Introduction à l'analyse fonctionnelle

Notes de cours et documents
pour le master de mathématiques appliquées

Laurent Serlet

Septembre 2004

Table des matières

Chapitre 1

Cardinalité, dénombrabilité

Le but de ce chapitre est d'introduire quelques notions de bases qui seront utiles dans la suite du cours. Nous débordons parfois de l'analyse fonctionnelle pour évoquer quelques corollaires particulièrement intéressants.

1.1 Ensembles ordonnés

Une *relation d'ordre* $\prec$ sur un ensemble E est une relation sur E qui possède les propriétés de

1. réflexivité : $\forall x \in E, \quad x \prec x$
2. antisymétrie : $(x \prec y, y \prec x) \Rightarrow x = y$
3. transitivité : $(x \prec y, y \prec z) \Rightarrow x \prec z$.

On appelle *ensemble ordonné* un ensemble muni d'une relation d'ordre. Ceux que nous utiliserons dans la suite du cours sont parfois un peu compliqués. Pour illustrer ce chapitre on peut garder en tête des exemples très simples : les réels avec la relation "inférieur ou égal", les entiers avec la relation de divisibilité ...

On dit que la relation d'ordre $\prec$ sur E est *totale* si pour tous $x, y \in E$, on a $x \prec y$ ou $y \prec x$. Dans le cas contraire la relation d'ordre est partielle.

Pour une partie A d'un ensemble ordonné, des éléments remarquables méritent d'être définis. Un *majorant* de A est un élément M de E tel que $a \prec M$ pour tout $a \in A$. On dit qu'un majorant de A est un *maximum* de A ou *plus grand élément* de A si il appartient à A. Quand il existe le maximum est unique et noté $\max A$. Si l'ensemble des majorants de A est non vide et admet un plus petit élément alors ce minimum des majorants est appelé *borne supérieure* de A et noté $\sup A$. Quand la borne supérieure de A existe, cette borne supérieure est un maximum de A si et seulement si elle appartient à A. Un élément *maximal* de A est un élément μ de A tel que $\mu \prec x$ et $x \in A$ impliquent $\mu = x$. Quand il existe le maximum est un élément maximal. Il peut y avoir plusieurs éléments maximaux. Néanmoins quand la partie est totalement ordonnée, il y a au plus un élément maximal qui est alors le maximum.

Un *minorant* de A est un élément λ de E tel que $\lambda \prec a$ pour tout $a \in A$. On dit qu'un minorant de A est un *minimum* de A ou *plus petit élément* de A si il appartient à A. Quand il existe le minimum est unique et noté $\min A$. Si l'ensemble des minorants de A est non vide et admet un plus grand élément alors ce maximum des minorants est appelé *borne inférieure* de A et noté $\inf A$. Quand la borne inférieure de A existe, cette borne inférieure est un minimum de A si et seulement si elle appartient à A. Un élément *minimal* de A est un élément τ de A tel que $x \prec \tau$ et $x \in A$ impliquent $\tau = x$. Quand il existe, le minimum est un élément minimal. Il peut y avoir plusieurs éléments minimaux. Néanmoins quand la partie est totalement ordonée, il y a au plus un élément minimal qui est alors le minimum.

Exercice. Pour les relations qui suivent, montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre, voir si elle est totale et envisager des exemples et contre-exemples aux concepts définis précédemment

1. sur $\mathbb{R}$, $x \prec y$ si $x \leq y$
2. sur $\mathbb{N}$, $x \prec y$ si x divise y
3. sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(x_1, x_2) \prec (y_1, y_2)$ si $x_1 < y_1$ ou $(x_1 = y_1$ et $x_2 \leq y_2)$
4. sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(x_1, x_2) \prec (y_1, y_2)$ si $x_1 < y_1$ ou $(x_1 = y_1$ et $x_2 \geq y_2)$

1.2 Théorème de Zorn

Le théorème de Zorn a de nombreuses utilisations en mathématiques et notamment en analyse. Pour un analyste la preuve du théorème de Zorn n'offre pas beaucoup d'intérêt. Toutefois le lecteur curieux pourra la trouver à la fin de ce chapitre sous forme de problème avec quelques applications qui sortent du cadre strict de ce cours. Il faut noter que cette preuve utilise, en plus des axiomes de la théorie des ensembles qui sont communément admis et utilisés, un axiome appelé *axiome du choix*. Cet axiome est indépendendant des autres axiomes plus naïfs de la théorie des ensembles. Nous donnons un énoncé.

Proposition 1 (Axiome du choix) *Soit E et F deux ensembles et f une application de E dans $\mathcal{P}(F) \setminus \{\emptyset\}$. Alors il existe une application $\tilde{f}$ de E dans F telle que $\forall x \in E,\ \tilde{f}(x) \in f(x)$*

Un concept nouveau est requis dans l'énoncé du théorème de Zorn. On dit qu'un ensemble ordonné E est *inductif* si toute partie totalement ordonnée admet un majorant dans E.

Théorème 2 (Théorème de Zorn) *Tout ensemble ordonné inductif admet un élément maximal.*

La preuve est donnée à l'exercice 3. On prouvera que pour tout a élément de E ensemble ordonné par $\prec$ inductif, il existe un élément maximal b tel que $a \prec b$.

1.3 Équipotence

Nous allons maintenent développer la notion d'ensembles "ayant le même nombre d'éléments". On dit que deux ensembles A et B sont *équipotents* si il existe une bijection de A sur B. La propriété d'équipotence est une relation d'équivalence sur les ensembles. La classe déquivalence de l'ensemble A est notée $\mathrm{Card}(A)$. On a ainsi $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$ si et seulement si A et B sont équipotents.

On écrira $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(B)$ si il existe une injection f de A dans B. Cette définition a bien un sens car si A et A' [resp. B et B'] sont équipotents, l'existence d'une injection de A dans B équivaut à l'existence d'une injection de A' dans B'. Cette relation $\leq$ sur les cardinaux est clairement reflexive et transitive. Comme le montre le résultat qui suit, elle est aussi anti-transitive ce qui en fait une relation d'ordre.

Théorème 3 (Théorème de Bernstein) *Si il existe une injection f de A dans B et une injection g de B dans A, alors A et B sont équipotents, c'est à dire qu'il existe une bijection φ de A sur B.*

Preuve. Pour a, b dans $A \cup B$, on dit que b est un prédécesseur d'ordre n de a si l'application successive de n opérations f ou g à b donne a. On note alors A_i l'ensemble des éléments de A dont l'ordre maximum des prédécesseurs est fini impair, A_p l'ensemble des éléments de A dont l'ordre maximum des prédécesseurs est fini pair (éventuellement 0) et A_∞ l'ensemble des éléments de A qui ont une infinité de prédécesseurs. On définit des notations identiques pour B. On notera que $f(A_p) = B_i$, $f(A_\infty) = B_\infty$ et $g(B_p) = A_i$. Il suffit alors de définir φ comme coïncidant avec f sur $A_p \cup A_\infty$ et avec g^{-1} sur A_i.

Proposition 4 *Pour deux ensembles X (non vide) et Y, il existe une injection de X dans Y si et seulement si il existe une surjection de Y dans X.*

Preuve. Voir exercice 1

Noua allons maintenant donner quelques résultats sur les cardinaux. On notera Card(A) $<$ Card(B) pour signifier Card$(A) \leq$ Card(B) et que Card$(A) \neq$ Card(B) c'est à dire que A et B ne sont pas équipotents.

Théorème 5 (Théorème de Cantor) *Pour tout ensemble X on a Card(X) $<$ Card$(\mathcal{P}(X))$.*

Preuve. Comme l'application $x \mapsto \{x\}$ est injective, on a déja Card$(X) \leq$ Card$(\mathcal{P}(X))$. Considérons maintenant une application f de X dans $\mathcal{P}(X)$. Notons A l'ensemble des $x \in X$ tels que $x \notin f(x)$. Ainsi si $x \in A$ on peut dire $f(x) \neq A$. Mais si $x \notin A$ alors $x \in f(x)$ donc $f(x) \neq A$. Ainsi A n'a pas d'antécédent par f donc f n'est pas surjective.

Montrons maintenant que la relation $\leq$ sur les cardinaux est totale.

Théorème 6 *Pour deux ensembles X et Y on a Card$(X) \leq$ Card(Y) ou Card$(Y) \leq$ Card(X)*

Preuve. On suppose X et Y non vides. Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des couples (A, f) où A est une partie de X et f une injection de A dans Y. Sur cet ensemble on définit une relation d'ordre :$(A, f) \prec (B, g)$ si $A \subset B$ et la restriction de g à A est f. Montrons que $\mathcal{E}$ est inductif. Si $\{(A_i, f_i);\ \ i \in I\}$ est une famille totalement ordonnée, on pose $\tilde{A} = \bigcup_{i \in I} A_i$ et il existe une application $\tilde{f}$ sur $\tilde{A}$ dont la restriction à chaque A_i est f_i. Il est facile de voir que $\tilde{f}$ est injective. Le couple $(\tilde{A}, \tilde{f})$ est un majorant (même une borne supérieure) de la famille considérée.

Puisque $\mathcal{E}$ est inductif, le théorème de Zorn affirme l'existence d'un élément maximal (A, f). Si $A = X$, f est une injection de X dans Y et c'est terminé. Si $A \neq X$, supposons $Y \neq f(A)$. On peut alors trouver $x \in X \setminus A$ et $y \in Y \setminus f(A)$. Posons $\hat{A} = A \cup \{x\}$ et définissons $\hat{f}$ sur $\hat{A}$ comme coïncidant avec f sur A et vérifiant $\hat{f}(x) = y$. On a alors $(A, f) \prec (\hat{A}, \hat{f})$, ces deux couples étant distincts ce qui est contraire à la maximalité de (A, f). Donc l'injection f vérifie $f(A) = Y$. Alors f^{-1} est une injection de Y dans X.

On dit qu'un ensemble U est *fini* si il est équipotent à $\{1, \ldots, n\}$ pour un certain entier n et on note pour simplifier Card$(U) = n$. Si un ensemble n'est pas fini, il est dit *infini*. Dans ce cas on a Card$(U) \geq$ Card$(\mathbb{N})$.

On désigne par X^Y ou par $\mathcal{F}(X, Y)$ l'ensemble des applications de X dans Y.

Proposition 7 *Si $2 \leq$ Card$(X) \leq$ Card$(\mathbb{R})$ alors Card$(X^{\mathbb{N}}) =$ Card$(\mathbb{R})$.*

Preuve. On procède par encadrement. On utilise d'abord l'exercice 4

$$\mathrm{Card}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) = \mathrm{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = \mathrm{Card}(\mathbb{R})$$

Puis,

$$\mathrm{Card}[\mathbb{R}^{\mathbb{N}}] = \mathrm{Card}\left[\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}\right] = \mathrm{Card}\left[\{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\right] = \mathrm{Card}\left[\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right] = \mathrm{Card}(\mathbb{R})$$

Proposition 8 *Si X est infini alors Card(X) = Card($X \times \{0,1\}$)*

Preuve. Remarquons d'abord que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}\times\{0,1\}$ sont équipotent. Si X est infini une certaine partie H de X est en bijection avec $\mathbb{N}$ donc avec $\mathbb{N}\times\{0,1\}$ donc avec $H \times \{0,1\}$. On montre ensuite que l'ensemble non vide

$$\mathcal{E} = \{(A,f);\ \ A \subset X,\ f \text{ bijection de } A \text{ sur } A \times \{0,1\}\}$$

est inductif pour l'ordre du prolongement d'où on déduit par Zorn l'existence d'un élément maximal (A,f). Supposons que $A \neq X$ et même $\mathrm{Card}(X\setminus A) \geq \mathrm{Card}(A)$. Alors il existe une partie B de $X \setminus A$ équipotente à A. On peut donc disposer d'une bijection de A sur $A\times\{0,1\}$ et d'une bijection de B sur $B\times\{0,1\}$. On peut alors construire une bijection de $A\cup B$ sur $A\cup B\times\{0,1\}$ ce qui contredit la maximalité de A. On a donc $\mathrm{Card}(X \setminus A) < \mathrm{Card}(A)$. Il existe donc une injection de $X \setminus A$ dans A. On peut donc réaliser une injection de $A\cup(X\setminus A)$ dans $A\times\{0,1\}$. Donc $\mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}[A\cup(X\setminus A)] \leq \mathrm{Card}[A \times \{0,1\}] = \mathrm{Card}[A]$ Mais $A \subset X$ donc en fait $\mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(A)$ et X est en bijection avec $X \times \{0,1\}$.

Théorème 9 *Si X est infini alors Card(X^2) = Card(X).*

Preuve. L'ensemble

$$\mathcal{E} = \{(A,f);\ \ A \subset X,\ A \text{ infini },\ \ f \text{ bijection de } A \text{ sur } A \times A\}$$

est inductif pour l'ordre du prolongement d'où on déduit par Zorn l'existence d'un élément maximal (A,f). Supposons que $\mathrm{Card}(X\setminus A) \geq \mathrm{Card}(A)$. Alors il existe une partie B de $X \setminus A$ équipotente à A. On écrit

$$(A \cup B)^2 = (A \times A) \cup (B \times B) \cup (A \times B) \cup (B \times A)$$

On peut mettre en bijection $A\times A$ et A, donc $B\times B$ et $B\times\{0\}$, puis $A\times B$ et $B \times \{1\}$, enfin $B \times A$ et $B \times \{2\}$. Mais $B \times \{0,1,2\}$ est équipotent à B par la proposition qui précède. Il y a donc bijection de $A\cup B$ sur $(A\cup B)^2$ ce qui contredit la maximalité de A. Donc $\mathrm{Card}(X \setminus A) < \mathrm{Card}(A)$ d'où $\mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(A)$ ce qui achève la preuve.

Proposition 10 *Si X est infini et Card$(Y) \leq$ Card(X) alors*

1. *Card$(X \cup Y) =$ Card(X)*
2. *Card$(X \times Y) =$ Card(X)*
3. *Card$(X^p) =$ Card(X) pour tout entier p*
4. *Card$[\mathcal{P}_f(X)] =$ Card(X) où $\mathcal{P}_f(X)$ est l'ensemble des parties finies de X*

Preuve. Ce sont des corollaires des deux résultats qui précédent. Pour le dernier point on peut utiliser le résultat qui suit.

Proposition 11 *Si les ensembles X_i, $i \in I$ ont tous un cardinal inférieur ou égal à celui de X, ainsi que I alors*

$$\mathit{Card}\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) \leq \mathit{Card}(X)$$

Preuve. Notons f_i des injections de X_i dans X et φ une injection de I dans X. Pour $x \in \bigcup_{i \in I} X_i$ soit $\psi(x) \in I$ tel que $x \in X_{\psi(x)}$.

L'application $x \mapsto (f_{\psi(x)}(x), \psi(x))$ est une injection. Donc $\mathrm{Card}[\bigcup_{i \in I} X_i] \leq \mathrm{Card}(X \times I) \leq \mathrm{Card}(X \times X) = \mathrm{Card}(X)$

1.4 Dénombrabilité, suites

On dit qu'un ensemble est *infini dénombrable* si il est équipotent à $\mathbb{N}$ c'est à dire en bijection avec $\mathbb{N}$ ou encore que son cardinal est celui de $\mathbb{N}$. Un ensemble est dit *dénombrable* si il est fini ou infini dénombrable.

Par ce qui précéde un ensemble X est dénombrable si il existe une injection de X dans $\mathbb{N}$ ou, bien sûr, s'il existe une surjection de $\mathbb{N}$ dans X. D'après les résultats déja obtenus :

Proposition 12 *Si $X_1, \ldots, X_n$ sont dénombrables alors $X_1 \times \cdots \times X_n$ est dénombrable. Si les X_i, $i \in I$ sont dénombrables ainsi que I alors $\bigcup_{i \in I} X_i$ est dénombrable.*

Donnons quelques exemples d'ensembles dénombrables :

1. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{Q}$
2. $\mathbb{N}^p$, $\mathbb{Z}^p$, $\mathbb{Q}^p$ pour tout entier p
3. les complexes à parties réelle et imaginaire rationnelles, plus généralement les p-uples à composantes rationnelles ($p \in \mathbb{N}^*$).
4. les parties finies d'un ensemble dénombrable

5. les polynomes à coefficients rationnels

A contrario donnons quelques ensembles non dénombrables : $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}$, tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,etc ...

Quand un ensemble est dénombrable, on peut l'écrire sous forme des termes d'une suite. On appelle *suite* à valeurs dans X une application de $\mathbb{N}$ dans X. Par tradition, on préfère la notation indicielle x_n pour les termes de la suite plutôt que la notation fonctionnelle $x(n)$. Une suite est donc notée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ plutôt que $x: \mathbb{N} \to X, \quad x \mapsto x(n)$.

Si on peut écrire tout ensemble dénombrable comme ensemble des termes d'une suite, on ne peut pas cependant imposer que cette suite soit monotone ; penser par exemple au cas de $\mathbb{Q}$.

Les suites ont été étudiées bien des fois dans les cours de niveau inférieur. On les utilise dès que possible en topologie. Nous allons maintenant exposer un procédé un peu moins banal, le procédé diagonal. Nous allons traiter un exemple, historiquement à l'origine du procédé. Nous prouverons que $[0,1]$ et donc $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. Par l'exercice 4 nous savons déja que $\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ont même cardinal et, par le théorème de Cantor que $\mathrm{Card}[\mathcal{P}(\mathbb{N})] > \mathrm{Card}(\mathbb{N})$ ce qui prouve la non-dénombrabilité de $\mathbb{R}$.

Voyons maintenant notre nouvelle preuve par le procédé diagonal. Supposons $[0,1]$ dénombrable donc s'écrivant $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Pour chaque réel u_n on écrit le développement décimal :

$$\begin{array}{rcl} u_0 & = & u_0^0\, u_1^0\, u_2^0 \ldots \\ u_1 & = & u_0^1\, u_1^1\, u_2^1 \ldots \\ u_2 & = & u_0^2\, u_1^2\, u_2^2 \ldots \\ & \vdots & \end{array}$$

Les u_n^p sont des entiers compris entre 0 et 9. Considérons alors la suite (x_n) définie par $x_n = 9 - u_n^n$. On pourrait choisir une autre définition ; ce qui importe est que $x_n \neq u_n^n$. Car le réel de $[0,1]$ de développement décimal $0, x_0\, x_1\, x_2 \ldots$ ne peut alors être égal à un u_n. Cela est absurde. Donc $[0,1]$ n'est pas dénombrable.

D'une façon générale supposons qu'on dispose des suites $u^p = (u_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $p \in \mathbb{N}$ et de propriétés asymptotiques $(\mathcal{H}_p;\ p \in \mathbb{N})$ stable par extraction d'une sous-suite et pouvant être réalisées par une telle extraction. Alors on extrait de u^0 une sous-suite $(u^0_{\phi_0(n)})$ vérifiant $\mathcal{H}_0$. Puis on extrait de $(u^1_{\phi_0(n)})$ une sous-suite $(u^1_{\phi_1(n)})$ ayant la propriété $\mathcal{H}_1$ et toujours aussi $\mathcal{H}_0$ puisqu'on a simplement fait une extraction. Ensuite on extrait de $(u^2_{\phi_1(n)})$ une sous-suite $(u^2_{\phi_2(n)})$ ayant la propriété $\mathcal{H}_2$ et toujours $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_0$, etc ... L'astuce consiste à considérer $(x_n) = (u^n_{\phi_n(n)})$ Elle a toutes les propriétés $\mathcal{H}_p$, $p \in \mathbb{N}$ car, pour tout j, ses termes de rang superieur à j sont extraits de $u^j_{\phi_j(n)}$ donc elle vérifie $\mathcal{H}_j$.

Cette description peut paraître floue ; nous verrons plusieurs exemples dans les chapitres qui suivent.

1.5 Exercices

Exercice 1 (Preuve de la proposition 4) 1) En supposant qu'il existe une injection f de X dans Y, construire une surjection de Y dans X coïncidant avec f^{-1} sur $f(X)$.
2) Si s est une surjection de Y sur X construire une injection de X dans Y, en utilisant l'axiome du choix.
3) Que peut on dire si il existe, d'un ensemble dans un autre, une injection et une surjection ?

Exercice 2 (difficile) On suppose que $(E, \leq)$ est un ensemble ordonné fortement inductif ce qui signifie que toute partie totalement ordonnée admet une borne supérieure. On suppose que f est une application de E dans E telle que $x \leq f(x)$ pour tout $x \in E$. Le but de cet exercice est de prouver qu'il existe $a \in E$ tel que $f(a) = a$.

On fixe $s \in E$. On dira qu'une partie B de E est stable si elle contient s, vérifie $f(B) \subset B$ et que pour toute partie totalement ordonnée $\tilde{B}$ de B on a $\sup \tilde{B} \in B$.
1) Prouver qu'il existe une plus petite partie S stable (pour l'inclusion) égale à l'intersection de toutes les parties stables.
On pose

$$P = \{x \in S;\ \forall y \in S,\ y < x \Rightarrow f(y) \leq x\}$$

2) Pour $x \in P$, montrer que la partie

$$S_x = \{y \in S;\ y \leq x \text{ ou } f(x) \leq y\}$$

est stable puis qu'elle est égale à S.
3) Montrer que P est stable puis qu'elle est égale à S.
4) Montrer que S admet une borne supérieure a qui vérifie $f(a) = a$.

Exercice 3 (Preuve du théorème de Zorn (difficile)) Dans un ensemble ordonné $(E, \leq)$ inductif, on fixe un élément a et on considère la famille $\mathcal{E}$ de toutes les parties totalement ordonnées admettant a comme plus petit élément. On suppose d'abord que toute partie $A \in \mathcal{E}$ admet au moins un majorant n'appartenant pas à A et on note $f(A)$ l'ensemble de ces "majorants stricts".
1) Justifier l'existence d'une application $\tilde{f}$ de $\mathcal{E}$ dans E telle que $\forall A \in \mathcal{E},\ \tilde{f}(A) \in f(A)$.
2) Montrer que $\mathcal{E}$ est fortement inductif pour la relation d'inclusion.
3) Montrer que l'application F de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à A associe $A \cup \tilde{f}(A)$ contredit l'exercice 2.

4) En déduire l'existence d'un élément maximal $b \in E$ qui vérifie en outre $a \leq b$.

Exercice 4 Le but de cet exercice est de montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ont même cardinal.
1) Montrer que l'application f qui à $I \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ associe le réel $f(I) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_I(n) 2/3^n$ est injective.
2) Montrer que l'application g qui à $x \in]0,+\infty[$ associe $\{(p,q);\ p\,x < q\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ est injective.
3) Montrer que $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$ sont équipotents.
4) Conclure.

