Algèbre homologique

Notes de cours
Master 2 Mathématiques 2013-2014

Julien Bichon et Rachel Taillefer
Département de Mathématiques
Université Blaise Pascal
Julien.Bichon@math.univ-bpclermont.fr,
Rachel.Taillefer@math.univ-bpclermont.fr

Les pages qui suivent constituent les notes de cours “Algèbre homologique” du Master 2 Mathématiques. Bien sûr, il est probable que des coquilles ou erreurs se sont glissées dans ce document, merci de me les signaler !

Voici quelques références utiles.

• P.J. Hilton, U. Stammbach, A course in homological algebra, Springer, 1971.

• J.M. Lee, Introduction to topological manifolds, Springer, 2000.

• T. tom Dieck, Algebraic topology, EMS Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008.

Table des matières

I Le language des catégories et foncteurs

Ce chapitre est une brève introduction au langage des catégories et des foncteurs, utile dans toutes les branches des mathématiques. On introduit seulement les notions minimales pour nos besoins.

A. Catégories

Définition A.1. *Une **catégorie** $\mathcal{C}$ est la donnée*

1. *d'une classe* $\mathrm{ob}(\mathcal{C})$ *d'**objets** de* $\mathcal{C}$ *;*
2. *pour tout couple (X, Y) d'objets de $\mathcal{C}$ d'un ensemble noté $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ dont les éléments sont appelés **morphismes** de X dans Y de $\mathcal{C}$ (avec la notation $f : X \longrightarrow Y$ pour $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$) ;*
3. *pour tout triplet (X, Y, Z) d'objets de $\mathcal{C}$, d'une application*

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ (f, g) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

   *appelée **composition** des morphismes, qui est associative, et telle que pour tout objet X de $\mathcal{C}$, il existe un élément $1_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$, appelé identité de X (noté parfois aussi id_X), tel que $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, on a $f \circ 1_X = f$ et $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$, on a $1_X \circ f = f$.*

Exemples A.2. (a) Ens : la catégorie des ensembles. Les morphismes sont les applications, la composition est la composition des applications.
(b) Grp : la catégorie des groupes. Les morphismes sont les morphismes de groupes.
(c) Top : la catégorie des espaces topologiques. Les morphismes sont les applications continues.
(d) $\mathsf{Mod}(A)$, la catégorie des A-modules à gauche, A étant un anneau. Les morphismes sont les applications linéaires.
(e) Soit G un groupe. On construit une catégorie $\mathcal{C}(G)$ de la manière suivante : $\mathrm{ob}(\mathcal{C}(G)) = \{*\}$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(*, *) = G$. La composition est le produit dans G.

Remarque A.3. On désigne souvent une catégorie par le nom de ses objets. En fait l'essentiel de l'information est contenue dans les morphismes (voir le dernier exemple).

Définition A.4. *Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite **petite** si $\mathrm{ob}(\mathcal{C})$ est un ensemble.*

Exemple A.5. Ens n'est pas une petite catégorie.

Définition A.6. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On appelle **catégorie opposée** de $\mathcal{C}$ la catégorie, notée $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, dont les objets sont les mêmes que ceux de $\mathcal{C}$ et telle que si X, Y sont des objets de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$.*

Définition A.7. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Une **sous-catégorie** $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ est la donnée d'une sous-classe $\mathrm{ob}(\mathcal{C}')$ de $\mathrm{ob}(\mathcal{C})$ d'objets de $\mathcal{C}'$, et pour tous objets X, Y de $\mathcal{C}'$ d'un sous-ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y)$ de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, tels que*
• si X est un objet de $\mathcal{C}'$, on a $1_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, X)$;
• si X, Y, Z sont des objets de $\mathcal{C}'$ et si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(Y, Z)$, on a $g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Z)$
*Une sous-catégorie $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ est dite **pleine** si pour tous objets X, Y de $\mathcal{C}'$, on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$*

Une sous-catégorie est elle-même, pour la composition induite, une catégorie.

Exemples A.8. (a) Soit k un corps commutatif. La catégorie $\mathsf{Vect}_f(k)$ des k-espaces vectoriels de dimension finie est une sous-catégorie pleine de la catégorie des k-espaces vectoriels $\mathsf{Vect}(k) = \mathsf{Mod}(k)$.
(b) Ab, la catégorie des groupes abéliens, est une sous-catégorie pleine de Grp.

Définition A.9. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et X un objet de $\mathcal{C}$. On dit que X est un **objet initial** (resp. **objet final**) de $\mathcal{C}$ si pour tout objet A de $\mathcal{C}$ l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A)$ (resp. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$) est réduit à un élément.*

Exemples A.10. (a) Le groupe trivial à un élément est un objet initial et final de Grp.
(b) $\mathbb{Z}$ est un objet initial dans Ann, la catégorie des anneaux, alors que l'anneau nul est un objet final.
(c) Un objet initial (resp. final) de $\mathcal{C}$ est un objet final (resp. initial) de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.

Définition A.11. *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. On dit que f est un*
*(a) **monomorphisme** si $\forall g, h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$, on a*

$$f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$$

*(b) **épimorphisme** si $\forall g, h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, on a*

$$g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$$

*(c) **isomorphisme** s'il existe $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ tel que $f \circ g = 1_Y$ et $g \circ f = 1_X$.*

Exemples A.12. (a) Dans Ens ou $\mathsf{Mod}(A)$: monomorphisme = morphisme injectif, épimorphisme = morphisme surjectif, isomorphisme = morphisme bijectif = monomorphisme + épimorphisme.

(b) Un isomorphisme est un monomorphisme et un épimorphisme. La réciproque n'est pas vrai : dans Ann, l'inclusion $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ est un monomorphisme et un épimorphisme, mais pas un isomorphisme.
(c) Un objet initial (resp. final) d'une catégorie est, s'il existe, unique à isomorphisme près. (En effet : Soient X et Y des objets initiaux d'une catégorie $\mathcal{C}$, et soient f, g les uniques morphismes respectifs de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$. Alors on a $f \circ g = 1_Y$ et $g \circ f = 1_X$ car $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Y)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$ sont réduits à un élément. La preuve pour les objets finaux est identique.)

B. Foncteurs

Définition B.1. *Un **foncteur** (covariant) F d'une catégorie $\mathcal{C}$ vers une catégorie $\mathcal{C}'$, $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$, est la donnée*
(a) Pour tout objet X de $\mathcal{C}$ d'un objet $F(X)$ de $\mathcal{C}$.
(b) Pour tout couple d'objets (X,Y) de $\mathcal{C}$ et tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, d'un $F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X),F(Y))$ tel que
• pour tout objet X de $\mathcal{C}$, on a $F(1_X) = 1_{F(X)}$;
• $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, $\forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$, on a $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Exemples B.2. (a) Le foncteur identité $1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$, $X \longmapsto X$, $f \longmapsto f$.
(b) Le foncteur oubli Grp $\longrightarrow$ Ens, qui à un groupe associe l'ensemble sous-jacent.
(c) Le foncteur Ann $\longrightarrow$ Grp qui associe à un anneau le groupe de ses éléments inversibles.
(d) Le foncteur Grp $\longrightarrow$ Ab qui à un groupe G associe son abélianisé $G/[G,G]$.
(e) Soit X un objet d'une catégorie $\mathcal{C}$. Alors $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-)$ est un foncteur de $\mathcal{C}$ dans Ens avec pour $f : Y \longrightarrow Z$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-)(f) = f \circ - : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)\\ u &\longmapsto f \circ u\end{aligned}$$

Si $\mathcal{C} = \mathsf{Mod}(A)$, le foncteur $\mathrm{Hom}_A(X,-)$ est un foncteur $\mathsf{Mod}(A) \longrightarrow$ Ab.
(f) Si $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ et $G : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}''$ sont des foncteurs, on définit le foncteur composé $G \circ F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}''$ par $G \circ F(X) = G(F(X))$ pour tout objet X de $\mathcal{C}$, et $G \circ F(f) = G(F(f))$ pour tout morphisme f de $\mathcal{C}$.
(g) Si X est un espace topologique, on note $\pi_0(X)$ l'ensemble des composantes connexes par arcs de X. On vérifie sans difficulté que si $f : X \to Y$ est une application continue, alors f induit une application $\pi_0(X) \to \pi_0(Y)$. On obtient ainsi un foncteur π_0 : Top $\longrightarrow$ Ens.
(h) Pour un anneau A, le foncteur Ens $\longrightarrow \mathsf{Mod}(A)$, $X \longmapsto A^{(X)} = AX$, qui à un ensemble X associe le A-module libre de base X (AX, étant, formellement, le A-module libre des fonctions à support fini $X \to A$).

Définition B.3. *Un **foncteur contravariant** F d'une catégorie $\mathcal{C}$ vers une catégorie $\mathcal{C}'$ est un foncteur covariant $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'^{\mathrm{op}}$.*

Exemple B.4. Soit X un objet d'une catégorie $\mathcal{C}$. Alors $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$ est un foncteur contravariant de $\mathcal{C}$ dans Ens, avec pour $f : Y \longrightarrow Z$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)(f) = - \circ f : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \\ u &\longmapsto u \circ f \end{aligned}$$

Si $\mathcal{C} = \mathsf{Mod}(A)$, le foncteur $\mathrm{Hom}_A(-, X)$ est un foncteur contravariant $\mathsf{Mod}(A) \longrightarrow \mathsf{Ab}$

Le résultat suivant, très facile, est pourtant un outil important pour montrer que des objets d'une catégorie ne sont pas isomorphes.

Théorème B.5. Soient $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur, et X, Y des objets de $\mathcal{C}$. Si X et Y sont isomorphes, alors $F(X)$ et $F(Y)$ sont isomorphes.

Preuve. Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ tels que $f \circ g = 1_Y$ et $g \circ f = 1_X$. Alors $1_{F(Y)} = F(1_Y) = F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ et $1_{F(X)} = F(1_X) = F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$, donc $F(X)$ et $F(Y)$ sont isomorphes. $\square$

Exemple B.6. On retrouve ainsi le fait que si X et Y sont des espaces topologiques homéomorphes, alors les ensembles $\pi_0(X)$ et $\pi_0(Y)$ sont en bijection. On peut utiliser cela pour montrer que $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas homéomorphes (en enlevant un point à chacun des deux espaces).

Définition B.7. *Soient $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ deux foncteurs. Un* ***morphisme de foncteurs*** *(ou transformation naturelle) de F dans G, $\phi : F \longrightarrow G$, est la donnée pour chaque objet X de $\mathcal{C}$ d'un morphisme $\phi_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), G(X))$ tel que $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, on a $G(f) \circ \phi_X = \phi_Y \circ F(f)$, c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\phi_X"] \arrow[d, "F(f)"] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\phi_Y"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Un morphisme de foncteurs ϕ est un isomorphisme si ϕ_X est un isomorphisme pour tout objet X de $\mathcal{C}$.

Exemple B.8. Soient X et X' deux objets d'une catégorie $\mathcal{C}$ et soit $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X')$. Alors f induit un morphisme de foncteurs $f_* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', -) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)$ défini par

$$\begin{aligned} (f_*)_Y : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \\ u &\longmapsto u \circ f \end{aligned}$$

Le morphisme de foncteurs f_* est un isomorphisme si f est un isomorphisme.

Définition B.9. *Deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont dites*
(a) ***isomorphes*** *s'il existe des foncteurs $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ et $G : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ tels que $F \circ G = 1_{\mathcal{C}'}$ et $G \circ F = 1_{\mathcal{C}}$. On dit alors que F et G sont des isomorphismes de catégories.*
(b) ***équivalentes*** *s'il existe des foncteurs $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ et $G : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ et des isomorphismes de foncteurs $F \circ G \simeq 1_{\mathcal{C}'}$ et $G \circ F \simeq 1_{\mathcal{C}}$. On dit alors que F et G sont des équivalences de catégories. On dit alors que G est un* ***quasi-inverse*** *de F.*

Lorsque les foncteurs précédents sont contravariants, on parle d'anti-isomorphisme et d'anti-équivalence de catégories.

Le théorème à suivre est très utile pour montrer qu'un foncteur est une équivalence de catégories. On a d'abord besoin d'un peu plus de vocabulaire.

Définition B.10. *Soit $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur. On dit que F est* ***fidèle*** *(resp.* ***plein****, resp.* ***pleinement fidèle****) si pour pour tous les objets X, Y de $\mathcal{C}$ l'application*

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X),F(Y)) \\ f &\longmapsto F(f) \end{aligned}$$

est injective (resp. surjective, resp. bijective).
On dit que F est ***essentiellement surjectif*** *si pour tout objet X' de $\mathcal{C}'$ il existe un objet X de $\mathcal{C}$ tel que $F(X)$ est isomorphe à X'.*

Théorème B.11. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ des catégories et $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur. Les assertions suivantes sont équivalentes.
(a) F est une équivalence de catégories.
(b) F est essentiellement surjectif et pleinement fidèle.

Preuve. $(a) \implies (b)$ Supposons que F est une équivalence de catégories : il existe un foncteur $G : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ et des isomorphismes de foncteurs $\eta : 1_{\mathcal{C}'} \longrightarrow F \circ G$ et $\theta : G \circ F \longrightarrow 1_{\mathcal{C}}$. Pour $U \in \mathcal{C}'$, le premier ismorphisme $U \cong F(G(U))$ assure que F est essentiellement surjectif. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de $\mathcal{C}$. Alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} GF(X) \arrow[r, "\theta_X"] \arrow[d, "GF(f)"] & X \arrow[d, "f"] \\ GF(Y) \arrow[r, "\theta_Y"] & Y \end{tikzcd}$$

Ainsi si $F(f_1) = F(f_2)$, on a

$$f_1 = \theta_Y \circ GF(f_1) \circ \theta_X^{-1} = \theta_Y \circ GF(f_2) \circ \theta_X^{-1} = f_2$$

est F est fidèle. De même on montre que G est fidèle en utilsant η. Soit $g : F(X) \longrightarrow F(Y)$ un morphisme de $\mathcal{C}'$. Alors $g = F(f)$ pour $f := \theta_Y \circ G(g) \circ \theta_X^{-1}$. En effet

$$\theta_Y \circ GF(f) \circ \theta_X^{-1} = f = \theta_Y \circ G(g) \circ \theta_X^{-1}$$

et ainsi $GF(f) = G(g)$, d'où $g = F(f)$ puisque G est fidèle. Ainsi F est pleinement fidèle.

$(b) \Longrightarrow (a)$ Supposons F pleinement surjectif et essentiellement fidèle. Pour chaque objet W de $\mathcal{C}'$, choisissons un objet $G(W)$ de $\mathcal{C}$ et un isomorphisme $\eta_W : W \cong F(G(W))$. Pour $g : W \longrightarrow W'$ un morphisme de $\mathcal{C}'$, considérons

$$\eta_{W'} \circ g \circ \eta_W^{-1} : FG(W) \longrightarrow FG(W')$$

Le foncteur F étant pleinement fidèle, il existe un unique morphisme $G(g) : G(W) \longrightarrow G(W')$ tel que

$$F(G(g)) = \eta_{W'} \circ g \circ \eta_W^{-1} : FG(W) \longrightarrow FG(W')$$

Vérifions que G est un foncteur. On a $G(1_W) = 1_{G(W)}$ car $F(G(1_W)) = \eta_W \circ \eta_W^{-1} = 1_{FG(W)} = F(1_{G(W}).$ Soient $g : W \longrightarrow W'$ et $h : W' \longrightarrow Z$. Alors

$$\begin{aligned} F(G(h \circ g)) =& \eta_Z \circ h \circ g \circ \eta_W^{-1} = \eta_Z \circ h \circ \eta_{W'}^{-1} \circ \eta_{W'} \circ g \circ \eta_W^{-1} \\ =& F(G(h)) \circ F(G(g)) = F(G(h) \circ G(g)) \end{aligned}$$

ce qui donne $G(h \circ g) = G(h) \circ G(g)$ par fidélité de F. Ainsi G est un foncteur et par construction $\eta : 1_{\mathcal{C}'} \longrightarrow F \circ G$ est un isomorphisme de foncteurs. Pour un objet X de $\mathcal{C}$, on définit $\theta_X : G(F(X)) \longrightarrow X$ comme l'unique morphisme tel que $F(\theta_X) = \eta_{F(X)}^{-1}$ (F est pleinement fidèle). Les θ_X sont des isomorphismes car F est fidèle. Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de $\mathcal{C}$, pour montrer que $f \circ \theta_X = \theta_Y \circ GF(f)$, il suffit, par fidélité de F, de voir que $F(f) \circ \eta_{F(X)}^{-1} = \eta_{F(Y)}^{-1} \circ FGF(f)$, ce qui est vrai par construction de η et G. $\square$

Exemple B.12. Soit $\mathcal{C}$ la sous-catégorie pleine de $\mathsf{Vect}_f(k)$ dont les objets sont les espaces vectoriels k^n, $n \in \mathrm{N}$ (k^0 est par convention l'espace vectoriel nul). Le foncteur inclusion $\mathcal{C} \subset \mathsf{Vect}_f(k)$ est une équivalence de catégories.

Définition B.13. *Une catégorie est dite* ***essentiellement petite*** *si elle est équivalente à une petite catégorie.*

II Complexes, homologie, cohomologie

Dans ce chapitre on introduit les objets de base de l'algèbre homologique. Pour des usages futurs dans diverses situations (topologie et algèbre), les concepts et résultats généraux sont présentés ici, mais manquent probablement d'exemples concrets pour les illustrer.

A. Suites exactes de modules

On présente, dans ce court paragraphe la notion de suite exacte de modules. Dans la suite A est un anneau.

Définition A.1. *Soient $f : M \to N$ et $g : N \to P$ des morphismes de A-modules. La suite*

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$$

*est dite **exacte** en N si $\operatorname{Ker}(g) = \operatorname{Im}(f)$. Une suite de morphismes de A-modules*

$$M_0 \to M_1 \to M_2 \to \cdots \to M_n \to M_{n+1}$$

est dite exacte si elle est exacte en $M_1, \ldots, M_n$.

Par exemple :

1. La suite $0 \to M \xrightarrow{f} N$ est exacte (en M) si et seulement si f est injective.
2. La suite $M \xrightarrow{f} N \to 0$ est exacte (en N) si et seulement si f est surjective.
3. La suite $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$ est exacte si et seulement si f est injective, g est surjective et $\operatorname{Ker}(g) = \operatorname{Im}(f)$.

Le résultat suivant, qui ne sera pas utilisé dans la suite, est un bon exercice pour travailler les suites exactes et les diagrammes commutatifs.

Lemme A.2. (Le lemme des cinq) Considérons le diagramme commutatif à lignes exactes de morphismes de A-modules suivant :

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\phi_1"] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\phi_2"] & M_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\phi_3"] & M_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "\phi_4"] & M_5 \arrow[d, "\phi_5"] \\
N_1 \arrow[r, "g_1"] & N_2 \arrow[r, "g_2"] & N_3 \arrow[r, "g_3"] & N_4 \arrow[r, "g_4"] & N_5
\end{tikzcd}$$

1. Supposons ϕ_1 surjective, ϕ_2 injective, ϕ_4 injective. Alors ϕ_3 est injective.
2. Supposons ϕ_2 surjective, ϕ_4 surjective et ϕ_5 injective. Alors ϕ_3 est surjective
3. Si ϕ_2 et ϕ_4 sont des isomorphismes, ϕ_1 est surjective et ϕ_5 est injective, alors ϕ_3 est un isomorphisme.

Preuve. 1. Soit $x_3 \in M_3$ tel que $\phi_3(x_3) = 0$. Alors $g_3\phi_3(x_3) = 0 = \phi_4 f_3(x_3)$. ϕ_4 est injective donc $f_3(x_3) = 0$, et par exactitude en M_3 il existe $x_2 \in M_2$ tel que $x_3 = f_2(x_2)$. On a $0 = \phi_3(x_3) = \phi_3 f_2(x_2) = g_2\phi_2(x_2)$, donc par exactitude en N_2 il existe $y_1 \in N_1$ tel que $\phi_2(x_2) = g_1(y_1)$. Il existe, par surjectivité de ϕ_1, $x_1 \in M_1$ tel que $y_1 = \phi_1(x_1)$, et alors $g_1(y_1) = g_1\phi_1(x_1) = \phi_2 f_1(x_1) = \phi_2(x_2)$. Par injectivité de ϕ_2 on a $f_1(x_1) = x_2$, donc $x_3 = f_2(x_2) = f_2 f_1(x_1) = 0$. Donc ϕ_3 est injective.

2. Soit $y_3 \in N_3$. Par surjectivité de ϕ_4, il existe $x_4 \in M_4$ tel que $\phi_4(x_4) = g_3(y_3)$ et on a $g_4\phi_4(x_4) = 0 = \phi_5 f_4(x_4)$. Par injectivité de ϕ_5, on a $f_4(x_4) = 0$, et par exactitude en M_4 il existe $x_3 \in M_3$ tel que $f_3(x_3) = x_4$. Alors $g_3(y_3) = \phi_4(x_4) = \phi_4 f_3(x_3) = g_3\phi_3(x_3)$. Donc par exactitude en N_3, il existe $y_2 \in N_2$ tel que $y_3 - \phi_3(x_3) = g_2(y_2)$. Comme ϕ_2 est surjective il existe $x_2 \in M_2$ tel que $y_2 = \phi_2(x_2)$, d'où $y_3 - \phi_3(x_3) = g_2\phi_2(x_2) = \phi_3 f_2(x_2)$, et $y_3 = \phi_3(x_3 + f_2(x_2))$. ϕ_3 est donc surjective. La troisième assertion est la combinaison des deux premières. □

B. Complexes

On introduit maintenant les objets de base de l'algèbre homologique.

Définition B.1. *Un A-**module $\mathbb{Z}$-gradué** est une suite $M_* = (M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de A-modules. Si $M_* = (M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $N_* = (N_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont des A-modules $\mathbb{Z}$-gradués, un morphisme de A-modules $\mathbb{Z}$-gradués $M_* \to N_*$ est une suite d'applications A-linéaires $f_n : M_n \to N_n$, $n \in \mathbb{Z}$. La catégorie obtenue, notée $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}(A)$, est appelée la catégorie des A-modules $\mathbb{Z}$-gradués.*

Remarque B.2. La donnée d'un A-module $\mathbb{Z}$-gradué est équivalente à la donnée d'un A-module M muni d'une décomposition en somme directe $M = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$, où les M_n sont des sous-A-modules de M.

Définition B.3. *Soit $k \in \mathbb{Z}$. Soient $M_* = (M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $N_* = (N_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ des A-modules $\mathbb{Z}$-gradués. Une application linéaire de degré k de M_* dans N_* est une suite d'applications A-linéaires $f_n : M_n \to N_{n+k}$, $n \in \mathbb{Z}$.*

Un morphisme de A-modules $\mathbb{Z}$-gradués est donc une application linéaire de degré 0.

