz peut il s'appliquer au système de Liénard ? On justifiera précisément sa réponse.

3) Supposons, **pour cette question uniquement**, qu'il existe deux constantes réelles A et B telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |F(x)| \leq A\,|x| + B$$

Montrer alors que les solutions maximales du système de Liénard sont toutes définies sur $\mathbb{R}$. On pourra utiliser un corollaire du théorème "des bouts" vu en cours mais il faudra énoncer précisement ce résultat.

4.a) Quelle symétrie peut on mettre en évidence sur le système de Liénard ?

4.b) Pour une solution $(x(t), y(t))$ du système de Liénard sur un certain intervalle ouvert I, on pose $R(t) = (x^2(t) + y^2(t))/2$. Exprimer en fonction de $x(t)$ et $y(t)$ la dérivée $R'(t)$.

4.c) Diviser l'espace des phases en régions où le signe de x' et y' est constant. On fera intervenir le graphe de F : $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \ y = F(x)\}$. On fera un dessin en prenant un exemple de fonction F convenable et on symbolisera les signes de x' et y' par une flêche.

5.a) Montrer que le système de Liénard n'a qu'un point d'équilibre.
5.b) Ecrire le système linéarisé au voisinage du point d'équilibre.
5.c) En fonction de $f(0)$ dire de quel type est le système linéarisé (noeud, col, foyer ;attractif/répulsif) et dessiner l'allure des solutions de ce système. Dans le cas $f(0) = -2$ on résoudra effectivement le système linéarisé (la figure n'est pas demandée).
6) On étudie maintenant une solution de condition initiale $x(0) = 0$, $y(0) = y_0 > 0$.
6.a) Montrer qu'il existe $t_1 > 0$ tel que $(x(t_1), y(t_1)) \in G$ ce qui –rappelons le– signifie $y(t_1) = F(x(t_1))$.
6.b) Montrer qu'il existe $t_2 > t_1$ tel que $x(t_2) = 0$, $y(t_2) < 0$. On notera $y_2 = y(t_2)$ dans la suite et t_2 désigne en fait le premier temps qui convient.

Indication : On pourra montrer au préalable qu'après t_1 la solution ne peut recouper G avant de toucher le demi-axe des ordonnées négatives. Utiliser ensuite des techniques similaires à la résolution de 6.a.
6.c) Montrer que si y_0 tend vers $+\infty$ alors $x(t_1)$ tend vers $+\infty$.
6.d) En utilisant 4.b exprimer $R(t_2) - R(0)$ par une intégrale. On admettra que cette intégrale dépend continument de y_0. Montrer alors qu'il existe une valeur de y_0 pour laquelle cette intégrale est nulle.
6.e) Pour cette valeur de y_0 construire une solution périodique.
7.a) Montrer que f est strictement négative sur un voisinage de 0.
7.b) Montrer que, pour $r > 0$ assez petit, la boule de centre 0 et de rayon r dans l'espace des phases $\mathbb{R}^2$ ne contient pas d'orbite de solution périodique.

Indication : Si on suppose que le système de Liénard $x' = f_1(x, y)$, $y' = f_2(x, y)$ admet une solution périodique d'orbite γ incluse dans la boule de centre 0 et de rayon r, on pourra obtenir une contradiction grâce à la formule de Gauss
$$\int\int_\Gamma \nabla \cdot (f_1, f_2)\, dx\, dy = \int_\gamma (f_1\, dy - f_2\, dx)$$
où Γ est l' “intérieur” de γ (la composante connexe bornée de $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$) et la divergence s'écrit $\nabla \cdot (f_1, f_2) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}$.
8) Montrer que l'équation de Van der Pol
$$x'' + \mu\,(x^2 - 1)\,x' + x = 0$$
où $\mu > 0$, admet une solution non identiquement nulle périodique.
9) Montrer maintenant que l'équation de Rayleigh
$$x'' + x = \nu\,(1 - x'^2)\,x'$$
où $\nu > 0$, admet une solution non identiquement nulle périodique.

Indication : Penser à dériver l'équation.