Exercice 5 1) Montrer que pour tout ensemble infini X, $\mathcal{P}(X)^X$ est équipotent à $\mathcal{P}(X)$.
2) Etablir que, pour X infini,

$$2 \leq \mathrm{Card}(Y) \leq \mathrm{Card}[\mathcal{P}(X)] \Rightarrow \mathrm{Card}[Y^X] = \mathrm{Card}[\mathcal{P}(X)]$$

Exercice 6 (Application aux espaces vectoriels) Cet exercice établit des résultats algébriques sur les espaces vectoriels. Comme nous allons beaucoup travailler avec les espaces vectoriels, cela n'est pas complétement hors sujet. Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$.
1) Montrer que l'ensemble des parties libres de E est inductif pour l'inclusion.
2) Appliquer Zorn pour en déduire l'existence d'une base.
3) Préciser ce qui précède pour donner un énoncé du théorème de la base incomplète.
4) Soit $(e_i)_{i\in I}$ et $(f_j)_{j\in J}$ deux bases de E. Pour tout $i \in I$, il existe une partie finie J_i de J et des scalaires non nuls λ^i_j, $j \in J_i$ tels que $e_i = \sum_{j\in J_i} \lambda^i_j\ f_j$. Que vaut $\bigcup_{i\in I} J_i$?
5) En déduire que $\mathrm{Card}(I) = \mathrm{Card}(J)$.
6) En considérant $\mathbb{R}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, construire une application non continue telle que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous réels x, y.
7) Montrer que sur tout espace vectoriel normé qui n'est pas de dimension finie, il existe une forme linéaire non continue.

Exercice 7 Les ensembles qui suivent sont ils dénombrables :

1. ensemble des suites d'entiers
2. ensemble des suites d'entiers nulles à partir d'un certain rang
3. ensemble des suites d'entiers constantes à partir d'un certain rang

Chapitre 2

Espaces métriques et normés

Ce chapitre n'est pas un cours de topologie. Nous supposons qu'un tel cours a déjà été suivi. Mais nous en rappelons les définitions et résultats. L'exposé est rapide puisqu'il s'agit de rappels. Toutefois nous détaillons quelques points qui sont peut être moins connus. Les résultats mis en valeurs ne sont donc pas forcément les plus importants mais ceux que l'on pense moins connus du lecteur. Nous ne donnons que très peu d'exemples pour ne pas nous ralentir et parce que nous en verrons beaucoup dans la suite du cours.

2.1 Distances et normes

La topologie a pour but de donner un sens à la notion de proximité entre deux objets mathématiques et ainsi de formaliser la notion de "tendre vers un objet limite". Car on sait qu'en mathématiques, toutes les grandeurs ne s'obtiennent pas comme résultat d'un calcul exact mais que le plus souvent on ne calcule que des approximations de l'objet souhaité.

La structure la plus naturelle est celle d'*espace métrique*. Il s'agit d'un ensemble muni d'une *distance*. Une distance d sur un ensemble E est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}_+$ qui vérifie $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, $d(x,y) = d(y,x)$, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (inégalité triangulaire).

Un cas particulièrement intéressant d'espace que l'on souhaite munir d'une métrique est celui des espaces vectoriels. Dans ce cas les distances que l'on considère sont celles qui dérivent d'une *norme* par la formule $d(x,y) = ||x-y||$. Un norme $||\cdot||$ sur l'espace vectoriel E est une application de E dans $\mathbb{R}_+$ qui vérifie $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $||\lambda\, x|| = |\lambda|\, ||x||$ pour tout scalaire λ, $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$. Quand un espace vectoriel est muni d'une norme on a affaire à un *espace vectoriel normé.*

Sur $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{C}^d$ les normes usuelles sont

$$|x|_p = \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad (p \in [1, +\infty[) \text{ et } |x|_\infty = \max\{|x_i|;\ 1 \le i \le d\}$$

2.2 Ouverts et fermés

On définit la *boule* ouverte [resp. fermée] de centre $c \in E$ et de rayon $r > 0$ notée $B(c, r)$ [resp. $\overline{B}(c, r)$] comme l'ensemble des $x \in E$ tel que $d(x, c) < r$ [resp. $d(x, c) \le r$]. On dit qu'un point a d'une partie A de E est *intérieur* à A si il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$. On appelle d'ailleurs *voisinage* de a toute partie de E contenant une boule ouverte de rayon $r > 0$ centrée en a. Ainsi a est intérieur à A si A est un voisinage de a. On note $\overset{\circ}{A}$ ou $\mathrm{Int}(A)$ l'intérieur de A ; c'est une partie de A.

Une partie de E est *ouverte* si elle est égale à son intérieur. L'ensemble des ouverts de E est stable par réunion quelconque et intersection finie. L'ensemble vide et E sont deux ouverts. L'intérieur d'une partie A est le plus grand ouvert inclus dans A ou également la réunion de tous les ouverts inclus dans A. Les propriétés suivantes sont vérifiées

$$\begin{array}{rcl} A \subset B & \Rightarrow & \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B} \\ \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B) & \subset & \mathrm{Int}(A \cup B) \\ \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B) & = & \mathrm{Int}(A \cap B) \end{array}$$

On dit qu'une partie est *fermée* si son complémentaire est ouvert. L'ensemble des fermés est stable par réunion finie et intersection quelconque. On appelle *fermeture* ou *adhérence* d'une partie A le plus petit fermé contenant A ou encore l'intersection de tous les fermés contenant A. On le note $\overline{A}$ ou $\mathrm{Adh}(A)$. Le complémentaire de l'adhérence de A est l'intérieur du complémentaire de A. Un point y appartient à $\overline{A}$ si et seulement si toute boule centrée en y de rayon $r > 0$ rencontre A i.e. a une intersection non vide avec A. Des propriétés de l'intérieur on déduit les propriétés de l'adhérence :

$$\begin{array}{rcl} A \subset B & \Rightarrow & \overline{A} \subset \overline{B} \\ \overline{A \cup B} & = & \overline{A} \cup \overline{B} \\ \overline{A} \cap \overline{B} & \supset & \overline{A \cap B} \end{array}$$

On notera par exemple que les boules ouvertes sont des ouverts, les boules fermées sont des fermés mais, dans un espace métrique, l'adhérence d'une boule ouverte n'est pas toujours la boule fermée de même centre et même rayon. Cette propriété est néanmoins vraie dans un espace vectoriel normé.

Un singleton est toujours fermé. Quand tous les singletons sont aussi ouverts on dit que l'espace est *discret*.

La frontière d'une partie A est la différence de l'adhérence et de l'intérieur $\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$. Il s'agit donc d'un fermé. La frontière de A est notée $\mathrm{Fr}(A)$ ou ∂A.

On appelle *diamètre* d'une partie A la quantité

$$\mathrm{diam}(A) = \sup\{d(x,y),\ \ (x,y) \in A \times A\} \in [0, +\infty]$$

Quand ce diamétre est fini la partie est dite *bornée*.

Une partie A de E est *dense* dans E si son adhérence est égale à E.

2.3 Limites de suites et fonctions

Une suite (x_n) d'éléments de l'espace métrique (E,d) converge vers un point $y \in E$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $x_n \in B(y,\varepsilon)$ autrement dit si $d(x_n, y)$ tend vers 0.

L'adhérence d'une partie A est égale à l'ensemble des limites des suites convergentes d'éléments de A.

On appelle *valeur d'adhérence* d'une suite la limite d'une suite extraite c'est à dire d'une suite $(x_{\phi(n)})$ où ϕ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante. L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (x_n) est égal à

$$\bigcap_{p \geq 1} \overline{\{x_n;\ n \geq p\}}$$

C'est donc un ensemble fermé.

On verra dans la suite que beaucoup de propriétés peuvent s'écrire à l'aide de suites. Dans les preuves il est souvent commode d'utiliser ces formulations séquentielles.

On dit que l'application f d'un espace métrique (E,d) dans un espace métrique (F,δ) a pour *limite* b $(\in F)$ au point ω $(\in E)$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que $f(B(\omega,\eta) \setminus \{\omega\}) \subset B(b,\varepsilon)$ c'est à dire $0 < d(x,\omega) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), b) < \varepsilon$. Un critère équivalent est que $(f(x_n))$ tend vers b pour toute suite (x_n) tendant vers ω et restant différente de ω.

Une application f d'un espace métrique (E,d) dans un espace métrique (F,δ) est dite *continue au point* $a \in E$ si elle admet pour limite $f(a)$ en a i.e. pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que $f(B(a,\eta)) \subset B(f(a),\varepsilon)$ c'est à dire $d(x,a) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Un critère équivalent est que $(f(x_n))$ tend vers $f(a)$ pour toute suite (x_n) tendant vers a.

Une application f d'un espace métrique (E,d) dans un espace métrique (F,δ) est *continue* si l'une des assertions équivalentes suivantes est vérifiée

1. f est continue en tout point de E
2. $\forall a \in E,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in E,\ \ d(x,a) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(a)) < \varepsilon$
3. $\forall$U ouvert de F, $\ f^{-1}(U)$ est un ouvert de E
4. $\forall$H fermé de F, $\ f^{-1}(H)$ est un fermé de E
5. pour toute suite (x_n) convergente de limite a, la suite $(f(x_n))$ tend vers $f(a)$

Un concept plus fort est celui de fonction uniformément continue. Une application f d'un espace métrique (E,d) dans un espace métrique (F,δ) est *uniformément continue* si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x, y \in E,\ \ d(x,y) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Un exemple est donné par les fonctions *lipschitziennes* de rapport K qui sont celles qui vérifient

$$\forall x, y \in E,\ \ \delta(f(x), f(y)) \leq K\ d(x,y)$$

On appelle *homéomorphisme* d'un espace métrique (E,d) sur un espace métrique (F,δ) une application continue bijective de réciproque continue. Quand un tel homéomorphisme existe, on dit que ces deux espaces sont *homéomorphes*. Deux espaces homéomorphes sont "identiques" du point de vue de leurs propriétés topologiques. Pour deux espaces vectoriels normés, l'identité des structures topologiques est réalisée quand il existe entre ces deux espaces un homéomorphisme linéaire.

2.4 Comparaison de distances

Sur un même espace peuvent être définies deux distances. Le problème est alors de les comparer.

Proposition 13 *On dit que les deux distances d et δ sur E sont* topologiquement équivalentes *si l'une des assertions équivalentes suivantes est vérifiée*

1. d et δ définissent les mêmes ouverts.

2. *Pour tout* $x \in E$ *et tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* η *tel que* $B_\delta(x, \eta) \subset B_d(x, \varepsilon)$ *et inversement, pour tout* $x \in E$ *et tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* η *tel que* $B_d(x, \eta) \subset B_\delta(x, \varepsilon)$.
3. *Pour toute suite* (x_n), *on a :* (x_n) *converge vers* ω *pour* d *si et seulement si* (x_n) *converge vers* ω *pour* δ.
4. *L'identité est un homéomorphisme de* (E, d) *sur* (E, δ).

Quand deux distances sont *topologiquement équivalentes* elles définissent les mêmes ouverts donc les mêmes fermés, les mêmes notions de limite de continuité etc ... Bref elles sont identiques pour les propriétés que l'on qualifie de "topologiques" c'est à dire celle qui peuvent être écrites à partir des ouverts.

Il existe une notion plus forte. On dit que les deux distances d et δ sont *équivalentes* si il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que

$$\forall x, y \in E, \;\; c_1 \, d(x, y) \leq \delta(x, y) \leq c_2 \, d(x, y)$$

Dans ce cas elles sont en particulier topologiquement équivalentes. Mais, en plus, elles sont identiques en ce qui concerne les propriétés "métriques" qui font intervenir les valeurs des distances et pas seulement la nature des ouverts. On verra plus tard la notion de complétude qui est une propriété métrique.

Ces choses sont plus simples dans les espaces normés. Deux normes $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_2$ définissent les mêmes ouverts si et seulement si elles sont équivalentes au sens où il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que $c_1 \, ||x||_1 \leq ||x||_2 \leq c_2 \, ||x||_1$ pour tout x. Il n'y a donc pas de distinction à faire entre équivalence topologique et équivalence.

Pour un espace vectoriel normé de dimension finie, deux normes sont toujours équivalentes. En particulier il n'y a qu'une seule topologie normée sur un espace vectoriel normé de dimension finie. Tout sous-espace de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé et il n'y a qu'une seule topologie induite par une norme sur ce sous-espace. Nous précisons cette notion de topologie induite ci-dessous.

2.5 Distance à une partie

Dans un espace métrique E, pour A partie non vide, on pose

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$$

Cet infimum ne peut être remplacé par un minimum. Considérer par exemple dans $E = \mathbb{R}$, $x = 0$ et $A =]1, 2]$. Le lecteur pourra prouver en exercice que l'application $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne donc en particulier continue. On notera que

$$\{x;\ d(x, A) = 0\} = \overline{A}$$

Pour A fermé non vide et $x \notin A$ une question intéressante est l'existence de $a \in A$ tel que $d(x, A) = d(x, a)$. Un tel a est alors la meilleure approximation de x dans A. Un tel a n'existe pas forcément. C'est néanmoins le cas si E est un espace vectoriel normé de dimension finie.

Si A et B sont deux parties non vides de l'espace métrique E, on peut définir

$$d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b) = \inf_{a \in A} d(a, B) = \inf_{b \in B} d(b, A)$$

On ne peut remplacer en général l'infimum par un minimum. On peut avoir $d(A, B) = 0$ sans que $A \cap B \neq \emptyset$ même pour A et B fermés. Dans $\mathbb{R}^2$, on peut considérer $A = \{(x, 1/x);\ x \in]0, +\infty[\}$ et $B = \mathbb{R}_+ \times \{0\}$.

2.6 Structures induite et produit

Une notion importante est celle de *topologie induite*. Soit A une partie de l'espace métrique E. Un ensemble $B \subset A$ est dit ouvert dans A [resp. fermé dans A] s'il s'écrit $A \cap U$ où U est un ouvert de E [resp. un fermé de E]. Ces définitions correspondent aux ouverts et aux fermés que l'on trouverait en considérant la restriction de la distance à $A \times A$ qui est appelée *distance induite*. On notera que la fermeture et l'intérieur d'une partie de A sont à distinguer selon que l'on considère la topologie induite sur A ou la topologie de E. En fait pour B partie de A, on a $\mathrm{Adh}_A(B) = \mathrm{Adh}_E(B) \cap A$ et $\mathrm{Int}_A(B) \supset \mathrm{Int}_E(B)$; cette dernière inclusion est une égalité si A est ouvert.

Une partie A d'un espace métrique E est dite discrète si pour la topologie induite, c'est un espace métrique discret c'est à dire tel que les singletons sont ouverts. Cela a lieu si pour tout $a \in A$ il existe un ouvert V_a de E, par exemple une boule ouverte centrée en a, telle que $V_a \cap A = \{a\}$.

Un autre procédé d'obtention d'espace métrique est de faire un produit d'espaces métriques. Supposons que l'on dispose d'espaces métriques (E_i, d_i), $i \in I$ où I est dénombrable. Choisissons une famille $(\alpha_i)_{i \in I}$ de réels strictement positifs tels que la série $\sum_{i \in I} \alpha_i$ converge. Alors on peut définir une distance sur le produit cartésien $\prod_{i \in I} E_i$ par la formule

$$d((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} \alpha_i \ \min[d_i(x_i, y_i), 1]$$

Cette topologie donne une notion de convergence “selon chaque composante” comme le montre le résultat suivant.

Proposition 14 *Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\prod_{i\in I} E_i$ donc de terme général s'écrivant $x_n = (x_i^n;\ i \in I)$ converge vers $x = (x_i, i \in I)$, quand n tend vers $+\infty$, pour la distance produit d ci -dessus si et seulement si, pour tout $i \in I$, x_i^n tend vers x_i quand n tend vers $+\infty$.*

2.7 Compacité

Un concept fondamental dans ce cours est celui de compacité. Une partie K d'un espace métrique E est *compacte* si et seulement si l'une des assertions équivalentes suivantes est vérifiée :

1. Critère de Borel-Lebesgue avec des ouverts : de tout recouvrement de K par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini. Cela signifie que si $K \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ avec des U_i ouverts, alors il existe une partie finie J de I telle que $K \subset \bigcup_{i\in J} U_i$.
2. Critère de Borel-Lebesgue avec des fermés : si $\bigcap_{i\in I} F_i \cap K = \emptyset$ pour des fermés F_i alors il existe une partie finie J de I telle que $\bigcap_{i\in J} F_i \cap K = \emptyset$.
3. Critère de Bolzano-Weierstrass : de toute suite d'éléments de K, on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de K.

Notons que tout compact est fermé et borné et que tout fermé dans un compact est compact.

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les compacts sont les fermés bornés. Par exemple les boules fermées y sont compactes. Réciproquement si une boule fermée de rayon $r > 0$ est compacte dans un espace vectoriel normé, cet espace est de dimension finie. Cette équivalence porte le nom de *théorème de Riesz*.

L'un des résultats les plus simples de l'optimisation est le résultat suivant. Une application continue sur un compact à valeurs réelles est bornée et atteint ses bornes. Plus généralement, l'image d'un compact par une application continue est un compact.

Le théorème de Heine affirme qu'une application continue d'un espace métrique compact dans un espace métrique est uniformément continue.

On s'intéresse parfois aux espaces métriques qui sont *localement compacts* ce qui signifie que qu'en tout point est centrée une boule compacte. D'après ce que l'on vient de dire les espaces vectoriels normés localement compacts sont ceux de dimension finie.

2.8 Complétude

Un espace métrique (E, d) est dit *complet* si dans cet espace toute suite de Cauchy converge. On rappelle qu'une suite (x_n) est dite *de Cauchy* si elle vérifie

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geq N, \quad d(u_p, u_q) \leq \varepsilon$$

L'intérêt de ce concept est de pouvoir obtenir la convergence d'une suite sans idée de la valeur de la limite puisque la définition du caractère de Cauchy ne s'exprime qu'en fonction des termes de la suite.

Si une partie d'un espace métrique est complète, ce qui signifie qu'elle est complète pour la topologie induite sur cette partie, autrement dit que toute suite de Cauchy d'éléments de cette partie converge dans cette partie, alors la partie est fermée. Inversement, toute partie fermée dans un espace métrique complet est complète.

On notera que toute partie compacte d'un espace métrique est complète.

Dans un espace métrique complet, de nombreux résultats sont à signaler. Nous verrons plus loin dans ce chapitre le théorème de Baire. Commençons par un résultat très accessible.

Proposition 15 (Théorème des fermés emboités) *Soit (F_n) une suite décroissantes (i.e. $\forall n,\ F_{n+1} \subset F_n$) de fermés non vides telle que le diamètre de F_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.*

Alors l'intersection des F_n est un singleton.

Un espace vectoriel normé qui est complet pour la distance associée à la norme est appelé *espace de Banach*. Par exemple tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet. Mais beaucoup d'espaces vectoriels normés de dimension infinie sont aussi des espaces de Banach. Il existe un critère en termes de séries. Un espace vectoriel normé est complet si et seulement si toute série normalement convergente est convergente. Un série $\sum_n x_n$ d'éléments de l'espace vectoriel normé E est dite convergente si la suite de sommes partielles de terme général $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$ converge dans E. Elle est dite normalement convergente si la série des normes $\sum_n ||x_n||$ à termes réels positifs converge. Ce résultat est important car la convergence normale est facile à étudier puisqu'il s'agit de termes réels positifs.

2.9 Connexité

On dit qu'un espace métrique (E, d) est *connexe* si la seule partie non vide ouverte et fermée est E lui-même ou encore que E n'admet pas de partition en deux ouverts non vides ou encore que E n'admet pas de partition en deux fermés non vides. Cela signifie que E est "d'un seul tenant". Une partie est dite connexe si, pour la distance induite, elle est un espace métrique connexe. Par exemple, les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Si une partie A est connexe, toute partie B vérifiant $A \subset B \subset \overline{A}$ est connexe. Une réunion de parties connexes telles que l'une d'entre elles intersecte toutes les autres, est connexe. Si une famille de parties connexes a une intersection non vide, cette intersection est connexe.

L'image par une application continue d'une partie connexe est connexe. Dans le cas des fonctions réelles, ce résultat prend le nom de théorème des valeurs intermédiaires.

Dans un espace métrique E, on appelle *composante connexe* du point $x \in E$, la plus grande partie connexe (au sens de l'inclusion) contenant x. C'est la réunion de toutes les parties connexes contenant x. Il s'agit d'un fermé. Un espace est dit *totalement discontinu* si la composante connexe de ce point est réduite à ce point. Par exemple un espace discret est totalement discontinu mais ce ne sont pas les seuls.

Dans un espace métrique E et pour deux points a et b de cet espace, on appelle *chemin* joignant a à b une application continue φ de $[0, 1]$ dans E telle que $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = b$. On dit qu'une partie A est *connexe par arcs* si, pour tous points $a, b \in A$, il existe un chemin joignant a à b. Une partie connexe par arcs est en particulier connexe. Dans un espace vectoriel normé une partie ouverte et connexe est connexe par arcs.

2.10 Convexité

Les notions développées dans ce paragraphe n'ont de sens que dans un espace vectoriel normé E.

On dit qu'une partie A de E est *convexe* si, pour tout $x, y \in A$, on a pour tout $t \in [0, 1]$, $t\,x + (1-t)\,y \in A$ ce qui signifie que le segment joignant x et y est entièrement contenu dans A. Une partie A est donc en particulier connexe par arcs. Par exemple les sous-espaces vectoriels, les boules sont convexes.

Une intersection, une réunion croissante de parties convexes sont convexes. L'image ou, l'image réciproque d'un convexe par une application linéaire sont convexes. L'adhérence et l'intérieur d'un convexe sont convexes.

Pour toute partie B, on appelle *enveloppe convexe* de B le plus petit convexe contenant A. On la note $\mathrm{Conv}(A)$. C'est donc l'intersection de tous les convexes contenant A. C'est aussi l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_{i\in I} \lambda_i\, x_i$ où I est une partie finie, les $\lambda_i,\ \ i \in I$ sont des scalaires de somme égale à 1 et les $x_i,\ \ i \in I$ des éléments de B. Le théorème de Carathéodory affirme que dans un espace E de dimension d, on peut se limiter à I de cardinal inférieur ou égal à $d+1$.

Si A est un convexe de E on appelle *jauge* de A l'application définie de E dans $[0, +\infty]$ par

$$j(x) = \inf\{\lambda > 0;\ \frac{1}{\lambda}\, x \in A\}$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. On a alors pour tous $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$,

$$j(x+y) \leq j(x) + j(y), \quad j(\lambda\, x) = \lambda\, j(x)$$

De plus si A est un voisinage de 0, alors j est continue et

$$\overset{\circ}{A} = \{x;\ \ j(x) < 1\},\ \ \overline{A} = \{x;\ \ j(x) \leq 1\}$$

On en déduit que pour un convexe A d'intérieur non vide,

$$\overline{\overset{\circ}{A}} = \overline{A},\ \ \overset{\circ}{\overline{A}} = \overset{\circ}{A}$$

Ces résultats, et d'autres, sont l'objet de l'exercice 16.

2.11 Théorèmes de point fixe

Les théorèmes de point fixe ont une grande importance en mathématique et dans ses applications. Pour une application f d'un espace métrique (E, d) dans lui même, on appelle *point fixe* un $z \in E$ tel que $f(z) = z$.

Le *théorème du point fixe de Lipschitz* affirme que toute application lipschitzienne de rapport $K \in [0, 1[$ admet un unique point fixe et que ce point fixe est la limite de la suite (x_n) de premier terme quelconque et vérifiant la récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$. Les applications de ce théorème sont nombreuses notamment dans les espaces de fonctions ; il suffit de se rappeler la preuve du théorème de Cauchy-Lipchitz sur les équations différentielles.