Définition B.4. *Un **complexe de chaînes** (ou simplement **complexe**) de A-modules est un couple $\boldsymbol{C} = (C_*, d_*)$ où C_* est un A-module $\mathbb{Z}$-gradué et $d_* : C_* \to C_*$ est une application linéaire de degré -1, appelée **différentielle** telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $d_n \circ d_{n+1} = 0$ (c'est-à-dire $\mathrm{Im}(d_{n+1}) \subset \mathrm{Ker}(d_n)$).*

$$\boldsymbol{C} : \cdots C_{n+2} \xrightarrow{d_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \cdots$$

Définition B.5. *Soit $\boldsymbol{C} = (C_*, d_*)$ un complexe de A-modules. On pose, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,*
- $Z_n(\boldsymbol{C}) = \mathrm{Ker}(d_n) \subset C_n$ *(n-cycles),*
- $B_n(\boldsymbol{C}) = \mathrm{Im}(d_{n+1}) \subset C_n$ *(n-bords)*
- $H_n(\boldsymbol{C}) = Z_n(\boldsymbol{C})/B_n(\boldsymbol{C})$. *$H_n(\boldsymbol{C})$ est appelé le **n-ième A-module d'homologie de $\boldsymbol{C}$** (le n-ième groupe d'homologie quand $A = \mathbb{Z}$).*

L'homologie d'un complexe mesure donc le défaut d'exactitude de la suite de modules sous-jacente.

Exemple B.6. Soient $f : M \to N$ et $g : N \to P$ des morphismes de A-modules tels que $g \circ f = 0$. Alors

$$\cdots 0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0 \cdots$$

est un complexe, en posant $M_n = 0$ si $n < 0$ ou $n > 2$, $M_0 = P$, $M_1 = N$, $M_2 = M$, et $d_n = 0$ si $n > 2$ ou $n \leq 0$, $d_1 = g$, $d_2 = f$. Si on note $\mathbf{C}$ ce complexe, on a $H_0(\mathbf{C}) = P/\mathrm{Im}(g)$, $H_1(\mathbf{C}) = \mathrm{Ker}(g)/\,\mathrm{Im}(f)$, $H_2(\mathbf{C}) = \mathrm{Ker}(f)$, et $H_n(\mathbf{C}) = 0$ si $n \neq 0, 1, 2$.

Exemple B.7. Soient $\mathbf{C} = (C_*, d^C)$ et $\mathbf{D} = (D_*, d^D)$ deux complexes. Leur **somme directe** $\mathbf{C} \oplus \mathbf{D}$ est le complexe dont le module $\mathbb{Z}$-gradué est $C_* \oplus D_* = (C_n \oplus D_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et donc la différentielle est $d_n^C \oplus d_n^D : C_n \oplus D_n \to C_{n-1} \oplus D_{n-1}$, $(x, y) \mapsto (d_n^C(x), d_n^D(y))$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On a alors $H_n(\mathbf{C} \oplus \mathbf{D}) \simeq H_n(\mathbf{C}) \oplus H_n(\mathbf{D})$ pour tout n.

Définition B.8. *Soient $\mathbf{C} = (C_*, d^C)$ et $\mathbf{D} = (D_*, d^D)$ deux complexes. Un **morphisme de complexes** $f : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ est une application linéaire de degré 0 qui commute aux différentielles :*

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "d_n^C"] & D_n \arrow[d, "d_n^D"] \\ C_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] & D_{n-1} \end{tikzcd}$$

On obtient ainsi la catégorie des complexes de A-modules, notée $\mathsf{Comp}(A)$. La preuve du résultat suivant est un exercice facile.

Proposition B.9. Soit $f : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ un morphisme de complexes. Alors pour tout n on a $f_n(Z_n(C)) \subset Z_n(D)$ et $f_n(B_n(C)) \subset B_n(D)$, et f induit un morphisme de A-modules

$$\begin{aligned} H_n(f) : H_n(\mathbf{C}) &\longrightarrow H_n(\mathbf{D}) \\ [c] &\longmapsto [f_n(c)] \end{aligned}$$

De plus $H_n : \mathsf{Comp}(A) \longrightarrow \mathsf{Mod}(A)$ est un foncteur.

On a aussi une version "montante" des complexes, où la différentielle est de degré $+1$.

Définition B.10. *Un **complexe de cochaînes** (ou simplement **complexe**) de A-modules est un couple $\mathbf{C} = (C_*, d_*)$ où C_* est un A-module $\mathbb{Z}$-gradué et $d_* : C_* \to C_*$ est une application linéaire de degré $+1$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $d_{n+1} \circ d_n = 0$ (c'est-à-dire $\mathrm{Im}(d_n) \subset \mathrm{Ker}(d_{n+1})$).*

$$\mathbf{C} : \cdots C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_{n+2} \cdots$$

Définition B.11. *Soit $\boldsymbol{C} = (C_*, d_*)$ un complexe de cochaînes de A-modules. On pose, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,*
• $Z^n(\boldsymbol{C}) = \mathrm{Ker}(d_n) \subset C_n$ *(n-cocycles),*
• $B^n(\boldsymbol{C}) = \mathrm{Im}(d_{n-1}) \subset C_n$ *(n-cobords)*
• $H^n(\boldsymbol{C}) = Z^n(\boldsymbol{C})/B^n(\boldsymbol{C})$. *$H^n(\boldsymbol{C})$ est appelé le **n-ième A-module de cohomologie de $\boldsymbol{C}$** (le n-ième groupe de cohomologie quand $A = \mathbb{Z}$).*

Remarque B.12. Soit $\mathbf{C} = (C_*, d_*)$ un complexe de cochaînes de A-modules. Pour $n \in \mathbb{Z}$, posons $C'_n = C_{-n}$ et $d_n^{C'} = d_{-n}^{C} : C'_n \to C'_{n-1}$. Alors $\mathbf{C}' = (C'_*, d^{C'})$ est un complexe de chaînes, et on a $H^n(\mathbf{C}) = H_{-n}(\mathbf{C}')$.

C. Longue suite exacte d'homologie

On introduit maintenant un outil clé pour faires decalculs d'homologie : la longue suite exacte d'homologie.

Définition C.1. *Une suite de morphisme de complexes*

$$\boldsymbol{C} \xrightarrow{f} \boldsymbol{D} \xrightarrow{g} \boldsymbol{E}$$

est dite exacte si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la suite

$$C_n \xrightarrow{f} D_n \xrightarrow{g} E_n$$

est exacte.

Proposition C.2. Soit

$$\mathbf{C} \xrightarrow{f} \mathbf{D} \xrightarrow{g} \mathbf{E} \to 0$$

une suite exacte de complexes. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$ la suite suivante est exacte

$$H_n(\mathbf{C}) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(\mathbf{D}) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(\mathbf{E})$$

Preuve. On a $H_n(g) \circ H_n(f) = H_n(g \circ f) = 0$. Réciproquement, soit $x \in Z_n(\mathbf{D})$ tel que $H_n(g)([x]) = 0 = [g_n(x)]$. On a donc $g_n(x) \in B_n(\mathbf{E})$: il existe $y \in E_{n+1}$ tel que $g_n(x) = d_{n+1}^E(y)$. Par surjectivité de g_{n+1} il existe $z \in D_{n+1}$ tel que $y = g_{n+1}(z)$, et donc

$$g_n(x) = d_{n+1}^E(y) = d_{n+1}^E(g_{n+1}(z)) = g_n(d_{n+1}^D(z))$$

et $x - d_{n+1}^D(z) \in \mathrm{Ker}(g_n) = \mathrm{Im}(f_n)$. Il existe donc $c \in C_n$ tel que $x - d_{n+1}^D(z) = f_n(c)$. On a $f_{n-1}(d_n^C(c)) = d_n^D(f_n(c)) = d_n^D(x - d_{n+1}^D(z)) = d_n^D(x) - d_n^D(d_{n+1}^D(z)) = 0$, donc par injectivité de f_{n-1} on a $d_n^C(c) = 0$, et $c \in Z_n(\mathbf{C})$. Ainsi $[x] = [f_n(c)] = H_n(f)([c])$. □

Théorème C.3. (Longue suite exacte d'homologie) Soit

$$0 \to \mathbf{C} \xrightarrow{f} \mathbf{D} \xrightarrow{g} \mathbf{E} \to 0$$

une suite exacte de complexes. Il existe pour tout $n \in \mathbb{Z}$, un morphisme de A-modules

$$\nabla_n : H_n(\mathbf{E}) \to H_{n-1}(\mathbf{C})$$

appelé morphisme de connection, telle que la suite suivante soit exacte :

$$\cdots H_n(\mathbf{C}) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(\mathbf{D}) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(\mathbf{E}) \xrightarrow{\nabla_n} H_{n-1}(\mathbf{C}) \xrightarrow{H_{n-1}(f)} H_{n-1}(\mathbf{D}) \cdots$$

Preuve. On a déjà établi l'exactitude en $H_n(\mathbf{D})$, et il faut construire ∇_n. Soit $z \in Z_n(\mathbf{E})$. On commence par associer à z un élément $x \in Z_{n-1}(\mathbf{C})$.

$$\begin{tikzcd}
 & & D_{n+1} \arrow[r, "g_{n+1}"] \arrow[d, "d^D_{n+1}"] & E_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "d^E_{n+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "d^C_n"] & D_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "d^D_n"] & E_n \arrow[r] \arrow[d, "d^E_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] \arrow[d, "d^C_{n-1}"] & D_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"] \arrow[d, "d^D_{n-1}"] & E_{n-1} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{n-2} \arrow[r, "f_{n-2}"] & D_{n-2} & &
\end{tikzcd}$$

Soit $y \in D_n$ tel que $g_n(y) = z$. On a $d^E_n(z) = 0 = d^E_n(g_n(y)) = g_{n-1}(d^D_n(y))$. Il existe donc un unique $x \in C_{n-1}$ tel que $f_{n-1}(x) = d^D_n(y)$. On a $f_{n-2}(d^C_{n-1}(x)) = d^D_{n-1}(f_{n-1}(x)) = d^D_{n-1}(d^D_n(y)) = 0$. Par injectivité de f_{n-2} on a $d^C_{n-1}(x) = 0$ et donc $x \in Z_{n-1}(\mathbf{C})$.

Montrons que $[x]$, la classe de cohomologie de x, est indépendante du choix de y. Soit $y' \in D_n$ tel que $g_n(y') = z = g_n(y)$. Alors $y - y' \in \mathrm{Ker}(g_n)$: il existe $a \in C_n$ tel que $y - y' = f_n(a)$. Soit $x' \in C_{n-1}$ tel que $f_{n-1}(x') = d^D_n(y')$. On a $f_{n-1}(x - x') = d^D_n(y - y') = d^D_n(f_n(a)) = f_{n-1}(d^C_n(a))$, d'où $x - x' = d^C_n(a)$ et $[x] = [x']$. On a donc construit une application

$$\begin{aligned} \alpha_n : Z_n(\mathbf{E}) &\longrightarrow H_{n-1}(\mathbf{C}) \\ z &\longmapsto [x], \text{ avec } f_{n-1}(x) = d^D_n(y) \text{ et } g_n(y) = z \end{aligned}$$

qui est clairement A-linéaire. Soit $z \in B_n(\mathbf{E})$, c'est-à-dire $z = d^E_{n+1}(c)$ pour $c \in E_{n+1}$. Soit $b \in D_{n+1}$ tel que $g_{n+1}(b) = c$. On a $g_n(d^D_{n+1}(b)) = d^E_{n+1}(g_{n+1}(b)) = z$. On a donc $\alpha_n(x) = [x]$, pour x tel que $f_{n-1}(x) = d^D_n(d^D_{n+1}(b)) = 0$, d'où $\alpha_n([x]) = 0$. Ainsi α_n induit un morphisme de A-modules

$$\begin{aligned} \nabla_n : H_n(\mathbf{E}) &\longrightarrow H_{n-1}(\mathbf{C}) \\ [z] &\longmapsto [x], \text{ avec } f_{n-1}(x) = d^D_n(y) \text{ et } g_n(y) = z \end{aligned}$$

Montrons l'exactitude en $H_n(\mathbf{E})$. Soit $r \in Z_n(\mathbf{D})$. On a $\nabla_n \circ H_n(g)([r]) = \nabla_n([g_n(r)]) = [x]$ pour $x \in C_{n-1}$ tel que $f_{n-1}(x) = d^D_n(y)$ et $g_n(y) = g_n(r)$, d'où $f_{n-1}(x) = d^D_n(r) = 0$, et $\nabla_n \circ H_n(g)([r]) = 0$. Réciproquement, soit $z \in Z_n(\mathbf{E})$ tel que $\nabla_n([z]) = 0 = [x]$, où $x \in Z_{n-1}(C)$ vérifie $f_{n-1}(x) = d^D_n(y)$ et $z = g_n(y)$ ($y \in D_n$). Il existe donc $c \in C_n$ tel que $x = d^C_n(c)$, et on a $f_{n-1}(x) = f_{n-1}(d^C_n(c)) = d^D_n(f_n(c)) = d^D_n(y)$, d'où $y - f_n(c) \in Z_n(\mathbf{D})$, avec $z = g_n(y - f_n(c))$. Ainsi $[z] = H_n(g)([y - f_n(c)])$ pour $y - f_n(c) \in Z_n(\mathbf{D})$, et $[z] \in \mathrm{Im}(\nabla_n)$.

Il reste à montrer l'exactitude en $H_{n-1}(\mathbf{C})$. Soit $z \in Z_n(\mathbf{E})$. On a $H_{n-1}(f)(\nabla_n([z])) = [f_{n-1}(x)]$ pour $x \in C_{n-1}$ vérifiant $f_{n-1}(x) = d_n^D(y)$, $z = g_n(y)$, $y \in D_n$. Ainsi $H_{n-1}(f)(\nabla_n([z])) = [d_n^D(y)] = 0$.

Réciproquement, soit $c \in Z_{n-1}(\mathbf{C})$ tel que $H_{n-1}(f)([c]) = 0 = [f_{n-1}(c)]$. Il existe donc $r \in D_n$ tel que $d_n^D(r) = f_{n-1}(c)$. Soit $z = g_n(r) \in E_n$. On a $d_n^E(z) = d_n^E(g_n(r)) = g_{n-1}(d_n^D(r)) = g_{n-1}(f_{n-1}(c)) = 0$, d'où $z \in Z_n(E)$, et par construction on a $[c] = \nabla_n([z])$. □

Théorème C.4. (Fonctorialité de la longue suite exacte d'homologie) Soit

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{C} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"] & \mathbf{D} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\psi"] & \mathbf{E} \arrow[r] \arrow[d, "\eta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{C}' \arrow[r, "f'"] & \mathbf{D}' \arrow[r, "g'"] & \mathbf{E}' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif de morphismes de complexes, à lignes exactes. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
H_n(\mathbf{E}) \arrow[r, "\nabla_n"] \arrow[d, "H_n(\eta)"] & H_{n-1}(\mathbf{C}) \arrow[d, "H_{n-1}(\phi)"] \\
H_n(\mathbf{E}') \arrow[r, "\nabla_n"] & H_{n-1}(\mathbf{C}')
\end{tikzcd}$$

Preuve. Soit $z \in Z_n(\mathbf{E})$. On a $\nabla_n([z]) = [x]$ pour $x \in Z_{n-1}(\mathbf{C})$ tel que $f_{n-1}(x) = d_n^D(y)$, $y \in D_n$ satisfaisant $g_n(y) = z$. On a $H_{n-1}(\phi)(\nabla_n([z])) = [\phi_{n-1}(x)]$.

Par ailleurs $\nabla_n(H_n(\eta)([z])) = \nabla_n([\eta_n(z)]) = [x']$ où $x' \in Z_{n-1}(\mathbf{C}')$ vérifie $f'_{n-1}(x') = d_n^{D'}(y')$ pour tout $y' \in D'_n$ vérifiant $g'_n(y') = \eta_n(z)$. On a $\eta_n(z) = \eta_n(g_n(y)) = g'_n(\psi_n(y))$, ainsi

$$f'_{n-1}(x') = d_n^{D'}(\psi_n(y)) = \psi_{n-1}(d_n^D(y)) = \psi_{n-1}(f_{n-1}(x)) = f'_{n-1}(\phi_{n-1}(x))$$

donc $x' = \phi_{n-1}(x)$, et $H_{n-1}(\phi)(\nabla_n([z])) = [\phi_{n-1}(x)] = [x'] = \nabla_n(H_n(\eta)([z]))$. □

D. Homotopies

Définition D.1. *Soient $\mathbf{C} = (C_*, d^C)$ et $\mathbf{D} = (D_*, d^D)$ deux complexes et soient $f, g : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ des morphismes de complexes. Une* ***homotopie*** *de f à g est une application linéaire de degré $+1$ $h : C_* \to D_*$ telle que $\forall n \in \mathbb{Z}$, on a $d_{n+1}^D \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n^C = g_n - f_n$.*

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}^C"] & C_n \arrow[r, "d_n^C"] \arrow[dl, "h_n"'] \arrow[d, shift right, "f_n"'] \arrow[d, shift left, "g_n"] & C_{n-1} \arrow[dl, "h_{n-1}"] \\
D_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}^D"'] & D_n \arrow[r, "d_n^D"'] & D_{n-1}
\end{tikzcd}$$

On dit que f et g sont ***homotopes*** *s'il existe une homotopie de f à g.*

La notion et la terminologie sont bien sûr inspirées de la notion correspondante pour les applications continues en topologie. Le résultat suivant est souvent utile.

Théorème D.2. Soient $\mathbf{C} = (C_*, d^C)$ et $\mathbf{D} = (D_*, d^D)$ deux complexes et soient $f, g : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ des morphismes de complexes. Si f et g sont homotopes, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $H_n(f) = H_n(g)$.

Preuve. Soit h une homotopie de f à g. Soit $x \in Z_n(\mathbf{C})$. On a $f_n(x) - g_n(x) = d^D_{n+1}(h_n(x)) + h_{n-1}(d^C_n(x)) = d^D_{n+1}(h_n(x))$, donc $H_n(f)([x]) = [f_n(x)] = [g_n(x)] = H_n(g)([x])$. □

Corollaire D.3. Soit $\mathbf{C} = (C_*, d^C)$ tel que $\mathrm{id}_{\mathbf{C}}$ soit homotope à zéro. Alors $\forall n$ on a $H_n(\mathbf{C}) = \{\mathbf{0}\}$.

La preuve du résultat suivant est laissée en exercice.

Proposition D.4. Soient $\mathbf{C} = (C_*, d^C), \mathbf{D} = (D_*, d^D), \mathbf{E} = (E_*, d^E)$ des complexes.

1. La relation "être homotope" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des morphismes de complexes de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{D}$.
2. Si $f, g : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ sont des morphismes de complexes homotopes et si $u, v : \mathbf{D} \to \mathbf{E}$ sont des morphismes de complexes homotopes, alors $u \circ f$ et $v \circ g$ sont homotopes.

E. Complexes pré-simpliciaux

On termine le chapitre par une méthode très utile pour construire des complexes. Là encore c'est une construction inspirée de la topologie.

Définition E.1. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un **objet pré-cosimplicial dans** $\mathcal{C}$ est une famille $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'objets de $\mathcal{C}$ munis de morphismes, appelés cofaces,*

$$\delta^n_i : X_{n-1} \longrightarrow X_n,\ n \geq 1,\ \ 0 \leq i \leq n$$

satisfaisant $\delta^{n+1}_j \circ \delta^n_i = \delta^{n+1}_i \circ \delta^n_{j-1}$, $\forall 0 \leq i < j \leq n+1$.
*Un **objet pré-simplicial dans** $\mathcal{C}$ est un objet pré-cosimplicial dans $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, c'est-à-dire une famille $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'objets de $\mathcal{C}$ munis de morphismes, appelés faces,*

$$d^n_i : X_n \longrightarrow X_{n-1},\ n \geq 1,\ \ 0 \leq i \leq n$$

satisfaisant $d^n_i \circ d^{n+1}_j = d^n_{j-1} \circ d^{n+1}_i$, $\forall 0 \leq i < j \leq n+1$.

Remarque E.2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un objet pré-cosimplicial dans $\mathcal{C}$, dont les faces sont notées $\delta^n_i : X_{n-1} \longrightarrow X_n$. Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur contravariant. Alors $(F(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est un objet pré-simplicial dans $\mathcal{D}$, avec cofaces $F(\delta^n_i) : F(X_n) \longrightarrow F(X_{n-1})$.

Définition E.3. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Le* ***n-simplexe standard*** *est l'ensemble*

$$\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} t_i = 1, 0 \leq t_i \leq 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

que l'on munit de la topologie induite de celle de $\mathbb{R}^{n+1}$

Le résultat suivant motive la terminologie "simplicial". La preuve est une vérification immédiate.

Définition-Proposition E.4. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq i \leq n$, soit

$$\begin{aligned} \delta_i^n : \Delta^{n-1} &\longrightarrow \Delta^n \\ (t_0, \dots, t_{n-1}) &\longmapsto (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1}) \end{aligned}$$

Alors muni de ces applications cofaces, $(\Delta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un objet pré-cosimplicial dans Top.

La construction suivante, fondamentale, est la source de beaucoup de complexes rencontrés en pratique.

Définition-Proposition E.5. Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un A-module pré-simplicial dont les faces sont notées $d_i^n : M_n \to M_{n-1}$ ($n \geq 1$, $0 \leq i \leq n$). Posons, pour $n \geq 1$,

$$\partial_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i^n : M_n \to M_{n-1}$$

On a, pour tout $n \geq 2$, $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$. Donc si on pose $M_n = 0$ si $n < 0$ et $\partial_n = 0$ si $n \geq 0$, on obtient un complexe

$$\cdots M_n \xrightarrow{\partial_n} M_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} M_{n-2} \xrightarrow{\partial_{n-2}} \cdots \xrightarrow{\partial_3} M_2 \xrightarrow{\partial_2} M_1 \xrightarrow{\partial_1} M_0 \to 0$$

appelé **le complexe pré-simplicial associé au A-module pré-simplicial** $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Preuve. Soit $n \geq 2$. On a

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{i+j} d_i^{n-1} \circ d_j^n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n} u_{ij}$$

où on a posé, pour $(i, j) \in [0, n-1] \times [0, n]$, $u_{ij} = (-1)^{i+j} d_i^{n-1} \circ d_j^n$. Il s'agit de vérifier que pour $(i, j) \in [0, n-1] \times [0, n]$, il existe $(i', j') \in [0, n-1] \times [0, n]$ tel que $u_{ij} = -u_{i'j'}$.