Nous énonçons maintenant un autre théorème de point fixe.

Théorème 16 (Point fixe de Brouwer) *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, C un convexe compact non vide et f une application de C dans C. Alors f admet au moins un point fixe $z \in C$ (i.e. $f(z) = z$).*

Preuve. Par un petit travail technique que nous ne détaillerons pas pour le moment, on peut se ramener au cas où $E = \mathbb{R}^d$, C est la boule unité de E, et f est indéfiniement différentiable. Dans ce cas, voir document joint.

Le théorème de Brouwer a de nombreux corollaires intéressants, voire amusants. Le premier corollaire que nous énonçons est en fait équivalent au théorème de Brouwer. Sa signification géométrique est claire.

Proposition 17 *Soit C un convexe compact d'intérieur non vide de E espace vectoriel normé de dimension finie. Il n'existe pas d'application continue de C dans ∂C qui coïncide avec l'identité sur ∂C.*

Preuve. On peut supposer que C est la boule unité fermée de $\mathbb{R}^d$. Si il existe une telle application f, appliquons le théorème de Brouwer à $-f$. Il existe $z \in C$ tel que $-f(z) = z$ cela prouve que $z \in \partial C = \{||x|| = 1\}$. Mais alors $f(z) = z$ d'où $z = -z$ donc $z = 0$ ce qui contredit $z \in \partial C$.

Proposition 18 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f une application de E dans E qui vérifie $||f(x)-x|| \leq a$ pour tout x et a constante fixée. Alors f est surjective.*

Preuve. Soit $y \in E$. On cherche x tel que $y = f(x)$ soit $x = y + x - f(x)$. On pose $\varphi(u) = y + u - f(u)$. Alors $\varphi(E) \subset \overline{B}(y, a)$ en particulier $\varphi(\overline{B}(y, a)) \subset \overline{B}(y, a)$. On en déduit l'existence d'un point fixe x qui vérifie donc $x = \varphi(x) = y + x - f(x)$.

Proposition 19 *Soit C un convexe compact d'intérieur non vide de E espace vectoriel normé de dimension finie. Soit A une application de C dans E continue telle que,pour $x \in \partial C$, tout $t \in]0, +\infty[$, $x + t\, A(x) \notin C$.*

Alors il existe $x_0 \in C$ tel que $A(x_0) = 0$

Preuve. voir l'exercice 11.

2.12 Théorème de Baire

Théorème 20 (Baire) *Dans un espace métrique complet E, on peut énoncer les résultats suivants.*

1. *Si $(\Omega_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'ouverts denses ($\forall n,\ \overline{\Omega}_n = E$) alors $\bigcap_{n\geq 1} \Omega_n$ est dense dans E.*
2. *La réunion d'une suite de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.*

3. *Soit* $(F_n)_{n\geq 1}$ *une suite de fermés de* E *telle que* $\bigcup_{n\geq 1} F_n = E$ *alors* $\bigcup_{n\geq 1} \overset{\circ}{F_n}$ *est dense dans* E.

Preuve. Par passage au complémentaire, le second point se déduit du premier que nous prouvons maintenant. Prenons donc $(\Omega_n)_{n\geq 1}$ suite d'ouverts denses. Il s'agit de voir que pour tout ouvert U non vide, $U \cap \bigcap_{n\geq 1} \Omega_n \neq \emptyset$. Puisque Ω_1 est dense, son intersection avec U est non vide et ouverte donc il existe $x_1 \in E$ et $\varepsilon_1 > 0$ tels que $\overline{B}(x_1, \varepsilon_1) \subset U \cap \Omega_1$. On impose en plus $\varepsilon_1 < 1$. Puisque Ω_2 est dense, il existe $x_2 \in E$ et $\varepsilon_2 \in]0, 1/2[$ tels que $\overline{B}(x_2, \varepsilon_2) \subset B(x_1, \varepsilon_1) \cap \Omega_2$. On a alors $\overline{B}(x_2, \varepsilon_2) \subset U \cap \Omega_1 \cap \Omega_2$. On peut construire par récurrence une suite décroissante de boules

$$B(x_1, \varepsilon_1) \supset B(x_2, \varepsilon_2) \supset B(x_3, \varepsilon_3) \supset \cdots \text{ avec } \varepsilon_n \in]0, 1/n[\text{ et } \overline{B}(x_n, \varepsilon_n) \subset U \cap \bigcap_{k=1}^{n} \Omega_k$$

On a pour $p \geq n$, $x_p \in B(x_n, \varepsilon_n)$ d'où $d(x_p, x_n) \leq 1/n$. Cela prouve que la suite (x_n) est de Cauchy donc converge vers une limite y. En faisant $p \to +\infty$, on trouve $d(y, x_n) \leq 1/n$ pour tout n. Donc

$$y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x_n, \varepsilon_n) \subset U \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n \text{ donc } U \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n \neq \emptyset$$

Cela achève la preuve du premier point.

Passons au troisième point. Soit $\overline{B}(x, \varepsilon)$ une boule fermée quelconque dans E. Si pour tout n, l'intérieur de F_n ne rencontre pas $\overline{B}(x, \varepsilon)$ alors on peut appliquer le deuxième point dans $\overline{B}(x, \varepsilon)$ et affirmer que $\bigcup_{n\geq 1} F_n$ $\cap \overline{B}(x, \varepsilon)$ est d'intérieur vide ce qui contredit $\bigcup_{n\geq 1} F_n = E$.

Le théorème de Baire est aussi vrai dans les espaces métriques compacts puisqu'ils sont complets. Le théorème de Baire est vérifié dans tout une classe d'espaces que l'on appelle espace de Baire et qui contient donc espaces complets (et compacts). Egalement, tout ouvert d'un espace de Baire est de Baire.

On appelle G_δ une intersection dénombrable d'ouverts. Par exemple tout ouvert est un G_δ et aussi tout fermé F qui peut s'écrire

$$F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \{x;\ d(x, F) < 1/n\}$$

Le théorème de Baire donne l'occasion d'obtenir des G_δ denses. Donnons un exemple de partie qui n'est pas un G_δ.

Proposition 21 *$\mathbb{Q}$ n'est pas un G_δ de $\mathbb{R}$.*

Preuve. Supposons $\mathbb{Q} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$, intersection d'ouverts et écrivons $\mathbb{Q} = \{q_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Alors pour tout n, l'ouvert $U_n \setminus \{q_n\}$ contient $\mathbb{Q}\setminus\{q_n\}$ donc est dense dans $\mathbb{R}$. Par le théorème de Baire, cela entraine que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(U_n\setminus\{q_n\}) = \emptyset$ est dense dans $\mathbb{R}$ ce qui est absurde.

Donnons une application du thórème de Baire sans réelle portée mais amusante. La preuve fait l'objet de l'exercice 13.

Proposition 22 *Soit f une application continue de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $a > 0$, $\lim_{n\to+\infty} f(n\,a) = 0$.*

Alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

D'importantes applications du théorème de Baire viendront dans la suite du cours, notamment le théorème de Banach-Steinhaus. L'exercice 14 utilise également le théorème de Baire pour obtenir des résultats sur l'ensemble des points de continuité d'une fonction.

2.13 Séparabilité

On dit qu'un espace métrique E est *séparable* si E contient une suite dense c'est à dire si il existe une suite dont l'ensemble des valeurs d'adhérence est E tout entier. Il est facile de voir que cela est équivalent à l'existence d'une suite telle que tout ouvert non vide de E contienne un point de cette suite.

Un espace compact est séparable. En effet , pour tout entier n, il est recouvert par la réunion de toute les boules de rayon $1/n$ donc par la propriété de Borel-Lebesgue par une réunion finie de telles boules disons celles de centres $x_1^n, \ldots, x_{k(n)}^n$. Alors la famille $\{x_p^n,\ 1 \le p \le k(n),\quad n \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable est dense puisque tout point de E est proche à $1/n$ près d'un point de cette suite, et ceci pour tout n. Bien sûr un espace métrique est aussi séparable s'il est la réunion dénombrable de compacts.

Toute partie d'un espace métrique séparable est séparable pour la distance induite. On pourra le prouver en exercice.

Dans un espace vectoriel normé, on dit qu'une famille est *totale* si l'espace vectoriel qu'elle engendre est dense dans E. Un espace vectoriel normé est séparable si et seulement si il admet une famille dénombrable totale. En effet il s'agit de voir que si un espace admet une famille totale dénombrable $\{x_i,\ i \in I\}$ alors il est séparable c'est à dire qu'il existe une famille dénombrable dense. On peut prendre par exemple l'ensemble des combinaisons linéaires des $\{x_i,\ i \in I\}$ avec coefficients rationnels.

2.14 Espaces de suites

Comme les suites sont des applications définies sur $\mathbb{N}$, elles forment des exemples simples d'espaces fonctionnels. Commençons par l'espace des suites bornées en précisant la norme :

$$l^\infty = \{u = (u(n))\,;\, \exists M \in [0, +\infty[,\ \forall n,\ |u(n)| \leq M\},\ \ ||u||_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u(n)|$$

Un autre espace classique est celui des suites sommables

$$l^1 = \left\{ u = (u(n))\,;\, \sum_{n=0}^{+\infty} |u(n)| < +\infty \right\},\ \ ||u||_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u(n)|$$

On peut généraliser aux suites p-sommables avec $p \in [1, +\infty[$:

$$l^p = \left\{ u = (u(n))\,;\, \sum_{n=0}^{+\infty} |u(n)|^p < +\infty \right\},\ \ ||u||_1 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u(n)|^p \right)^{1/p}$$

Intervenant également l'espace des suites tendant vers 0 :

$$c_0 = \left\{ u = (u(n))\,;\, \lim_{n \to +\infty} u(n) = 0 \right\},\ \ ||u||_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u(n)|$$

Dans les définitions qui précèdent les suites peuvent être réelles ou complexes. On a les inclusions ensemblistes suivantes, pour $1 \leq p \leq q$,

$$l^1 \subset l^p \subset l^q \subset c_0 \subset l^\infty$$

Tous les espaces de suites définis ci-dessus avec les normes précisées sont des espaces de Banach. Ils sont séparables sauf l^∞. Ces propriétés font l'objet de l'exercice 18

2.15 Exercices

Exercice 8 Montrer qu'une application f d'un espace métrique (E,d) dans un espace métrique (F,δ) est continue si et seulement si pour toute partie A de E, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

Exercice 9 Soit (E,d) un espace métrique. Montrer que $\delta = d/(d+1)$ est une distance topologiquement équivalente à d mais pas forcément équivalente.

Exercice 10 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$K_n = \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} 3^{-k}\, a_k;\ \ \forall k \leq n,\ a_k \in \{0,2\} \right\}$$

et

$$K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} K_n = \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} 3^{-k}\, a_k;\ \ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ a_k \in \{0,2\} \right\}$$

1) Ecrire K_n comme une réunion d'intervalles et expliciter pour $n = 1,2,3$.
2) Prouver que K est un compact totalement discontinu.
3) Montrer que K est non dénombrable. On rappelle que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ a même cardinal que $\mathbb{R}$ qui est non dénombrable.
4) K est il mesurable ? Si oui, quelle est sa mesure de Lebesgue ?

Exercice 11 Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et C un convexe compact d'intérieur non vide. Un dispose d'une application continue A de C dans E telle que, pour tout $x \in \partial C$ et tout $t \in]0,+\infty[$, $x + t\,A(x) \notin C$.
1) Montrer que si $a \in \mathrm{Int}(C)$ et $b \in C$ alors $\{tb + (1-t)a, t \in [0,1[\} \subset \mathrm{Int}(C)$.
On suppose que pour tout $x \in C$, $A(x) \neq 0$.
2) Montrer que pour tout $x \in C$, il existe un unique réel positif $t(x)$ tel que $x + t(x)\ A(x) \in \partial C$.
3) Montrer que l'application $x \mapsto t(x)$ est bornée puis qu'elle est continue.
4) Montrer que l'application $x \mapsto x + t(x)\ A(x)$ contredit une proposition du cours.
5) Conclure.
6) Montrer que le résultat persiste si on suppose simplement que $\forall x \in \partial C$, $\forall t \in]0,+\infty[$, $\ x + t\,A(x) \notin \overset{\circ}{C}$.

Exercice 12 On considère un rectangle. Soit ψ un chemin continu qui joint le coté haut et celui du bas. Soit φ un chemin continu qui joint le coté gauche à celui de droite. Montrer que ces deux chemins se coupent en un point du rectangle.

Exercice 13 On considère une application continue f de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $a>0$, $\lim_{n\to+\infty} f(n\,a)=0$. On veut montrer qu'alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$. On fixe $\varepsilon>0$. On pose

$$F_n=\{x\in]0,+\infty[,\ \forall k\geq n,\ |f(kx)|\leq\varepsilon\}$$

1) Montrer que (F_n) est une suite croissante de fermés dont la réunion est égale à $]0,+\infty[$.
2) Montrer qu'il existe m tel que l'intérieur de F_m est non vide.
3) En déduire qu'il existe A tel que $\forall x\geq A$, $|f(x)|\leq\varepsilon$ et conclure.
4) Le même résultat vaut il avec une limite différente de 0 ?

Exercice 14 (Continuité de fonctions) Soit f une application d'un espace métrique (E,d) dans $\mathbb{R}$.
1) Montrer que, pour tout $n\geq 1$, l'ensemble

$$\left\{x\in E,\ \inf_{\varepsilon>0}[\sup_{B(x,\varepsilon)} f-\inf_{B(x,\varepsilon)} f]<1/n\right\}$$

est ouvert.
2) Montrer que l'ensemble des points de continuité de f est un G_δ.
3) Soit f une application d'un espace métrique (E,d) dans $\mathbb{R}$ qui est limite simple d'une suite f_n d'applications continues. On dit que f est une fonction de première classe. Montrer que les ensembles

$$F_{n,k}=\{x\in E;\ \forall p,q\geq n,\ |f_q(x)-f_p(x)|\leq 1/k\}$$

sont des fermés dont la réunion sur n donne E.
4) En déduire que

$$\Omega=\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{n\geq 1}\mathring{F}_{n,k}$$

est un G_δ dense.
5) Montrer f est continue en tout point de Ω.
6) En déduire que l'ensemble des points de continuité d'une fonction de première classe est un G_δ dense.
7) Montrer que pour une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la dérivée est continue en tout point d'un G_δ dense.

Exercice 15 Soit X et Y deux espaces métriques et f une application de X dans Y. On définit le graphe $G=\{(x,f(x));\ x\in X\}$.
1) Montrer que si f est continue alors G est fermé.
2) Montrer que si Y est compact et G est fermé alors f est continue.

3) On suppose que Y est compact et que g est une application continue de $X \times Y$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in X$, l'équation $g(x, y) = 0$ admet une unique solution $y = \varphi(x)$. Montrer que l'application φ est continue.

Exercice 16 Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et A un convexe de E. On appelle *jauge* de A l'application définie de E dans $[0, +\infty]$ par

$$j(x) = \inf\{\lambda > 0;\ \frac{1}{\lambda} x \in A\}$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. Si il est besoin de spécifier on la notera j_A.
1) Montrer que pour tous $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$,

$$j(x+y) \leq j(x) + j(y), \quad j(\lambda\, x) = \lambda\, j(x)$$

2) On suppose dorénavant que A est un voisinage de 0. Montrer que j est continue en 0, puis, en utilisant l'inégalité de la question précédente que j est continue sur E.
3) Prouver que

$$\overset{\circ}{A} = \{x;\ j(x) < 1\}, \quad \overline{A} = \{x;\ j(x) \leq 1\}$$

4)En déduire que si $x \in \overset{\circ}{A}$, $y \in \overline{A}$ alors $[x, y[= \{t\, x + (1-t)\, y;\ t \in]0, 1]\} \subset \overset{\circ}{A}$.
5) Montrer que A et $\overset{\circ}{A}$ sont convexes et que $j_A = j_{\overline{A}} = j_{\overset{\circ}{A}}$.
6) En déduire que

$$\overline{\overset{\circ}{A}} = \overline{A}, \quad \overset{\circ}{\overline{A}} = \overset{\circ}{A}$$

7) Pour A ouvert convexe contenant 0, montrer que l'application

$$\varphi \ :\ \ x \mapsto \frac{1}{1 + j(x)}\, x$$

est un homéomorphisme de E sur A.
8) montrer que tout convexe ouvert non vide est homéomorphe à E.

Exercice 17 Pour A fermé de l'espace vectoriel normé E, montrer que A est convexe si et seulement si $\varphi\ :\ x \mapsto d(x, A)$ est convexe c'est à dire

$$\forall \lambda \in [0, 1], \forall x, y \in E, \quad \varphi(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda\, \varphi(x) + (1-\lambda)\, \varphi(y)$$

Exercice 18 1) Justifier d'abord les inclusions ensemblistes entre les espaces $l^1, l^p, l^q, c_0, l^\infty$ $(p \leq q)$ annoncées au paragraphe 2.14 et prouver que

ces inclusions sont strictes.
2) Prouver que $(l^p, ||\cdot||_p)$ et $(l^\infty, ||\cdot||_\infty)$ sont des espaces de Banach.
3) Montrer que c_0 est un fermé de $(l^\infty, ||\cdot||_\infty)$.
4) Prouver la séparabilité de l^p, $p \geq 1$ en considérant la famille des suites à termes rationnels, nulles à partir d'un certain rang.
5) On suppose que la famille $\{u_k = (u^k(n));\ \ k \geq 1\}$ est dense dans l^∞. On pose $v(n) = 2$ si $u^n(n) \leq 1$ et 0 sinon. Montrer que $||v - u_k||_\infty \geq 1$ pour tout $k \geq 1$. Que peut on en conclure ?
6) Montrer que c_0 est séparable.

Chapitre 3

Applications et formes linéaires

Dans ce chapitre tous les espaces vectoriels considérés ont $\mathbb{R}$ pour corps des scalaires. On étudie dans ce chapitre les applications linéaires d'un espace vectoriel normé dans un autre, principalement celles qui sont continues. Un cas particulièrement intéressant est celui des applications linéaires à valeurs réelles appelées *formes linéaires*.

3.1 Continuité des opérateurs linéaires

Soit E et F deux espaces vectoriels normés. Par commodité les normes sur chacun de ces espaces seront le plus souvent notées de la même manière $||\cdot||$. Toutefois on notera parfois $||\cdot||_E$ et $||\cdot||_F$ pour insiter ou si il y a ambiguïté. On rappelle d'abord le théorème fondamental sur la continuité des applications linéaires.

Proposition 23 *Pour une application linéaire u de l'espace vectoriel normé E dans l'espace vectoriel normé F, les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *u est continue sur E c'est à dire en tout point de E soit encore $u^{-1}(\Omega)$ ouvert de E pour tout Ω ouvert de F.*
2. *u est continue en 0 c'est à dire, par exemple, que $u(x_n)$ tend vers 0 dans F si x_n tend vers 0 dans E.*
3. *u est bornée sur la boule unité (ouverte ou fermée) de E*
4. *u est bornée sur la sphère unité de E*
5. *il existe un réel positif M tel que pour tout $x \in E$, $||u(x)||_F \leq M\ ||x||_E$.*

Quand les assertions précédentes sont réalisées, on note $u \in L(E,F)$ et on pose

$$\begin{aligned} ||u|| &= \sup_{x\in B(0,1)} ||u(x)|| = \sup_{x\in \overline{B}(0,1)} ||u(x)|| = \sup_{||x||=1} ||u(x)|| \\ &= \sup_{x\neq 0} \frac{||u(x)||}{||x||} = \inf\{M \in \mathbb{R}_+;\ \ \forall x \in E,\ ||u(x)|| \leq M\,||x||\} \end{aligned}$$

On notera que si E est de dimension finie, par compacité de $\{x;\ ||x|| = 1\}$, il existe x_0 de norme 1 tel que $||u(x_0)|| = ||u||$.

Comme la notation le suggère, l'application $u \mapsto ||u||$ sur $L(E,F)$ est une norme sur $L(E,F)$. Cette vérification est facile.

Proposition 24 *Si F est un espace de Banach alors $L(E,F)$ est un espace de Banach.*

Preuve. Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $L(E,F)$. Cela signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $||u_p - u_q|| \leq \varepsilon$ pour p,q assez grands. On en déduit que pour tout $x \in E$, et tout $\varepsilon > 0$, $||u_p(x) - u_q(x)|| \leq ||u_p - u_q||\,||x|| \leq \varepsilon||x||$ pour p,q assez grands. Par conséquent la suite $(u_n(x))$ est de Cauchy dans F donc converge vers un élément que l'on note $u(x)$, définissant ainsi une application u de E dans F. La linéarité de u est évidente puisque u est limite "simple" d'applications linéaires. On rappelle que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que, pour tout $x \in E$, $||u_p(x) - u_q(x)|| \leq \varepsilon\,||x||$ pour $p,q \geq n_0$. En passant à la limite $q \to +\infty$ on obtient, pour tout $x \in E$, $||u_p(x) - u(x)|| \leq \varepsilon\,||x||$ pour $p \geq n_0$ c'est à dire $||u_p - u|| \leq \varepsilon$ pour $p \geq n_0$. On obtient bien que u_n tend vers u au sens de la norme sur $L(E,F)$.

Dans le cas $F = \mathbb{R}$, $L(E,\mathbb{R})$ est un espace de Banach. On le note E^* ou parfois dans les livres français E'. On l'appelle *dual topologique*. En ce qui concerne les formes linéaires on signale le résultat suivant dont la preuve est l'objet de l'exercice 20.

Proposition 25 *Une forme linéaire sur un espace vectoriel normé est continue si et seulement si son noyau est fermé.*

Une forme linéaire sur un espace vectoriel normé est non nulle et continue si et seulement si son noyau n'est pas dense.

3.2 Théorème de Banach-Steinhaus

Théorème 26 (Banach-Steinhaus) *Soit E et F deux espaces vectoriels normés avec E complet et $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'applications linéaires continues de E dans F. Alors*

- *ou bien il existe* $M \in \mathbb{R}_+$ *tel que* $\forall i \in I, \ \ ||u_i|| \leq M$
- *ou bien il existe* Ω, G_δ *dense de* E *tel que pour tout* $x \in \Omega$, $\sup_{i\in I} ||u_i(x)|| = +\infty$.

Preuve. Elle repose sur le théorème de Baire. Pour tout $x \in E$, on pose

$$\varphi(x) = \sup_{i\in I} ||u_i(x)|| \in [0, +\infty]$$

Il est facile de voir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble

$$V_n = \{x \in E, \ \ \varphi(x) > n\}$$

est ouvert. Il y a alors deux possibilités.
1) Si pour tout n, V_n est dense dans E alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \Omega$ est un G_δ dense de E et on a bien, pour tout $x \in \Omega$, $\varphi(x) = \sup_{i\in I} ||u_i(x)|| = +\infty$.
2) Sinon il existe n_0 tel que $\overline{V}_{n_0} \neq E$. Cela veut dire qu'il existe une boule $\overline{B}(x_0, r)$ telle que $\overline{B}(x_0, r) \cap V_{n_0} = \emptyset$. C'est à dire que si $||t|| \leq r$, $\sup_{i\in I} ||u_i(x_0 + t)|| \leq n_0$ d'où pour tout $i \in I$ et tout $||t|| \leq r$, $||u_i(t)|| \leq ||u_i(x_0)|| + ||u_i(x_0 + t)|| \leq 2\,n_0$. Par homogénéité on en déduit que $||u_i|| \leq 2n_0/r$ pour tout $i \in I$ ce qui achève la preuve du théorème.