Soit donc $(i, j) \in [0, n-1] \times [0, n]$. Supposons $i < j$ (alors $(i, j) \in [0, n] \times [1, n]$). On a

$$u_{ij} = (-1)^{i+j} d_i^{n-1} \circ d_j^n = (-1)^{i+j} d_{j-1}^{n-1} \circ d_i^n = -(-1)^{i+j-1} d_{j-1}^{n-1} \circ d_i^n = -u_{j-1,i}$$

et donc on peut prendre $(i', j') = (j-1, i) \in [0, n-1] \times [0, n-1]$.

Supposons $i \geq j$ (alors $(i, j) \in [0, n-1] \times [0, n-1]$). Le calcul précédent donne $u_{j,i+1} = -u_{ij}$, et donc on peut prendre $(i', j') = (j, i+1)$. □

III Homologie singulière

On introduit dans ce chapitre l'homologie singulière des espaces topologiques. Elle est basée sur une idée assez simple (comment plonger ou pas des simplexes dans un espaces topologique), mais la machinerie algébrique pour formaliser l'idée est en fait très astucieuse. L'application que nous avons en vue est une preuve du théorème d'invariance du domaine.

A. Définition de l'homologie singulière

Rappelons que pour $n \in \mathbb{N}$, le n-**simplexe standard** est l'espace topologique

$$\Delta^n = \{(t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} t_i = 1, 0 \leq t_i \leq 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Il est muni d'application cofaces

$$\begin{aligned} \delta_i^n : \Delta^{n-1} &\longrightarrow \Delta^n \quad (n \geq 1,\ 0 \leq i \leq n) \\ (t_0, \ldots, t_{n-1}) &\longmapsto (t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{n-1}) \end{aligned}$$

qui en font un objet pré-cosimplicial $(\Delta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans Top.

Définition A.1. *Soit X est un espace topologique. Un n-**simplexe singulier dans** X est une application continue $\sigma : \Delta^n \to X$, c'est-à-dire un élément de $C(\Delta^n, X)$*

Pour un espace topologique X, notons $C(-, X)$ le foncteur contravariant $\mathsf{Top} \to \mathsf{Ens}$, $Y \mapsto C(Y, X)$.

En appliquant ce foncteur $C(-, X)$ à l'espace topologique pré-cosimplicial $(\Delta_n)^{n \in \mathbb{N}}$, on obtient un ensemble pré-simplicial

$$(C(\Delta^n, X))_{n \in \mathbb{N}}$$

dont les cofaces sont données par

$$\begin{aligned} d_i^n : C(\Delta^n, X) &\longrightarrow C(\Delta^{n-1}, X),\ n \geq 1,\ 0 \leq i \leq n \\ \sigma &\longmapsto \sigma \circ \delta_i^n,\ (t_0, \ldots, t_{n-1}) \mapsto \sigma(t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{n-1}) \end{aligned}$$

En appliquant maintenant le foncteur

$$\begin{aligned} \mathsf{Ens} &\longrightarrow \mathsf{Ab} \\ E &\longmapsto \mathbb{Z}E = \mathbb{Z}^{(E)} \end{aligned}$$

on obtient un groupe abélien pré-simplicial,

$$(\mathbb{Z}C(\Delta^n, X))_{n \in \mathbb{N}}$$

Notons, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $S_n(X) = \mathbb{Z}C(\Delta^n, X)$. On notera $S_\bullet(X)$ le complexe associé par la proposition E.5 au groupe abélien pré-simplicial $(S_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$. Pour $n \geq 1$, la différentielle est donnée par

$$\begin{aligned}\partial_n : S_n(X) &\longrightarrow S_{n-1}(X)\\ C(\Delta^n, X) \ni \sigma &\longmapsto \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma \circ \delta_i^n\end{aligned}$$

Si $f : X \to Y$ est une application continue, elle induit pour tout n un morphisme de groupes

$$\begin{aligned}S_n(f) : S_n(X) &\longrightarrow S_n(Y)\\ C(\Delta^n, X) \ni \sigma &\longmapsto f \circ \sigma\end{aligned}$$

On vérifie sans difficulté que cette construction définit un foncteur

$$S_\bullet : \mathsf{Top} \longrightarrow \mathsf{Comp}(\mathbb{Z})$$

Définition A.2. *Soit X un espace topologique et $n \in \mathbb{N}$. Le **n-ème groupe d'homologie singulière de** X, noté $H_n(X)$, est le n-ème groupe d'homologie du complexe $S_\bullet(X)$:*

$$H_n(X) = H_n(S_\bullet(X))$$

Proposition A.3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'homologie singulière définit un foncteur

$$H_n : \mathsf{Top} \longrightarrow \mathsf{Ab}$$

qui est la composée des foncteurs

$$\mathsf{Top} \xrightarrow{S_\bullet} \mathsf{Comp}(\mathbb{Z}) \xrightarrow{H_n} \mathsf{Ab}$$

Preuve. Si $f : X \to Y$ est une application continue, on pose $H_n(f) = H_n(S_\bullet(f))$. Il est clair que cela définit un foncteur, composé des deux foncteurs indiqués. □

Corollaire A.4. Si X et Y sont des espaces topologiques homéomorphes, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, les groupe $H_n(X)$ et $H_n(Y)$ sont isomorphes.

B. Premiers calculs

On présente quelques calculs immédiats dans ce paragraphe.

B.1. $H_0(X)$

Proposition B.1. Pour tout espace topologique X, on a $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}\pi_0(X)$.

Preuve. On a, par définition

$$H_0(X) = S_0(X)/(\partial_1(S_1(X))$$

On a une bijection

$$\begin{aligned} C(\Delta^0, X) &\to X \\ \sigma &\mapsto \sigma(1) \end{aligned}$$

qui s'étend en un isomorphisme de groupes

$$\varepsilon : S_0(X) \simeq \mathbb{Z}X$$

Soit $q : X \to \pi_0(X)$ la surjection canonique qui associe à $x \in X$ sa composante connexe par arcs $C(x)$. On prolonge q en une application linéaire $q : \mathbb{Z}X \to \mathbb{Z}\pi_0(X)$, et on considère l'application linéaire

$$q \circ \varepsilon : S_0(X) \to \mathbb{Z}\pi_0(X)$$

Pour $\sigma \in C(\Delta^1, X)$, on a $\partial_1(\sigma) = \sigma \circ \delta_0^1 - \sigma \circ \delta_1^1 \in S_0(X)$, d'où $\varepsilon(\partial_1(\sigma)) = \sigma(0,1) - \sigma(1,0)$ et

$$q \circ \varepsilon(\partial_1(\sigma)) = C(\sigma(0,1)) - C(\sigma(1,0))$$

L'application $\gamma : [0,1] \to X$, $t \mapsto \sigma(t, 1-t)$ est une chemin continu de $\sigma(0,1)$ à $\sigma(1,0)$, d'où $C(\sigma(0,1)) = C(\sigma(1,0))$ et $q \circ \varepsilon$ s'annule sur $\partial_1(S_1(X))$, induisant ainsi un morphisme de groupes

$$\begin{aligned} \Phi : H_0(X) &\longrightarrow \mathbb{Z}\pi_0(X) \\ [\sigma] &\longmapsto C(\sigma(1)) \end{aligned}$$

Pour un composante connexe par arcs C, choisissons $x_C \in C$ et soit $\sigma_C \in C(\Delta^0, X)$ défini par $\sigma_C(1) = x_C$. Ceci définit une application $\pi_0(X) \to S_0(X)$, $C \mapsto x_C$, que l'on prolonge en un morphisme de groupes $\mathbb{Z}\pi_0(X) \to S_0(X)$, qui composé avec la surjection canonique, produit un morphisme de groupes

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{Z}\pi_0(X) &\longrightarrow H_0(X) \\ C &\longmapsto [\sigma_C] \end{aligned}$$

Vérifions que Φ et Ψ sont des isomorphismes réciproques. Pour $C \in \pi_0(X)$, on a $\Phi \circ \Psi(C) = C(\sigma_C(1)) = C(x_C) = C$, d'où $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$. Pour $\sigma \in C(\Delta^0, X)$, soit $y = x_{C(\sigma(1))}$. Soit γ un chemin continu de $\sigma(1)$ à y, et $\tau \in C(\Delta^1, X)$ défini par $\tau(t, 1-t) = \gamma(t)$. On a

$$0 = [\partial_1(\tau)] = [\tau \circ \delta_0^1] - [\tau \circ \delta_1^1] = [\sigma] - [\sigma_{C(\sigma(1))}] = [\sigma] - \Psi \circ \Phi([\sigma])$$

On en déduit que $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$. □

B.2. Homologie d'un point

Proposition B.2. Soit $*$ l'espace topologique à un point. On a

$$H_n(*) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Preuve. Pour tout n, $C(\Delta^n, *)$ est réduit à un élément, noté σ_n, et donc $S_n(X) = \mathbb{Z}\sigma_n$. On voit facilement que $\partial_n(\sigma_n) = 0$ si n impair et $\partial_n(\sigma_n) = \sigma_{n-1}$ si n est pair. Le complexe $S_\bullet(*)$ est donc

$$\cdots \to \mathbb{Z}\sigma_3 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}\sigma_2 \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Z}\sigma_1 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}\sigma_0 \to 0$$

et le calcul de son homologie est immédiat. □

B.3. Composantes connexes

On montre maintenant que l'homologie d'un espace topologique est déterminée par l'homologie de ses composantes connexes par arcs.

Proposition B.3. Soit X un espace topologique et soient $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ses composantes connexes par arcs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a un isomorphisme de groupes

$$\bigoplus_{\alpha \in A} H_n(X_\alpha) \simeq H_n(X)$$

Preuve. Pour chaque n, on a une bijection

$$\coprod_{\alpha \in A} C(\Delta^n, X_\alpha) \simeq C(\Delta^n, X)$$

car l'image par une application continue d'un connexe par arcs est contenu dans une composante connexe par arcs. On a donc pour tout n un isomorphisme de groupe

$$\bigoplus_{\alpha \in A} S_n(X_\alpha) = \bigoplus_{\alpha \in A} \mathbb{Z}C(\Delta^n, X_\alpha) \simeq \mathbb{Z}\left(\coprod_{\alpha \in A} C(\Delta^n, X_\alpha)\right) \simeq \mathbb{Z}C(\Delta^n, X) = S_n(X)$$

et on obtient un isomorphisme de complexes

$$\bigoplus_{\alpha \in A} S_\bullet(X_\alpha) \simeq S_\bullet(X)$$

induisant les isomorphismes annoncés entre groupes d'homologie. $\square$

C. Homologie et homotopie

On étudie dans ce paragraphe le lien entre homologie et homotopie. On commence par quelques rappels sur l'homotopie.

C.1. Homotopie

Définition C.1. *Soient X, Y des espaces topologiques et $f, g : X \to Y$ des applications continues. Une **homotopie** de f à g est une application continue*

$$H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$$

*telle que $H(-,0) = f$ et $H(-,1) = g$. On dit que f et g sont **homotopes** s'il existe une homotopie de f à g.*

Exemple C.2. Soit $f, g : X \to D$ deux applications continues, où D est une partie convexe de $\mathbb{R}^n$. Alors f et g sont homotopes, via l'homotopie

$$\begin{aligned} H : X \times [0,1] &\longrightarrow D \\ (x,t) &\longmapsto (1-t)f(x) + tg(x) \end{aligned}$$

On consultera un texte sur l'homotopie pour la preuve des résultats suivants.

Proposition C.3. Soient X, Y, Z des espaces topologiques.

1. La relation "être homotope" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des applications continues de X dans Y.
2. Si $f_0, f_1 : X \to Y$, sont des applications continues homotopes et si $g_0, g_1 : Y \to Z$ sont des applications continues homotopes, alors $g_0 \circ f_0$ et $g_0 \circ g_1$ sont homotopes.

Définition C.4. *Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue. On dit que f est une* ***équivalence d'homotopie*** *s'il existe $g : Y \to X$ continue telle que $f \circ g$ soit homotope à id_Y et $g \circ f$ soit homotope à id_X.*
On dit que X et Y ont ***même type d'homotopie*** *s'il existe une équivalence d'homotopie entre X et Y.*
On dit qu'un espace topologique est ***contractile*** *s'il a le même type d'homotopie qu'un point*

Exemples C.5.

1. Deux espaces topologiques homéomorphes ont même type d'homotopie.
2. Si $D \subset \mathbb{R}^n$ est une partie convexe non vide, alors D a même type d'homotopie qu'un point. En effet si $x_0 \in D$, l'application constante $f : D \to \{x_0\}$ et l'injection $\{x_0\} \to D$ sont des équivalences inverses. Ainsi D est contractile (en particulier $\mathbb{R}^n$ est contractile).
3. Les espaces $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $\mathbb{S}^{n-1}$ ont le même type d'homotopie. En effet soient $f : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ l'injection canonique et $g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^{n-1}$, $x \mapsto \frac{x}{||x||}$. Alors $g \circ f$ est l'identité de $\mathbb{S}^{n-1}$, et $f \circ g$ est homotope à l'identité de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ via l'application
$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times [0,1] &\to \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ (x,t) &\mapsto (1-t)\frac{x}{||x||} + tx \end{aligned}$$

Exercice C.6. Montrer qu'un espace topologique X est contractile si et seulement si l'application id_X est homotope à une application constante $X \to X$. Montrer que si X est contractile, deux applications continues $f : X \longrightarrow Z$ (Z espace topologique quelconque) sont homotopes.

C.2. Homologie d'un espace contractile

On veut montrer le résultat suivant.

Proposition C.7. Soit X un espace topologique contractile. Alors $H_n(X) = \{0\}$ pour tout $n > 0$.

On utilisera le lemme (bien connu) suivant.

Lemme C.8. Soient X, Y, Z des espaces topologiques et $q : X \to Y$, $h : X \to Z$ des applications continues avec q surjective. On suppose que les deux conditions suivantes sont réalisées.

1. $\forall x, x' \in X, q(x) = q(x') \Rightarrow h(x) = h(x')$,
2. X et Y sont compacts.

Alors il existe une unique application continue $g : Y \to Z$ telle que $g \circ q = h$.

Preuve de la proposition. Soit $x_0 \in X$, et soit $\sigma_0 \in C(\Delta^0, X)$ telle que $\sigma_0(1) = x_0$. Pour tout n soit $\varepsilon_n : S_n(X) \to S_n(X)$ le morphisme de groupes défini par $\varepsilon_n = 0$ si $n \neq 0$ et $\varepsilon(\sigma) = \sigma_0$ pour tout $\sigma \in C(\Delta^0, X)$. On définit ainsi un morphisme de complexes

$$\varepsilon = (\varepsilon_n) : S_\bullet(X) \longrightarrow S_\bullet(X)$$

Soit maintenant $h : X \times [0,1] \to X$ une homotopie entre l'identité de X et l'application constante $x \mapsto x_0$. On va associer à h une homotopie s entre ε et l'identité de $S_\bullet(X)$. On en déduira donc (Théorème D.2) que $\mathrm{id}_{H_n(X)} = H_n(\mathrm{id}_X) = H_n(\varepsilon) = 0$ si $n > 0$, d'où le résultat.

Considérons l'application continue

$$\begin{aligned} q_n : \Delta^{n-1} \times [0,1] &\longrightarrow \Delta^n \\ ((\mu_0, \ldots, \mu_{n-1}), t) &\longmapsto (t, (1-t)\mu_0, \ldots, (1-t)\mu_{n-1}) \end{aligned}$$

q_n est surjective car

$$(1, 0, \ldots, 0) = q_n(0, \ldots, 1, 1) \text{ et}$$

$$(t_0, \ldots, t_n) = q_n(\frac{t_1}{1-t_0}, \ldots, \frac{t_n}{1-t_0}, t_0) \text{ si } t_0 \neq 1$$

Si $\sigma \in C(\Delta^{n-1}, X)$, on montre facilement en utilisant le lemme qu'il existe une unique application continue $s_{n-1}(\sigma) : \Delta^n \to X$ telle que

$$s_{n-1}(\sigma) \circ q_n = h \circ (\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]})$$

On a donc

$$s_{n-1}(\sigma)(t_0, \ldots, t_n) = \begin{cases} h(\sigma(0, \ldots, 1), 1) = x_0 & \text{si } t_0 = 1 \\ h(\sigma(\frac{t_1}{1-t_0}, \ldots, \frac{t_n}{1-t_0}), t_0) & \text{si } t_0 \neq 1 \end{cases}$$

En prolongeant linéairement à $S_{n-1}(X)$, on obtient une application linéaire $s_{n-1} : S_{n-1}(X) \to S_n(X)$. Montrons que $s = (s_n)$ est bien l'homotopie annoncée entre $\mathrm{id}_{S_\bullet(X)}$ et ε. (bien sûr on pose $s_n = 0$ si $n < 0$). On doit donc montrer que pour tout $n \geq 0$ on a

$$\partial_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ \partial_n = \mathrm{id}_{S_n(X)} - \varepsilon_n$$

Pour $n = 0$ cela revient à

$$\partial_1 \circ s_0 = \mathrm{id}_{S_0(X)} - \varepsilon_0$$

Pour $\sigma \in C(\Delta^0, X)$, on a

$$s_0(\sigma) \circ \partial_0^1(1) = s_0(\sigma)(0,1) = h(\sigma(1), 0) = \sigma(1) \quad \text{et} \quad s_0(\sigma) \circ \partial_1^1(1) = s_0(\sigma)(1,1) = h(\sigma(0), 1) = x_0$$

d'où

$$\partial_1(s_0(\sigma)) = s_0(\sigma) \circ \partial_0^1 - s_0(\sigma) \circ \partial_1^1 = \sigma - \sigma_0 = (\mathrm{id}_{S_0(X)} - \varepsilon_0)(\sigma)$$

et on a donc le résultat pour $n = 0$.

Supposons maintenant $n \geq 1$, et soit $1 \leq i \leq n+1$. Soit $\sigma \in C(\Delta^n, X)$. On a

$$\begin{aligned} s_n(\sigma) \circ \delta_i^{n+1}(t_0, \ldots, t_n) &= s_n(\sigma)(t_0, \ldots t_{i-1}, 0, t_i, \ldots t_n) \\ &= \begin{cases} h(\sigma(\frac{t_1}{1-t_0}, \ldots, \frac{t_{i-1}}{1-t_0}, 0, \frac{t_i}{1-t_0}, \ldots, \frac{t_n}{1-t_0}), t_0) & \text{si } t_0 \neq 1 \\ h(\sigma(0, \ldots 0, 1), 1) = x_0 & \text{si } t_0 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{n-1}(\sigma \circ \delta_{i-1}^n)(t_0, \ldots, t_n) &= \begin{cases} h(\sigma \circ \delta_{i-1}^n(\frac{t_1}{1-t_0}, \ldots, \frac{t_n}{1-t_0}), t_0) & \text{si } t_0 \neq 1 \\ h(\sigma(0, \ldots, 0), 1) & \text{si } t_0 = 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} h(\sigma(\frac{t_1}{1-t_0}, \ldots, \frac{t_{i-1}}{1-t_0}, 0, \frac{t_i}{1-t_0}, \ldots \frac{t_n}{1-t_0}), t_0) & \text{si } t_0 \neq 1 \\ h(\sigma(0, \ldots 0, 1), 1) = x_0 & \text{si } t_0 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi pour $n \geq 1$, et $1 \leq i \leq n+1$, on a $s_n(\sigma) \circ \delta_i^{n+1} = s_{n-1}(\sigma \circ \delta_{i-1}^n)$ et

$$\begin{aligned} (\partial_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ \partial_n)(\sigma) &= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i s_n(\sigma) \circ \delta_i^{n+1} + \sum_{j=0}^{n} (-1)^j s_{n-1}(\sigma \circ \delta_j^n) \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i s_n(\sigma) \circ \delta_i^{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} s_{n-1}(\sigma \circ \delta_{i-1}^n) \\ &= s_n(\sigma) \circ \delta_0^{n+1} \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$s_n(\sigma) \circ \delta_0^{n+1}(t_0, \ldots, t_n) = s_n(\sigma)(0, (t_0, \ldots, t_n)) = h(\sigma(t_0, \ldots, t_n), 0) = \sigma(t_0, \ldots, t_n)$$

et donc $s_n(\sigma) \circ \delta_0^{n+1} = \sigma$, ce qui termine la preuve. □

Corollaire C.9. Si D est une partie convexe de $\mathbb{R}^n$, alors $H_p(D) = \{0\}$ pour tout $p > 0$.

C.3. Invariance homotopique de l'homologie

Le but du paragraphe est de montrer le résultat suivant.

Théorème C.10. Soient X, Y des espaces topologiques et f, g des applications continues. Si f et g sont homotopes, alors pour tout $n \geq 0$ on a $H_n(f) = H_n(g)$.

La démonstration sera une conséquence directe du résultat technique suivant.

Lemme C.11. Soit X un espace topologique. Pour tout $t \in [0, 1]$, notons

$$\begin{aligned} \eta_X^t : X &\to X \times [0, 1] \\ x &\mapsto (x, t) \end{aligned}$$

qui induit un morphisme de complexes

$$S_\bullet(\eta_X^t) : S_\bullet(X) \to S_\bullet(X \times [0, 1])$$

Alors il existe une homotopie de $S_\bullet(\eta_X^0)$ à $S_\bullet(\eta_X^1)$.

Preuve du théorème. Par hypothèse il existe $h : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ continue telle que

$$f = h \circ \eta_X^0 \quad \text{et} \quad g = h \circ \eta_X^1$$

Pour $n \geq 0$ on a donc, en utilisant le lemme et le théorème D.2,

$$\begin{aligned} H_n(f) = H_n(h \circ \eta_X^0) &= H_n(h) \circ H_n(\eta_X^0) = H_n(h) \circ H_n(S_\bullet(\eta_X^0)) \\ &= H_n(h) \circ H_n(S_\bullet(\eta_X^1)) = H_n(h) \circ H_n(\eta_X^1) = H_n(h \circ \eta_X^1) = H_n(g) \end{aligned}$$

Il reste donc à démontrer le lemme. □

Remarque C.12. En fait, en utilisant la proposition D.4, on voit que l'on a en fait montré que si f et g sont homotopes, alors les morphismes de complexes $S_\bullet(f)$ et $S_\bullet(g)$ sont homotopes.

Preuve du lemme. On va construire pour tout $n \geq 0$ et tout espace topologique X, un morphisme de groupes

$$s_n^X : S_n(X) \longrightarrow S_{n+1}(X \times [0,1])$$

tel que

$$(K_n) \quad \partial_{n+1} \circ s_n^X + s_{n-1}^X \circ \partial_n = S_n(\eta_X^1) - S_n(\eta_X^0) : S_n(X) \to S_n(X \times [0,1])$$

et pour toute application continue $f : X \to Y$

$$(F_n) \quad S_{n+1}(f \times \mathrm{id}_{[0,1]}) \circ s_n^X = s_n^Y \circ S_n(f)$$

On va construire s_n^X par récurrence sur $n \geq 0$.