On en déduit le résultat suivant.

Proposition 27 *Soit* E *un espace de Banach et* (u_n) *une suite de formes linéaires continues telle que* $\lim_{n\to+\infty} u_n(x)$ *existe, pour tout* $x \in E$.

Alors il existe $M \in \mathbb{R}_+$ *telle que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $||u_n|| \leq M$.

Nous donnerons plusieurs applications du théorème de Banach-Steinhaus par exemple à l'approximation des fonctions et notamment aux séries de Fourier. Dans un document joint on utilisera Banach-Steinhaus pour étudier la convergence commutative des séries. Tout de suite une application facile.

Corollaire 28 *Soit* E, F, G *trois espaces vectoriels normés avec* E *complet. On dispose de* $u : E \times F \to G$ *telle que pour tout* $x \in E$, *l'application* $y \mapsto u(x, y)$ *est linéaire continue et pour tout* $y \in F$, *l'application* $x \mapsto u(x, y)$ *est linéaire continue.*

Alors u *est bilinéaire continue c'est à dire qu'il existe un réel positif* M *tel que* $||u(x, y)|| \leq M\ ||x||\ ||y||$ *pour tous* x, y.

Preuve. Notons u_y l'application linéaire $x \mapsto u(x, y)$ de E dans G. Appliquons le théorème de Banach-Steinhaus à la famille $\{u_y, \ ||y|| \leq 1\}$. Supposons qu'il existe Ω, G_δ dense de E tel que, pour tout $x \in \Omega$, $\sup_{||y||\leq 1} ||u_y(x)|| = +\infty$. Cette égalité contredit, pour tout $x \in \Omega$, la continuité de $x \mapsto u(x, y)$. On peut donc affirmer qu'il existe M tel que, pour tout y avec $||y|| \leq 1$, $||u_y|| \leq M$ c'est à dire, pour tout y avec $||y|| \leq 1$, $\forall x \in E$, $||u(x, y)|| \leq M\ ||x||$, d'où le résultat en utilisant enfin l'homogénéité en y.

3.3 Application ouverte

Théorème 29 (Application ouverte) *Soit E et F deux espaces de Banach et T une application linéaire continue surjective de E dans F.*

Alors il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ vérifiant $||x|| \leq M\ ||y||$ et $T(x) = y$. En conséquence, l'application T est ouverte au sens où l'image de tout ouvert par T est un ouvert.

Preuve. Remarquons qu'il s'agit de prouver l'existence de $M > 0$ tel que $\overline{B}_F(0,1) \subset T\left(\overline{B}_E(0,M)\right)$ ou même plus simplement l'existence de deux constantes α et β telles que $\overline{B}_F(0,\alpha) \subset T\left(\overline{B}_E(0,\beta)\right)$ puisque cette dernière inclusion donne par homogénéité $\overline{B}_F(0,1) \subset T\left(\overline{B}_E(0,\beta/\alpha)\right)$. Une fois que ce point aura été établi, le fait que T soit ouverte devient facile. En effet, si U est un ouvert de E et $y \in T(U)$ alors il existe $x \in U$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\overline{B}(x,\varepsilon) \subset U$. Alors $\overline{B}(y,\varepsilon/M) \subset T\left(\overline{B}(x,\varepsilon)\right) \subset T(U)$ donc $T(U)$ est bien voisinage de chacun de ses points.

Revenons à la première étape. On pose $C = \mathrm{Adh}[T(\overline{B}(0,1))]$. Alors

$$\bigcup_{n\geq 1} n\,C \supset \bigcup_{n\geq 1} n\,T(\overline{B}(0,1)) = \bigcup_{n\geq 1} T(\overline{B}(0,n)) = F$$

Par une des formes du théorème de Baire, comme les $n\,C$ sont des fermés dont la réunion est égale à F, l'un d'eux est d'intérieur non vide donc C est d'intérieur non vide. Donc il existe $x_0 \in E$ et $r > 0$ tel que, si $||t|| \leq 2\,r$ alors $x_0+t \in C$. En particulier $x_0 \in C$ et donc, pour $||t|| \leq 2\,r$, on a $t = (x_0+t)-x_0$ est la différence de deux éléments de $\mathrm{Adh}[T(\overline{B}(0,1))]$ donc appartient à $\mathrm{Adh}[T(\overline{B}(0,2))]$. Par homogénéité si $||t|| \leq r$ alors $t \in \mathrm{Adh}[T(\overline{B}(0,1))]$. Cela entraine qu'il existe $t_1 \in T(\overline{B}(0,1))$ tel que $||t-t_1|| \leq r/2$. On peut écrire $t_1 = T(x_1)$ avec $||x_1|| \leq 1$. Plus généralement, on peut construire deux suites $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(t_n)_{n\geq 1}$ telles que, pour tout $n \geq 1$, $||t - \sum_{k=1}^{n} t_k|| \leq r\,2^{-n}$ avec $t_k = T(x_k)$ et $||x_k|| \leq 2^{-k+1}$. On a déja construit t_1 et x_1. Supposons $t_1, \ldots, t_n, x_1, \ldots, x_n$ obtenus pour un certain entier $n \geq 1$. Alors $u = t - \sum_{k=1}^{n} t_k$ vérifie $||u|| \leq r\,2^{-n}$. Mais on sait par homogénéité que $\overline{B}(0, r2^{-n}) \subset \mathrm{Adh}[T(\overline{B}(0,2^{-n}))]$. Donc il existe $x_{n+1} \in \overline{B}(0,2^{-n})$ tel que $t_{n+1} = T(x_{n+1})$ vérifie $||u - t_{n+1}|| \leq r\,2^{-(n+1)}$. La construction est donc assurée par récurrence. On remarque que la série $\sum_k x_k$ est normalement convergente puisque $\sum_{k=1}^{+\infty} ||x_k|| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{1-k} = 2$. Notons x sa somme, qui est de norme inférieure ou égale à 2. De l'inégalité $||t-T\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)|| \leq r\,2^{-n}$, on déduit que $T(x) = t$. On conclut ainsi que $\overline{B}(0,r) \subset T\left(\overline{B}(0,2)\right)$. D'où le résultat.

Corollaire 30 *Soit E et F deux espaces de Banach et T une application linéaire continue bijective de E dans F.*

Alors l'application linéaire réciproque T^{-1} est continue.

Preuve. Le théorème de l'application ouverte nous assure l'existence d'une constante $M \in \mathbb{R}_+$ telle que $||T^{-1}(y)|| \leq M\ ||y||$ ce qui exprime exactement la continuité de T^{-1}.

Corollaire 31 *Soit $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_2$ deux normes sur un espace vectoriel E qui donnent toutes deux à E la structure d'espace de Banach. Supposons qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $\forall x \in E,\ \ ||x||_1 \leq c\ ||x||_2$.*

Alors les deux normes sont équivalentes.

Preuve. Nous allons appliquer le théorème de l'application ouverte à l'identité considérée comme application linéaire de $(E, ||\cdot||_2)$ dans $(E, ||\cdot||_1)$. La continuité de cette application linéaire équivaut à l'hypothèse $||\cdot||_1 \leq c\ ||\cdot||_2$. La continuité de l'inverse donne alors $||\cdot||_2 \leq c'\ ||\cdot||_1$ pour une certaine constante c' de sorte qu'au total, on a l'équivalence des normes.

3.4 Le théorème du graphe fermé

Théorème 32 *Soit E et F deux espaces de Banach. Une application linéaire T de E dans F est continue si et seulement si son graphe*

$$\mathcal{G}(T) = \{(x, T(x));\ \ x \in E\}$$

est fermé dans l'espace vectoriel $E \times F$, muni de sa topologie produit.

Preuve. On rappelle que la topologie produit sur $E \times F$ est par exemple issue de la norme $||(e, f)|| = ||e||_E + ||f||_F$. Une suite de terme général (e_n, f_n) converge dans $E \times F$ vers (e, f), pour cette topologie si et seulement si e_n tend vers e et f_n tend vers f. Avec la norme choisie sur $E \times F$, il est clair que $E \times F$ est complet. Les projections canoniques de $E \times F$ sur E et F, notées respectivement π_1 et π_2 dans la suite, sont continues.

Il est trivial que $\mathcal{G}(T)$ est fermé quand T est continue. En effet soit $(x_n, T(x_n))$ une suite de points du graphe convergeant vers (x, y). Alors la continuité de T entraine que $y = T(x)$ et donc que $(x, y) \in \mathcal{G}(T)$.

Réciproquement, supposons que le graphe $\mathcal{G}(T)$ est fermé. Notons qu'alors le sous-espace vectoriel $\mathcal{G}(T)$ de $E \times F$ est lui-même un espace de Banach. L'image réciproque de $B_F(0, 1)$ par π_2 que nous noterons

$$\left(\pi_2|_{\mathcal{G}(T)}\right)^{-1}(B_F(0, 1))$$

est un ouvert de $\mathcal{G}(T)$, en particulier un voisinage de 0 dans $\mathcal{G}(T)$. Par ailleurs la restriction $\pi_1|_{\mathcal{G}(T)}$ de π_1 à $\mathcal{G}(T)$ est continue et surjective donc elle est ouverte par le théorème de l'application ouverte. Donc

$$\pi_1|_{\mathcal{G}(T)}\left[\left(\pi_2|_{\mathcal{G}(T)}\right)^{-1}(B_F(0,1))\right]$$

contient un voisinage de 0. Or ce dernier ensemble n'est autre que $T^{-1}(B_F(0,1))$. Cela veut donc dire que T est bornée sur une boule centrée en 0 ce qui entraine la continuité de T.

3.5 Prolongement des formes linéaires

Théorème 33 (Hahn-Banach, forme analytique) *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, p une application de E dans $\mathbb{R}$ qui vérifie pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$,*

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad p(\lambda\, x) = \lambda\, p(x)$$

Soit F un sous-espace vectoriel de E et u une forme linéaire sur F qui vérifie $\forall x \in F,\ \ u(x) \leq p(x)$.

Alors il existe une forme linéaire g sur E telle que la restriction de g à F est u et qui vérifie $\forall x \in E,\ \ g(x) \leq p(x)$.

Preuve. Commençons par un problème simple. Etant donné $x_0 \notin F$, est il possible d'étendre u à $F \oplus \mathrm{Vect}(x_0)$ de façon à avoir une forme linéaire $\tilde{u}$ sur $F \oplus \mathrm{Vect}(x_0)$ qui vérifie $\forall (f + t\,x_0) \in F \oplus \mathrm{Vect}(x_0),\ \ \tilde{u}(f + t\,x_0) \leq p(f + t\,x_0)$? Une telle forme linéaire $\tilde{u}$ s'écrit $\tilde{u}(f + t\,x_0) = u(f) + t\alpha$ en notant $\alpha = \tilde{u}(x_0)$. La réponse à la question est affirmative si on peut choisir α tel que $u(f) + t\alpha \leq p(f + t\,x_0)$ pour tout t réel et tout $f \in F$ soit encore, pour tout t réel strictement positif $u(f) + t\alpha \leq p(f + t\,x_0)$ et $u(f) - t\alpha \leq p(f - t\,x_0)$. Quitte à diviser par t et à remplacer $(1/t)\,f$ par f les inégalités précédentes se réduisent à $\forall f \in F,\ u(f) + \alpha \leq p(f + x_0)$ et $u(f) - \alpha \leq p(f - x_0)$. Cela équivaut donc à l'existence d'un α tel que pour tout $f_1, f_2 \in F$, $u(f_1) - p(f_1 - x_0) \leq \alpha \leq p(f_2 + x_0) - u(f_2)$. Il s'agit donc de vérifier que pour tout $f_1, f_2 \in F$, $u(f_1) - p(f_1 - x_0) \leq p(f_2 + x_0) - u(f_2)$. Cette inégalité équivaut à $u(f_1) + u(f_2) \leq p(f_2 + x_0) + p(f_1 - x_0)$ c'est à dire $u(f_1 + f_2) \leq p(f_2 + x_0) + p(f_1 - x_0)$. Mais on a bien $u(f_1 + f_2) \leq p(f_1 + f_2) \leq p(f_2 + x_0) + p(f_1 - x_0)$ ce qui permet de conclure affirmativement au problème de prolongement initialement posé.

Considérons maintenant l'ensemble $\mathcal{G}$ des couples (G, g) où G est un sous-espace de E contenant F et g est une forme linéaire sur G dont la restriction à F est u et qui vérifie $\forall x \in G,\ g(x) \leq p(x)$. On munit $\mathcal{G}$ de l'ordre du prolongement : $(G_1, g_1) \prec (G_2, g_2)$ si $G_1 \subset G_2$ et si la restriction de g_2 à G_1 est g_1. Il est facile de voir que $\mathcal{G}$ est inductif avec cet ordre. Par le théorème de Zorn il existe un élément maximal (G_0, g_0) dans $\mathcal{G}$. Par notre étude préliminaire on a forcément $G_0 = E$ sinon un prolongement strict est possible. Cela achève la preuve.

Corollaire 34 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et u une forme linéaire sur F continue de norme $||u||_F = \sup_{x\in F} |u(x)|/||x||$.*

Alors il existe une forme linéaire g qui prolonge u –c'est à dire que la restriction de g à F est u– et dont la norme est $||g||_E = ||u||_F$.

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème qui précède au cas $p(x) = ||u||_F\ ||x||$.

3.6 Séparation des convexes

On appelle *hyperplan* affine dans un espace vectoriel E tout sous-ensemble de la forme $\{x;\ \ f(x) = \alpha\}$ où f est une forme linéaire non nulle et α est un réel. On sait qu'un tel hyperplan est fermé si et seulement si f est continue.

On dit que l'hyperplan $\{f = \alpha\}$ sépare les deux parties A et B de E (au sens large) si $\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ f(a) \leq \alpha \leq f(b)$.

Théorème 35 (Hahn-Banach, forme géométrique) *Deux ensembles convexes non vides disjoints dont l'un au moins est ouvert peuvent être séparés par un hyperplan fermé.*

Preuve. Notons A et B ces deux convexes. On suppose A ouvert. On pose $C = A - B = \{a - b,\ \ a \in A, b \in B\}$. Il est facile de voir que C est convexe et ouvert. C ne contient pas 0. On choisit $c_0 \in C$ et on pose $C' = C - c_0 = \{x - c_0,\ x \in C\}$ qui est un convexe ouvert contenant 0 mais pas $-c_0$. On note p la jauge de C'. On définit une forme linéaire u sur $\mathrm{Vect}(-c_0)$ en posant $u(-tc_0) = t$. On a $u(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in \mathrm{Vect}(c_0)$. En effet cela est vrai si $x = -tc_0$ avec $t \geq 0$ car $p(-c_0) \geq 1$ et pour $x = -tc_0$ avec $t < 0$, c'est trivial. Par le théorème de Hahn-Banach on trouve une forme linéaire continue g sur E qui prolonge u et qui vérifie $g \leq p$. Pour tout $x \in C'$, on a $g(x) \leq p(x) < 1$. Donc pour $a \in A,\ b \in B,\ g(a) \leq g(b) + 1 - g(-c_0) \leq g(b)$. Si on prend α tel que $\sup_{a\in A} g(a) \leq \alpha \leq \inf_{b\in B} g(b)$, on voit que l'hyperplan $\{g = \alpha\}$ sépare A et B, au sens large.

On signale une autre forme.

Théorème 36 (Hahn-Banach, seconde forme géométrique) *Soit A et B deux ensembles convexes non vides disjoints avec A fermé et B compact. Alors il existe un hyperplan fermé $\{f = \alpha\}$ qui sépare A et B au sens strict* *ce qui veut dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall a \in A$, $\forall b \in B$, $f(a) \leq \alpha - \varepsilon \leq \alpha + \varepsilon \leq f(b)$*

Idée de la preuve. On applique le théorème précédent à $A_\varepsilon = A + B(0,\varepsilon)$ et $B_\varepsilon = B + B(0,\varepsilon)$ avec ε suffisamment petit.

3.7 Un résultat de compacité

Le résultat que nous allons énoncer maintenant et qui est très utile pourra être énoncé rigoureusement en terme de compacité dans le chapitre sur les topologies faibles. Pour le moment nous l'exprimons plus simplement en termes d'extraction de sous-suites.

Théorème 37 (Banach-Alaoglu) *Soit E un espace vectoriel normé séparable et (T_n) une suite bornée de formes linéaires continues sur E.*

Alors il existe une sous-suite $(T_{\phi(n)})$ et T une forme linéaire continue sur E telles que

$$\forall x \in E, \lim_{n \to +\infty} T_{\phi(n)} x = Tx$$

Preuve. Notons (x_p) une suite dense de E et $M = \sup_n ||T_n||$. Pour tout p, la suite de réels $(T_n(x_p))$ est bornée donc on peut en extraire une sous-suite $(T_{n_k^p}(x_p))_{k\geq 1}$ convergente. En procédant par récurrence sur p on peut imposer que la suite d'indices $(n_k^{p+1})_{k\geq 1}$ soit extraite de la suite $(n_k^p)_{k\geq 1}$. Le procédé diagonal consite alors à poser $\phi(k) = n_k^k$. La suite $(\phi(k))$ a ses termes à partir du rang p qui sont extraits de (n_k^p). Donc $(T_{\phi(k)}(x_p))_{k\geq 1}$ converge et ceci pour tout p. Soit x quelconque dans E. Nous allons voir que la suite $(T_{\phi(k)}(x))$ est de Cauchy. Prenons $\varepsilon > 0$. Il existe p_0 tel que $||x - x_{p_0}|| \leq \varepsilon/3M$. Alors

$$\begin{aligned}
&||T_{\phi(p)}(x) - T_{\phi(q)}(x)|| \\
&\quad \leq \quad ||T_{\phi(p)}(x) - T_{\phi(p)}(x_{p_0})|| + ||T_{\phi(p)}(x_{p_0}) - T_{\phi(q)}(x_{p_0})|| + \\
&\quad + \quad ||T_{\phi(q)}(x_{p_0}) - T_{\phi(q)}(x)||
\end{aligned}$$

Dans le membre de droite le premier terme est inférieur à $||T_{\phi(p)}||\ ||x - x_{p_0}|| \leq M\ \varepsilon/3M = \varepsilon/3$. Il en est de même pour le troisième. Quant au second, il peut être rendu inférieur à $\varepsilon/3$ si p et q sont suffisamment grands car la suite de réels $(T_{\phi(n)}(x_{p_0}))$ est convergente donc de Cauchy.

Ainsi pour tout $x \in E$, $(T_{\phi(n)}(x))$ est de Cauchy donc convergente. On note Tx sa limite. Il est immédiat que $x \mapsto Tx$ est linéaire et continue de norme inférieure à M : il suffit de passer à la limite dans $|T_{\phi(n)}(x)| \leq M\ ||x||$.

On notera que l'on n'a pas en général convergence forte i.e. $||T_{\phi(n)} - T||$ ne tend pas en général vers 0. On notera aussi que l'hypothèse de séparabilité est essentielle. A titre d'exemple on pourra considérer dans l^∞ (non séparable), $T_n(x) = x_n$ en notant $x = (x_n)$.

3.8 Exercices

Exercice 19 (Des exemples) Donner un exemple explicite d'une forme linéaire non continue, par exemple sur un espace de suites. Donner ensuite un exemple explicite de forme linéaire continue pour laquelle la norme n'est pas atteinte.

Exercice 20 (Preuve de la proposition 25) Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé et f une forme linéaire sur E.
1) Montrer que si f est continue son noyau est fermé.
2) Montrer que si f n'est pas continue il existe un suite (x_n) de vecteurs de norme 1 telle que $f(x_n) \geq n$.
3) Si f est non continue, trouver à partir de (x_n) une suite d'éléments de $\ker f$ qui converge vers un vecteur u n'appartenant pas à $\ker f$.
4) En déduire que f est continue si et seulement si son noyau est fermé.
5) Montrer que si on suppose que la boule $\overline{B}(x_0, \varepsilon)$ ne rencontre pas le noyau de la forme linéaire f alors pour tout $x \in B(0, \varepsilon)$, on a $|f(x)| \leq |f(x_0)|$ et en déduire que f est continue.
6) Montrer qu'une forme linéaire est non nulle et continue si et seulement si son noyau n'est pas dense.

Exercice 21 (Perturbation préservant la surjectivité) Soit E et F deux espaces de Banach et T une application linéaire continue surjective de E dans F. Soit N une application de E dans F qui n'est pas supposée linéaire mais qui est lipschitzienne de rapport K.
1) Justifier l'existence d'une constante C telle que, pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ vérifiant $y = T(x)$ et $||x|| \leq C\ ||y||$.
2) Pour $y \in F$, construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où x_0 est quelconque et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $T(x_{n+1}) = y + N(x_n)$ et $||x_{n+2} - x_{n+1}|| \leq C\ K\ ||x_{n+1} - x_n||$.
3) Montrer que pour K suffisamment petit, l'application $T + N$ est surjective
.

Exercice 22 (Convexes d'intérieur vide) Dans un espace vectoriel normé E de dimension finie n, on considère un convexe C contenant l'origine et qui n'est inclus dans aucun ensemble de la forme $\{f = 0\}$ pour f forme linéaire non nulle.
1) Montrer que C contient une base $b_1, \ldots, b_n$.
2) Prouver que l'application de $\mathbb{R}^n$ dans E qui à $(t_1, \ldots, t_n)$ associe $\sum_i t_i\, b_i$ est un homéomorphisme.
3) L'ensemble $\{(t_1, \ldots, t_n) \in]0, +\infty[^n;\quad t_1 + \cdots + t_n < 1\}$ est il un ouvert de $\mathbb{R}^n$?
4) Montrer que l'intérieur de C est non vide.

5) Prouver qu'un convexe de E est d'intérieur vide si et seulement si il est inclus dans un hyperplan affine de E.

Exercice 23 (Un théorème d'existence fonctionnel) Cette exercice discute d'un problème qui intervient en économie.

On fixe $\theta_1, \dots, \theta_n$ applications continues d'un intervalle $[0,T]$ dans $\mathbb{R}$. Si φ est une application de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}$ on écrit $\varphi \geq 0$ si $\varphi(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,T]$. Pour $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ on considère le problème $\mathcal{P}(a)$ suivant

$\mathcal{P}(a)$: trouver une application u sur $[0,T]$
continue et positive telle que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \int_0^T \theta_i(t)\ u(t)\ dt = a_i$$

1) On suppose que $\mathcal{P}(a)$ a une solution pour tout $a \in \mathbb{R}^n$. Montrer alors la propriété $\mathcal{P}$ suivante

$$\mathcal{P}\ :\ \forall \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n,\ \ \sum_{i=1}^n \lambda_i\ \theta_i \geq 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

2) On suppose désormais que $\mathcal{P}$ est vérifiée. On pose

$$C = \left\{ \left(\int_0^T \theta_i(t)\ u(t)\ dt;\ i \in \{1, \dots, n\} \right);\quad u : [0,T] \to [0, +\infty[\text{ continue} \right\}$$

Montrer que C est un convexe d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$ (penser à l'exercice 22).
3) Montrer que 0 est à l'intérieur de C. Indication : si ce n'est pas le cas on peut séparer 0 et $\mathrm{Int}(C)$; écrire ce que cela signifie.
4) Conclure que $C = \mathbb{R}^n$.

Exercice 24 Soit E et F deux espaces de Banach et T une application linéaire de E dans F telle que, pour toute $f \in F^*$, on a $f \circ T \in E^*$. Montrer que T est continue.

Chapitre 4

Espaces de fonctions continues

4.1 Espaces de fonctions continues sur un compact

On se place dans ce paragraphe sur un espace *métrique compact* X pour la distance d. On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications continues de X dans K. On munit cet espace de la norme

$$||f||_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

Le lecteur vérifiera facilement que les trois propriétés des normes sont satisfaites. La topologie résultant de cette norme est aussi appelée topologie de la convergence uniforme.

Proposition 38 *$(\mathcal{C}(X, \mathbb{K}),\ || \cdot ||_\infty)$ est un espace de Banach séparable.*

Preuve. Commençons par la complétude. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans cet espace ce qui signifie

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geq n_0,\ \ \sup_{x \in X} |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$$

Cela entraine que, pour tout $x \in X$, $(f_n(x))$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$ donc converge vers un élément de $\mathbb{K}$ noté $f(x)$. En passant à la limite $q \to +\infty$ dans l'expression ci-dessus on obtient

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall p \geq n_0,\ \forall x \in X,\ \ |f_p(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

ce qui signifie que (f_n) converge uniformément vers f. Par conséquent f est continue et la preuve de la complétude est achevée.

Passons à la séparabilité. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le critère de compacité de Borel-Lebesgue permet de recouvrir X par un nombre fini de boules de rayon $1/n$: $X \subset \bigcup_{j=1}^{N_n} B(x_j^n, 1/n)$. On définit alors sur X l'application

$$\phi_{n,j}(x) = \frac{\left(\frac{1}{n} - d(x, x_j^n)\right)_+}{\sum_{k=1}^{N_n} \left(\frac{1}{n} - d(x, x_k^n)\right)_+}$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq j \leq N_n$. Cette application est continue à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On remarque aussi que

$$\sum_{j=1}^{N_n} \phi_{n,j} = 1 \text{ et } \phi_{n,j}(x) = 0 \text{ si } d(x, x_j^n) \geq \frac{1}{n}$$

Considérons $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ et $\varepsilon > 0$ quelconques. Par le théorème de Heine f est uniformément continue donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ pour $d(x, y) \leq 1/n$. Alors

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^{N_n} f(x_j^n)\ \phi_{n,j}(x) \right| = \left| \sum_{j=1}^{N_n} [f(x) - f(x_j^n)]\ \phi_{n,j}(x) \right| \leq \varepsilon$$

On peut ensuite trouver, dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, des rationnels $\alpha_1, \dots, \alpha_{N_n}$ tels que

$$\left\| \sum_{j=1}^{N_n} f(x_j^n)\ \phi_{n,j} - \sum_{j=1}^{N_n} \alpha_j\ \phi_{n,j} \right\|_\infty \leq \varepsilon$$

Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ on remplace simplement les rationnels par des complexes de parties réelles et imaginaires rationnelles. Au total on voit que la famille

$$\left\{ \sum_{j=1}^{N_n} \alpha_j\ \phi_{n,j}\ ;\ \ \alpha_j \in \mathbb{Q}\, (\text{ou } \mathbb{Q} + i\mathbb{Q})\ ,\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ et elle est dénombrable ce qui termine la preuve de la séparabilité. Passons à un lemme classique qui nous sera utile.

Lemme 39 (Dini) *Soit (f_n) une suite d'applications continues de X de $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers l'application continue f, en croissant ($f_{n+1} \geq f_n$). Alors la convergence de f_n vers f est uniforme sur X.*

Preuve. On fixe $\varepsilon > 0$ quelconque. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\Omega_n = \{x \in X;\ f_n(x) > f(x) - \varepsilon\}$ est un ouvert. La réunion (croissante) de ces ouverts recouvre X. On en déduit par le critère de compacité de Borel-Lebesgue l'existence de $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $X = \Omega_N$. cela montre que pour tout $n \geq N$ et tout $x \in X$, $f(x) \geq f_n(x) \geq f_N(x) \geq f(x) - \varepsilon$ d'où l'uniforme convergence.

Par exemple considérons la suite de polynomes à coefficients réels donnée par $P_0 = 0$ et $P_{n+1}(x) = P_n(x) + [x^2 - P_n^2(x)]/2$. On vérifie facilement par récurrence que, pour tout $x \in [-1, 1]$, $0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq |x|$. Alors la suite $P_n(x)$ est croissante et majorée donc converge vers un réel $f(x)$ $(\in \mathbb{R}_+)$. En passant à la limite on obtient l'équation $f(x) = f(x) + [x^2 - f^2(x)]/2$ ce qui entraine $f(x) = |x|$. Le lemme de Dini assure alors que la convergence de P_n vers $|\cdot|$ est uniforme sur $[-1, 1]$, un fait que l'on utilisera dans la suite de ce cours.

4.2 Résultats de densité

Nous allons maintenant établir des résultats de type Stone-Weierstrass qui permettent de trouver des parties denses dans l'ensemble des applications continues.

Proposition 40 *Soit X un espace métrique compact (ayant au moins deux éléments) et une partie H de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ qui a les deux propriétés suivantes*

$$\forall f, g \in H,\ \ \sup(f, g) \in H \text{ et } \inf(f, g) \in H \text{ (i.e. } H \text{ est réticulé)}$$

$$\forall x_1 \neq x_2 \in X,\ \ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R},\ \ \exists f \in H\ \ f(x_1) = \alpha_1 \text{ et } f(x_2) = \alpha_2$$

Alors H est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Preuve. Donnons nous $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ puis $\varepsilon > 0$ et $x \in X$. Par la seconde hypothèse, pour tout $y \in X$, il existe une application $u_y \in H$ telle que $u_y(x) = f(x)$ et $u_y(y) = f(y)$. Alors

$$O_y = \{\tilde{x} \in X;\ u_y(\tilde{x}) > f(\tilde{x}) - \varepsilon\}$$

est un ouvert de X qui contient x et y. Donc X est recouvert par la réunion de O_y quand y varie dans $X \setminus \{x\}$. Par le critère de compacité de Borel-Lebesgue on peut extraire un sous-recouvrement fini i.e. $X = O_{y_1} \cup \ldots \cup O_{y_r}$ avec $y_1, \ldots, y_r \in X \setminus \{x\}$. On pose alors $v_x = \sup(u_{y_1}, \ldots, u_{y_r})$ qui appartient à H par la première hypothèse. On note alors que $v_x(x) = f(x)$ et pour tout $\tilde{x} \in X$, $v_x(\tilde{x}) > f(\tilde{x}) - \varepsilon$. Considérons maintenant

$$\Omega_x = \{\tilde{x} \in X;\ \ v_x(\tilde{x}) < f(\tilde{x}) + \varepsilon\}$$

qui est un ouvert de X contenant x. La réunion pour $x \in X$ des Ω_x recouvre X et on peut par compacité extraire un sous-recouvrement fini : $X = \Omega_{x_1} \cup \ldots \cup \Omega_{x_p}$. Posons $v = \inf(v_{x_1}, \ldots, v_{x_p})$ qui appartient à H. Par construction, $f - \varepsilon < v < f + \varepsilon$ ce qui montre qu'on peut approcher f par une fonction de H à ε près et cela achève la preuve.

Proposition 41 *Soit X un espace métrique compact et H un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ qui contient les fonctions constantes et qui a les deux propriétés suivantes*

$$\forall f, g \in H, \ \sup(f, g) \in H \ \textit{et} \ \inf(f, g) \in H \ \textit{(i.e. H est réticulé)}$$

$$\forall x_1 \neq x_2 \in X, \ \exists h \in H \ \ h(x_1) \neq h(x_2) \ \textit{(i.e. H est séparant)}$$

Alors H est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Preuve. Il suffit de montrer qu'on peut retrouver la seconde hypothèse de la proposition précédente à partir de celles énoncées ici. C'est à dire que pour $x_1 \neq x_2 \in X$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, nous cherchons $f \in H$ telle que $f(x_1) = \alpha_1$ et $f(x_2) = \alpha_2$. Nous pouvons déjà trouver $h \in H$ telle que $h(x_1) \neq h(x_2)$. Mais alors le système

$$\lambda\, h(x_1) + \mu = \alpha_1, \quad \lambda\, h(x_2) + \mu = \alpha_2$$

admet une solution ce qui prouve que l'on peut trouver une fonction f convenable sous la forme $f = \lambda\, h + \mu$.

Théorème 42 (Stone-Weierstrass, cas réel) *Si X est un espace métrique compact et H est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ séparante et contenant les constantes alors H est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.*

Preuve. Rappelons d'abord que H sous algèbre signifie que H est un sous-espace vectoriel qui est stable par multiplication i.e. si $f, g \in H$ alors $f\, g \in H$. Cette dernière propriété implique en particulier que toute puissance d'un élément de H est dans H et même tout polynome d'un élément de H en utilisant en plus la propriété de sous-espace vectoriel. Notons que $\overline{H}$ est aussi une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ qui contient les constantes. Nous allons maintenant prouver que $\overline{H}$ est réticulé. Comme

$$\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|), \ \inf(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

il suffit de prouver la propriété $f \in \overline{H} \Rightarrow |f| \in \overline{H}$. Reprenons alors la suite de polynomes (P_n) que nous avons étudiée comme corollaire du lemme de Dini. On sait que

$$|f| = \lim_{n \to +\infty} ||f||_\infty \ P_n\left(\frac{f}{||f||_\infty}\right)$$

la limite étant au sens de la convergence dans $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ c'est à dire pour la norme uniforme $||\cdot||_\infty$. Cela prouve bien que $|f| \in \overline{H}$ et donc que $\overline{H}$ est réticulé. Par la proposition précédente on conclut que $\overline{H}$ est dense dans $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ et donc finalement $\overline{H} = \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ puisque $\overline{H}$ est fermé.

Par exemple l'ensemble des fonctions lipschitziennes est dense dans $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. Cet ensemble est en effet une sous-algèbre contenant les constantes. De plus il est séparant : considérer par exemple les applications $z \mapsto d(z,x)$ qui sont lipschitziennes de rapport 1.

Dans le cas où X est un compact de $\mathbb{R}^d$, les polynomes à d variables forment une partie dense de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. Dans le cas unidimensionnel $d = 1$ une preuve alternative sera donnée à l'exercice 25 et 26 via le théorème de Korovkin et les polynomes de Bernstein.

Le théorème de Stone-Weierstrass tel qu'il est énoncé ci-dessus dans le cas réel n'est pas vrai avec des fonctions à valeurs complexes, comme le lecteur pourra s'en convaincre en traitant l'exercice 27. Il suffit de rajouter une hypothèse comme dans l'énoncé ci-dessous. Le lecteur pourra faire la preuve en exercice en se ramenant au cas réel par l'étude des parties réelles et imaginaires.

Théorème 43 (Stone-Weierstrass, cas complexe) *Si X est un espace métrique compact et H est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ séparante, autoconjuguée et contenant les constantes alors H est dense dans $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$.*

Le terme autoconjuguée signifie que $f \in H \Rightarrow \overline{f} = (x \mapsto \overline{f(x)}) \in H$. A titre d'exemple plaçons nous sur le cercle unité $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C};\ \ |z| = 1\}$. Le théorème prouve que $\mathrm{Vect}(\{z \mapsto z^n\ ;\ \ n \in \mathbb{Z}\})$ est dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{U},\mathbb{C})$. Une traduction immédiate est que l'ensemble des polynomes trigonométriques, c'est à dire l'ensemble des applications du type

$$t \mapsto \sum_{k=-N}^{N} c_k\, e^{i\frac{2\pi}{T}kt}\ ;\quad N \in \mathbb{N},\ \ c_{-N},\dots,c_N \in C$$

est dense dans l'ensemble des applications continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et T-périodiques, pour la norme uniforme.

Une application des théorèmes de Stone-Weierstrass aussi bien dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ que dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ est la densité, pour X et Y espaces métriques compacts de

$$\{(x,y) \mapsto f(x)\, g(y)\ ;\ \ f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{K}),\ \ g \in \mathcal{C}(Y,\mathbb{K})\}$$

dans $\mathcal{C}(X \times Y,\mathbb{K})$. Ce résultat est souvent utile dans la pratique.

4.3 Compacité dans $\mathcal{C}(X)$

Théorème 44 (Ascoli) *Soit X espace métrique compact.*

Une partie H de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. est relativement compacte si et seulement si elle est bornée i.e. $\sup_{h\in H}||h||_\infty < +\infty$ *et équicontinue i.e.*

$$\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall h \in H,\ \forall y \in X,\ \ d(x,y) \Rightarrow |h(x) - h(y)| \leq \varepsilon$$

Commençons par quelques remarques. Comme chaque fonction h est continue en tout point $x \in X$, il est vrai que

$$\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall h \in H,\ \exists \eta > 0,\ \forall y \in X,\ \ d(x,y) \Rightarrow |h(x) - h(y)| \leq \varepsilon$$

Dans cette écriture l'ordre des quantificateurs nous montre que η dépend de x, ε et de h. En revanche dans l'hypothèse d'équicontinuité, η dépend de x, ε mais pas de h. On pourra par ailleurs prouver en utilisant la compacité de X que l'équicontinuité est équivalente à l'"uniforme équicontinuité" qu'on exprime par

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall h \in H,\ \forall x \in X,\ \forall y \in X,\ \ d(x,y) \Rightarrow |h(x) - h(y)| \leq \varepsilon$$

Nous rappelons que la relative compacité de H signifie que $\overline{H}$ est compact. Cela équivaut au fait que toute sous-suite d'éléments de H possède une sous-suite convergente, vers une limite appartenant à $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ mais pas en général à H.

Preuve. Commençons par la condition nécessaire. Tout d'abord puisque $\overline{H}$ est compact il est borné donc H est borné. Passons à l'équicontinuité. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\overline{H}$ est compact, H peut être recouvert par une réunion finie de boules de rayon ε centrées en $h_1, \ldots, h_r \in H$. L'hypothèse de continuité de $h_1, \ldots, h_r \in H$ entraine l'existence de η tel que, pour $d(x,y) \leq \eta$ on ait $|h_i(x) - h_i(y)| \leq \varepsilon$ pour $i \leq r$. Mais alors, pour $h \in H$ quelconque, considérons h_i telle que $h \in B(h_i, \varepsilon)$ et écrivons, pour $d(x,y) \leq \eta$

$$|h(x) - h(y)| \leq |h(x) - h_i(x)| + |h_i(x) - h_i(y)| + |h_i(y) - h(y)|$$

Comme chacun des termes de cette somme est inférieur à ε, nous avons au total trouvé $\eta > 0$ tel que, pour tout $h \in H$ et tous x, y tels que $d(x,y) \leq \eta$, on ait $|h(x) - h(y)| \leq \varepsilon$ ce qui est l'(uniforme) équicontinuité.

Passons maintenant à la réciproque. Prenons une suite (h_n) d'éléments de H. Nous voulons en extraire une sous-suite convergente. Puisque X est compact il est séparable ; notons (x_p) une suite dense de X. Pour tout p, la suite de réels $(h_n(x_p))$ est bornée donc on peut en extraire une sous-suite

$(h_{n_k^p}(x_p))_{k\geq 1}$ convergente. En procédant par récurrence sur p on peut imposer que la suite d'indices $(n_k^{p+1})_{k\geq 1}$ soit extraite de la suite $(n_k^p)_{k\geq 1}$. Le procédé diagonal consite alors à poser $n_k = n_k^k$. La suite (n_k) a ses termes à partir du rang p qui sont extraits de (n_k^p). Donc $(h_{n_k}(x_p))_{k\geq 1}$ converge et ceci pour tout p. Nous allons voir que la suite (h_{n_k}) est de Cauchy pour la norme uniforme. Soit $\varepsilon > 0$. On note η la quantité associée à ε par la définition d'équicontinuité. Par densité de (x_p) et compacité de X, il est possible de trouver L tel que tout $x \in X$ soit proche à moins de η près d'un élément de la famille $\{x_p,\ p \leq L\}$. Prenons alors N tel que pour $n_p, n_q \geq N$, $|h_{n_p}(x_i) - h_{n_q}(x_i)| \leq \varepsilon$ pour tout $i \leq L$. Alors pour $x \in X$ choisissons un entier $i(x) \leq L$ tel que $|x_{i(x)} - x| < \eta$ et écrivons

$$\begin{aligned}
&\left|h_{n_p}(x) - h_{n_q}(x)\right| \\
&\quad \leq \left|h_{n_p}(x) - h_{n_p}(x_{i(x)})\right| + \left|h_{n_p}(x_{i(x)}) - h_{n_q}(x_{i(x)})\right| + \left|h_{n_q}(x_{i(x)}) - h_{n_q}(x)\right| \\
&\quad \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\,\varepsilon
\end{aligned}$$

Cela montre bien que la suite (h_{n_k}) est de Cauchy pour la norme uniforme et donc qu'elle converge ce qui achève la preuve du théorème d'Ascoli.

Une application classique du théorème d'Ascoli est le théorème de Péano qui affirme l'existence d'une solution à une équation différentielle.

Théorème 45 (Péano) *Soit $F:\ \Omega \times U \to \mathbb{R}^d$ continue où Ω et U sont des ouverts respectifs de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^d$ et $(t_0, y_0) \in \Omega \times U$.*

Alors il existe un voisinage J de t_0 dans Ω et une application $y:\ J \to U$ solution du problème de Cauchy

$$\forall t \in J,\ y'(t) = F(t, y(t)) \text{ et } y(t_0) = y_0$$

Plus précisément, si $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[\times B(y_0, r)$ a son adhérence incluse dans $\Omega \times U$ et si

$$M\,\alpha < r \text{ avec } M = \sup\{|F(s,x)|;\ (s,x) \in]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[\times B(y_0, r)\}$$

alors il existe une solution définie sur $J =]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$.

Preuve. Placons nous sur le voisinage $T =]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[\times B(y_0, r)$ comme spécifié dans le théorème. Il est appelé parfois "tonneau de sécurité". Son existence est facile à établir. Il suffit de voir que F est bornée sur un voisinage compact de (t_0, y_0) par continuité puis on restreint ce voisinage en un tonneau du type cherché de façon à satisfaire la condition énoncée. Fixons $\varepsilon > 0$. Notons que F est uniformément continue sur $\overline{T} = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B}(y_0, r)$ c'est à dire qu'il existe η tel que si $|s - t| \leq \eta$ et $|x - x'| \leq \eta$ alors

$|F(s,x) - F(t,x')| < \varepsilon$. Nous allons exhiber une "solution approchée à ε près du problème de Cauchy sur $J =]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$". Nous allons construire cette application φ_ε sur $[t_0, t_0+\alpha[$, l'autre moitié de J se traitant de la même manière. On considère une partition $t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t_0 + \alpha$ de pas $h = \alpha/N < \inf(\eta, \eta/M)$. On pose alors $x_0 = y_0$ et, pour $0 \le p \le N-1$, $x_{p+1} = x_p + h\,F(t_p, x_p)$. On voit que $|x_{p+1} - x_p| \le h\,M < \eta$. On définit ensuite sur $[t_0, t_0 + \alpha]$ la fonction φ_ε comme affine sur chaque $[t_p, t_{p+1}]$, continue, dérivable à droite et telle que $\varphi_\varepsilon(t_p) = x_p$. Pour $t \in [t_p, t_{p+1}[$ la dérivée à droite est $\varphi'_{\varepsilon,d}(t) = (\varphi_\varepsilon(t_{p+1}) - \varphi_\varepsilon(t_p))/h = F(t_p, x_p)$. Ainsi en utilisant la continuité uniforme de F,

$$|\varphi'_{\varepsilon,d}(t) - F(t, \varphi_\varepsilon(t))| = |F(t_p, x_p) - F(t, \varphi_\varepsilon(t))| < \varepsilon$$

L'inégalité obtenue est vraie pour tout $t \in [t_0, t_0 + \alpha[$ et justifie pour φ_ε le nom de "solution approchée à ε près". On va maintenant considérer une suite de solutions approchées à ε prés pour une suite de ε tendant vers 0. Notons φ_n au lieu de $\varphi_{1/n}$. Ces applications sont définies sur $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ et à valeurs dans $B(y_0, r)$ car $|x_p - x_0| \le p\,h\,M \le N\,h\,M = \alpha M < r$. On va appliquer le théorème d'Ascoli à la suite $(\varphi_n)_{n\ge1}$ de $C([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \mathbb{R}^d)$. Notons déja qu'elle est équibornée. Par ailleurs remarquons que

$$|\varphi'_{n,d}(t)| \le |\varphi'_{n,d}(t) - F(t, \varphi_n(t))| + |F(t, \varphi_n(t))| \le \frac{1}{n} + M \le 1 + M$$

Rappelons alors une version fine de l'inégalité des accroissements finis.

Proposition 46 *Soit φ une application de l'intervalle compact $[a,b]$ dans l'espace vectoriel normé $(F, ||\cdot||)$ et g une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que φ et g sont continues et admettent en tout point $t \in]a,b[$ une dérivée à droite qui vérifie*

$$||\varphi'_d(t)|| \le g'_d(t)$$

Alors

$$||\varphi(b) - \varphi(a)|| \le g(b) - g(a)$$

Cette proposition entraine que pour $s, t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ et tout entier $n \ge 1$,

$$|\varphi_n(s) - \varphi_n(t)| \le (M+1)\,|s-t|$$

ce qui implique l'équicontinuité de la suite $(\varphi_n)_{n\ge1}$. Le théorème d'Ascoli entraine qu'une sous-suite $(\varphi_{n_k})_{k\ge1}$ converge uniformément, disons vers φ_∞. Posons $\psi_n(t) = \varphi_n(t) - y_0 - \int_{t_0}^t F(s, \varphi_n(s))\,ds$. Alors $\psi'_{n,d}(t) = \varphi'_{n,d}(t) -$

$F(t, \varphi_n(t))$ est en norme inférieur à $1/n$ sur $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$. Par l'inégalité des accroissements finis on en déduit pour tout $t \in]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$,

$$|\varphi_n(t) - y_0 - \int_{t_0}^{t} F(s, \varphi_n(s))\, ds| = |\psi_n(t) - \psi_n(t_0)| \leq \frac{1}{n}\,\alpha$$

Nous faisons ensuite tendre n vers $+\infty$ le long de la sous-suite (n_k). Comme φ_n converge uniformément vers φ_∞ sur $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ le long de la sous-suite (n_k) et compte tenu de la continuité uniforme de F, les fonctions $F(\cdot, \varphi_n(\cdot))$ convergent uniformément vers $F(\cdot, \varphi_\infty(\cdot))$. On peut donc passer à la limite sous l'intégrale (on aurait pu également utiliser le théorème de convergence dominée qui nous aurait dispensé de l'uniformité de la convergence). On obtient

$$\varphi_\infty(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, \varphi_\infty(s))\, ds$$

pour tout $t \in]t_0-\alpha, t_0+\alpha[$. On a donc obtenu une solution φ_∞ du problème de Cauchy $y' = F(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ sur $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$.