On commence en $n = 0$. Pour $\sigma \in C(\Delta^0, X)$, soit $s_0^X(\sigma) \in C(\Delta^1, X)$ défini par $s_0^X(\sigma)(t_0, t_1) = (\sigma(1), t_1)$. En prolongeant linéairement, on obtient un morphisme de groupe $s_0^X : S_0(X) \longrightarrow S_1(X \times [0,1])$. On doit montrer que

$$\partial_1 \circ s_0^X = S_0(\eta_X^1) - S_0(\eta_X^0)$$

(évidemment on pose $s_n^X = 0$ pour $n < 0$). Pour $\sigma \in C(\Delta^0, X)$, on a

$$\partial_1(s_0^X(\sigma)) = s_0^X(\sigma) \circ \delta_0^1 - s_0^X(\sigma) \circ \delta_1^1$$

avec

$$s_0^X(\sigma) \circ \delta_0^1(1) = s_0^X(\sigma)(0,1) = (\sigma(1), 1) = \eta_X^1 \circ \sigma(1) = S_0(\eta_X^1)(1)$$

et

$$s_0^X(\sigma) \circ \delta_1^1(1) = s_0^X(\sigma)(1,0) = (\sigma(1), 0) = \eta_X^0 \circ \sigma(1) = S_0(\eta_X^0)(1)$$

Cela montre K_0 et on établit F_0 sans difficulté à partir des définitions, et on a donc le résultat pour $n = 0$.

Supposons maintenant $n > 0$ et $s_0^X, \ldots, s_{n-1}^X$ construits pour tout espace topologique X, avec les relations $K_0, \ldots, K_{n-1}$ et $F_0, \ldots, F_{n-1}$ vérifiées.

Notons $i_n : \Delta^n \to \Delta^n$ l'application identité, $i_n \in S_n(\Delta^n)$. Considérons l'élément

$$\eta_{\Delta^n}^1 - \eta_{\Delta^n}^0 - s_{n-1}^{\Delta^n}(\partial_n(i_n)) \in S_n(\Delta^n \times [0,1])$$

On a, en utilisant (K_{n-1}),

$$\begin{aligned} \partial_n \left(\eta_{\Delta^n}^1 - \eta_{\Delta^n}^0 - s_{n-1}^{\Delta^n}(\partial_n(i_n)) \right) &= \partial_n(\eta_{\Delta^n}^1) - \partial_n(\eta_{\Delta^n}^0) - \partial_n(s_{n-1}^{\Delta^n}(\partial_n(i_n))) \\ &= \partial_n(\eta_{\Delta^n}^1) - \partial_n(\eta_{\Delta^n}^0) + s_{n-2}^{\Delta^n}(\partial_{n-1}\partial_n(i_n)) - S_{n-1}(\eta_{\Delta^n}^1)(\partial_n(i_n)) + S_{n-1}(\eta_{\Delta^n}^0)(\partial_n(i_n)) \\ &= \partial_n(\eta_{\Delta^n}^1) - \partial_n(\eta_{\Delta^n}^0) - \partial_n(\eta_{\Delta^n}^1) + \partial_n(\eta_{\Delta^n}^0) = 0 \end{aligned}$$

L'espace topologique $\Delta^n \times [0,1]$ est contractile, donc la proposition C.7 assure l'existence de $a \in S_{n+1}(\Delta^n \times [0,1])$ tel que

$$\partial_{n+1}(a) = \eta^1_{\Delta^n} - \eta^0_{\Delta^n} - s^{\Delta^n}_{n-1}(\partial_n(i_n))$$

On revient à un espace topologique quelconque X. Pour $\sigma \in C(\Delta^n, X)$, soit

$$s^X_n(\sigma) = (\sigma \times \mathrm{id}) \circ a \in S_{n+1}(X \times [0,1])$$

En prolongeant par linéarité cela définit un morphisme de groupes $s^X_n : S_n(X) \longrightarrow S_{n+1}(X \times [0,1])$. Il faut vérifier que (K_n) est vraie. On a, pour $\sigma \in C(\Delta^n, X)$,

$$\begin{aligned}
\partial_{n+1}(s^X_n(\sigma)) = \partial_{n+1}((\sigma \times \mathrm{id}) \circ a) = S_n(\sigma \times \mathrm{id})(\partial_{n+1}(a)) &= S_n(\sigma \times \mathrm{id})(\eta^1_{\Delta^n} - \eta^0_{\Delta^n} - s^{\Delta^n}_{n-1}(\partial_n(i_n))) \\
&= (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \eta^1_{\Delta^n} - (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \eta^0_{\Delta^n} - (\sigma \times \mathrm{id}) \circ s^{\Delta^n}_{n-1}(\partial_n(i_n))) \\
&= \eta^1_X \circ \sigma - \eta^0_X \circ \sigma - S_n(\sigma \times \mathrm{id})(s^{\Delta^n}_{n-1}(\partial_n(i_n))) \\
&= S_n(\eta^1_X)(\sigma) - S_n(\eta^0_X)(\sigma) - s^X_{n-1} \circ S_{n-1}(\sigma)(\partial_n(i_n)) \\
&= S_n(\eta^1_X)(\sigma) - S_n(\eta^0_X)(\sigma) - s^X_{n-1} \circ \partial_n \circ S_n(\sigma)(i_n) \\
&= S_n(\eta^1_X)(\sigma) - S_n(\eta^0_X)(\sigma) - s^X_{n-1} \circ \partial_n(\sigma)
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé F_{n-1}, et donc K_n est établi. On montre finalement F_n sans difficulté. □

Comme conséquence immédiate du premier théorème, on obtient l'invariance homotopique de l'homologie singulière.

Théorème C.13. Soient X, Y des espaces topologiques ayant même type d'homotopie. Alors pour tout $n \geq 0$, on a $H_n(X) \simeq H_n(Y)$.

Preuve. Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ des équivalences homotopiques réciproques. On a pour tout n

$$\mathrm{id}_{H_n(X)} = H_n(\mathrm{id}_X) = H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f), \quad \mathrm{id}_{H_n(Y)} = H_n(\mathrm{id}_Y) = H_n(f \circ g) = H_n(f) \circ H_n(g)$$

et ainsi $H_n(f)$ et $H_n(g)$ sont des isomorphismes inverses. □

C.4. Le premier groupe d'homologie

On explique dans ce paragraphe comment le premier groupe d'homologie est relié au au groupe fondamental.

Rappelons tout d'abord que si X est un espace topologique et $x \in X$, son groupe fondamental $\pi_1(X, x)$ en x est construit de la manière suivante (on modifie légèrement la définition usuelle en identifiant $[0,1]$ et Δ^1, ce qui ne change pas le groupe obtenu bien sûr).

- On considère tout d'abord l'ensemble L_x des applications continues $\gamma : \Delta^1 \to X$ telles que $\gamma(1,0) = x = \gamma(0,1)$ (lacets de base x).

- L'ensemble $\pi_1(X,x)$ est le quotient de L_x par la relations d'équivalence suivante : $\gamma_0 \sim \gamma_1$ si et seulement s'il existe une homotopie $H : \Delta^1 \times [0,1] \to X$ entre γ_0 et γ_1 (c'est-à-dire $H(-,0) = \gamma_0$ et $H(-,1) = \gamma_1$) telle que $H((1,0),-) = x = H((0,1),-)$. Si $\gamma \in L_x$, on note $\{\gamma\}$ sa classe dans $\pi_1(X,x)$.

- La loi de groupe sur $\pi_1(X,x)$ est induite par la composition des chemins : si $\gamma, \tau \in L_x$, on a $\{\gamma\} \cdot \{\tau\} = \{\gamma \cdot \tau\}$, où

$$\gamma \cdot \tau(t_0, t_1) = \begin{cases} \gamma(2t_0 - 1, 2t_1), & 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ \tau(2t_0, 2t_1 - 1), & \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

L'élément neutre est la classe du lacet constant 1_x, et pour $\gamma \in L_x$, $\{\gamma\}^{-1} = \{\gamma^-\}$, où $\gamma^-(t_0, t_1) = \gamma(t_1, t_0)$ (lacet parcouru en sens inverse).

Rappelons finalement que si G est un groupe, son abélianisé, noté G_{ab}, est le quotient de G par le sous-groupe (normal) de G engendré par les commutateurs $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$, $x, y \in G$. Si $f : G \to M$ est un morphisme de groupes dans un groupe abélien M, il induit un morphisme de groupes $\overline{f} : G_{\mathrm{ab}} \to M$ tel que $\overline{f} \circ q = f$, où $q : G \to G_{\mathrm{ab}}$ est la surjection canonique.

Théorème C.14. Soit X un espace topologique connexe par arcs. Alors pour tout $x \in X$, on a un isomorphisme de groupes

$$H_1(X) \simeq \pi_1(X, x)_{\mathrm{ab}}$$

Début de la preuve. Fixons $x \in X$. Soit $\gamma \in L_x$. On a $\gamma \in C(\Delta^1, X)$, et un lacet étant un cycle, on a une application

$$\begin{aligned} u : L_x &\longrightarrow H_1(X) \\ \gamma &\longmapsto [\gamma] \end{aligned}$$

Soient $\gamma, \tau \in L_x$ avec $\gamma \sim \tau$. Il existe donc $k : \Delta^1 \times [0,1] \to X$ tel que $k(-,0) = \gamma$, $k(-,1) = \tau$, $k((0,1),-) = x = k((1,0),-)$. Soit $q : \Delta^1 \times [0,1] \to \Delta^2$, $(t_0, t_1, t) \mapsto (t_0, t_1(1-t), t_1 t)$. On vérifie facilement, en utilisant le lemme C.8, l'existence de $\sigma : \Delta^2 \to X$ continue telle que $\sigma \circ q = k$. Alors on a

$$\partial_2(\sigma) = \sigma \circ \delta_0^2 - \sigma \circ \delta_1^2 + \sigma \circ \delta_2^2 = c_x - \tau + \gamma$$

où $c_x(t_0, t_1) = x$ (lacet constant). c_x est un bord ($c_x = \partial_2(c'_x)$, où $c'_x(t_0, t_1, t_2) = x$), d'où $[\tau] = [\gamma]$ dans $H_1(X)$ et ainsi u induit une application $\overline{u} : \pi_1(X, x) \to H_1(X)$, $\{\gamma\} \mapsto [\gamma]$.

Soient $\gamma, \tau \in L_x$, et soit $\omega : \Delta^2 \to X$, $(t_0, t_1, t_2) \mapsto \gamma \cdot \tau(t_0 + \frac{t_1}{2}, \frac{t_1}{2} + t_2)$ On a

$$\partial_2(\omega) = \omega \circ \delta_0^2 - \omega \circ \delta_1^2 + \omega \circ \delta_2^2$$

avec $\omega \circ \delta_0^2 = \tau$, $\omega \circ \delta_1^2 = \gamma \cdot \tau$, $\omega \circ \delta_2^2 = \gamma$, d'où

$$\partial_2(\omega) = \tau - \gamma \cdot \tau + \gamma \quad \text{et} \quad [\gamma \cdot \tau] = [\gamma] + [\tau]$$

Cela démontre donc que $\overline{u} : \pi_1(X, x) \to H_1(X)$ est un morphisme de groupes, et $H_1(X)$ étant abélien, il induit un morphisme de groupes $\theta : \pi_1(X, x)_{\mathrm{ab}} \to H_1(X)$, $\langle \gamma \rangle \mapsto [\gamma]$ (où $\langle \gamma \rangle$ est la classe de $\{\gamma\}$ dans $\pi_1(X, x)_{\mathrm{ab}}$).

La construction n'a pour l'instant pas utilisé l'hypothèse de connexité par arcs. On ne construira pas l'isomorphisme inverse, ce qui nécessiterait un peu plus de matériel sur l'homotopie. □

D. Le théorème de Mayer-Vietoris

On introduit maintenant un outil extrêmement utile pour effectuer des calculs d'homologie singulière : la suite exacte de Mayer-Vietoris.

D.1. Enoncé

Théorème D.1. (Théorème de Mayer-Vietoris) Soit X un espace topologique tel que $X = U \cup V$, où U, V sont des ouverts de X. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un morphisme de groupes $\nabla_n : H_n(X) \to H_{n-1}(U \cap V)$ tel que l'on ait une suite exacte

$$\cdots H_{n+1}(X) \xrightarrow{\nabla_{n+1}} H_n(U \cap V) \to H_n(U) \oplus H_n(V) \to H_n(X) \xrightarrow{\nabla_n} H_{n-1}(U \cap V) \to \cdots$$

Le morphisme
$$H_n(U) \oplus H_n(V) \to H_n(X)$$
est le morphisme $H_n(i_U) - H_n(i_V)$, où i_U et i_V sont les inclusions respectives de U et V dans X. Par ailleurs le morphisme

$$H_n(U \cap V) \to H_n(U) \oplus H_n(V)$$

est $H_n(i) \oplus H_n(j)$, où i et j sont les inclusions respectives de $U \cap V$ dans U et V.

Le début de la suite exacte de Mayer-Vietoris est

$$H_1(U \cap V) \to H_1(U) \oplus H_1(V) \to H_1(X) \to H_0(U \cap V) \to H_0(U) \oplus H_0(V) \to H_0(X) \to 0$$

D.2. Applications

Proposition D.2. On a
$$H_n(\mathbb{S}^1) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0, 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Preuve. On sait déjà que $H_0(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ par connexité par arcs de $\mathbb{S}^1$. Soient $U = \mathbb{S}^1 \setminus \{(0,1)\}$ et $V = \mathbb{S}^1 \setminus \{(1,0)\}$. U et V sont des ouverts de $\mathbb{S}^1$, homéomorphes à $\mathbb{R}$, alors que $U \cap V$ a deux composantes connexes, homéomorphes à $\mathbb{R}$. On a donc

$$H_n(U) \simeq H_n(V) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \geq 1 \end{cases} \quad H_n(U \cap V) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Si $n \geq 2$ la suite de Mayer-Vietoris donne donc une suite exacte

$$H_n(U) \oplus H_n(V) = 0 \to H_n(\mathbb{S}^1) \to 0 = H_{n-1}(U \cap V)$$

et donc $H_n(\mathbb{S}^1) = \{0\}$. Le début de la suite exacte de Mayer-Vietoris donne donc une suite exacte de groupes abéliens
$$0 \to H_1(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{j} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \to 0$$

Rappelons que si $M \subset \mathbb{Z}^n$ est un sous-groupe, alors M est libre de rang $k \leq n$ et on a un isomorphisme $\mathbb{Z}^n / M \simeq \mathbb{Z}^{n-k} \oplus T$ où T est un groupe abélien fini. Il suit donc de l'isomorphisme $\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}^2 / \operatorname{Ker}(f) = \mathbb{Z} / \operatorname{Im}(g)$ que $\operatorname{Im}(g)$ est libre de rang 1, et de l'isomorphisme $\operatorname{Im}(g) \simeq \mathbb{Z}^2 / \operatorname{Ker}(g) = \mathbb{Z}^2 / \operatorname{Im}(j)$ que $\operatorname{Im}(j) \simeq H_1(\mathbb{S}^1)$ est libre de rang 1, d'où le résultat. $\square$

Théorème D.3. Pour $n \geq 1$ et $p \geq 0$, on a

$$H_p(\mathbb{S}^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = 0, n \\ 0 & \text{si } p \neq 0, n \end{cases}$$

Preuve. On peut supposer $n \geq 2$. Soient $U = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ et $V = \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$ où N et S sont les pôles nord et sud respectifs de $\mathbb{S}^n$. U et V sont des ouverts de $\mathbb{S}^n$, homéomorphes à $\mathbb{R}^n$, on a $\mathbb{S}^n = U \cup V$, $U \cap V$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (utiliser la projection stéréographique, on utilise ici que $n \geq 2$). En utilisant le fait que U, V sont contractiles et que $U \cap V$ a le même type d'homotopie que $\mathbb{S}^{n-1}$, la suite de Mayer-Vietoris fournit, pour tout $p \geq 2$, une suite exacte

$$H_p(U) \oplus H_p(V) = 0 \to H_p(\mathbb{S}^n) \to H_{p-1}(U \cap V) \to 0 = H_{p-1}(U) \oplus H_{p-1}(V)$$

et donc un isomorphisme

$$H_p(\mathbb{S}^n) \simeq H_{p-1}(U \cap V) \simeq H_{p-1}(\mathbb{S}^{n-1})$$

On obtient donc

$$H_n(\mathbb{S}^n) \simeq H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \simeq \cdots \simeq H_2(\mathbb{S}^2) \simeq H_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$$

et pour $k > 0$

$$H_{n+k}(\mathbb{S}^n) \simeq H_{n+k-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \simeq \cdots \simeq H_{k+2}(\mathbb{S}^2) \simeq H_{k+1}(\mathbb{S}^1) = 0$$

Les termes de bas degré de la suite Mayer-Vietoris donnent une suite exacte

$$0 \to H_1(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{j} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \to 0$$

et de manière similaire à la proposition précédente on en déduit que $H_1(\mathbb{S}^n) = 0$ si $n \geq 2$. On a donc pour $k > 0$

$$H_{n-k}(\mathbb{S}^n) \simeq H_{n-k-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \simeq \cdots \simeq H_2(\mathbb{S}^{k+2}) \simeq H_1(\mathbb{S}^{k+1}) = 0$$

et cela termine la démonstration. □

Corollaire D.4. (Invariance du domaine) Soient $m, n \geq 0$ avec $m \neq n$. Alors

1. $\mathbb{S}^n$ et $\mathbb{S}^m$ ne sont pas homéomorphes ;
2. $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ ne sont pas homéomorphes ;
3. Si $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$ sont des ouverts non vides, alors U et V ne sont pas homéomorphes.

Preuve. La première assertion est une conséquence immédiate de l'invariance topologique de l'homologie singulière et du résultat précédent, et la deuxème assertion est un cas particulier de la troisième, pour laquelle on peut supposer $n > m \geq 1$, le cas $m = 0$ étant immédiat.

Soit donc U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, et soit $x \in U$. Montrons que $H_{n-1}(U \setminus \{x\}) \neq 0$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $S_\varepsilon(x) \subset U$ (sphère de rayon ε centrée en x). On a un diagramme commutatif d'inclusions d'espaces topologiques

$$\begin{tikzcd} & S_\varepsilon(x) \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "k"] & \\ U \setminus \{x\} \arrow[rr, "j"] & & \mathbb{R}^n \setminus \{x\} \end{tikzcd}$$

qui induit un diagramme commutatif de morphismes de groupes

$$\begin{tikzcd}
 & H_{n-1}(S_\varepsilon(x)) \arrow[dl, "H_{n-1}(i)"'] \arrow[dr, "H_{n-1}(k)"] & \\
H_{n-1}(U \setminus \{x\}) \arrow[rr, "H_{n-1}(j)"] & & H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{x\})
\end{tikzcd}$$

k etant une équivalence d'homotopie, il induit un isomorphisme $H_{n-1}(S_\varepsilon(x)) \simeq H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{x\})$, avec $\mathbb{Z} \simeq H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \simeq H_{n-1}(S_\varepsilon(x))$. Ainsi $H_{n-1}(i)$ est injectif et $H_{n-1}(U \setminus \{x\}) \neq 0$.

Soit $\varphi : U \to V$ un homéomorphisme, avec $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$ des ouverts non vides et $n > m \geq 1$. Soit B une boule ouverte contenue dans V. Alors φ induit un homéomorphisme $U' = \varphi^{-1}(B) \to B$. Soit $x \in U'$. Alors φ induit un homéomorphisme entre $U' \setminus \{x\}$ et $B \setminus \{\varphi(x)\}$. On a donc

$$H_{n-1}(B \setminus \{\varphi(x)\}) \simeq H_{n-1}(U' \setminus \{x\}) \neq 0$$

Or B est homéomorphe à $\mathbb{R}^m$, d'où $H_{n-1}(B \setminus \{\varphi(x)\}) \simeq H_{n-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{y\}) \simeq H_{n-1}(\mathbb{S}^{m-1}) \neq 0$, ce qui implique que $m = n$: contradiction □

D.3. Homologie associée à un recouvrement ouvert

On introduit dans ce paragraphe un ingrédient important pour démontrer le théorème de Mayer-Vietoris : l'homologie associée à un recouvrement.

Soit X un espace topologique et $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X. Pour $n \in \mathbb{N}$, On note $S_n^{\mathcal{U}}(X)$ le sous-groupe de $S_n(X)$ engendré par les simplexes singuliers $\sigma : \Delta^n \to X$ pour lesquels il existe $i \in I$ tel que $\sigma(\Delta^n) \subset U_i$. Il est clair que $\partial_n(S_n^{\mathcal{U}}(X)) \subset S_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$. Ainsi $S_\bullet^{\mathcal{U}}(X)$ est un sous-complexe de $S_\bullet^{\mathcal{U}}(X)$, et on note $H_n^{\mathcal{U}}(X)$ les groupes d'homologie correspondants.

Les groupes d'homologie $H_n^{\mathcal{U}}(X)$ dépendent à priori du recouvrement $\mathcal{U}$. En fait le résultat suivant montrent que ce n'est pas le cas.

Proposition D.5. Soit X un espace topologique et $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de X. Alors l'inclusion de complexes $S_\bullet^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow S_\bullet(X)$ induit pour tout $n \geq 0$ un isomorphisme de groupes $H_n^{\mathcal{U}}(X) \simeq H_n(X)$.

Cette proposition sera démontrée dans la sous-section D.5. En acceptant provisoirement ce résultat, on peut maintenant démontrer le théorème de Mayer-Vietoris.

Preuve du théorème de Mayer-Vietoris à partir de la proposition D.5. Soient X un espace topologique et U, V des ouverts de X tels que $X = U \cup V$. Pour construire la suite exacte de Mayer-Vietoris, le but est d'appliquer la longue suite exacte d'homologie à une certaine suite exacte de complexes.

Considérons les inclusions suivantes

$$i_U : U \hookrightarrow X, \quad i_V : V \hookrightarrow X, \quad i : U \cap V \hookrightarrow U, \quad j : U \cap V \hookrightarrow V$$

et les trois complexes

$$S_\bullet(U \cap V), \quad S_\bullet(U) \oplus S_\bullet(V), \quad S_\bullet(X)$$

Pour $n \geq 0$, considérons la suite

$$0 \to S_n(U \cap V) \xrightarrow{S_n(i) \oplus S_n(j)} S_n(U) \oplus S_n(V) \xrightarrow{S_n(i_U) - S_n(i_V)} S_n(X)$$

Les applications i et j étant injectives, il suit que $S_n(i)$ et $S_n(j)$ sont injectives, ainsi que $S_n(i) \oplus S_n(j)$. Par ailleurs si $\sigma \in C(\Delta^n, U \cap V)$, on a

$$(S_n(i_U) - S_n(i_V))\,(S_n(i) \oplus S_n(j)(\sigma)) = S_n(i_U) - S_n(i_V)(i \circ \sigma, j \circ \sigma) = i_U \circ i \circ \sigma - i_V \circ j \circ \sigma = 0$$

d'où $(S_n(i_U) - S_n(i_V)) \circ (S_n(i) \oplus S_n(j)) = 0$. Soit $(c, c') \in S_n(U) \oplus S_n(V)$ tel que

$$(S_n(i_U) - S_n(i_V))(c, c') = 0 = S_n(i_U)(c) - S_n(i_V)(c')$$

L'élément $T := S_n(i_U)(c) = S_n(i_V)(c') \in S_n(X) = \mathbb{Z}C(\Delta^n, X)$ est donc à la fois

- une combinaison linéaire de simplexes singuliers à valeurs dans U,
- une combinaison linéaire de simplexes singuliers à valeurs dans V.

Puisque l'on travaille dans un groupe abélien libre de base les simplexes singuliers, on voit que T est combinaison linéaire de simplexes singuliers à valeurs dans $U \cap V$: $T = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \sigma_k$, avec pour tout k, $\sigma_k \in C(\Delta^n, X)$ vérifiant $\sigma_k(\Delta^n) \subset U \cap V$. On peut donc écrire $\sigma_k = \nu \circ \tilde{\sigma_k}$, où $\nu : U \cap V \hookrightarrow X$ est l'injection $i_U \circ i = i_V \circ j$ et $\tilde{\sigma_k} \in C(\Delta^n, U \cap V)$. On a alors

$$T = S_n(i_U)(c) = S_n(i_U)(\sum_k \lambda_k(i \circ \tilde{\sigma_k})) = S_n(i_V)(c') = S_n(i_V)(\sum_k \lambda_k(j \circ \tilde{\sigma_k}))$$

et donc

$$S_n(i) \oplus S_n(j) \left(\sum_k \lambda_k \tilde{\sigma_k} \right) = \left(\sum_k \lambda_k (i \circ \tilde{\sigma_k}), \sum_k \lambda_k (j \circ \tilde{\sigma_k}) \right) = (c, c')$$

La suite est donc exacte en $S_n(U) \oplus S_n(V)$.

Considérons maintenant le recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U, V\}$ de X. L'application $S_n(i_U) - S_n(i_V)$ est à valeurs dans $S_n^{\mathcal{U}}(X)$. Pour $\sigma \in C(\Delta^n, X)$ telle que $\sigma(\Delta^n) \subset U$, on a $(S_n(i_U) - S_n(i_V))(\sigma, 0) = i_U \circ \sigma = \sigma$. Pour $\sigma \in C(\Delta^n, X)$ telle que $\sigma(\Delta^n) \subset V$, on a $(S_n(i_U) - S_n(i_V))(0, -\sigma) = i_V \circ \sigma = \sigma$. Il suit donc que $S_n(i_U) - S_n(i_V) : S_n(U) \oplus S_n(V) \to S_n^{\mathcal{U}}(X)$ est surjective, et la suite

$$0 \to S_n(U \cap V) \xrightarrow{S_n(i) \oplus S_n(j)} S_n(U) \oplus S_n(V) \xrightarrow{S_n(i_U) - S_n(i_V)} S_n^{\mathcal{U}}(X) \to 0$$

est exacte. Ces applications commutent aux différentielles et on obtient ainsi une suite exacte de complexes

$$0 \to S_\bullet(U \cap V) \xrightarrow{S_\bullet(i) \oplus S_\bullet(j)} S_\bullet(U) \oplus S_\bullet(V) \xrightarrow{S_\bullet(i_U) - S_\bullet(i_V)} S_\bullet^{\mathcal{U}}(X) \to 0$$

En combinant la longue suite exacte d'homologie (théorème C.3) et la proposition D.5, on obtient bien la suite exacte de Mayer-Vietoris. □

D.4. Subdivision barycentrique

Pour terminer la preuve du théorème de Mayer-Vietoris, il reste donc à montrer la proposition D.5. On introduit pour cela la subdivision barycentrique. On commence par une construction préliminaire.

Lemme D.6. Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ une partie convexe et soit $v \in D$. Pour tout $\sigma \in C(\Delta^p, D)$, on note $v * \sigma \in C(\Delta^{p+1}, D)$ défini par

$$v * \sigma(t_0, \dots, t_{p+1}) = \begin{cases} v & \text{si } t_0 = 1 \\ (1-t_0)\sigma(\frac{t_1}{1-t_0}, \dots, \frac{t_{p+1}}{1-t_0}) + t_0 v & \text{si } t_0 \neq 1 \end{cases}$$

En prolongeant linéairement, cela définit pour tout p un morphisme de groupes $v * - : S_p(D) \to S_{p+1}(D)$ et on a pour tout $c \in S_p(D)$

$$\partial_{p+1}(v * c) = \begin{cases} c - v * \partial_p(c) & \text{si } p > 0 \\ c - \varepsilon(c) v, & \text{si } p = 0 \end{cases}$$

où $\varepsilon : S_0(D) \to \mathbb{Z}$ est le morphisme de groupes défini par $\varepsilon(\sigma) = 1$ pour tout $\sigma \in C(\Delta^0, C)$, et v est vu comme le 0-simplexe $1 \mapsto v$.

Preuve. Il est facile de voir que $v * \sigma$ est bien continue. Soit $p > 0$ et soit $\sigma \in C(\Delta^p, D)$. On a

$$\partial_{p+1}(v * \sigma) = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i (v * \sigma) \circ \delta_i^{p+1} = \sigma + \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i (v * \sigma) \circ \delta_i^{p+1}$$

Par ailleurs

$$v * \partial_p(\sigma) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i v * (\sigma \circ \delta_i^p)$$

On vérifie à partir des définitions que $(v * \sigma) \circ \delta_i^{p+1} = v * (\sigma \circ \delta_{i-1}^p)$ pour $1 \leq i \leq p+1$, on obtient donc l'identité recherchée. La vérification en $p = 0$ est directe. $\square$

Pour tout $p \geq 0$, on note $\beta^p = (\frac{1}{p+1}, \dots, \frac{1}{p+1}) \in \Delta^p$: c'est le barycentre du simplexe standard Δ^p.

Définition-Proposition D.7. Il existe pour tout espace topologique X et tout $p \geq 0$, un morphisme de groupes

$$\mathcal{B}_p^X : S_p(X) \longrightarrow S_p(X)$$

tel que $\mathcal{B}_0 = \mathrm{id}$, et pour $p > 0$ et $\sigma \in C(\Delta^p, X)$,

$$\mathcal{B}_p^X(\sigma) = S_p(\sigma)\left(\beta^p * \mathcal{B}_{p-1}^{\Delta^p}(\partial_p(\mathrm{id}_{\Delta^p}))\right)$$

que l'on appelle **l'opérateur de subdivision (barycentrique) de** X.

Les morphismes sont contruits par récurrence sur p. Pour $p = 1$ et $\sigma \in C(\Delta^1, X)$ on a

$$\mathcal{B}_1^X(\sigma) = S_1(\sigma)(\beta^1 * \delta_0^1 - \beta^1 * \delta_1^1) = \sigma \circ (\beta^1 * \delta_0^1) - \sigma \circ (\beta^1 * \delta_1^1)$$

où pour $t \in [0, 1]$, on a

$$\sigma \circ (\beta^1 * \delta_0^1)(t, 1-t) = \sigma(\frac{t}{2}, 1 - \frac{t}{2}), \quad \sigma \circ (\beta^1 * \delta_1^1)(t, 1-t) = \sigma(1 - \frac{t}{2}, \frac{t}{2})$$

On voit donc bien que l'opérateur de subdivision transforme un simplexe singulier en une combinaison linéaire de simplexes singuliers obtenus en le subdivisant relativement à son barycentre. Les principales propriétés de la subdivision barycentrique sont données dans la proposition suivante.

Proposition D.8. Soit X un espace topologique.

1. $\mathcal{B}^X = (\mathcal{B}_p^X)$ est un morphisme de complexes $S_\bullet(X) \to S_\bullet(X)$. De plus si $f : X \to Y$ est une application continue, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_p(f) \circ \mathcal{B}_p^X = \mathcal{B}_p^Y \circ S_p(f)$.
2. Il existe une homotopie h^X entre $\mathcal{B}^X = (\mathcal{B}_p^X)$ et l'identité, et si $f : X \to Y$ est une application continue, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_{p+1}(f) \circ h_p^X = h_p^Y \circ S_p(f)$.

Preuve. 1. On commence par montrer la dernière assertion (fonctorialité). Soit $f : X \to Y$ continue et $\sigma \in C(\Delta^p, X)$. Alors

$$\begin{aligned} S_p(f) \circ \mathcal{B}_p^X(\sigma) &= S_p(f) \circ S_p(\sigma)\left(\beta^p * \mathcal{B}_{p-1}^{\Delta^p}(\partial_p(\mathrm{id}_{\Delta^p}))\right) = S_p(f \circ \sigma)\left(\beta^p * \mathcal{B}_{p-1}^{\Delta^p}(\partial_p(\mathrm{id}_{\Delta^p}))\right) \\ &= \mathcal{B}_p^Y(f \circ \sigma) = \mathcal{B}_p^Y(S_p(f)(\sigma)) = \mathcal{B}_p^Y \circ S_p(f)(\sigma) \end{aligned}$$

Pour montrer que $\mathcal{B}^X$ est un morphisme de complexes, on doit vérifier que pour tout $p \geq 0$ et tout espace topologique X, on a

$$\partial_p \circ \mathcal{B}_p^X = \mathcal{B}_{p-1}^X \circ \partial_p$$

On va le montrer par récurrence sur p. En $p = 0$ c'est évidemment vrai ($\mathcal{B}_{-1} = 0$). Pour $p \geq 0$ et $\sigma \in C(\Delta^p, X)$, on a

$$\begin{aligned} \partial_p \circ \mathcal{B}_p^X(\sigma) &= \partial_p\left(S_p(\sigma)\left(\beta^p * \mathcal{B}_{p-1}^{\Delta^p}(\partial_p(\mathrm{id}_{\Delta^p}))\right)\right) \\ &= S_{p-1}(\sigma) \circ \partial_p\left(\left(\beta^p * \mathcal{B}_{p-1}^{\Delta^p}(\partial_p(\mathrm{id}_{\Delta^p}))\right)\right) \end{aligned}$$

Pour $p = 1$ cela donne, en utilisant le lemme précédent,

$$\begin{aligned} \partial_1 \circ \mathcal{B}_1^X(\sigma) &= S_0(\sigma)\left(\partial_1(\beta^1 * \partial_1(\mathrm{id}_{\Delta^1}))\right) = S_0(\sigma)\left(\partial_1(\mathrm{id}_{\Delta^1}) - \varepsilon(\partial_1(\mathrm{id}_{\Delta^1}))\beta^1\right) \\ &= S_0(\sigma)\left(\partial_1(\mathrm{id}_{\Delta^1})\right) = \partial_1(\sigma) = \partial_1 \circ \mathcal{B}_0^X(\sigma) \end{aligned}$$

On suppose maintenant que $p \geq 2$ et le résultat montré pour $p-1$. On a, par le lemme précédent, le premier résultat et l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} \partial_p \circ \mathcal{B}_p^X(\sigma) &= S_{p-1}(\sigma)\left(\mathcal{B}_{p-1}^{\Delta^p}(\partial_p(\mathrm{id}_{\Delta^p})) - \beta^p * \partial_{p-1}\left(\mathcal{B}_{p-1}^{\Delta^p}(\partial_p(\mathrm{id}_{\Delta^p}))\right)\right) \\ &= \mathcal{B}_{p-1}^X \circ S_{p-1}(\sigma)((\partial_p(\mathrm{id}_{\Delta^p})) - S_{p-1}(\sigma)\left(\beta^p * \mathcal{B}_{p-2}^{\Delta^p}(\partial_{p-1}(\partial_p(\mathrm{id}_{\Delta^p})\right) \\ &= \mathcal{B}_{p-1}^X(\partial_p \circ S_p(\sigma)(\mathrm{id}_{\Delta^p})) = \mathcal{B}_{p-1}^X \circ \partial_p(\sigma) \end{aligned}$$

ce qui est le résultat cherché.

2. Il faut maintenant construire une homotopie de $\mathcal{B}^X$ à l'identité. Il faut donc construire pour tout espace topologique X des morphismes de groupes $h_p^X : S_p(X) \to S_{p+1}(X)$, $p \geq 0$, tels que

$$\partial_{p+1} \circ h_p^X + h_{p-1}^X \circ \partial_p = \mathrm{id} - \mathcal{B}_p^X \quad (R_p)$$

On construit les h_p^X par récurrence sur p, avec si $p = 0$, $h_0^X = 0$, et si $p > 0$ et $\sigma \in C(\Delta^p, X)$,

$$h_p^X(\sigma) = S_{p+1}(\sigma)\left(\beta^p * \left(\mathrm{id}_{\Delta^p} - \mathcal{B}_p^{\Delta^p}(\mathrm{id}_{\Delta^p}) - h_{p-1}^{\Delta^p}(\partial_p(\mathrm{id}_{\Delta^p}))\right)\right) \in S_{p+1}(X)$$

Pour toute application continue $f : X \to Y$ et $\sigma \in C(\Delta^p, X)$, on a

$$\begin{aligned}
S_{p+1}(f) \circ h_p^X(\sigma) &= S_{p+1}(f) \circ S_{p+1}(\sigma) \left(\beta^p * \left(\mathrm{id}_{\Delta^p} - \mathcal{B}_p^{\Delta^p}(\mathrm{id}_{\Delta^p}) - h_{p-1}^{\Delta^p}(\partial_p(\mathrm{id}_{\Delta^p}))\right)\right) \\
&= S_{p+1}(f \circ \sigma) \left(\beta^p * \left(\mathrm{id}_{\Delta^p} - \mathcal{B}_p^{\Delta^p}(\mathrm{id}_{\Delta^p}) - h_{p-1}^{\Delta^p}(\partial_p(\mathrm{id}_{\Delta^p}))\right)\right) \\
&= h_p^Y(f \circ \sigma) = h_p^Y(S_p(f)(\sigma)) \\
&= h_p^Y \circ S_p(f)(\sigma)
\end{aligned}$$

ce qui montre le dernier point.

On montre maintenant les relations (R_p) par récurrence sur p. En $p = 0$ la relation est évidemment vraie car $\mathcal{B}_0^X = \mathrm{id}$ (bien sûr $h_{-1} = 0$ par convention). Supposons $p > 0$ et les relations R_{p-1} vérifiées. Notons $\omega = \mathrm{id}_{\Delta^p} - \mathcal{B}_p^{\Delta^p}(\mathrm{id}_{\Delta^p}) - h_{p-1}^{\Delta^p}(\partial_p(\mathrm{id}_{\Delta^p})) \in S_p(\Delta^p)$. On a, pour $\sigma \in C(\Delta^p, X)$

$$\begin{aligned}
\partial_{p+1} \circ h_p^X(\sigma) &= \partial_{p+1}(S_{p+1}(\sigma)(\beta^p * \omega)) = S_p(\sigma)(\partial_{p+1}(\beta^p * \omega)) \\
&= S_p(\sigma)(\omega - \beta^p * \partial_p(\omega)) = S_p(\sigma)(\omega) - S_p(\sigma)(\beta^p * \partial_p(\omega))
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\partial_p(\omega) &= \partial_p \left(\mathrm{id}_{\Delta^p} - \mathcal{B}_p^{\Delta^p}(\mathrm{id}_{\Delta^p}) - h_{p-1}^{\Delta^p}(\partial_p(\mathrm{id}_{\Delta^p}))\right) \\
&= \partial_p(\mathrm{id}_{\Delta^p}) - \partial_p(\mathcal{B}_p^{\Delta^p}(\mathrm{id}_{\Delta^p})) - \partial_p(h_{p-1}^{\Delta^p}(\partial_p(\mathrm{id}_{\Delta^p}))) \\
&= \partial_p(\mathrm{id}_{\Delta^p}) - \mathcal{B}_{p-1}^{\Delta^p}(\delta_p(\mathrm{id}_{\Delta^p})) - \partial_p(h_{p-1}^{\Delta^p}(\partial_p(\mathrm{id}_{\Delta^p})))
\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence on a

$$\partial_p \circ h_{p-1}^{\Delta^p} = -h_{p-1}^{\Delta^p} \circ \partial_{p-1} + \mathrm{id} - \mathcal{B}_{p-1}^{\Delta^p}$$

d'où

$$\partial_p \circ h_{p-1}^{\Delta^p} \circ \partial_p = \partial_p - \mathcal{B}_{p-1}^{\Delta^p} \circ \partial_p$$

et on en déduit que $\partial_p(\omega) = 0$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\partial_{p+1} \circ h_p^X(\sigma) &= S_p(\sigma)(\omega) = S_p(\sigma)(\mathrm{id}_{\Delta^p} - \mathcal{B}_p^{\Delta^p}(\mathrm{id}_{\Delta^p}) - h_{p-1}^{\Delta^p}(\partial_p(\mathrm{id}_{\Delta^p}))) \\
&= \sigma - S_p(\sigma)(\mathcal{B}_p^{\Delta^p}(\mathrm{id}_{\Delta^p})) - S_p(\sigma)(h_{p-1}^{\Delta^p}(\partial_p(\mathrm{id}_{\Delta^p}))) \\
&= \sigma - \mathcal{B}_p^X(S_p(\sigma)(\mathrm{id}_{\Delta^p})) - h_{p-1}^X(S_p(\sigma)(\partial_p(\mathrm{id}_{\Delta^p}))) \\
&= \sigma - \mathcal{B}_p^X(\sigma) - h_{p-1}^X(\partial_p(\sigma))
\end{aligned}$$

ce qui démontre bien la relation (R_p). □

Une autre propriété importante, en vue de la preuve de la proposition D.5, est la suivante.

Proposition D.9. Soit X un espace topologique et soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de X. Soit $c \in S_p(X)$. Il existe $m \geq 0$ tel que $(\mathcal{B}_p^X)^m(c) \in S_p^{\mathcal{U}}(X)$.

Preuve. On aura besoin de deux lemmes. Rappelons d'abord que si X est un espace métrique et $K \subset X$ est une partie bornée, le diamètre de K est défini par $\mathrm{diam}(K) = \sup\{d(x,y),\ x, y \in K\}$. Si $v_0, \ldots, v_p \in \mathbb{R}^n$ (muni de sa norme euclidienne usuelle), on note $[v_0, \ldots, v_p]$ leur enveloppe convexe.

Lemme D.10. Soient $v_0, \ldots, v_p \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\mathrm{diam}([v_0, \ldots, v_p]) = \max_{i,j}(||v_i - v_j||)$$

Preuve du lemme. Soient $x, y \in [v_0, \dots, v_p]$. On a $x = \sum_{j=0}^{p} \lambda_j v_j$, avec $\sum_{j=0}^{p} \lambda_j = 1$ et $0 \leq \lambda_j \leq 1$ pour tout j. On a
$$||x-y|| = ||\sum_j \lambda_j (v_j - y)|| \leq \sum_j \lambda_j ||v_j - y|| \leq \max_j ||v_j - y||$$
En particulier pour tout i, on a
$$||x - v_i|| = ||v_i - x|| \leq \max_j ||v_j - v_i||, \text{ et } \max_i (||x - v_i||) \leq \max_{i,j} (||v_i - v_j||)$$
C'est vrai pour tout x, donc
$$||x-y|| \leq \max_j ||v_j - y|| \leq \max_{i,j} (||v_i - v_j||)$$
Le diamètre est donc plus petit que $\max_{i,j}(||v_i - v_j||)$, l'inégalité inverse étant immédiate. □

Si $v_0, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$, on note encore $[v_0, \dots, v_p]$ le p-simplexe singulier de $\mathbb{R}^n$
$$\begin{aligned} [v_0, \dots, v_p] : \Delta^p &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\lambda_0, \dots, \lambda_p) &\longmapsto \sum_{i=0}^{p} \lambda_i v_i \end{aligned}$$
dont l'image est $[v_0, \dots, v_p]$. Un tel p-simplexe singulier de $\mathbb{R}^n$ est dit affine. On a
$$\partial_p([v_0, \dots, v_p]) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i [v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_p] \in S_{p-1}(\mathbb{R}^n)$$
où le symbole $\widehat{v_i}$ indique l'omission. Par ailleurs pour $v \in \mathbb{R}^n$, on a $v * [v_0, \dots, v_p] = [v, v_0, \dots, v_p]$.

Lemme D.11. Soient $v_0, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$, et D leur enveloppe convexe. Alors $\mathcal{B}_p^D([v_0, \dots, v_p]) \in S_p(D)$ est une combinaison linéaire de p-simplexes affines de diamètre au plus $\frac{p}{p+1}\mathrm{diam}([v_0, \dots, v_p])$.