4.4 Autres espaces de fonctions continues

Soit X un espace métrique pour la distance d. On note toujours $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On notera $\mathcal{C}_b(X, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications continues bornées de X dans $\mathbb{K}$. On note $\mathcal{C}_c(X, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications continues de X dans $\mathbb{K}$ à support compact. On rappelle que le support de f est défini par

$$\mathrm{Supp}(f) = \overline{\{x \in X;\ f(x) \neq 0\}}$$

On note $\mathcal{C}_0(X, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications continues de X dans $\mathbb{K}$ tendant vers 0 à l'infini c'est à dire : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe K compact de X tel que, pour $x \notin K$, $|f(x)| \leq \varepsilon$. On a les inclusions ensemblistes suivantes

$$\mathcal{C}_c(X, \mathbb{K}) \subset \mathcal{C}_0(X, \mathbb{K}) \subset \mathcal{C}_b(X, \mathbb{K})$$

Tous ces espaces sont munis de la norme uniforme $||\cdot||_\infty$ toujours définie par $||f||_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$.

Proposition 47 *$(\mathcal{C}_b(X, \mathbb{K}),\ ||\cdot||_\infty)$ est un espace de Banach et $\mathcal{C}_0(X, \mathbb{K})$ en est un sous espace fermé.*

La preuve est facile et laissée en exercice au lecteur. En revanche $\mathcal{C}_c(X, \mathbb{K})$ n'est pas en général fermé. On va même préciser dans le cas où X est localement compact. Ce dernier terme signifie que tout point de X admet un voisinage compact. C'est le cas si X est un espace vectoriel normé de dimension finie. Par contre aucun espace vectoriel normé de dimension infinie n'est localement compact comme l'affirme le célèbre théorème de Riesz.

Proposition 48 *Si X est un espace métrique localement compact, alors $\mathcal{C}_c(X, \mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{C}_0(X, \mathbb{K})$*

Preuve. Considérons $f \in \mathcal{C}_0(X, \mathbb{K})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe K compact de X tel que, pour $x \notin K$, $|f(x)| \leq \varepsilon$. Tout $x \in X$ admet un voisinage compact K_x. On a trivialement $K \subset \bigcup_{x \in K} \overset{\circ}{K_x}$. De la compacité de K on peut recouvrir K par une réunion finie des ouverts intervenant précédemmment : $K \subset \overset{\circ}{K}_{x_1} \cup \ldots \cup \overset{\circ}{K}_{x_p} = U$. Posons $\hat{K} = K_{x_1} \cup \ldots \cup K_{x_p}$ qui est compact. On pose

$$\phi(x) = \frac{d(x, X \setminus U)}{d(x, K) + d(x, X \setminus U)}$$

Cette application est continue à valeurs dans $[0, 1]$ et vaut 1 sur K et 0 sur $X \setminus U$. Alors $f\ \phi$ a un support inclus dans $\overline{U} \subset \hat{K}$ donc compact. Cette application ne diffère de f que sur $X \setminus K$ où $|f - f\ \phi| = |f|\ |1 - \phi| \leq |f| \leq \varepsilon$. On a donc $||f - f\ \phi||_\infty \leq \varepsilon$ et on a bien pu approximer f par $f\phi \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{K})$.

4.5 Représentation des formes linéaires

On se place sur un espace métrique séparable X localement compact. On appelle *mesure de Radon positive* une forme linéaire T sur $\mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$ qui est positive ce qui signifie que $Tf \in \mathbb{R}_+$ pour tout $f \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$ à valeurs positives. La propriété de positivité de T implique sa monotonie au sens suivant : si $f, g \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$ vérifient $f \leq g$ au sens où $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in X$ alors $Tf \leq Tg$. On remarquera que cela implique une certaine forme de continuité à travers la propriété suivante : pour tout compact K de X, il existe une constante c_K telle que, pour toute $f \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$ à support inclus dans K, on a $|Tf| \leq c_K\ ||f||_\infty$. En effet, notons ϕ une application continue de X dans $[0, 1]$ à support compact et qui vaut 1 sur K. L'existence d'une telle fonction est facile à prouver en utilisant la locale compacité de X. On a alors $f = f\ \phi$ d'où l'encadrement $-||f||_\infty\ \phi \leq f \leq ||f||_\infty\ \phi$ ce qui entraine par monotonie de T, $-||f||_\infty\ T\phi \leq Tf \leq ||f||_\infty\ T\phi$. En notant $c_K = T\phi$ on trouve bien $|Tf| \leq c_K\ ||f||_\infty$.

Un exemple de mesure de Radon peut être construit quand on dispose d'une mesure μ sur X, muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(X)$, qui est finie sur les compacts de X. Dans ce cas la formule

$$T_\mu f = \int f \, d\mu$$

définit une mesure de Radon positive. Ce cas particulier est en fait le cas général comme l'affirme le théorème suivant, que nous admettrons.

Théorème 49 (Radon-Riesz) *Pour toute mesure de Radon positive T sur $\mathcal{C}_c(X,\mathbb{R})$, il existe une mesure μ sur $(X,\mathcal{B}(X))$, finie sur les compacts telle que*

$$\forall f \in \mathcal{C}_c(X,\mathbb{R}),\ \ Tf = \int f \, d\mu$$

A titre d'exemple sur la droite réelle, considérons une application A de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ croissante et continue à droite ayant limite 0 en $-\infty$. Alors la théorie de la mesure affirme qu'il existe une unique mesure μ sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ qui vérifie $\mu(]\alpha,\beta]) = A(\beta) - A(\alpha)$ pour tous réels $\beta > \alpha$. Par exemple on obtient la mesure de Lebesgue restreinte à $\mathbb{R}_+$ en prenant $A(x) = x\, \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$; la masse de Dirac en 0 s'obtient en prenant $A(x) = \mathbf{1}_{]0,+\infty[}$. Alors $Tf = \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu$ est aussi noté $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dA(x)$ et appelé intégrale de Stieltjes relativement à A.

Nous allons maintenant passer au cas de formes linéaires non positives. On appelle *mesure de Radon réelle* toute forme linéaire T sur $\mathcal{C}_c(X,\mathbb{R})$ telle que pour tout compact K de X il existe une constante c_K telle que $|Tf| \leq c_K\ ||f||_\infty$ pout toute application $f \in \mathcal{C}_c(X,\mathbb{R})$ dont le support est inclus dans K. Alors on montre que T s'écrit $T = T_+ - T_-$ où T_+ et T_- sont deux mesures de Radon positives. On peut alors appliquer le théorème de Radon-Riesz à chacune de ces formes de Radon positives.

On appelle mesure de Radon réelle bornée une forme linéaire T sur $\mathcal{C}_c(X,\mathbb{R})$ telle qu'il existe une constante c telle que

$$\forall f \in \mathcal{C}_c(X,\mathbb{R}),\ \ |Tf| \leq c\, ||f||_\infty)$$

c'est à dire continue sur l'espace vectoriel normé (non complet) $(\mathcal{C}_c(X,\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty$. Alors il existe deux mesures μ_+ et μ_- sur $(X,\mathcal{B}(X))$, de masses finies (i.e. $\mu_+(X) < +\infty$ et $\mu_-(X) < +\infty$) telles que

$$Tf = \int f \, d\mu_+ - \int f \, d\mu_-$$

pour toute $f \in \mathcal{C}_c(X,\mathbb{R})$.

Si on envisage maintenant une forme linéaire T continue sur $(\mathcal{C}_0(X,\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$, elle définit par restriction une forme linéaire continue sur $(\mathcal{C}_c(X,\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$ donc elle est du type ci-dessus :

$$Tf = \int f \, d\mu_+ - \int f \, d\mu_-$$

pour toute $f \in \mathcal{C}_c(X,\mathbb{R})$ avec μ_+ et μ_- deux mesures sur $(X,\mathcal{B}(X))$, de masses finies. En utilisant alors la densité de $\mathcal{C}_c(X,\mathbb{R})$ dans $(\mathcal{C}_0(X,\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$, on voit que la formule ci-dessus pour Tf est en fait vraie pour toute $f \in \mathcal{C}_0(X,\mathbb{R})$.

4.6 Intégration et dérivation sur $\mathbb{R}$

Nous commençons par un théorème qui concerne les fonctions croissantes, pas nécessairement continues. Sa preuve, sans être difficile, est un peu longue pour figurer ici.

Théorème 50 (Lebesgue) *Soit f une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ croissante. Alors elle est dérivable presque partout (pour la mesure de Lebesgue), sa dérivée est mesurable positive intégrable et*

$$\int_a^b f'(t)\ dt \leq f(b) - f(a)$$

Il est important de remarquer que cette dernière inégalité peut être stricte ; voir l'exercice 29. Grâce à ce théorème de dérivation de Lebesgue, on peut préciser le cas des fonctions lipschitziennes.

Proposition 51 *Une application f de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ est lipschitzienne de rapport K si et seulement si f est dérivable presque partout de dérivée f' bornée par K presque partout et vérifiant, pour tout $x < y \in [a,b]$,*

$$\int_x^y f'(t)\ dt = f(y) - f(x)$$

Preuve. La suffisance des conditions énoncées est claire. Passons à la nécessité de ces conditions. Supposons f lipschitzienne de rapport K. Alors $t \mapsto f(t) + K\,t$ est croissante donc dérivable pp et il en est de même pour f. Comme tout taux d'accroissement de f est borné par K, cela est aussi vrai pour la dérivée pp. Ecrivons enfin, pour tout $a \leq x < y < b$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \int_x^y n\ (f(t+\frac{1}{n}) - f(t))\ dt &= n\int_{x+\frac{1}{n}}^{y+\frac{1}{n}} f(t)\ dt - n\int_x^y f(t)\ dt \\ &= n\int_y^{y+\frac{1}{n}} f(t)\ dt - n\int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t)\ dt \end{aligned}$$

Or le membre de droite tend, par continuité de f, vers $f(y) - f(x)$ et le membre de gauche tend vers $\int_x^y f'$ par le théorème de convergence dominée.

Comme la notion de dérivabilité est stable par combinaison linéaire le théorème de dérivation de Lebesgue va s'étendre aux différences de deux fonctions croissantes. Ces fonctions peuvent être caractérisée d'une autre manière comme l'affirme le résultat suivant.

Théorème 52 (Décomposition de Jordan) *Une application f de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit comme différence de deux fonctions croissantes si et seulement si elle est à variation finie. Cela signifie que la variation*

$$V_{[a,b]}(f) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \right\}$$

où le suprémum porte sur toutes les subdivisions $[a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b]$ de $[a,b]$, est finie. De plus dans ce cas l'écriture $f = f(a) + g - h$ où g et h sont croissantes nulles en a est unique.

Preuve (abrégée) Il est élémentaire de voir que si f est différence de deux fonctions croissantes alors f est à variation finie. Notons que pour une fonction croissante la variation sur un intervalle est la différence des valeurs de f aux deux bornes. Inversement si f est à variation finie, on vérifiera qu'en posant

$$g(x) = \frac{1}{2}\Big(f(x) + V_{[a,x]}(f) - f(a)\Big) \ ; \ h(x) = \frac{1}{2}\Big(V_{[a,x]}(f) - f(x) + f(a)\Big)$$

on a bien la décomposition souhaitée. Supposons maintenant qu'on dispose d'une seconde décomposition du même type $f = f(a) + \tilde{g} - \tilde{h}$. Pour $x < y$, la quantité $\tilde{g}(y) - \tilde{g}(x)$ vaut $f(y) - f(x) + \tilde{h}(y) - \tilde{h}(x)$ donc est supérieure à $f(y) - f(x)$ et elle est aussi supérieure à 0 donc au total au maximum de ces deux quantités soit $(1/2)(f(y) - f(x) + |f(y) - f(x)|)$. Si on somme cette inégalité le long d'une subdivision et qu'on passe au supremum, on trouve $\tilde{g}(y) - \tilde{g}(x) \geq (1/2)[f(y) - f(x) + V_{[x,y]}(f)] = g(y) - g(x)$. Cela entraine que $\tilde{g} = g + \beta$ où β est une fonction croissante. On en déduit $\tilde{h} = h + \beta$. On voit alors facilement que

$$V_{[a,b]}(f) = \tilde{g}(b) - \tilde{g}(a) + \tilde{h}(b) - \tilde{h}(a) = g(b) + h(b) + 2\beta(b) = V_{[a,b]}(f) + 2\,\beta(b)$$

Cela prouve que β est nulle ce qui achève la preuve.

Corollaire 53 *Toute application à variation finie f de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ est dérivable pp. Sa dérivée est intégrable et*

$$\int_a^b |f'(t)|\, dt \leq V_{[a,b]}(f)$$

Preuve. Compte tenu du résultat précédent la seule chose à vérifier est l'inégalité. On prolonge f par la valeur $f(b)$ à droite de b et on écrit

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f'(t)|\,dt &\leq \liminf_{n\to+\infty} \int_a^b n\,|f(t+\frac{1}{n}) - f(t)|\,dt \\
&\leq \liminf_{n\to+\infty} \int_a^b n\,|V_{[t,t+\frac{1}{n}]}(f)|\,dt \\
&\leq \liminf_{n\to+\infty} \int_a^b n\,(V_{[a,t+\frac{1}{n}]}(f) - V_{[a,t]}(f))\,dt \\
&= \liminf_{n\to+\infty} \int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} n\,V_{[a,y]}(f)\,dy - \int_a^b n\,V_{[a,y]}(f)\,dy \\
&= \liminf_{n\to+\infty} \int_b^{b+\frac{1}{n}} n\,V_{[a,y]}(f)\,dy - \int_a^{a+\frac{1}{n}} n\,V_{[a,y]}(f)\,dy \\
&\leq V_{[a,b]}(f)
\end{aligned}$$

On a d'abord utilisé le lemme de Fatou. Puis le fait que la variation sur un intervalle est inférieure à la somme des variations sur deux intervalles qui partitionnent l'intervalle de départ. Ensuite on a fait quelques manipulations élémentaires sur les intégrales et enfin une majoration.

Puisque nous étudions les possibilités de dérivation d'une fonction, une question naturelle est d'étudier la dérivabilité d'une “primitive”.

Proposition 54 *Soit g une application intégrable sur tout compact de l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $a \in I$. Alors la fonction définie par*

$$F(x) = \int_a^x g(t)\,dt$$

est continue et dérivable pp et $F' = g$ pp. De plus F est à variation bornée sur tout compact de I et $V_{[x,y]}(F) = \int_x^y |g|$.

Preuve. F est continue grâce au théorème de convergence dominée. A partir de la définition on voit facilement que F est à variation bornée et $V_{[x,y]}(F) \leq \int_x^y |g|$. Etant à variation bornée, F est dérivable pp. On notera que $F'(t) = \lim_{n\to+\infty} n[F(t+1/n) - F(t)] = \liminf_{n\to+\infty} n \int_t^{t+1/n} g$. On écrit alors, pour

$x < y \in I$,

$$\begin{aligned}
\int_x^y |F'(t) - g(t)|\, dt &\leq \liminf_{n\to+\infty} \int_x^y \left| n \int_t^{t+1/n} g(u)\, du - g(t) \right| dt \\
&\leq \liminf_{n\to+\infty} n \int_x^y \int_t^{t+1/n} |g(u) - g(t)|\, du\, dt \\
&= \liminf_{n\to+\infty} n \int_x^y \int_0^{1/n} |g(t+u) - g(t)|\, du\, dt \\
&= \liminf_{n\to+\infty} n \int_0^{1/n} \left(\int_x^y |g(t+u) - g(t)|\, dt \right) du \\
&\leq \liminf_{n\to+\infty} \sup_{u\in[0,1/n]} \left(\int_x^y |g(t+u) - g(t)|\, dt \right)
\end{aligned}$$

Pour conclure il suffit donc de montrer que la quantité entre parenthéses tend vers 0 si u tend vers 0. Cela sera établi à l'exercice **??** du prochain chapitre. On peut donc conclure que $F' = g$ pp.

4.7 Exercices

Exercice 25 (Korovkin) On fixe un compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. On considère une suite L_n d'applications linéaires de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ dans lui-même qui sont positives i.e. $f \geq 0 \Rightarrow L_n f \geq 0$ On note 1 la fonction constante égale à 1, x l'identité et x^2 la fonction carré. On suppose que $L_n 1 \to 1, L_n x \to x, L_n x^2 \to x^2$ quand $n \to +\infty$, au sens de la norme uniforme $||\cdot||_\infty$.
1) Pour $t \in [a, b]$, on définit la fonction $\phi_t \;:\; x \mapsto (t - x)^2$. Montrer que $L_n \phi_t(t)$ tend vers 0, uniformément en $t \in [a, b]$.
2) Pour $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$, exprimer l'uniforme continuité de f et en déduire l'existence de $\eta > 0$ tel que, pour tous $t, x \in [a, b]$,

$$|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{2\,||f||_\infty}{\eta^2}\, \phi_t(x)$$

3) Etant donné $t \in [a, b]$ et $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, montrer que

$$|L_n f(x) - f(t)\, L_n 1(x)| \leq L_n(|f - f(t)\, 1|)(x)$$

4) Prouver finalement que $L_n f(t) - f(t)$ converge vers 0 uniformément en t.

Exercice 26 (Bernstein) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'opérateur B_n par

$$\forall f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}),\ \forall x \in [0, 1],\ \ B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k\ f\left(\frac{k}{n}\right)\ x^k\, (1 - x)^{n-k}$$

2) Montrer que, pour des valeurs convenables de n, k,

$$\mathrm{C}_n^k \, \frac{k}{n} = \mathrm{C}_{n-1}^{k-1}, \quad \mathrm{C}_n^k \, \frac{k^2}{n^2} = \mathrm{C}_{n-2}^{k-2} \, \frac{n-1}{n} + \mathrm{C}_{n-1}^{k-1} \, \frac{1}{n}$$

3) Montrer que (B_n) est une suite d'applications linéaires positives qui vérifie les hypothèses de l'exercice 25.
4) Que peut on affimer par l'exercice 25 ?
5) On suppose maintenant que f de classe C^1 et que f' est lipschitzienne de rapport M. On pose $G_t(x) = f(x) - f(t) - (x-t)f'(t)$.
5.a) Prouver l'inégalité suivante

$$|G_t(x) - G_t(t)| \leq \frac{M}{2} \, (x-t)^2$$

5.b) En déduire une majoration de $|B_n G_t(x)|$.
5.c) Montrer que

$$|B_n G_t(t)| = |B_n f(t) - f(t)| \leq \frac{M}{8n}$$

5.d) Conclure.

Exercice 27 On considère $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$ et $H = \{z \mapsto P(z)\,;\ P \in \mathbb{C}[X]\}$.
1) Pour $h \in H$, calculer

$$\int_{\mathbb{U}} h(z)\, dz = i \int_0^{2\pi} h(e^{i\theta})\, e^{i\theta}\, d\theta$$

2) Que dire si $h \in \overline{H}$?
3) A-t-on $\int_{\mathbb{U}} f(z)\, dz = 0$ pour toute $f \in \mathcal{C}(\mathbb{U}, \mathbb{C})$?
4) Montrer que H est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(\mathbb{U}, \mathbb{C})$, séparante, contenant les constantes mais qui n'est pas dense.

Exercice 28 Soit K un compact de $\mathbb{C}^d$. Quelle est l'adhérence de la famille

$$\{(z_1, \ldots, z_d) \mapsto P(z_1, \ldots, z_d, \overline{z_1}, \ldots, \overline{z_d})\,; \quad P \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_{2d}]\}$$

Exercice 29 On rappelle que l'ensemble de Cantor

$$K = \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} 3^{-k}\, a_k\,;\ \forall k,\ a_k \in \{0, 2\} \right\}$$

a été étudié à l'exercice 10. On considère maintenant (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ i.e.

$P(X_n = 1) = P(X_n = 0) = 1/2$ et U une variable indépendante des précédentes, uniforme sur $[0,1]$. On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} 3^{-k}\, 2\, X_k + 3^{-n}\, U$$

et on note f_n sa fonction de répartition.
1) Dessiner f_n pour $n \in \{1, 2, 3\}$.
2) Montrer que f_n converge uniformément vers une application f que l'on interprétera et qui est continue, dérivable pp de dérivée nulle et qui croit de 0 à 1 sur $[0,1]$.
3) On note maintenant (q_n) une numérotation des rationnels et on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}\, f(x - q_n)$$

Montrer que φ est strictement croissante, continue dérivable pp de dérivée nulle.

Chapitre 5

Espaces L^p

5.1 Définition des espaces $\mathcal{L}^p$ et L^p

Soit $(X, \mathcal{F}, m)$ un espace mesuré. Cela signifie que X est un ensemble, $\mathcal{F}$ une tribu (appelée aussi σ-algèbre) sur X c'est à dire une famille de parties de X qui contient X et $\emptyset$ qui est stable par passage au complémentaire et union dénombrable. On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. on prend $p \in [1, +\infty[$. On pose alors

$$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, m; \mathbb{K}) = \left\{ f : X \to \mathbb{K},\ \mathcal{F} - \text{mesurable},\ \int |f|^p\, dm < +\infty \right\}$$

En utilisant par exemple la majoration $|f+g|^p \leq 2^p\ (|f|^p + |g|^p)$ on voit que cet ensemble est un espace vectoriel. Selon les circonstances la notation $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, m; \mathbb{K})$ peut être diversement abrégée : $\mathcal{L}^p(X, m; \mathbb{K})$, $\mathcal{L}^p(X, \mathbb{K})$, $\mathcal{L}^p \ldots$ en fonction des paramètres évidents. L'espace $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, m; \mathbb{K})$ est simplement l'ensemble de applications intégrables sur $(X, \mathcal{F}, m; \mathbb{K})$. Pour $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, m; \mathbb{K})$, on pose

$$||f||_p = \left(\int |f|^p\, dm \right)^{1/p}$$

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $f \in \mathcal{L}^p$, la relation d'homogénéité est évidente : $||\lambda\ f||_p = |\lambda|\ ||f||_p$. Deux inégalités sont d'importance

Théorème 55 (Hölder, Minkovski) *Si $p, q \in]1, +\infty[$ forment des exposants conjugués au sens où*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

et si $f \in \mathcal{L}^p$ *et* $g \in \mathcal{L}^q$ *alors* $f\,g \in \mathcal{L}^1$ *et*

$$\int |f\,g|\,dm \leq \left(\int |f|^p\,dm\right)^{1/p} \left(\int |g|^q\,dm\right)^{1/q} \quad \textit{(Hölder)}$$

Si $p \in [1, +\infty[$ *et* $f, g \in \mathcal{L}^p$ *alors* $f + g \in \mathcal{L}^p$ *et*

$$\left(\int |f+g|^p\,dm\right)^{1/p} \leq \left(\int |f|^p\,dm\right)^{1/p} + \left(\int |g|^p\,dm\right)^{1/p} \quad \textit{(Minkovski)}$$

Preuve. Avec les notations de “norme”, l'inégalité de Hölder s'écrit $||f\,g||_1 \leq ||f||_p\,||g||_q$. Pour prouver ce résultat, on commence par établir l'inégalité de convexité

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+, \;\; \alpha\,\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$$

Elle s'obtient en exprimant la convexite de l'exponentielle entre $\ln \alpha^p$ et $\ln \beta^q$. Puis on prend

$$\alpha = \frac{|f|}{||f||_p} \text{ et } \beta = \frac{|g|}{||g||_q}$$

et on intègre par rapport à m ce qui donne le résultat. Pour l'inégalité de Minkovski on peut supposer $p > 1$. On écrit

$$|f+g|^p \leq |f|\,|f+g|^{p-1} + |g|\,|f+g|^{p-1}$$

On intégre par rapport à m et on utilise deux fois l'inégalité de Holder pour majorer le membre de droite. Après simplification on obtient le résultat désiré.