Preuve du lemme. Notons $g_D = \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} v_i$ le barycentre de D. On commence par établir la formule suivante
$$\mathcal{B}_p^D([v_0, \dots, v_p]) = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j g_D * \mathcal{B}_{p-1}^D([v_0, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_p])$$
Tout d'abord, si $e_0, \dots, e_p$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{p+1}$, on a
$$\mathcal{B}_p^{\Delta^p}([e_0, \dots, e_p]) = \mathcal{B}_p^{\Delta^p}(\mathrm{id}_{\Delta^p}) = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \beta^p * \mathcal{B}_{p-1}^{\Delta^p}(\delta_j^p) = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \beta^p * \mathcal{B}_{p-1}^{\Delta^p}([e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_p])$$
On a ensuite
$$\begin{aligned} \mathcal{B}_p^D([v_0, \dots, v_p]) &= S_p([v_0, \dots, v_p])(\mathcal{B}_p^{\Delta^p}(\mathrm{id}_{\Delta^p})) \\ &= S_p([v_0, \dots, v_p]) \left(\sum_{j=0}^{p} (-1)^j \beta^p * \mathcal{B}_{p-1}^{\Delta^p}([e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_p]) \right) \end{aligned}$$
On vérifie alors que pour $\tau \in C(\Delta^{p-1}, \Delta^p)$, on a $[v_0, \dots, v_p] \circ (\beta^p * \tau) = g_D * ([v_0, \dots, v_p] \circ \tau)$ (en utilisant le fait que $[v_0, \dots, v_p]$ préserve les combinaison convexes), et donc
$$\begin{aligned} \mathcal{B}_p^D([v_0, \dots, v_p]) &= \sum_{j=0}^{p} (-1)^j g_D * S_p([v_0, \dots, v_p])(\mathcal{B}_{p-1}^{\Delta^p}([e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_p])) \\ &= \sum_{j=0}^{p} (-1)^j g_D * \left(\mathcal{B}_{p-1}^D(S_p([v_0, \dots, v_p])([e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_p])) \right) \\ &= \sum_{j=0}^{p} (-1)^j g_D * \left(\mathcal{B}_{p-1}^D([v_0, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_p]) \right) \end{aligned}$$

ce qui est la formule cherchée. On a vu ici $[v_0, \dots, v_p]$ comme un p-simplexe à valeurs dans D, mais le même raisonnement fonctionne en remplaçant D par $\mathbb{R}^n$, et donne

$$\mathcal{B}_p^{\mathbb{R}^n}([v_0, \dots, v_p]) = \sum_{j=0}^{p}(-1)^j g_D * \mathcal{B}_{p-1}^{\mathbb{R}^n}([v_0, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_p])$$

Montrons maintenant par récurrence sur p que $\mathcal{B}_p^{\mathbb{R}^n}([v_0, \dots, v_p]) \in S_p(\mathbb{R}^n)$ est une combinaison linéaire de p-simplexes affines à valeurs dans $[v_0, \dots, v_p]$ et de diamètre au plus $\frac{p}{p+1}\mathrm{diam}([v_0, \dots, v_p])$: cela donnera le résultat attendu pour $\mathcal{B}_p^D([v_0, \dots, v_p]) \in S_p(D)$ (le diamètre des simplexes ne dépendant pas de l'inclusion $D \subset \mathbb{R}^n$).

Pour $p = 0$ le résultat est clair, le diamètre d'un point étant 0. Supposons donc $p > 0$ et le résultat montré en rang $< p$. Par hypothèse de récurrence, les $\mathcal{B}_{p-1}^{\mathbb{R}^n}([v_0, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_p])$ sont des combinaisons linéaires de simplexes affines à valeurs dans $[v_0, \dots, \widehat{v_j}, \dots v_p]$ (donc dans $[v_0, \dots, v_p]$) de diamètre $\leq \frac{p-1}{p}\mathrm{diam}[v_0, \dots, \widehat{v_j}, \dots v_p] \leq \frac{p-1}{p}\mathrm{diam}([v_0, \dots, v_p])$). Il suit donc que $\mathcal{B}_p^{\mathbb{R}^n}([v_0, \dots, v_p])$ est combinaison linéaire de simplexes affines du type

$$g_D * [w_0, \dots, w_k] = [g_D, w_0, \dots, w_k]$$

où les w_i sont dans D et $\mathrm{diam}[w_0, \dots, w_k] \leq \frac{p-1}{p}\mathrm{diam}([v_0, \dots, v_p]) \leq \frac{p}{p+1}\mathrm{diam}([v_0, \dots, v_p])$. Alors

$$\begin{aligned}\mathrm{diam}[g_D, w_0, \dots, w_k] &= \max_{i,j}(||g_D - w_i||, ||w_i - w_j||) = \max(\mathrm{diam}([w_0, \dots, w_k]), \max_i(||g_D - w_i||) \\ &\leq \max\left(\frac{p}{p+1}\mathrm{diam}([v_0, \dots, v_p]), \sup_{x \in D}(||g_D - x||)\right)\end{aligned}$$

Par ailleurs comme dans le lemme précédent on voit que pour tout $x \in D$, on a $||g_D - x|| \leq \max_j ||g_D - v_j||$, et on a

$$\begin{aligned}||g_D - v_j|| &= ||\frac{1}{p+1}(\sum_i v_i) - v_j|| \leq \frac{1}{p+1}\sum_i ||v_i - v_j|| \\ &\leq \frac{p}{p+1}\max_{i,j}||v_i - v_j|| = \frac{p}{p+1}\mathrm{diam}([v_0, \dots, v_p])\end{aligned}$$

On obtient finalement

$$\mathrm{diam}[g_D, w_0, \dots, w_k] \leq \frac{p}{p+1}\mathrm{diam}([v_0, \dots, v_p])$$

ce qui est l'inégalité recherchée. □

On peut maintenant montrer la proposition. Soit $\sigma \in C(\Delta^p, X)$ un p-simplexe singulier. On a (proposition D.8) $S_p(\sigma) \circ \mathcal{B}_p^{\Delta^p} = \mathcal{B}_p^X \circ S_p(\sigma)$, d'où $S_p(\sigma) \circ \mathcal{B}_p^{\Delta^p}(\mathrm{id}_{\Delta^p}) = \mathcal{B}_p^X \circ S_p(\sigma)(\mathrm{id}_{\Delta^p}) = \mathcal{B}_p^X(\sigma)$ et de même pour tout $m \geq 0$

$$(\mathcal{B}_p^X)^m(\sigma) = S_p(\sigma) \circ (\mathcal{B}_p^{\Delta^p})^m(\mathrm{id}_{\Delta^p})$$

D'autre part id_{Δ^p} est le simplexe affine $[e_0, \dots, e_p]$ (où $e_0, \dots, e_p$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{p+1}$). Le lemme précédent assure donc que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $m \geq 0$ tel que $k \geq m \Rightarrow (\mathcal{B}_p^{\Delta^p})^k(\mathrm{id}_{\Delta^p}) \in S_p(\Delta^p)$ est une combinaison linéaires de simplexes affines de diamètre $< \epsilon$.

Considérons maintenant le recouvrement ouvert suivant de l'espace métrique compact Δ^p :

$$\sigma^{-1}(U),\ U \in \mathcal{U}$$

Soit $\epsilon > 0$ un nombre de Lebesgue de ce recouvrement (c'est-à-dire que toute partie bornée T de Δ^p de diamètre $< \epsilon$ est contenue dans un des ouverts de ce recouvrement, un nombre de Lebesgue existe toujours pour un espace métrique compact, voir par exemple le livre de Lee). Les considérations précédentes assurent qu'il existe $m \geq 0$ tel que $k \geq m \Rightarrow (\mathcal{B}_p^{\Delta^p})^k(\mathrm{id}_{\Delta^p}) \in S_p(\Delta^p)$ soit une combinaison linéaires de simplexes affines de diamètre $< \epsilon$, chacun de ces simplexes étant donc à valeurs dans $\sigma^{-1}(U)$ pour un $U \in \mathcal{U}$. Il suit donc que pour $k \geq m$,

$$(\mathcal{B}_p^X)^k(\sigma) = S_p(\sigma) \circ (\mathcal{B}_p^{\Delta^p})^k(\mathrm{id}_{\Delta^p})$$

est une combinaison linéaires de simplexes étant chacun à valeurs dans U pour un $U \in \mathcal{U}$, d'où $(\mathcal{B}_p^X)^k(\sigma) \in S_p^{\mathcal{U}}(X)$.

Si maintenant $c \in S_p(X)$ est une combinaison linéaire de p-simplexes singuliers, on prend un m comme précédemment pour chacun de ces simplexes, puis on prend le maximum de ces m pour obtenir l tel que $(\mathcal{B}_p^X)^l(c) \in S_p^{\mathcal{U}}(X)$. □

Preuve de la proposition D.5 (et donc fin de la preuve du théorème de Mayer-Vietoris). Soit donc X un espace topologique et $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de X. On doit montrer que l'inclusion de complexes $S_\bullet^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow S_\bullet(X)$, $a \mapsto a$ induit pour tout $n \geq 0$ un isomorphisme de groupes $\nu : H_n^{\mathcal{U}}(X) \simeq H_n(X)$, $[a] \mapsto [a]$.

Soit donc $a \in S_n^{\mathcal{U}}(X)$ dans le noyau de ν : $[a] = 0$ dans $H_n(X)$, c'est-à-dire il existe $b \in S_{n+1}(X)$ tel que $a = \partial_{n+1}(b)$. Par la proposition précédente il existe $p \geq 0$ tel que $(\mathcal{B}^X)^p(b) \in S_{n+1}^{\mathcal{U}}(X)$. $\mathcal{B}^X$ étant homotope à l'identité (proposition D.8), il en est de même de $(\mathcal{B}^X)^p$ (proposition D.4), et soit donc T une homotopie entre $(\mathcal{B}^X)^p$ et l'identité de $S_\bullet(X)$. On a

$$(\mathcal{B}_{n+1}^X)^p(b) - b = T_n(\partial_{n+1}(b)) + \partial_{n+2}(T_{n+1}(b)) = T_n(a) + \partial_{n+2}(T_{n+1}(b))$$

Ainsi

$$\partial_{n+1}((\mathcal{B}_{n+1}^X)^p(b)) - \partial_{n+1}(b) = \partial_{n+1}(T_n(a)) \quad \text{et} \quad a = \partial_{n+1}((\mathcal{B}_{n+1}^X)^p(b) - T_n(a))$$

Par la fonctorialité de l'homotopie T (deuxième partie de la proposition D.8) et le fait que $a \in S_n^{\mathcal{U}}(X)$, on a $T_n(a) \in S_n^{\mathcal{U}}(X)$, et donc $[a] = 0$ dans $H_n^{\mathcal{U}}(X)$. Ainsi ν est injective.

Soit maintenant $a \in S_n(X)$ tel que $\partial_n(a) = 0$. Par la proposition précédente il existe $p \geq 0$ tel que $(\mathcal{B}^X)^p(a) \in S_n^{\mathcal{U}}(X)$. En reprenant les notation précédentes soit T une homotopie entre $(\mathcal{B}^X)^p$ et l'identité de $S_\bullet(X)$. On a

$$(\mathcal{B}_n^X)^p(a) - a = T_{n-1}(\partial_n(a)) + \partial_{n+1}(T_n(a)) = \partial_{n+1}(T_n(a)) \Rightarrow a = (\mathcal{B}_n^X)^p(a) - \partial_{n+1}(T_n(a))$$

Comme $\mathcal{B}^X$ est un morphisme de complexes, $(\mathcal{B}_n^X)^p(a)$ est un n-cycle et ainsi $[a] = [(\mathcal{B}_n^X)^p(a)] = \nu([(\mathcal{B}_n^X)^p(a)])$, ce qui montre que ν est surjectif. Ainsi ν est un isomorphisme. □

E. Cohomologie simpliciale

On définit très brièvement, dans ce dernier paragraphe du chapitre, la cohomologie simpliciale d'un espace topologique.

Soit X un espace topologique. À X nous avons associé un complexe de groupes abéliens $S_\bullet(X)$. Soit M un groupe abélien, et condidérons le foncteur contravariant et additif $\mathrm{Hom}(-, M) : \mathsf{Ab} \to \mathsf{Ab}$ (Ab étant la catégorie des groupes abéliens, égale à $\mathsf{Mod}(\mathbb{Z})$). Appliquant ce foncteur $\mathrm{Hom}(-, M)$ au complexe $S_\bullet(X)$, on obtient un complexe de cochaines de groupes abéliens

$$\mathrm{Hom}(S_\bullet(X), M)$$

dont la cohomologie est, par définition, la cohomologie singulière de X à coefficients dans M

$$H^n(X, M) := H^n(\mathrm{Hom}(S_\bullet(X), M)), \ \forall n \geq 0$$

Si $\mathbb{K}$ est un corps commutatif, alors $H^n(X, \mathbb{K})$ désigne la cohomologie singulière de X à coefficients dans le goupe additif de $\mathbb{K}$. On a le résultat suivant.

Théorème E.1. Si $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique 0, alors on a pout tout n

$$H^n(X, \mathbb{K}) \simeq \mathrm{Hom}(H_n(X), \mathbb{K})$$

Le théorème est conséquence du résultat plus précis suivant.

Théorème E.2. Soit X un espace topologique et M un groupe abélien. Pour tout $n \geq 0$, il existe une suite exacte scindée de groupes abéliens

$$0 \to \mathrm{Ext}^1(H_{n-1}(X), M) \to H^n(X, M) \to \mathrm{Hom}(H_n(X), M) \to 0$$

où $\mathrm{Ext}^1(H_{n-1}(X), M)$ est un certain groupe abélien qui s'annule si M est divisible (en particulier si M est le groupe additif d'un corps de caractéristique zéro)

Ce dernier théorème est quant à lui conséquence du résultat général suivant.

Théorème E.3 (Théorème des coefficients universels)**.** Soit $\mathbf{C}$ un complexe de groupes abéliens formé de groupes abéliens libres. Si M est un groupe abélien, alors on a pour tout n une suite exacte scindée de groupes abéliens

$$0 \to \mathrm{Ext}^1(H_{n-1}(\mathbf{C}), M) \to H^n(\mathrm{Hom}(\mathbf{C}, M)) \to \mathrm{Hom}(H_n(\mathbf{C}), M) \to 0$$

où $\mathrm{Ext}^1(H_{n-1}(\mathbf{C}), M)$ est un certain groupe abélien qui s'annule si M est divisible.

Les groupes $\mathrm{Ext}^1(H_{n-1}(\mathbf{C}), M)$ seront définis dans la deuxième partie du cours.

IV Modules projectifs, injectifs

A. Motivation

Dans la suite, A sera une $\mathbb{K}$-algèbre sur un anneau commutatif $\mathbb{K}$. En particulier, si $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ alors A est un anneau.

Considérons une suite exacte

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0 \tag{A.1}$$

de A-modules (à gauche). On peut lui appliquer le foncteur $\mathrm{Hom}_A(-, N)$ où N est un A-module. La suite obtenue est-elle exacte ?

La réponse "simple" est non. On a cependant ceci.

Proposition A.1. Soit $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ une suite exacte de A-modules. Soit N un A-module. Alors la suite

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M'', N) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_A(M', N), \tag{A.2}$$

où $g^* = - \circ g$ et $f^* = - \circ f$, est exacte.

Preuve. ➢ Démontrons que le morphisme g^* est injectif. Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M'', N)$ un morphisme de A-modules tel que $g^*(\varphi) = 0$. On a donc $\varphi \circ g = 0$, c'est-à-dire que φ est nul sur l'image de g. Mais g est surjectif, donc φ est nul sur M'', autrement dit $\varphi = 0$.

➢ On a $f^* \circ g^* = 0$. En effet, pour tout $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M'', N)$, on a $f^* \circ g^*(\varphi) = \varphi \circ g \circ f = 0$ puisque $g \circ f = 0$. On en déduit que $\mathrm{Im}\, g^* \subset \mathrm{Ker}\, f^*$.

➢ Démontrons que $\mathrm{Ker}\, f^* \subset \mathrm{Im}\, g^*$. Soit $\psi \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ tel que $f^*(\psi) = 0$, c'est-à-dire que $\psi \circ f = 0$. On doit définir $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M'', N)$ tel que $g^*(\varphi) = \psi$, soit $\varphi \circ g = \psi$.
Soit donc $m'' \in M''$. Puisque g est surjectif, il existe $m \in M$ tel que $m'' = g(m)$. Nous allons poser $\varphi(m'') = \psi(m)$. A priori $\varphi(m'')$ n'est pas bien défini puisqu'il dépend du choix de m. Soit donc $m_1 \in M$ tel que $g(m_1) = m'' = g(m)$. On a alors $m_1 - m \in \mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Im}\, f$ donc il existe $m' \in M'$ tel que $m_1 - m = f(m')$. Par conséquent $\psi(m_1) = \psi(m + f(m')) = \psi(m) + \psi \circ f(m') = \psi(m)$. Donc $\varphi(m'')$ est bien défini et nous avons construit une application $\varphi : M'' \to N$.
De plus, $\varphi \circ g = \psi$ par construction.
Il reste à vérifier que φ est un morphisme de A-modules. Soit $(m_1'', m_2'', a) \in M'' \times M'' \times A$. Alors il existe $(m_1, m_2) \in M \times M$ tel que $m_1'' = g(m_1)$ et $m_2'' = g(m_2)$. On a donc $\varphi(m_1'') = \psi(m_1)$ et $\varphi(m_2'') = \psi(m_2)$. De plus, $g(m_1 + am_2) = g(m_1) + ag(m_2) = m_1'' + am_2''$ donc

$$\varphi(m_1'' + am_2'') = \psi(m_1 + am_2) = \psi(m_1) + a\psi(m_2) = \varphi(m_1'') + a\varphi(m_2''). \qquad \square$$

Le morphisme f^* n'est pas, en général, surjectif.

Cependant, il existe des situations dans lesquelles il l'est. Nous verrons que l'on peut

➢ soit ajouter des conditions sur la suite exacte (A.1) pour que la suite

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M'', N) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_A(M', N) \to 0 \tag{A.3}$$

soit exacte. Cette condition sera remplie en particulier lorsque le module M'' est libre, ou même si c'est un facteur direct d'un module libre (module *projectif*, voir plus loin).

- ➢ soit ajouter une condition sur le module M (module *injectif*) pour que le foncteur $\mathrm{Hom}_A(-, N)$ transforme toutes les suites (A.1) en des suites exactes.

La situation est similaire lorsque l'on applique le foncteur $\mathrm{Hom}_A(N, -)$ à la suite exacte (A.1) ; la suite $0 \to \mathrm{Hom}_A(N, M') \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_A(N, M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_A(N, M'')$ est toujours exacte, mais il faut ajouter des hypothèses sur la suite (A.1) ou sur le module M pour que g_* soit surjectif.

Une autre question se pose lorsque la suite (A.3) n'est pas exacte : quelle est l'image de f^* ? Nous verrons dans le chapitre V comment prolonger la suite (A.2) dans ce cas.

De plus, les modules projectifs et injectifs seront des outils indispensables pour construire certaines (co)homologies.

B. Suites exactes scindées

Définition-Proposition B.1. Soit $(\mathcal{E})$ $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ une suite exacte de A-modules. Les conditions suivantes sont équivalentes.

(1) Il existe un morphisme de A-modules $\sigma : M'' \to M$ tel que $g \circ \sigma = \mathrm{id}_{M''}$.

(2) Il existe un morphisme de A-modules $r : M \to M'$ tel que $r \circ f = \mathrm{id}_{M'}$.

De plus, si ces conditions sont vérifiées, alors $M = \operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Im} \sigma = \operatorname{Ker} r \oplus \operatorname{Im} f \cong M' \oplus M''$ en tant que A-modules.
Lorsque ces conditions sont satisfaites, on dit que la suite exacte $(\mathcal{E})$ est **scindée**. Le morphisme σ est appelé une **section** de g et le morphisme r est appelé **rétraction** de f.

Preuve. ➢ Supposons que *(1)* est vérifiée et démontrons que $M = \operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Im} \sigma$.

Soit $m \in M$. Alors $m = \sigma(g(m)) + (m - \sigma(g(m)))$ avec $\sigma(g(m)) \in \operatorname{Im} \sigma$. De plus, $g(m - \sigma(g(m))) = g(m) - \mathrm{id} \circ g(m) = 0$ donc $m - \sigma(g(m)) \in \operatorname{Ker} g$. Par conséquent, $M = \operatorname{Im} \sigma + \operatorname{Ker} g$.

Soit maintenant $m \in \operatorname{Im} \sigma \cap \operatorname{Ker} g$. Alors $m = \sigma(m'')$ et $g(m) = 0$. On a donc $0 = g(\sigma(m'')) = m''$ et donc $m = \sigma(0) = 0$. Donc $\operatorname{Im} \sigma \cap \operatorname{Ker} g = 0$.

- ➢ On démontre de même que si *(2)* est vérifiée alors $M = \operatorname{Ker} r \oplus \operatorname{Im} f$.
- ➢ Démontrons que *(1)⇒(2)*. Nous devons construire r. Nous savons que $M = \operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Im} \sigma = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im} \sigma$. Soit $m \in M$. Alors il existe un unique $(x, y) \in \operatorname{Im} f \times \operatorname{Im} \sigma$ tel que $m = x + y$. De plus, puisque $x \in \operatorname{Im} f$ et f est injective, il existe un unique $m' \in M'$ tel que $f(m') = x$. Posons $r(m) = m'$; ceci définit une application $r : M \to M'$. Il est clair que $r \circ f = \mathrm{id}_{M'}$. Il reste à démontrer que r est un morphisme de A-modules.

  Soit $(m_1, m_2, a) \in M \times M \times A$. Posons $m_1 = f(m_1') + y_1$ et $m_2 = f(m_2') + y_2$ avec $(m_1', m_2', y_1, y_2) \in M' \times M' \times \operatorname{Im} \sigma \times \operatorname{Im} \sigma$. Alors $r(m_1) = m_1'$ et $r(m_2) = m_2'$. De plus, $m_1 + am_2 = f(m_1' + am_2') + (y_1 + ay_2)$ avec $y_1 + ay_2 \in \operatorname{Im} \sigma$ donc $r(m_1 + am_2) = m_1' + am_2' = r(m_1) + ar(m_2)$.
- ➢ Démontrons que *(2)⇒(1)*. Nous devons construire σ. Nous savons que $M = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} r = \operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Ker} r$. Soit $m'' \in M''$. Alors il existe $m \in M$ tel que $m'' = g(m)$. Posons $m = x + y$ avec $(x, y) \in \operatorname{Ker} g \times \operatorname{Ker} r$. Nous allons poser $\sigma(m'') = y$. Cependant, cela n'est pas bien défini puisque y dépend du choix de m. Soit donc $m_1 \in M$ tel que $g(m_1) = m''$ et posons $m_1 = x_1 + y_1$ avec $(x_1, y_1) \in \operatorname{Ker} g \times \operatorname{Ker} r$. Alors $y - y_1 = m - m_1 + x_1 - x$ donc $y - y_1 \in \operatorname{Ker} r \cap \operatorname{Ker} g = 0$. On a donc $y_1 = y$ et donc $\sigma(m'') = y$ définit bien une application $\sigma : M'' \to M$. Il est clair que $g \circ \sigma = \mathrm{id}_{M''}$. Il reste à démontrer que σ est un morphisme de A-modules.

Soit $(m_1'', m_2'', a) \in M'' \times M'' \times A$. Posons $m_1'' = g(x_1+y_1)$ et $m_2'' = g(x_2+y_2)$ avec $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \operatorname{Ker} g \times \operatorname{Ker} g \times \operatorname{Ker} r \times \operatorname{Ker} r$. Alors $\sigma(m_1'') = y_1$ et $\sigma(m_2'') = y_2$. De plus, $m_1'' + am_2'' = g(y_1 + ay_2)$ avec $y_1 + ay_2 \in \operatorname{Ker} r$ donc $\sigma(m_1'' + am_2'') = y_1 + ay_2 = \sigma(m_1'') + a\sigma(m_2'')$.