Notons que l'inégalité de Minkovski $||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$ s'appelle inégalité triangulaire dans le language des normes. Toutefois il persiste une petite difficulté pour bénéficier pleinement de la notion de norme : $||f||_p = 0$ si et seulement si f est nulle m-presque partout sur X ce qui n'est pas rigoureusement pareil que $f = 0$ qu'on attendrait d'une norme. Un petit travail de passage au quotient permet de lever cette obstacle. La relation d'égalité m-presque partout sur X est une relation d'équivalence sur $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, m; \mathbb{K})$ qui est compatible avec les deux opérations d'addition et de multiplication par un scalaire. Donc le quotient de $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, m; \mathbb{K})$ par cette relation que l'on note $L^p(X, \mathcal{F}, m; \mathbb{K})$ a la structure d'espace vectoriel. On peut le munir d'une norme puisque $||f||_p$ est identique pour tout représentant d'une classe d'équivalence. Pour $f \in L^p(X, \mathcal{F}, m; \mathbb{K})$, la quantité $||f||_p$ est $||\tilde{f}||_p$ pour un représentant $\tilde{f}$ de f. Comme il n'y a pas de risque d'erreur on confondera bien souvent dans les notations un élément de $L^p(X, \mathcal{F}, m; \mathbb{K})$ avec un de ses représentants.

On définit maintenant $\mathcal{L}^\infty(X,\mathcal{F},m;\mathbb{K})$ comme l'ensemble des applications f de X dans $\mathbb{K}$ qui sont $\mathcal{F}$-mesurable et pour lesquelles il existe un réel M tel que $|f(x)| \leq M$ pour m-presque tout $x \in X$. L'infimum des réels M qui conviennent est noté $||f||_\infty$. Là encore on effectue le quotient par la relation d'égalité m-presque partout et on note l'espace vectoriel quotient $L^\infty(X,\mathcal{F},m;\mathbb{K})$ sur lequel on définit la norme $||\cdot||_\infty$.

5.2 Propriétés élémentaires de L^p

Nous fixons une espace mesuré $(X,\mathcal{F},m)$ avec m σ-finie.

Théorème 56 *Pour $p \in [1,+\infty]$, $(L^p(X,\mathcal{F},m;\mathbb{K}),\ ||\cdot||_p)$ est un espace de Banach*

Preuve. Pour $p=\infty$, la preuve est laissée en exercice au lecteur qui pourra copier la preuve de la complétude de $(\mathcal{C}(X,\mathbb{K}),||\cdot||_\infty)$.

Nous supposons maintenant que $p \in [1,+\infty[$ et considérons une suite (f_n) de Cauchy dans L^p. Pour tout k, il existe n_k tel que, pour tout $q,r \geq n_k$, $||f_r - f_q||_p \leq 2^{-k}$. En plus en effectuant une construction par récurrence on peut supposer que la suite (n_k) croit strictement par rapport à k. On a donc en particulier $||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}||_p \leq 2^{-k}$. Nous posons alors

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \text{ donc } ||g_n||_p \leq \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} \leq 1$$

Pour tout x, $g_n(x)$ croit par rapport à n donc converge vers $g(x) \in [0,+\infty]$. De plus en utilisant le théorème de convergence monotone de Beppo-Levi, on peut dire que $||g||_p = \lim_{n\to+\infty} ||g_n||_p \leq 1$. En particulier g est finie presque partout donc, pour presque tout x, la série $\sum_k (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$ converge absolument donc converge ce qui signifie que $f_{n_k}(x)$ tend vers un réel $f(x)$. De plus

$$|f_{n_r}(x) - f_{n_k}(x)| \leq \sum_{i=k}^{r-1} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \leq g(x)$$

En faisant tendre r vers $+\infty$, on obtient pour presque tout x, $|f(x) - f_{n_k}(x)| \leq g(x)$ et on rappelle que $g \in L^p$. Ainsi, presque partout en x,

$$|f(x) - f_{n_k}(x)|^p \leq g^p(x)\ (\in L^1),\ \ f_{n_k}(x) \to f(x)$$

On en déduit par le théorème de convergence dominée de Lebesgue que $\lim_{k\uparrow+\infty} \int |f(x) - f_{n_k}(x)|^p\, dx = 0$ c'est à dire f_{n_k} tend vers f dans L^p. Ainsi (f_n) est une suite de Cauchy qui admet une sous-suite convergente ce qui suffit à affirmer que la suite entière (f_n) converge. Cela achève la preuve. On notera en plus que nous avons prouvé le résultat suivant

Proposition 57 *Si* $f_n \stackrel{L^p}{\to} f$ *alors il existe une extraction* (n_k) *telle que* $f_{n_k} \stackrel{pp}{\to} f$ *avec en plus la domination* $|f_{n_k}| \leq g$ *pp et* $g \in L^p$.

Dans le cas d'une mesure finie les espaces L^p sont décroissants.

Proposition 58 *Si* $m(X) < +\infty$ *et* $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ *alors*

$$\mathcal{L}^q(X, \mathcal{F}, m; \mathbb{K}) \subset \mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, m; \mathbb{K})$$

Preuve. Supposons $q < +\infty$ sinon c'est trivial. Pour prouver le résultat il suffit d'utiliser l'inégalité élémentaire $|f|^p \leq 1 + |f|^q$.

Contre-exemple. Supposons que $I \subset X$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(X)$ et m est la mesure de comptage sur I définie par $m(A) = \mathrm{Card}(A \cap I)$. Alors $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, m; \mathbb{K})$ est simplement noté $l^p(I, \mathbb{K})$. Dans le cas $X = I = \mathbb{N}$, on retrouve l'espace l^p défini précédemment. On notera qu'a contrario de ce qui précède, on a l'inclusion $l^p \subset l^q$ pour $1 \leq p \leq q \leq +\infty$.

Proposition 59 *Si* $(X, \mathcal{F}, m; \mathbb{K})$ *est un espace mesuré quelconque et* $f \in L^1(X, \mathcal{F}, m; \mathbb{K}) \cap L^\infty(X, \mathcal{F}, m; \mathbb{K})$ *alors, pour* $p \in]1, +\infty[$, $f \in L^p$ *et*

$$||f||_p \leq ||f||_1^{1/p}\, ||f||_\infty^{1-\frac{1}{p}}$$

Preuve. Il suffit d'écrire que, pp, $|f|^p \leq ||f||_\infty^{p-1}\, |f|$ puis d'intégrer sur X.

Théorème 60 *Soit* X *un espace localement compact séparable et* m *une mesure sur* X *muni de sa tribu borélienne, qui est finie sur les compacts de* X *et soit* $p \in [1, +\infty[$.

Alors dans $L^p(X, \mathcal{B}_X, m; \mathbb{K})$ *sont denses*

1. *l'ensemble des fonctions étagées de la forme* $\sum_{i=1}^n \alpha_i\, \mathbf{1}_{B_i}$ *où* $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, $B_1, \dots, B_n$ *sont des boréliens disjoints inclus dans un compact.*
2. *l'ensemble* $\mathcal{C}_c(X, \mathbb{K})$ *des fonctions continues à support compact*
3. *dans le cas où* X *est un ouvert de* $\mathbb{R}^d$, *l'ensemble* $\mathcal{D}$ *des fonctions continues à support compact*

Preuve. Soit $f \in L^p(X, \mathcal{F}, m; \mathbb{K})$. Quitte à décomposer f en parties positives et négatives, on peut supposer que f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Comme $f\, \mathbf{1}_{\{f \leq N\}}$ tend vers f dans L^p quand N tend vers $+\infty$, on peut supposer que f est bornée. Quitte à multiplier par une constante on peut donc supposer que $0 \leq f < 1$. Le théorème de convergence croissante de Beppo-Levi montre alors que

$$f_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbf{1}_{f^{-1}([\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[)} \xrightarrow{L^p} f$$

On notera que $f^{-1}([\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[)$ est de mesure finie car

$$\left(\frac{k}{2^n}\right)^p m\left(f^{-1}([\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[)\right) \leq \int |f|^p \, dm$$

Pour la preuve du premier point on a donc réussi à approcher f dans L^p par une combinaison linéaire de fonctions indicatrices de boréliens de mesure finie. On peut en plus se ramener à des boréliens qui sont inclus dans un compact car si B désigne un borélien de mesure finie

$$||\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{B \cap K_n}||_p = m(B \setminus K_n)^{1/p} \to 0$$

dès que K_n croit vers X. On choisit pour (K_n) une suite exhaustive de compacts c'est à dire une suite croissante de compacts dont la réunion est X. Une telle suite existe car X est localement compact.

Pour prouver le deuxième point du théorème il suffit d'approcher dans L^p la fonction indicatrice $\mathbf{1}_B$ d'un borélien B inclus dans un compact par une fonction continue à support compact. On rappelle que m, comme toute mesure finie sur les compacts, est régulière au sens où

$$m(B) = \sup\{m(K);\ K \text{ compact},\ K \subset B\} = \inf\{m(U);\ U \text{ ouvert},\ U \supset B\}$$

ceci étant valable pour toute partie mesurable B. Il en résulte dans notre cas qu'étant donné $\varepsilon > 0$, on écrire $K \subset B \subset U \subset \tilde{K}$ où $m(U \setminus K) \leq \varepsilon$, K et $\tilde{K}$ sont des compacts et U un ouvert. L'application

$$\varphi \ :\ x \mapsto \frac{d(x, U^C)}{d(x, K) + d(x, U^C)}$$

est continue à support dans $\overline{U} \subset \tilde{K}$, vaut 1 sur K et prend ses valeurs dans $[0, 1]$. Alors $||\mathbf{1}_B - f||_p \leq ||\mathbf{1}_{U \setminus K}||_p \leq \varepsilon^{1/p}$. Cela achève la preuve du second point. Le troisième sera prouvé plus tard.

Théorème 61 *Soit X un espace localement compact séparable et m une mesure sur X muni de sa tribu borélienne, qui est finie sur les compacts de X et soit $p \in [1, +\infty[$.*

Alors $L^p(X, \mathcal{F}, m; \mathbb{K})$ est séparable.

Preuve. Nous notons (K_n) une suite exhaustive de compacts de X et $\mathcal{C}_{K_n}$ l'ensemble des applications continues de X dans $\mathbb{K}$ à support dans K_n. Cet ensemble est séparable comme prouvé au chapitre précédent. Nous avons vu précédemment que $\bigcup_n \mathcal{C}_{K_n}$ est dense dans L^p. Cela conclut la preuve.

5.3 Dual de L^p

Nous fixons une espace mesuré $(X, \mathcal{F}, m)$ avec m σ-finie et $p \in [1, +\infty[$. Comme d'habitude nous notons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et q l'exposant conjugué de p c'est à dire $(1/p) + (1/q) = 1$ pour $p > 1$ et $q = +\infty$ si $p = 1$.

Proposition 62 *Pour tout $g \in L^q$, l'application T_g définie par*

$$\forall f \in L^p, \;\; T_g(f) = \int_X fg \, dm$$

est une forme linéaire continue sur L^p de norme $||g||_q$

Preuve. L'inégalité de Hölder donne immédiatement que $|T_g f| \leq ||f||_p \, ||g||_q$ ce qui montre la continuité et la majoration de la norme. On vérifie ensuite que la norme est atteinte pour $f = |g|^{q/p} \, e^{i \operatorname{Arg(g)}} \in L^p$. Le théorème qui suit montre que nous disposons en fait avec ces exemples de toutes les formes linéaires sur L^p.

Théorème 63 *Pour $(X, \mathcal{F}, m)$ espace mesuré avec m σ-finie et $p \in [1, +\infty[$ d'exposant conjugué q, toute forme linéaire continue T sur $L^p(X, \mathcal{F}, m; \mathbb{K})$ s'écrit $T = T_g$ avec $g \in L^q(X, \mathcal{F}, m; \mathbb{K})$ c'est à dire qu'il existe $g \in L^q(X, \mathcal{F}, m; \mathbb{K})$ telle que*

$$\forall f \in L^p(X, \mathcal{F}, m; \mathbb{K}), \;\; Tf = \int_X f \, g \, dm$$

Ainsi l'application $g \mapsto T_g$ de L^q dans $(L^p)'$ est un isomorphisme isométrique.

La question qui se pose maintenant est celle du dual de $L^\infty(X, \mathcal{F}, m; \mathbb{K})$. Pour $g \in L^1(X, \mathcal{F}, m; \mathbb{K})$, nous pouvons définir une forme linéaire T_g sur L^∞ par la même formule que précédemment $T_g(f) = \int_X f \, g \, dm$ et on voit instantanément que cette forme linéaire est continue de norme $||g||_1$. L'application $g \mapsto T_g$ de L^1 dans $(L^\infty)'$ est une isométrie injective mais NON SURJECTIVE. Pour se convaincre de ce dernier point nous allons construire une forme linéaire continue sur L^∞ qui n'est pas du type T_g. Nous souhaitons considérer l'évaluation en un point fixé. Toutefois cette application n'a pas de sens sur L^∞ puisque les éléments sont définis à modification presque partout près. Nous nous ramenons au cadre des fonctions continues en posant $F = \mathcal{C}_b(X, \mathbb{K})$. Il s'agit d'un sous-espace fermé de $(L^\infty(X, \mathcal{F}, m; \mathbb{K}), ||\cdot||_\infty)$. Nous fixons $\omega \in X$. Alors l'appliaction ϕ de F dans $\mathbb{K}$ qui, à f associe $f(\omega)$ est une forme linéaire continue puisque $|f(\omega)| \le ||f||_\infty$. Par la forme analytique du théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire continue $\tilde{\phi}$ définie sur $L^\infty(X, \mathcal{F}, m; \mathbb{K})$ qui prolonge ϕ. Supposons qu'il existe $g \in L^1$ telle que $\tilde{\phi}(f) = \int_X f\, g\, dm$ pour toute $f \in L^\infty$. Cela entrainerait que $\int_X f\, g\, dm = f(\omega)$ pour toute $f \in \mathcal{C}_b(X, \mathbb{K})$. On aurait alors $\int_X f\, g\, dm = 0$ pour toute f continue à support compact dans $X \setminus \{\omega\}$ d'où on peut en déduire $g = 0$ presque partout relativement à m. On aboutirait alors à $\tilde{\phi} = 0$ ce qui est absurde.

5.4 Convolution

Dorénavant tous les espaces L^p considérés sont relatifs à $\mathbb{R}^d$ muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. Au départ l'opération de convolution de deux fonctions f et g sur $\mathbb{R}^d$ est définie par

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\, g(y)\, dy$$

Nous verrons quelles hypothèses sur f et g assurent la bonne définition de cette “convolée” $f * g$. Nous verrons aussi des propriétés et applications de cette notion.

Proposition 64 *La fonction $f * g$ est bien définie par la formule*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\, g(y)\, dy$$

au moins dans les deux cas suivants

1. *$f \in L^p$, $g \in L^q$ avec $p, q \in [1, +\infty]$ et $(1/p)+(1/q) = 1$ alors $f*g \in L^\infty$ et $||f * g||_\infty \le ||f||_p\, ||g||_q$*
2. *$f, g \in L^1$ et dans ce cas $f * g \in L^1$ et $||f * g||_1 \le ||f||_1\, ||g||_1$*

Preuve. Le premier cas est une application directe de l'inégalité de Hölder. Pour le second, nous remarquons par le théorème de Fubini-Tonelli que

$$\int dx \left(\int |f(x-y)|\, |g(y)|\, dy \right) = \int dy\, |g(y)| \left(\int |f(x-y)|\, dx \right) = ||f||_1\, ||g||_1$$

Cela prouve en particulier que le terme entre parenthèses dans le membre de gauche est fini pour presque tout x donc que l'intégrale dans la définition de $f * g$ a un sens pour presque tout x. Ensuite le calcul ci-dessus montre que $f * g \in L^1$ et donne la majoration de $||f * g||_1$.

Proposition 65 *Sous réserve d'hypothèses assurant la bonne définition des quantités ci-dessous, on a*

$$(f * g) * h = f * (g * h), \quad f * g = g * f$$

Il suffit par exemple de supposer que f, g, h sont continues à support compact.

Proposition 66 *Si $f \in L^p$, $g \in L^q$ avec $p, q \in]1, +\infty[$ et $(1/p) + (1/q) = 1$ alors $f * g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d; \mathbb{K})$*

Preuve. On écrit

$$|f*g(x+h) - f*g(x)| = \left| \int (f(x+h-y) - f(x-y))\, g(y)\, dy \right| \leq ||\tau_h f - f||_p \, ||g||_q$$

en notant $\tau_h f(\cdot) = f(h + \cdot)$. Il suffit maintenant de voir que $\lim_{h \to 0} ||\tau_h f - f||_p = 0$. Cela sera établi à l'exercice 31.

Nous allons maintenant étudier la convolution avec un type particulier de fonctions : les approximations de l'unité. Ce sont des fonctions qui, en un certain sens, approchent la masse de Dirac en 0. Nous n'avons pas défini la convolution avec une mesure comme une masse de Dirac. Ce sera fait dans le cours sur les distributions. En fait la masse de Dirac en 0 est un élément neutre pour la convolution. La convolée d'une fonction avec une approximation de l'unité est donc proche de la fonction initiale. En revanche cette convolée est plus régulière que la fonction de départ dès que l'approximation de l'unité est elle même plus régulière. En effet la formule

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\, g(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)\, f(y)\, dy$$

montre que sous des hypothèses d'intégrabilité raisonnables, $f * g$ est aussi régulière que f ou que g donc autant que la plus régulière des deux. Il suffit d'appliquer les théorèmes de dérivation sous le signe somme vus dans le cours d'intégration. Ainsi convoler implique bien souvent une régularisation.

Revenons aux approximations de l'unité. On dit qu'une suite (ϕ_n) d'applications de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ est une *approximation de l'unité* si

1. $\forall n,\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ \phi_n(x) \geq 0$
2. $\forall n,\ \int \phi_n = 1$
3. $\forall \delta > 0,\ \lim_{n \to +\infty} \int_{B(0,\delta)^c} \phi_n = 0$

Un exemple peut être obtenu en choisissant une application ϕ positive et d'intégrale 1 et en posant $\phi_n = n^d\,\phi(n\cdot)$.

Proposition 67 *Soit (ϕ_n) une suite d'applications de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ qui est une approximation de l'unité.*

Si $f \in L^p$ alors $f * \phi_n \xrightarrow{L^p} f$.

Si f est uniformément continue et bornée alors $f * \phi_n$ tend vers f uniformément sur $\mathbb{R}$.

Preuve. On utilise d'abord le fait que ϕ_n est d'intégrale 1 pour écrire

$$\begin{aligned}
|f * \phi_n(x) - f(x)| &= \left|\int (f(x-y) - f(x))\,\phi_n(y)\,dy\right| \\
&\leq \int |f(x-y) - f(x)|\,\phi_n(y)\,dy \\
&\leq \left(\int |f(x-y) - f(x)|^p\,\phi_n(y)\,dy\right)^{1/p}
\end{aligned}$$

La dernière inégalité résulte de l'inégalité de Hölder appliquée relativement à la mesure $\phi_n(y)\,dy$. Alternativement cela peut aussi être vu comme une application de l'inégalité de Jensen. En passant à la puissance p puis en intégrant en x on obtient

$$\begin{aligned}
\|f * \phi_n - f\|_p^p &\leq \int \|f - \tau_y f\|_p^p\,\phi_n(y)\,dy \\
&\leq \sup_{|y|\leq\delta} \|f - \tau_y f\|_p^p \int_{B(0,\delta)} \phi_n(y)\,dy + (2\,\|f\|_p)^p \int_{B(0,\delta)^C} \phi_n(y)\,dy \\
&\leq \sup_{|y|\leq\delta} \|f - \tau_y f\|_p^p + (2\,\|f\|_p)^p \int_{B(0,\delta)^C} \phi_n(y)\,dy
\end{aligned}$$

Ce qui précède est vrai pour $\delta > 0$ quelconque. Nous avons utilisé la majoration évidente : $\|f - \tau_y f\|_p \leq \|f\|_p + \|\tau_y f\|_p \leq 2\,\|f\|_p$ puisque $\|\tau_y f\|_p = \|f\|_p$. Pour montrer ensuite qu'étant donné $\varepsilon > 0$ on a $\|f * \phi_n - f\|_p \leq \varepsilon$ pour n suffisamment grand on utilise un raisonnement à "double détente" classique. On choisit d'abord δ suffisamment petit pour que

$$\sup_{|y|\leq\delta} \|f - \tau_y f\|_p^p \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ce qui est possible compte tenu de l'exercice 31. Ce δ étant fixé la quantité

$$(2\,\|f\|_p)^p \int_{B(0,\delta)^C} \phi_n(y)\,dy$$

peut être rendue inférieure à $\varepsilon/2$ pour n suffisamment grand puisque cette quantité tend vers 0 selon les hypothèses.

Passons au cas où f est uniformément continue et bornée. On utilise maintenant la majoration

$$\begin{aligned}|f*\phi_n(x)-f(x)| &= \int |f(x-y)-f(x)|\,\phi_n(y)\,dy \\ &\leq \sup_{|y|\leq\delta,\,x\in\mathbb{R}} |f(x)-\tau_y f(x)| + 2\,||f||_\infty \int_{B(0,\delta)^C} \phi_n(y)\,dy\end{aligned}$$

Ensuite l'uniforme continuité de f montre que

$$\sup_{|y|\leq\delta,\,x\in\mathbb{R}} |f(x)-\tau_y f(x)| \xrightarrow{\delta\downarrow 0} 0$$

On conclut alors sans difficluté.

Théorème 68 (Inégalité de Young) *Soit $p,q\in[1,+\infty]$ tels que $(1/p)+(1/q)\geq 1$, $f\in L^p$, $g\in L^q$.*

Alors pour presque tout x l'application $y\mapsto f(x-y)\,g(y)$ est intégrable donc $f*g(x)=\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\,g(y)\,dy$ est définie presque partout et pour r défini par $(1/r)=(1/p)+(1/q)-1$, on a $f*g\in L^r$ et $||f*g||_r\leq||f||_p||g||_q$

5.5 Exercices

Exercice 30 Dans cet exercice on fixe un espace mesuré $(X,\mathcal{F},m)$ et on note L^p pour $L^p(X,\mathcal{F},m;\mathbb{K})$.
1) Soit $p,q,r\in[1,+\infty[$ tels que $(1/r)=(1/p)+(1/q)$. Démontrer que si $f\in L^p$ et $g\in L^q$ alors $fg\in L^r$ et $||fg||_r\leq||f||_p\,||g||_q$.
2) Pour f application mesurable de X dans $\mathbb{K}$, montrer que

$$J=\left\{p\in[1,+\infty[;\ 0<\int |f|^p\,dm<+\infty\right\}$$

est un intervalle (éventuellement vide).
Indication : si $r\in]p,q[$ et $f\in L^p\cap L^q$, introduire $x\in]0,1[$ tel que $(1/r)=(x/p)+(1-x)/q$ et utiliser la question précédente.
3) Dans le cas où $X=\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. Pour $p\in[1,+\infty[$, déterminer un élément de L^p qui n'appartient à aucun L^s pour $s\in[1,+\infty[\setminus\{p\}$.
4) Pour $s\in[1,+\infty[$, prouver que

$$L^s\cap L^\infty\subset\bigcap_{p\geq s}L^p$$

5) Pour $f \in L^s \cap L^\infty$, montrer que

$$\lim_{p \to +\infty} ||f||_p = ||f||_\infty$$

Indication. Concernant la liminf, on pourra prouver puis utiliser l'inégalité

$$\int |f|^p \, dm \geq A^p \, m(\{|f| \geq A\})$$

Exercice 31 1) Pour $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ et $p \in [1,+\infty]$, montrer que $\lim_{h\to 0} ||\tau_h f - f||_p = 0$ où on rappelle que $\tau_h f(\cdot) = f(h+\cdot)$.
2) Prouver maintenant que si $f \in L^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ avec $p \in [1,+\infty[$, alors on a encore $\lim_{h\to 0} ||\tau_h f - f||_p = 0$.
Indication : on utilisera un argument de densité.
3) Le résultat précédent est il encore vrai dans le cas $p = \infty$?

Exercice 32 (Exemple d'opérateur) Pour le moment f désigne une application borélienne positive de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On pose

$$Tf(x) = \int_0^{+\infty} \frac{f(y)}{x+y} \, dy \tag{5.1}$$

1) Soit $p \in]1,+\infty[$ et q son exposant conjugué c'est à dire $(1/p)+(1/q) = 1$. Montrer que

$$Tf(x) \leq \left(\int_0^{+\infty} \frac{f^p(y)}{x+y} \left(\frac{y}{x}\right)^{1/q} dy \right)^{1/p} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+y} \left(\frac{x}{y}\right)^{1/p} dy \right)^{1/q}$$

2) Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+y} \left(\frac{x}{y}\right)^{1/p} dy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t} t^{-1/p} \, dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x+y} \left(\frac{y}{x}\right)^{1/q} dx$$

3) Montrer alors que, toujours pour f borélienne positive,

$$\left(\int_0^{+\infty} |Tf(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_0^{+\infty} \frac{t^{-1/p}}{1+t} \, dt \right) \left(\int_0^{+\infty} f^p(x) \, dx \right)^{1/p}$$

4) Montrer que la formule 5.1 a un sens pour $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ et que l'opérateur ainsi défini est une application linéaire de $L^p(\mathbb{R}_+)$ dans $L^p(\mathbb{R}_+)$ continue avec de plus

$$||T|| \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t} t^{-1/p} \, dt$$

5) On pose

$$f_\varepsilon(x) = \mathbf{1}_{\{x\geq 1\}}\, x^{-\frac{1+\varepsilon}{p}} \text{ et } g_\varepsilon(x) = \mathbf{1}_{\{x\geq 1\}}\, x^{-\frac{1+\varepsilon}{q}}$$

Montrer que, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a

$$\int_0^{+\infty} Tf_\varepsilon(x)\, g_\varepsilon(x)\, dx \geq \left(\int_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{1+\varepsilon}{p}}}{1+t}\, dt - 2\, q^2\, \varepsilon \right)\, ||f_\varepsilon||_p\, ||g_\varepsilon||_q$$

6) En déduire que

$$||T|| = \int_0^{+\infty} \frac{t^{-1/p}}{1+t}\, dt = \frac{\pi}{\sin(\pi/p)}$$

Exercice 33 Soit $p \in]1, +\infty[$. On notera q l'exposant conjugué. A f fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ on associe la fonction $\hat{f}$ définie par $\hat{f}(x) = e^{x/p}\, f(e^x)$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ et $x > 0$, on pose

$$Tf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt$$

1) Démontrer que

$$f \in L^p(\mathbb{R}_+) \Leftrightarrow \hat{f} \in L^p(\mathbb{R}) \text{ et alors } ||f||_{L^p(\mathbb{R}_+)} = ||\hat{f}||_{L^p(\mathbb{R})}$$

2) Montrer que, pour $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$,

$$\widehat{Tf} = \hat{f} * g \text{ où } g(x) = e^{-x/q}\, \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

3) En déduire que T définit un opérateur linéaire continu de $L^p(\mathbb{R}_+)$ dans lui-même de norme inférieure où égale à q.
4) En utilisant les fonctions $f_n(x) = (nx)^{-1/p}\, \mathbf{1}_{[1,e^n]}(x)$, déterminer la valeur de la norme de T.

Exercice 34 Soit A et B deux parties mesurables bornées de $\mathbb{R}$ et de mesure de Lebesgue strictement positive, Montrer que $A + B = \{a + b;\ \ a \in A,\ b \in B\}$ est d'intérieur non vide.
Indication : Etudier $\mathbf{1}_A * \mathbf{1}_B$.

Exercice 35 Pour f application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ périodique de période 2π on note

$$\omega(f, \eta) = \sup_{|x-y|\leq\eta} |f(x) - f(y)|$$

1) A quelle condition sur $\omega(f,\cdot)$ la fonction f est elle continue ?

On note désormais $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ 2π-périodiques. Comme d'habitude $||\cdot||_\infty$ désigne la norme uniforme, calculée ici sur un intervalle de longueur 2π.

2) Montrer que pour $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}),\ \eta,\lambda \in]0,+\infty[$

$$\omega(f,\lambda\,\eta) \leq (1+\lambda)\ \omega(f,\eta)$$

On définit le noyau de Jackson comme étant la fonction

$$J_n(x) = \frac{1}{\alpha_n}\left(\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\,x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^4$$

où la constante α_n est choisie telle que l'intégrale de J_n vaut 1 sur tout intervalle de longueur 2π. On pose alors pour $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$

$$f * J_n(x) = \int_T f(x-s)\ J_n(s)\ ds$$

où T est un intervalle quelconque de longueur 2π.

3) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|f * J_n(x) - f(x)| \leq 2\ \int_0^\pi (1+nt)\ J_n(t)\ \omega(f,\frac{1}{n})\ dt$$

4) Prouver que

$$\int_0^\pi t\,J_n(t)\ dt = O(1/n)$$

Indication : on pourra d'abord prouver que α_n est minoré en n^3. On rappelle que

$$\forall u \in [0,\pi/2],\ \ \frac{2}{\pi}\ u \leq \sin u \leq u$$

On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n c'est à dire l'ensemble des applications de la forme

$$x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k\ e^{ikx}$$

où $\alpha_{-n},\ldots,\alpha_n$ sont des constantes complexes.

5) Montrer que J_n est un polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à $4n$.

Indication : on pourra calculer au préalable $\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$.

6) En déduire que $J_n * f \in \mathcal{P}_{4n}$.
7) Montrer qu'il existe une constante C telle que

$$\forall f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}),\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \inf_{q \in \mathcal{P}_n} ||f - q||_\infty \leq C\, \omega(f, 1/n)$$

8) Déduire du théorème précédent la possibilité d'écrire toute fonction périodique comme limite uniforme de polynômes trigonométriques.
9) Que peut on déduire de 7) concernant l'approximation par des polynômes d'une fonction continue définie sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$, à valeurs complexes ou réelles.

Chapitre 6

Espaces de Hilbert

6.1 Définition

On traitera simultanément le cas réel $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et le cas complexe $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Un *espace préhilbertien* est un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ muni d'un produit scalaire c'est à dire d'une application $(x, y) \mapsto (x|y)$ de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$ qui est

1. linéaire par rapport à la première variable : $\forall y \in E, \quad x \mapsto (x|y)$ est linéaire
2. pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, symétrique : $\forall x, y \in E, \quad (x|y) = (y|x)$
   pour
3. pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, à symétrie hermitienne : $\forall x, y \in E, \quad (x|y) = \overline{(y|x)}$
4. définie positive : $\forall x \neq 0, \quad (x|x) > 0$

Les deux premières propriétés entrainent une propriété par rapport à la seconde variable. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ c'est la linéarité : $\forall x, y, y' \in E, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(x|\alpha y + \beta y') = \alpha(x|y) + \beta(x|y')$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ c'est l'anti-linéarité : $\forall x, y, y' \in E, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $(x|\alpha y + \beta y') = \overline{\alpha}(x|y) + \overline{\beta}(x|y')$

Exemples.

1. $E = \mathbb{R}^d$, $(x|y) = \sum_{i=1}^d x_i \, y_i$ pour $x = (x_1, \ldots, x_d)$ et $y = (y_1, \ldots, y_d)$ qu'on appelle stucture euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^d$.
2. $E = \mathbb{C}^d$, $(x|y) = \sum_{i=1}^d x_i \, \overline{y_i}$ pour $x = (x_1, \ldots, x_d)$ et $y = (y_1, \ldots, y_d)$ qu'on appelle stucture hermitienne canonique sur $\mathbb{C}^d$.

Proposition 69 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

$$\forall x, y \in E, \quad |(x|y)| \leq \sqrt{(x|x)} \ \sqrt{(y|y)}$$

Proposition 70 *L'application* $x \mapsto ||x|| = \sqrt{(x|x)}$ *réalise une norme sur* E*.*

En effet on déduit de l'inégalite de Cauchy-Schwarz l'*inégalité de Minkovski* qui affirme que $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ pour tous $x, y \in E$. En d'autre terme l'application $x \mapsto ||x||$ vérifie l'inégalité triangulaire . Il est ensuite immédiat de voir que les deux autres propriétés requises pour être une norme sont vérifiées.

Proposition 71 (Identité de polarisation) *Pour* $x, y \in E$*,*

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2\ Re(x|y)$$

Cette identité est vraie pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *(dans ce dernier cas la partie réelle est inutile).*

Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *on signale en outre que, pour* $x, y \in E$*,*

$$||x + i\,y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2\ Im(x|y)$$

Proposition 72 (Identité du parallélogramme) *Pour* $x, y \in E$*,*

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| + \left\|\frac{x-y}{2}\right\| = \frac{||x||^2 + ||y||^2}{2}$$

L'intérêt principal de la structure d'espace préhilbertien est de disposer de la notion géométrique d'orthogonalité. On dit que deux vecteurs x et y de E sont *orthogonaux* si $(x|y) = 0$. On définit l'orthogonal d'une partie A de E comme l'ensemble des vecteurs qui sont orthogonaux à tout élément de A : $A^\perp = \{x \in E;\ \ \forall a \in A,\ \ (x|a) = 0\}$. On voit facilement qu'il s'agit d'un sous-epace vectoriel fermé de E. Egalement

$$A^\perp = \left(\overline{\mathrm{Vect}(A)}\right)^\perp$$

On dit que deux sous-espaces F et G de E sont orthogonaux si tout vecteur de l'un est orthogonal à tout vecteur de l'autre c'est à dire

$$(\forall f \in F,\ \forall g \in G,\ \ (f|g) = 0) \Leftrightarrow G \subset F^\perp \Leftrightarrow F \subset G^\perp$$

On dit que l'espace préhilbertien $(E, ||\cdot||)$ est un *espace de Hilbert* si il est complet.

Exemple fondamental. Soit $(X, \mathcal{F}, m)$ un espace mesuré. $L^2(X, \mathcal{F}, m; \mathbb{K})$ est un espace de Hilbert, comme il a été prouvé au chapitre précédent.

Bien sûr $\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^d$ et plus généralement tout espace préhilbertien de dimension finie sont des espaces de Hilbert puisque tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

6.2 Théorème de projection, décomposition orthogonale

Théorème 73 *Dans E espace de Hilbert, soit C un convexe fermé non vide. Alors pour tout $x \in E$ il existe un unique $y \in C$ tel que $||x-y|| = \inf_{v \in C} ||x-v||$. Dénotons ce point $p_C(x)$. Il est caractérisé comme étant l'unique y tel que*

$$y \in C\ ; \quad \forall z \in C, \;\; Re(x-y|z-y) \leq 0$$

De plus l'application $x \mapsto p_C(x)$ est lipschitzienne de rapport 1.

Preuve. Cf [HL] p.91

Un cas particulièrement intéressant est celui où C est un sous-espace vectoriel.

Proposition 74 *Soit F un sous-espace vectoriel fermé de E. Alors $y = p_F(x)$ est caractérisé par*

$$y \in F \text{ et } \forall z \in F, \;\; (x-y|z) = 0$$

c'est à dire $y \in F$ et $x - y \in F^{\perp}$. L'application p_F est appelée projection orthogonale *sur F.*

Corollaire 75 *Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a $E = \overline{F} \oplus F^{\perp}$.*

Corollaire 76 *Un sous-espace vectoriel F de E est dense si et seulement si $F^{\perp} = \{0\}$.*

Corollaire 77 *Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a $F^{\perp\perp} = \overline{F}$.*

6.3 Dual d'un espace de Hilbert

Dans un espace de Hilbert la représentation du dual topologique est très simple. Un exemple de forme linéaire continue qui vient tout de suite à l'esprit est le produit scalaire avec un vecteur v fixé c'est à dire l'application $\phi_v : \;\; x \mapsto (x|v)$. Cette application est continue par l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\phi_v(x)| \leq ||v||\,||x||$ ce qui montre en plus que $||\phi_v|| \leq ||v||$ et en fait $||\phi_v|| = ||v||$ en prenant $x = v$. L'application $v \mapsto \phi_v$ de l'espace de Hilbert E dans son dual (topologique) E^* est clairement linéaire dans la cas réel $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et anti-linéaire dans le cas complexe $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et, d'aprés le calcul de norme précédent, une isométrie. En particulier elle est injective. Le théorème qui suit montre qu'elle est surjective et ainsi qu'elle réalise un isomorphisme [anti-isomorphisme si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$] isométrique de E sur son dual E^*.

Théorème 78 (Riesz-Fréchet) *Pour toute forme linéaire φ continue sur l'espace de Hilbert E, il existe un unique $v \in E$ tel que $\forall x \in E, \varphi(x) = (x|v)$.*

Preuve. Compte tenu des remarques précédentes nous allons seulement montrer l'existence de v. Nous supposons $\varphi \neq 0$. Puisque φ est continue $\ker \varphi$ est un sous-espace vectoriel fermé de E et on peut écrire

$$E = \ker \varphi \oplus (\ker \varphi)^{\perp}$$

Prenons $e \in (\ker \varphi)^{\perp}$ de norme 1. On constate que, pour $x \in E$, $\tilde{x} = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(e)} e \in \ker \varphi$ ce qui signifie que la décomposition de x selon $E = \ker \varphi \oplus (\ker \varphi)^{\perp}$ est $x = \tilde{x} + \frac{\varphi(x)}{\varphi(e)} e$. Alors

$$(x|e) = (\tilde{x}|e) + \frac{\varphi(x)}{\varphi(e)}(e|e) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(e)}$$

On en déduit que $\varphi(x) = \varphi(e)\ (x|e) = (x|\overline{\varphi(e)}\ e)$, ceci étant vrai pour tout $x \in E$ ce qui prouve le résultat avec $v = \overline{\varphi(e)}\ e$.

6.4 Opérateurs linéaires

Nous noterons $L(E)$ l'ensemble des applications linéaires continues de l'espace de Hilbert E dans lui-même.

Proposition 79 *Pour $T \in L(E)$, il existe un unique opérateur continu $T^* \in L(E)$ tel que*

$$\forall x, y \in E, \ \ (Tx|y) = (x|T^*y)$$

Il est appelé adjoint *de T. De plus $||T|| = ||T^*||$.*

Preuve. Pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto (Tx|y)$ est une forme linéaire continue sur E donc il existe un unique élément de E que l'on note T^*y tel que pour tout $x \in E$, $(Tx|y) = (x|T^*y)$. La linéarité de l'application $y \mapsto T^*y$ est facile à établir. De plus par un calcul fait au paragraphe précédent, $||T^*y||$ est égale à la norme de la forme linéaire $x \mapsto (x|T^*y)$ c'est à dire de la forme linéaire $x \mapsto (Tx|y)$ qui est clairement inférieure à $||y||\ ||T||$ comme le montre l'application successive de Cauchy-Schwarz et de la définition de $||T||$. On a donc $||T^*y|| \leq ||T||\ ||y||$ ce qui prouve que l'opérateur linéaire T^* vérifie $||T^*|| \leq ||T||$. Ecrivons maintenant, pour $x \neq 0$,

$$||Tx||^2 = (Tx|Tx) = (x|T^*Tx) \leq ||x||\ ||T^*||\ ||Tx||$$

ce qui donne après simplification, $||T^*|| \geq ||Tx||/||x||$. En passant au sup sur $x \neq 0$ on trouve $||T^*|| \geq ||T||$ et donc au total $||T|| = ||T^*||$ ce qui achève la preuve.

Proposition 80 *L'application $T \mapsto T^*$ de $L(E)$ dans lui-même est linéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et anti-linéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et c'est une isométrie involutive $T^{**} = T$. On notera que $I^* = I$ et $(TS)^* = S^* T^*$.*

La preuve est facile.

Exemple 1. Si E est de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base orthonormale (cf le cours d'algèbre bilinéaire ou plus loin dans ce chapitre pour cette notion) alors dans la base $\mathcal{B}$ la matrice de l'adjoint T^* s'obtient en fonction de la matrice de T comme étant la trans-conjuguée.

Exemple 2. Soit $(X, \mathcal{F}, m;)$ un espace mesuré σ-fini, $E = L^2(X, \mathcal{F}, m; \mathbb{K})$. Il est facile de vérifier qu'on définit un opérateur continu T de E dans E par

$$Tf(x) = \int_X K(x, y)\, f(y)\, dy$$

où K est une application de $E \times E$ dans K de carré intégrable sur $E \times E$ par rapport à la mesure $m \otimes m$. On appelle T opérateur de noyau K. On pourra vérifier que dans ce cas l'adjoint est donné par

$$T^* g(y) = \int_X \overline{K(x, y)}\, g(x)\, dx$$

On dit que l'opérateur T de E dans E est *auto-adjoint* si $T = T^*$. On dit aussi *symétrique* si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et *hermitien* si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Exemples. Pour $T \in L(E)$, TT^* et T^*T sont auto-adjoints. On peut reprendre aussi l'exemple de l'opérateur à noyau K tel que $\forall x, y,\ \overline{K(x, y)} = K(y, x)$. On peut citer aussi les projecteurs orthogonaux p_F avec F sev fermé ou symétries orthogonales $p_F - p_{F^\perp}$.

6.5 Bases hilbertiennes

Plaçons nous comme d'habitude sur un espace de Hilbert E. On dit qu'une famille $(f_i,\ i \in I)$ de vecteurs de E est *orthonormale* ou orthonormée si $(f_i, f_j) = \mathbf{1}_{\{i=j\}}$. On voit facilement qu'une telle famille est libre.

Proposition 81 *Soit F un sous-espace de dimension finie ayant pour base orthonormale $(e_i,\ i \in J)$ (J finie) alors la projection orthogonale $p_F(x)$ sur F de $x \in E$ est donnée par*

$$p_F(x) = \sum_{i \in J} (x|e_i)\ e_i$$

En effet il est évident que la formule ci-dessus donne $p_F(x) \in F$ et on vérifie que $x - p_F(x)$ est orthogonal à tout $e_j,\ j \in J$ donc appartient à $F^{\perp}$.

En appliquant le théorème de Pythagore on obtient

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2 \\ &= \left\| x - \sum_{i \in J} (x|e_i)\ e_i \right\|^2 + \sum_{i \in J} |(x|e_i)|^2 \\ &\geq \sum_{i \in J} |(x|e_i)|^2 \end{aligned}$$

Proposition 82 (Inégalité de Bessel) *Pour toute famille orthonormale $(f_i,\ i \in I)$ de E,*

$$\sum_{i \in I} |(x|f_i)|^2 \leq \|x\|^2$$

En effet, pour toute partie J *finie* de I, c'est l'inégalité obtenue ci-dessus et il suffit ensuite de passer au sup sur les $J \subset I$.

On appelle *base hibertienne* de E une famille $(e_i,\ i \in I)$ de E avec I dénombrable qui est *orthonormale* et *totale* ce qui signifie que $\mathrm{Adh}[\mathrm{Vect}(e_i,\ i \in I)] = E$.

Théorème 83 (Bessel-Parseval) *Pour toute famille orthonormale $(e_i,\ i \in I)$ de E, les trois assertions suivantes sont équivalentes*

1. *$(e_i,\ i \in I)$ est une base hilbertienne de E*
2. *$\forall x \in E,\ \ \|x\|^2 = \sum_{i \in I} |(x|e_i)|^2$ (Égalité de Bessel)*
3. *$\forall x, y \in E,\ \ (x|y) = \sum_{i \in I} (x|e_i)\ (e_i|y)$*

Preuve. L'équivalence des deux dernières formulations est claire. Plaçons nous dorénavant dans le cas $I = \mathbb{N}$; le cas de la dimension finie étant trivial. La famille orthonormale $(e_i,\ i \in \mathbb{N})$ est une base hilbertienne ssi $\bigcup_N \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_N)$ est dense dans E ce qui équivaut à

$$\lim_{N \to +\infty} \left\| x - p_{\mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_N)}(x) \right\| = 0$$

Mais on a vu dans la preuve de l'inégalité de Bessel que

$$||x||^2 = \left\| x - p_{\mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_N)}(x) \right\|^2 + \sum_{i=1}^{N} |(x|e_i)|^2$$

La condition de limite ci-dessus équivaut donc bien à

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{i=1}^{N} |(x|e_i)|^2 = ||x||^2$$

ce qui achève la preuve.

Exemples. Dans l^2 espace de suites de carré sommable, muni du produit scalaire $(x|y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x(n)\ \overline{y(n)}$ la famille $(\mathbf{1}_{\{i\}}, i \in I)$ est une base hilbertienne.

Dans $L^2(]a, b[, \mathbb{C})$, une base hilbertienne $(e_k,\ k \in \mathbb{Z})$ est donnée par

$$e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}}\ e^{i\,k\,\frac{2\pi}{b-a}\ x}$$

Le *procédé de Gram-Schmidt* permet, à partir d'une famille libre $(u_k,\ k \in \mathbb{N}^*)$ de vecteurs de E, de construire une famille orthonormale $(f_k,\ k \in \mathbb{N}^*)$ qui a la propriété que

$$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \ \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_N) = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_N)$$

Cette famille se construit par récurrence en posant $f_1 = \frac{1}{||u_1||}\, u_1$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$f_{k+1} = \frac{u_{k+1} - p_{\mathrm{Vect}(f_1,\ldots,f_k)}(u_{k+1})}{\left\| u_{k+1} - p_{\mathrm{Vect}(f_1,\ldots,f_k)}(u_{k+1}) \right\|}$$

Théorème 84 *Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne.*

Preuve. Partant d'une suite dense on peut extraire une famille libre et totale. Puis on applique le procédé de Gram-Schmidt.