➢ Enfin, puisque f et σ sont injectives on a $\operatorname{Im} f \cong M'$ et $\operatorname{Im} \sigma \cong M''$ d'où l'isomorphisme $M \cong M' \oplus M''$ lorsque les conditions sont satisfaites. □

Exemple B.2. Lorsque $\mathbb{K}$ est un corps, toutes les suites exactes $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ de $\mathbb{K}$-modules (ou $\mathbb{K}$-espaces vectoriels ici) sont scindées. En effet, tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel est libre (puisqu'il possède une base), donc tout morphisme surjectif de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels admet une section d'après le Corollaire A7 du Chapitre II du premier semestre.

Proposition B.3. Soit $(\mathcal{E})$ $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ une suite exacte *scindée* de A-modules. Alors, pour tout A-module N, les suites

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(M'', N) \xrightarrow{g^*} \operatorname{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{f^*} \operatorname{Hom}_A(M', N) \to 0 \quad \text{et} \tag{B.1}$$

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(N, M') \xrightarrow{f_*} \operatorname{Hom}_A(N, M) \xrightarrow{g_*} \operatorname{Hom}_A(N, M'') \to 0 \tag{B.2}$$

où $g^* = - \circ g$, $f^* = - \circ f$, $f_* = f \circ -$ et $g_* = g \circ -$, sont exactes.

Preuve. Pour la suite (B.1), il suffit de vérifier que f^* est surjective. Soit donc $\psi \in \operatorname{Hom}_A(M', N)$. Puisque la suite $(\mathcal{E})$ est scindée, il existe une rétraction r de f. On pose $\varphi = \psi \circ r \in \operatorname{Hom}_A(M, N)$. Alors $f^*(\varphi) = \varphi \circ f = \psi \circ r \circ f = \psi$.

Pour la suite (B.2), il suffit de vérifier que g_* est surjective. Soit donc $\psi \in \operatorname{Hom}_A(N, M'')$. Puisque la suite $(\mathcal{E})$ est scindée, il existe une section σ de g. On pose $\varphi = \sigma \circ \psi \in \operatorname{Hom}_A(N, M)$. Alors $g_*(\varphi) = g \circ \varphi = g \circ \sigma \circ \psi = \psi$. □

C. Modules projectifs

Définition C.1. *Un foncteur F de A-*Mod *dans B-*Mod *est dit* ***additif*** *si pour tout couple d'objets (M, N) de A-*Mod*, l'application* $\operatorname{Hom}_A(M, N) \to \operatorname{Hom}_B(FM, FN)$ *est un morphisme de groupes abéliens.*

Remarque C.2. Un foncteur additif F envoie l'objet nul sur l'objet nul et les morphismes nuls sur les morphismes nuls correspondant.

Remarque C.3. Si N est un A-module, alors le foncteur $\operatorname{Hom}_A(-, N)$ (*resp.* $\operatorname{Hom}_A(N, -)$) est un foncteur additif contravariant (*resp.* covariant) de A-Mod dans $\mathbb{K}$-Mod. On sait déjà que $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ est un groupe abélien, et la structure de $\mathbb{K}$-module sur $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ est donnée par

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall \varphi \in \operatorname{Hom}_A(M, N),\ \forall m \in M, \qquad (\lambda \cdot f)(m) := f(m\lambda) = \lambda f(m).$$

Cas particulier : lorsque $\mathbb{K}$ est un corps, le foncteur $\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(-, \mathbb{K})$ de la catégorie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels dans elle-même est le foncteur dualité.

Lemme C.4. Soit $F : A\text{-Mod} \to B\text{-Mod}$ un foncteur additif et soient $M_1, \ldots, M_n$ des A-modules. Alors $F(\bigoplus_{i=1}^n M_i) \cong \bigoplus_{i=1}^n F(M_i)$.

Preuve. On utilise la caractérisation de la somme directe finie donnée dans la proposition B13 du chapitre I au premier semestre. Posons $M := \bigoplus_{i=1}^n M_i$. Faisons la démonstration dans le cas où F est contravariant, la démonstration lorsque F est covariant est similaire.

Pour tout i, il existe des morphismes de A-modules $u_i : M_i \to M$ et $p_i : M \to M_i$ tels que

$$p_i \circ u_j = \delta_{ij} \ \mathrm{id}_{M_i} \ \text{ et } \ \mathrm{id}_M = \sum_{i=1}^n u_i \circ p_i.$$

On a donc des morphismes de B-modules $Fp_i : FM_i \to FM$ et $Fu_i : FM \to FM_i$ qui vérifient

$$Fu_j \circ Fp_j = \delta_{ij} \ \mathrm{id}_{FM_i} \ \text{ et } \ \mathrm{id}_{FM} = \sum_{i=1}^n Fp_i \circ Fu_i.$$

On en déduit que $FM \cong \bigoplus_{i=1}^n FM_i$. □

Définition C.5. ➢ *Soit F un foncteur additif covariant de A-Mod dans $\mathbb{K}$-Mod.*

*On dit que F est **exact** s'il transforme toute suite exacte $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ de A-modules en une suite exacte $0 \to F(M') \to F(M) \to F(M'') \to 0$ dans $\mathbb{K}$-Mod.*

➢ *Soit F un foncteur additif contravariant de A-Mod dans $\mathbb{K}$-Mod.*

*On dit que F est **exact** s'il transforme toute suite exacte $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ de A-modules en une suite exacte $0 \to F(M'') \to F(M) \to F(M') \to 0$ dans $\mathbb{K}$-Mod.*

Exemple C.6. Lorsque $\mathbb{K}$ est un corps, d'après la proposition B.3 et l'exemple qui précède, les foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(-, N)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M, -)$ sont exacts sur A-Mod. En particulier, le foncteur de dualité est exact sur $\mathbb{K}$-Mod.

Proposition C.7. Soit $F : A\text{-Mod} \to \mathbb{K}\text{-Mod}$ un foncteur covariant (*resp.* contravariant). Le foncteur F est exact si, et seulement s'il transforme toute suite exacte $M' \to M \to M''$ de A-modules en une suite exacte $F(M') \to F(M) \to F(M'')$ (*resp.* $F(M'') \to F(M) \to F(M')$) de $\mathbb{K}$-modules.

Preuve. Il est clair que si F transforme toute suite exacte $M' \to M \to M''$ en une suite exacte, alors F est exact puisque $F(0) = 0$.

Réciproquement, supposons que F est exact. Soit $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ une suite exacte. On a des suites exactes

$$0 \to \operatorname{Ker} f \to M' \xrightarrow{\hat{f}} \operatorname{Im} f \to 0$$

$$0 \to \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\hat{g}} \operatorname{Im} g \to 0$$

$$0 \to \operatorname{Im} g \xrightarrow{j} M'' \to M'' / \operatorname{Im} g \to 0$$

où i et j sont les inclusions naturelles et où $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont les corestrictions de f et g à leurs images respectives. Notons que $f = i \circ \hat{f}$ et $g = j \circ \hat{g}$.

➢ Supposons que le foncteur F est covariant.

On applique le foncteur F aux suites ci-dessous, ce qui donne par hypothèse des suites exactes

$$
\begin{aligned}
&0 \to F(\operatorname{Ker} f) \to FM' \xrightarrow{F\hat{f}} F(\operatorname{Im} f) \to 0\\
&0 \to F(\operatorname{Im} f) \xrightarrow{Fi} FM \xrightarrow{F\hat{g}} F(\operatorname{Im} g) \to 0\\
&0 \to F(\operatorname{Im} g) \xrightarrow{Fj} FM'' \to F(M''/\operatorname{Im} g) \to 0.
\end{aligned}
$$

On en déduit que $\operatorname{Im} Ff = \operatorname{Im}(Fi \circ F\hat{f}) \overset{(1)}{=} \operatorname{Im}(Fi) \overset{(2)}{=} \operatorname{Ker}(F\hat{g}) \overset{(3)}{=} \operatorname{Ker}(Fj \circ F\hat{g}) = \operatorname{Ker}(Fg)$ où (1) vient du fait que $F\hat{f}$ est surjectif, (2) vient de l'exactitude de la deuxième suite et (3) vient du fait que Fj est injectif.

La suite $FM' \xrightarrow{Ff} FM \xrightarrow{Fg} FM''$ est donc bien exacte.

➢ Supposons que le foncteur F est contravariant.

On applique le foncteur F aux suites ci-dessous, ce qui donne par hypothèse des suites exactes

$$
\begin{aligned}
&0 \leftarrow F(\operatorname{Ker} f) \leftarrow FM' \xleftarrow{F\hat{f}} F(\operatorname{Im} f) \leftarrow 0\\
&0 \leftarrow F(\operatorname{Im} f) \xleftarrow{Fi} FM \xleftarrow{F\hat{g}} F(\operatorname{Im} g) \leftarrow 0\\
&0 \leftarrow F(\operatorname{Im} g) \xleftarrow{Fj} FM'' \leftarrow F(M''/\operatorname{Im} g) \leftarrow 0.
\end{aligned}
$$

On en déduit que $\operatorname{Ker} Ff = \operatorname{Ker}(F\hat{f} \circ Fi) \overset{(1)}{=} \operatorname{Ker}(Fi) \overset{(2)}{=} \operatorname{Im}(F\hat{g}) \overset{(3)}{=} \operatorname{Im}(F\hat{g} \circ Fj) = \operatorname{Im}(Fg)$ où (1) vient du fait que $F\hat{f}$ est injectif, (2) vient de l'exactitude de la deuxième suite et (3) vient du fait que Fj est surjectif.

La suite $FM'' \xrightarrow{Fg} FM \xrightarrow{Ff} FM'$ est donc bien exacte. □

Remarque C.8. Supposons que l'on ait une suite exacte $\cdots \xrightarrow{\delta^4} M^3 \xrightarrow{\delta^3} M^2 \xrightarrow{\delta^2} M^1 \xrightarrow{\delta^1} M^0 \to 0$ de A-modules, c'est-à-dire que pour tout $n \geqslant 1$ on a $\operatorname{Im} \delta^{n+1} = \operatorname{Ker} \delta^n$ et δ^1 surjectif. On peut lui appliquer le foncteur $\operatorname{Hom}_A(-, N)$. On obtient alors un complexe

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(M^0, N) \xrightarrow{d_1} \operatorname{Hom}_A(M^1, N) \xrightarrow{d_2} \operatorname{Hom}_A(M^2, N) \xrightarrow{d_3} \operatorname{Hom}_A(M^3, N) \xrightarrow{d_4} \cdots$$

où $d_n = - \circ \delta^n$.

On peut donc considérer l'homologie de ce complexe, qui donne une indication sur le défaut d'exactitude du foncteur $\operatorname{Hom}_A(-, N)$.

Cependant, différents choix de la suite exacte au départ pourraient donner différentes cohomologies. Nous devrons travailler avec des suites exactes particulières, formées de modules projectifs ou injectifs.

Définition C.9. *Un A-module P est dit **projectif** si le foncteur covariant $\operatorname{Hom}_A(P, -)$ est exact.*

Proposition C.10. Soit P un A-module. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) P est projectif.

(ii) Toute suite exacte $0 \to M' \to M \to P \to 0$ de A-modules est scindée.

(iii) Pour tout morphisme *surjectif* $\varphi : M \to M''$ de A-modules et tout morphisme $f : P \to M''$ de A-modules, il existe un morphisme $\tilde{f} : P \to M$ de A-modules tel que $\varphi \circ \tilde{f} = f$:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "\exists \tilde{f}"'] \arrow[d, "\forall f"] & \\ M \arrow[r, "\forall \varphi"'] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(iv) Il existe un A-module X tel que $P \oplus X$ soit un A-module libre.

Preuve. ➢ *(i)⇒(ii)*. Supposons P surjectif. Soit $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \to 0$ une suite exacte. Puisque le foncteur $\mathrm{Hom}_A(P, -)$ est exact, la suite

$$\mathrm{Hom}_A(P, M) \xrightarrow{g\circ -} \mathrm{Hom}_A(P, P) \to 0$$

est exacte. En particulier, $\mathrm{id}_P \in \mathrm{Hom}_A(P, P)$ admet un antécédent : il existe $\sigma \in \mathrm{Hom}_A(P, M)$ tel que $g \circ \sigma = \mathrm{id}_P$. Autrement dit, σ est une section de g et donc la suite exacte du début est scindée.

➢ *(ii)⇒(iii)*. Soient $\varphi : M \to M''$ et $f : P \to M''$ des morphismes de A-modules avec φ surjectif. Considérons le A-module $X = \{(m, u) \in M \times P;\ \varphi(m) = f(u)\}$. Soient $g : X \to P$ et $h : X \to M$ les restrictions des projections ; ce sont des morphismes de A-modules. De plus, g est surjectif ; en effet, si $u \in P$, alors il existe $m \in M$ tel que $h(u) = \varphi(m)$ puisque φ est surjectif, et on a $u = g(m, u)$.

On a donc une suite exacte $0 \to \mathrm{Ker}\, g \to X \xrightarrow{g} P \to 0$, qui est donc scindée par hypothèse. Par conséquent, il existe une section σ de g, et on peut poser $\tilde{f} = h \circ \sigma$. On vérifie facilement que $\varphi \circ h = f \circ g$, c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker} \arrow[r] & X \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "h"'] & P \arrow[r] \arrow[d, "f"] \arrow[l, dotted, bend right, "\sigma"'] & 0 \\ & & M \arrow[r, "\varphi"'] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Finalement, on a bien $\varphi \circ \tilde{f} = \varphi \circ h \circ \sigma = f \circ g \circ \sigma = f$.

➢ *(iii)⇒(i)*. Nous devons démontrer que $\mathrm{Hom}_A(P, -)$ est exact. Soit $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ une suite exacte. Alors la suite $0 \to \mathrm{Hom}_A(P, M') \xrightarrow{f\circ -} \mathrm{Hom}_A(P, M) \xrightarrow{g\circ -} \mathrm{Hom}_A(P, M'')$ est exacte, il suffit donc de démontrer la surjectivité de $g \circ -$. Soit $h \in \mathrm{Hom}_A(P, M'')$. Par hypothèse, le morphisme g est surjectif donc il existe $\bar{h} \in \mathrm{Hom}_A(P, M)$ tel que $g \circ \bar{h} = h$, ce que nous voulions. Donc P est projectif.

➢ *(ii)⇒(iv)*. Vous avez vu au premier semestre (Corollaire A6 du chapitre II) que tout A-module est quotient d'un module libre. Il existe donc un module libre L et un morphisme surjectif $\varphi : L \to P$. Appliquons *(ii)*, la suite exacte $0 \to \mathrm{Ker}\,\varphi \to L \xrightarrow{\varphi} P \to 0$ est donc scindée ; on a donc $P \oplus \mathrm{Ker}\,\varphi \cong L$. Or L est libre donc $P \oplus \mathrm{Ker}\,\varphi$ est libre.

➢ *(iv)⇒(ii)*. Soit $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \to 0$ une suite exacte avec P projectif. Nous devons démontrer qu'elle est scindée. Par hypothèse, il existe un module X tel que $L = P \oplus X$ soit libre. De plus, on a une suite exacte $0 \to M'' \xrightarrow{(f\ 0)} M \oplus X \xrightarrow{\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_X \end{pmatrix}} P \oplus X \to 0$. Vous avez vu au premier semestre (Corollaire A7 du chapitre II) que $\Phi := \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_X \end{pmatrix}$ admet une section $s : P \oplus X \to M \oplus X$ puisque $P \oplus X$ est libre. De plus, $\operatorname{Im} s_{|P} \subset M$. En effet, si $u \in P$, alors $s(u) = m + x$ avec $m \in M$ et $x \in X$. Or $\Phi \circ s = \mathrm{id}_L$ donc $u = \Phi(m+x) = g(m) + x$ et donc $g(m) = u$ et $x = 0$ d'où $s(u) = m$. Notons que $g(s(u)) = g(m) = u$. On a donc défini un morphisme $\sigma : P \to M$ tel que $g \circ \sigma = \mathrm{id}_P$, autrement dit une section de g. La suite du début est donc scindée. □

Remarque C.11. En particulier, un module libre et tous ses facteurs directs sont projectifs.

Corollaire C.12. Soit $P = \bigoplus_{i \in I} P_i$ une somme directe (non vide) de A-modules. Alors P est projectif si, et seulement si, pour tout $i \in I$ le A-module P_i est projectif.

Preuve. ➢ ✧ Supposons que tous les P_i soient projectifs et démontrons que P est projectif. Pour tout $i \in I$ il existe un A-module X_i et un A-module libre L_i tels que $P_i \oplus X_i = L_i$. On en déduit que $P \oplus (\bigoplus_{i \in I} X_i) = (\bigoplus_{i \in I} L_i)$ qui est un module libre, donc P est projectif.

✧ <u>ou</u> Supposons que tous les P_i soient projectifs et démontrons que P est projectif. Considérons un diagramme
$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] & N \arrow[r] & 0 \\ & P \arrow[u, "\psi"] & \end{tikzcd}$$
. Alors pour tout $i \in I$ nous avons un diagramme
$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] & N \arrow[r] & 0 \\ & P_i \arrow[u, "\psi_i"] & \end{tikzcd}$$
où ψ_i est la restriction de ψ à P_i, et comme P_i est projectif il existe $\theta_i \in \operatorname{Hom}_A(P_i, M)$ tel que $\varphi \circ \theta_i = \psi_i$ pour tout $i \in I$.

Soit maintenant $x \in P$. Alors x s'écrit de manière unique $x = \sum_{i \in J} x_i$ avec $x_i \in P_i$ et J une partie finie de I. On peut donc poser $\theta(x) = \sum_{i \in J} \theta_i(x_i)$. Ceci définit une application $\theta : P \to M$. On vérifie facilement que c'est un morphisme de A-modules. De plus, $\varphi \circ \theta(x) = \varphi(\sum_{i \in J} \theta_i(x_i)) = \sum_{i \in J} \varphi \circ \theta_i(x_i) = \sum_{i \in J} \psi_i(x_i) = \sum_{i \in J} \psi(x_i) = \psi(\sum_{i \in J} x_i) = \psi(x)$ donc $\varphi \circ \theta = \psi$.

Donc P est projectif.

➢ Réciproquement, supposons que P soit projectif, soit $i \in I$ et montrons que P_i est projectif. Il existe un module X et un module libre L tels que $P \oplus X = L$. On a donc $P_i \oplus Y = L$ avec $Y = X \oplus \bigoplus_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} P_j$, donc P_i est projectif. □

Théorème C.13. Tout A-module est un quotient d'un A-module projectif.

Preuve. Vous avez vu au premier semestre (Corollaire A6 du chapitre II) que tout module est quotient d'un module libre. □

Exemple C.14. Si A est l'anneau $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, alors les A-modules $\mathbb{Z} \times \{0\}$ et $\{0\} \times \mathbb{Z}$ sont projectifs, mais pas libres.

D. Modules injectifs

Définition D.1. *Un A-module E est dit* ***injectif*** *si le foncteur contravariant* $\mathrm{Hom}_A(-, E)$ *est exact.*

Proposition D.2. Soit E un A-module. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) E est injectif.

(ii) Pour tout morphisme *injectif* $\varphi : E \to M$ de A-modules et tout morphisme $f : E \to N$ de A-modules, il existe un morphisme $\tilde{f} : M \to N$ de A-modules qui prolonge f :

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[u, "\forall f"] \arrow[r, "\forall \varphi"'] & N \arrow[ul, dotted, "\exists \tilde{f}"'] \end{tikzcd}$$

(iii) Toute suite exacte $0 \to E \to M \to M'' \to 0$ de A-modules est scindée.

Preuve. ➢ *(i)⇒(ii)*. On considère un diagramme

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\varphi"'] & N \end{tikzcd}$$

Par hypothèse, le foncteur $\mathrm{Hom}_A(-, E)$ est exact donc la suite exacte $0 \to M \xrightarrow{\pi} N$ induit une suite exacte $\mathrm{Hom}_A(N, E) \xrightarrow{-\circ\varphi} \mathrm{Hom}_A(M, E) \to 0$. Puisque $f \in \mathrm{Hom}_A(M, E)$, il a un antécédent $\tilde{f} \in \mathrm{Hom}_A(N, E)$, qui vérifie donc $\tilde{f} \circ \varphi = f$.

➢ *(ii)⇒(i)*. Exercice.

➢ *(ii)⇒(iii)*. Soit $0 \to E \xrightarrow{\varphi} M \to M'' \to 0$ une suite exacte. Il suffit de démontrer que φ admet une rétraction.
On a un diagramme

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & E \arrow[u, "\mathrm{id}_E"] \arrow[r, "\varphi"'] & M \end{tikzcd}$$

donc il existe $r \in \mathrm{Hom}_A(M, E)$ tel que $r \circ \varphi = \mathrm{id}_E$, c'est-à-dire que r est une rétraction de φ.

➢ *(iii)⇒(ii)*. On considère un diagramme

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\varphi"'] & N \end{tikzcd}$$

On construit un A-module X de la façcon suivante.
Le A-module $E \times N$ admet $K = \{(f(m), -\varphi(m));\ m \in M\}$ comme sous-A-module. On définit X comme étant le A-module quotient $X = (E \times N)/K$. Soit $p : E \times N \to X$ la projection

canonique. On définit également deux morphismes de A-modules $g : E \to X$ et $h : N \to X$ par $g(e) = p(e,0)$ et $h(n) = p(0,n)$ pour tout $(e,n) \in E \times N$.
On a alors $h \circ \varphi = g \circ f$. De plus, g est injectif ; en effet, si $g(e) = 0$ alors $(e,0) \in K$ c'est-à-dire qu'il existe $m \in M$ tel que $(e,0) = (f(m), -\varphi(m))$ dans $E \times N$. On a alors $\varphi(m) = 0$ donc $m = 0$ puisque φ est injectif, donc $f(m) = 0$ et donc $e = 0$.
On a donc construit une suite exacte $0 \to E \to X \to X/E \to 0$. Comme E est injectif, cette suite exacte est scindée par hypothèse. Soit donc $r \in \mathrm{Hom}_A(X,E)$ une rétraction de g, c'est-à-dire que $r \circ g = \mathrm{id}_E$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E \arrow[r, "g"'] & X \arrow[l, bend right, dotted, "r"'] \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[u, "f"] & N \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

Posons $\bar{f} = r \circ h$. On a alors $\bar{f} \circ \varphi = r \circ h \circ \varphi = r \circ g \circ f = \mathrm{id}_E \circ f = f$, ce que l'on voulait. $\square$

Exemple D.3. On note $A^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A, \mathbb{K})$ le dual de A. C'est un groupe abélien et c'est même un A-module à droite pour l'action suivante :

$$\forall (a,f) \in A \times A^*, \ \forall \lambda \in A, \ (f \cdot a)(\lambda) = f(a\lambda).$$

Supposons maintenant que $\mathbb{K}$ est un corps. Alors A^* est un A-module à droite injectif. En effet, pour tout A-module à droite X, on a un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (à vérifier...)

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Hom}_A(X, A^*) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X, \mathbb{K}) \\
f & \mapsto & \hat{f} : [x \mapsto f(x)(1)] \\
\tilde{g} : [x \mapsto [a \mapsto g(xa)]] & \hookleftarrow & g
\end{array}$$

et on a déjà vu que lorsque $\mathbb{K}$ est un corps, le foncteur de dualité $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(-, \mathbb{K})$ est exact sur la catégorie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Donc $\mathrm{Hom}_A(-, A^*)$ est exact sur la catégorie des A-modules à droite.

Corollaire D.4. Soit $E = \prod_{i \in I} E_i$ un produit (non vide) de A-modules. Alors E est injectif si, et seulement si, pour tout $i \in I$ le A-module E_i est injectif.

Preuve. Notons $\pi_i : E \to E_i$ les projections.

➢ Supposons que tous les E_i soient injectifs et démontrons que E est injectif. Considérons un diagramme

$$\begin{tikzcd}
& E & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[u, "f"] & N
\end{tikzcd} .$$

Alors pour tout $i \in I$ nous avons un diagramme

$$\begin{tikzcd}
& E_i & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[u, "f_i"] & N \arrow[ul, dotted, "\exists \tilde{f}_i"']
\end{tikzcd}$$

où $f_i = \pi_i \circ f$ puisque E_i est injectif.

Soit maintenant $x \in N$. On pose $\tilde{f}(x) = (\tilde{f}_i)_{i\in I}$. Ceci définit un morphisme $\tilde{f} \in \mathrm{Hom}_A(N, E)$ tel que $\tilde{f} \circ \varphi = f$.
Donc E est injectif.

➢ Réciproquement, supposons que E soit injectif, soit $i \in I$ et montrons que E_i est injectif. Considérons un diagramme
$$\begin{tikzcd} & E_i & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[u, "f_i"] \arrow[r, "\varphi"'] & N \end{tikzcd}$$
et le morphisme $f \in \mathrm{Hom}_A(M, E)$ défini par $f(m) = (u_j)_{j\in I}$ avec $u_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ f_i(m) & \text{si } j = i. \end{cases}$ Puisque E est injectif, il existe $\tilde{f} \in \mathrm{Hom}_A(N, E)$ tel que $\tilde{f} \circ \varphi = f$. Posons $\tilde{f}_i = \pi_i \circ \tilde{f}$. Alors $\tilde{f}_i \in \mathrm{Hom}_A(N, E_i)$ et $\tilde{f}_i \circ \varphi = f_i$.
Donc E_i est injectif. □

Proposition D.5 (Critère de Baer). Soit M un A-module. Alors M est injectif si, et seulement si, pour tout idéal I de A, tout morphisme $g : I \to M$ de A-modules peut être prolongé en un morphisme $G : A \to M$ de A-modules.

Preuve. ➢ Supposons que M est injectif, c'est-à-dire que le foncteur $\mathrm{Hom}_A(-, M)$ est exact. On a une suite exacte de A-modules $0 \to I \xrightarrow{i} A$ qui induit donc une suite exacte $\mathrm{Hom}_A(A, M) \xrightarrow{-\circ i} \mathrm{Hom}_A(I, M) \to 0$. Alors pour tout $g \in \mathrm{Hom}_A(I, M)$, il existe $G \in \mathrm{Hom}_A(A, M)$ tel que $G \circ i = g$, autrement dit, G prolonge g.

➢ Réciproquement, supposons que M vérifie la propriété de l'énoncé, nous devons démontrer que M est injectif. Considérons un diagramme commutatif
$$\begin{tikzcd} & M & \\ 0 \arrow[r] & R \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\varphi"'] & N \end{tikzcd}$$
et montrons que f peut être prolongé en $\bar{f} \in \mathrm{Hom}_A(N, M)$.
Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble formé des couples (f', N') où N' est un A-module tel que $R \subset N' \subset N$ et $f' \in \mathrm{Hom}_A(N', M)$ prolonge f. Il est clair que $\mathcal{S}$ n'est pas vide (il contient (f, N)) et qu'il est partiellement ordonné par la relation
$$(f', N') \leqslant (f'', N'') \iff N' \subset N'' \text{ et } f''_{|N'} = f'.$$
De plus, l'ensemble ordonné $(\mathcal{S}, \leqslant)$ est inductif. En effet, si $(f'_i, N'_i)_{i\in I}$ est une partie totalement ordonnée de $\mathcal{S}$, elle admet un élément maximal $(\hat{f}, \hat{N} = \cup_{i\in I} N_i)$ où $\hat{f}$ est défini de la façon suivante ; soit $x \in \hat{N}$, il existe i tel que $x \in N_i$, on pose $\hat{f}(x) = f_i(x)$; de plus, si $j \in I$ est tel que $x \in N_j$, on a par exemple $(f_i, N_i) \leqslant (f_j, N_j)$ donc $f_{j_{|N_i}} = f_i$ et donc $f_j(x) = f_i(x)$ et finalement $\hat{f}$ est bien défini. Il reste à vérifier que $\hat{N}$ est un A-module, que $\hat{f}$ est un morphisme de A-modules et que $(\hat{f}, \hat{N})$ est bien un majorant de $(f'_i, N'_i)_{i\in I}$ dans $\mathcal{S}$ (exercice).
D'après le lemme de Zorn, l'ensemble $\mathcal{S}$ admet donc un élément maximal, (f_0, N_0). Il suffit pour conclure de démontrer que $N_0 = N$ et de poser $\bar{f} = f_0$.
Supposons par l'absurde que $N_0 \subsetneq N$ et soit donc $x \in N \setminus N_0$. L'ensemble $I := \{a \in A; ax \in N_0\}$ est un idéal de A. On considère le morphisme de A-modules $g : I \to M$ défini par $g(a) = f_0(ax)$. D'après l'hypothèse, on peut prolonger g en un morphisme $G : A \to M$ de A-modules. Posons $X = N_0 + Ax$ et soit $F : X \to M$ le morphisme de A-modules défini par $F(y + ax) = f_0(y) + G(a)$ où $(y, a) \in N_0 \times A$. Vérifions qu'il est bien défini. Si $y + ax = y_1 + a_1 x$ avec

$(y_1, a_1) \in N_0 \times A$, alors $(a - a_1)x = y_1 - y \in N_0$ donc $a - a_1 \in I$ et $G(a) - G(a_1) = G(a - a_1) = g(a - a_1) = f_0((a - a_1)x) = f_0(y_1 - y) = f_0(y_1) - f_0(y)$ donc $f_0(y) + G(a) = f_0(y_1) + G(a_1)$. On vérifie facilement que F est un morphisme de A-modules. De plus, $F_{|N_0} = f_0$ donc $(F, X) \in \mathcal{S}$ et $(f_0, N_0) < (F, X)$, ce qui contredit la maximalité de (f_0, N_0).
Finalement $N_0 = N$ et $\bar{f} = f_0$ convient. Donc M est injectif. □

Définition D.6. *Un A-module M est dit* ***divisible*** *si pour tout $a \in A$ avec $a \neq 0$ et tout $m \in M$, il existe $m' \in M$ tel que $m = am'$.*

Corollaire D.7. Soit A un anneau principal. Un A-module M est injectif si, et seulement s'il est divisible.

Preuve. Nous allons utiliser le critère de Baer. Les idéaux de A sont principaux par hypothèse. Soit $I = (a)$ un idéal de A. Soit $g : I \to M$ un morphisme de A-modules. Si $I = 0$ alors $g = 0$ et il est évident que le morphisme nul de A dans M prolonge g. Supposons $a \neq 0$. Le morphisme g est entièrement déterminé par la donnée de $g(a) = m$. Le morphisme $G : A \to M$ qui prolonge g, s'il existe, est entièrement déterminé par $G(1) = m'$ et doit vérifier $am' = aG(1) = G(a) = g(a) = m$.

Si M est injectif, alors pour tout $a \neq 0$ et tout $m \in M$ le morphisme G existe et donc M est divisible.

Si M est divisible, soit $a \neq 0$ et $m \in M$, il existe $m' \in M$ tel que $m = am'$ et on définit un morphisme $G : A \to M$ par $G(\lambda) = \lambda m'$ qui prolonge g. On en déduit que M est injectif. □

Corollaire D.8. Soit A un anneau principal et soit E un A-module injectif. Alors tout quotient de E est injectif.

Preuve. Puisque A est principal et E est injectif, il est divisible. Soit K un sous-module de E. Il suffit de démontrer que E/K est divisible.

Soit $(a, \bar{e}) \in A \times (E/K)$ avec $a \neq 0$ et $e \in E$. Puisque E est divisible, il existe $e' \in E$ tel que $e = ae'$. On en déduit que $\bar{e} = a\overline{e'}$. Donc E/K est divisible. □

D.1. Le cas des groupes abéliens ($A = \mathbb{Z}$)

Le résultat ci-dessus s'applique en particulier aux groupes abéliens ($A = \mathbb{Z}$ est principal).

Exemples D.9. **(1)** $\mathbb{Z}$ n'est pas divisible, il n'est donc pas injectif.

(2) $\mathbb{Q}$ est divisible, donc il est injectif.

(3) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est divisible, donc il est injectif.

(4) Toute somme directe de groupes abéliens divisibles est encore divisible, donc toute somme directe de groupes abéliens injectifs est injectif.

Proposition D.10. Tout $\mathbb{Z}$-module est un sous-$\mathbb{Z}$-module d'un $\mathbb{Z}$-module injectif.

Preuve. Soit M un $\mathbb{Z}$-module et soit $\mathcal{G}$ une partie génératrice de M. Soit $L_{\mathbb{Z}}$ le $\mathbb{Z}$-module libre de base $\mathcal{G}$ et soit $L_{\mathbb{Q}}$ le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de base $\mathcal{G}$. On a un morphisme injectif de $\mathbb{Z}$-modules $L_{\mathbb{Z}} \hookrightarrow L_{\mathbb{Q}}$. On a également un morphisme surjectif de $\mathbb{Z}$-modules $L_{\mathbb{Z}} \to M$ dont on note K le noyau. On a donc $M = L_{\mathbb{Z}}/K$. De plus, K est un sous-$\mathbb{Z}$-module de $L_{\mathbb{Q}}$.

Le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Q}$ est injectif, le $\mathbb{Z}$-module $L_{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Q}^{(\mathcal{G})}$ est une somme directe de $\mathbb{Z}$-modules injectifs, donc $L_{\mathbb{Q}}$ est un $\mathbb{Z}$-module injectif d'après les exemples qui précèdent. De plus, puisque $\mathbb{Z}$ est principal, on sait aussi que le quotient $L_{\mathbb{Q}}/K$ est injectif.

On a donc obtenu un morphisme injectif $M \cong L_{\mathbb{Z}}/K \hookrightarrow L_{\mathbb{Q}}/K$ de $\mathbb{Z}$-modules avec $L_{\mathbb{Q}}/K$ injectif. $\square$

Théorème D.11. Tout A-module M est un sous-A-module d'un A-module injectif.

Preuve.

- ➢ Soit R un A-module. Alors $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,R)$ est un A-module pour l'action de A donnée par $(a \cdot f)(\lambda) = f(\lambda a)$ pour $(a, \lambda, f) \in A^2 \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,R)$.
- ➢ Soit M un A-module. C'est en particulier un $\mathbb{Z}$-module, donc M est un sous-$\mathbb{Z}$-module d'un $\mathbb{Z}$-module injectif E.

  On a alors $M \cong \mathrm{Hom}_A(A,M) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,M) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,E)$ en tant que A-modules.

  Il suffit donc de démontrer que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,E)$ est un A-module injectif.
- ➢ Pour tout A-module X, on a un isomorphisme de A-modules

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_A(X, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,E)) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X,E) \\ f & \mapsto & \hat{f} : [x \mapsto f(x)(1)] \\ \tilde{g} : [x \mapsto [a \mapsto g(ax)]] & \leftarrow & g \end{array}$$

  Puisque E est un $\mathbb{Z}$-module injectif, le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-,E)$ est exact, il transforme donc en particulier toute suite exacte $X \to Y \to Z$ de A-modules (qui est une suite exacte de $\mathbb{Z}$-modules) en une suite exacte $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Z,E) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Y,E) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X,E)$ de A-modules, donc $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,E))$ aussi. Donc $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,E)$ est un A-module injectif. $\square$

E. Résolutions projectives, injectives

Nous allons étudier une construction générale de (co)homologies, adaptées à diverses situations. Pour cela, étant donné un A-module M, nous allons construire des complexes de (co)chaînes en partant de "résolutions" de M puis en leur appliquant un foncteur approprié. Ce sont donc ces "résolutions" que nous allons définir et étudier. Il est nécessaire que deux résolutions différentes fournissent des complexes qui ont la même cohomologie pour que la cohomologie associée à M ait un sens. C'est là qu'interviennent les modules projectifs et injectifs.

Définition E.1. *Soit M un A-module.*

➢ *Une **résolution projective** (resp. **libre**) de M est une suite exacte de A-modules de la forme*

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

dans laquelle tous les P_n sont projectifs (resp. libres).

Cela signifie que d_0 est surjectif et que pour tout $n \geqslant 1$, on a $\operatorname{Im} d_{n+1} = \operatorname{Ker} d_n$.

➢ *Une **résolution injective** de M est une suite exacte de A-modules de la forme*

$$0 \to M \to I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_n \to I_{n+1} \cdots$$

dans laquelle tous les I_n sont injectifs.

Proposition E.2. Tout A-module M admet une résolution libre, et donc une résolution projective.

Preuve. Soit M un A-module. Il existe un A-module libre P_0 et une surjection $d_0 : P_0 \to M$.

Soit K_1 le noyau de d_0. C'est un A-module, il existe donc un A-module libre P_1 et une surjection $\pi_1 : P_1 \to K_1$. On définit $d_1 : P_1 \to P_0$ comme la composée de π_1 et de l'inclusion de K_1 dans P_0. Vérifions que la suite $P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$ est exacte en P_0 (elle est exacte en M par construction). C'est bien le cas puisque $\operatorname{Ker} d_0 = K_1 = \operatorname{Im} \pi_1 = \operatorname{Im} d_1$.

Supposons construite une suite exacte de A-modules libres $P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$. Pour construire le module libre suivant on procède de même. Soit K_{n+1} le noyau de d_n, il existe un A-module libre P_{n+1} et une surjection $\pi_{n+1} : P_{n+1} \to K_{n+1}$ et on définit d_{n+1} comme la composée de π_{n+1} et de l'inclusion de K_{n+1} dans P_n. La suite ainsi obtenue est bien exacte en P_n. $\square$

Proposition E.3. Tout A-module M admet une résolution injective.

Preuve. La démonstration est similaire à la démonstration précédente, en utilisant le fait que tout A-module est un sous-module d'un A-module injectif et en remplaçant les noyaux par des images. $\square$

Ces résolutions ne sont pas uniques, mais elles le sont à homotopie près.

Théorème E.4 (Théorème de comparaison)**.** Soit $(\mathbf{P}_\bullet, \mathbf{d}_\bullet)$ une résolution projective de M et soit $f : M \to N$ un morphisme de A-modules. Alors pour toute résolution $(\mathbf{Q}_\bullet, \boldsymbol{\delta}_\bullet)$ de N, il existe un morphisme de chaînes $\varphi_\bullet : \boldsymbol{P}_\bullet \to \boldsymbol{Q}_\bullet$ qui est un **relèvement** de f, au sens où $\delta_0 \circ \varphi_0 = f \circ d_0$. De plus, le morphisme de chaînes φ est unique à équivalence homotopique près.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "\exists"', "\varphi_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\exists"', "\varphi_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "\exists"', "\varphi_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_2 \arrow[r, "\delta_2"] & Q_1 \arrow[r, "\delta_1"] & Q_0 \arrow[r, "\delta_0"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Preuve. ➢ Commençons par démontrer l'existence de φ, par récurrence.

✧ Construction de φ_0. On a un diagramme

$$\begin{tikzcd} & P_0 \arrow[d, "f\circ d_0"] & \\ Q_0 \arrow[r, "\delta_0"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donc, puisque P_0 est projectif, il existe $\varphi_0 : P_0 \to Q_0$ tel que $\delta_0 \circ \varphi_0 = f \circ d_0$.

✧ Supposons maintenant construits des φ_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, tels que $\delta_k \circ \varphi_k = \varphi_{k-1} \circ d_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$. Construisons φ_{n+1}.

On remarque que $\delta_n \circ \varphi_n \circ d_{n+1} = \varphi_{n-1} \circ d_n \circ d_{n-1} = 0$ donc $\mathrm{Im}(\varphi_n \circ d_{n+1}) \subset \mathrm{Ker}\, \delta_n = \mathrm{Im}\, \delta_{n+1}$. On a donc un diagramme

$$\begin{tikzcd} & P_{n+1} \arrow[d, "\varphi_n\circ d_{n+1}"] & \\ Q_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}"'] & \mathrm{Im}\, \delta_{n+1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donc, puisque P_{n+1} est projectif, il existe $\varphi_{n+1} : P_{n+1} \to Q_{n+1}$ tel que $\delta_{n+1} \circ \varphi_{n+1} = \varphi_n \circ d_{n+1}$.

➢ Démontrons maintenant l'unicité à homotopie près. Supposons que ψ soit un autre relèvement de f et posons $\theta = \psi - \varphi$. Nous devons construire des morphismes $h_n : P_n \to Q_{n+1}$ tels que $\theta_n = \delta_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n$ pour tout $n \geqslant 0$, où on pose $h_{-1} = 0$. On le fait récursivement.

✧ Construction de h_0. On remarque que $\delta_0 \circ \theta_0 = \delta_0 \circ \psi_0 - \delta_0 \circ = f \circ d_0 - f \circ d_0 = 0$ donc $\mathrm{Im}\, \theta_0 \subset \mathrm{Ker}\, \delta_0 = \mathrm{Im}\, \delta_1$. On a donc un diagramme

$$\begin{tikzcd} & P_0 \arrow[d, "\theta_0"] & \\ Q_1 \arrow[r, "\delta_1"'] & \mathrm{Im}\, \delta_1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donc, puisque P_0 est projectif, il existe $h_0 : P_0 \to Q_1$ tel que $\theta_0 = \delta_1 \circ h_0 = \delta_1 \circ h_0 + h_{-1} \circ d_0$.

✧ Supposons maintenant construits des morphismes $h_k : P_k \to Q_{k+1}$ tels que $\theta_k = \delta_{k+1} \circ h_k + h_{k-1} \circ d_k$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$. Construisons h_{n+1}.

On considère le morphisme $\theta_{n+1} - h_n \circ d_{n+1} : P_{n+1} \to Q_{n+1}$. On a $\delta_{n+1} \circ (\theta_{n+1} - h_n \circ d_{n+1}) = \theta_n \circ d_n - (\theta_n - h_{n-1} \circ d_n) \circ d_{n+1} = 0$ donc $\mathrm{Im}(\theta_{n+1} - h_n \circ d_{n+1}) \subset \mathrm{Ker}\, \delta_{n+1} = \mathrm{Im}\, \delta_{n+2}$. On a donc un diagramme

$$\begin{tikzcd} & P_{n+1} \arrow[d, "\theta_{n+1}-h_n\circ d_{n+1}"] & \\ Q_{n+2} \arrow[r, "\delta_{n+2}"'] & \mathrm{Im}\, \delta_{n+2} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donc, puisque P_{n+1} est projectif, il existe $h_{n+1} : P_{n+1} \to Q_{n+2}$ tel que $\theta_{n+1} - h_n \circ d_{n+1} = \delta_{n+2} \circ h_{n+1}$. □

Corollaire E.5. Soit $\boldsymbol{P}$ une résolution projective d'un A-module M. Soit $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{P}$ un relèvement de id_M. Alors $\boldsymbol{f}$ est homotope à $\mathrm{id}_{\boldsymbol{P}}$.

Preuve. Cela découle de la deuxième partie du théorème de comparaison, puisque $\boldsymbol{f}$ et $\mathrm{id}_{\boldsymbol{P}}$ sont deux relèvements de id_M. □

Remarque E.6. Soient $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ deux résolutions projectives d'un A-module M. Alors il existe des relèvements $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{Q}$ et $\boldsymbol{g} : \boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{P}$ de id_M. Alors $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g} : \boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{Q}$ est un relèvement de id_M donc il est homotope à $\mathrm{id}_{\boldsymbol{Q}}$ et de même $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$ est homotope à $\mathrm{id}_{\boldsymbol{P}}$.

Voyons maintenant une façon de construire des résolutions projectives.

Lemme E.7 (Lemme du fer à cheval)**.** On suppose que l'on a un diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & & & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & P_2' \arrow[r, "d_2'"] & P_1' \arrow[r, "d_1'"] & P_0' \arrow[r, "d_0'"] & M' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
 & & & & M \arrow[d, "g"] & \\
\cdots \arrow[r] & P_2'' \arrow[r, "d_2''"] & P_1'' \arrow[r, "d_1''"] & P_0'' \arrow[r, "d_0''"] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

dans lequel la colonne est exacte et les lignes sont des résolutions projectives. Posons $P_n = P_n' \oplus P_n''$. Alors les P_n fournissent une résolution projective de M et la colonne de droite se relève pour donner une suite exacte de complexes

$$0 \to \boldsymbol{P'} \xrightarrow{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{P} \xrightarrow{\boldsymbol{g}} \boldsymbol{P''} \to 0$$

où $f_n : P_n' \to P_n$ et $g_n : P_n \to P_n''$ sont les injection et projection naturelles.

Preuve. Nous avons un diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & P_2' \arrow[r, "d_2'"] \arrow[d, "f_2"] & P_1' \arrow[r, "d_1'"] \arrow[d, "f_1"] & P_0' \arrow[r, "d_0'"] \arrow[d, "f_0"] & M' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
 & P_2 \arrow[d, "g_2"] & P_1 \arrow[d, "g_1"] & P_0 \arrow[d, "g_0"] & M \arrow[d, "g"] & \\
\cdots \arrow[r] & P_2'' \arrow[r, "d_2''"] \arrow[d] & P_1'' \arrow[r, "d_1''"] \arrow[d] & P_0'' \arrow[r, "d_0''"] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

avec $f_n(x) = (x, 0)$ et $g_n(x, y) = y$ pour tout n. Les suites verticales sont exactes (scindées). Il reste à construire les différentielles $d_n : P_n \to P_{n-1}$ de telle sorte que le diagramme ainsi obtenu commute.

➢ Construction de d_0. On a un diagramme

$$\begin{tikzcd} & P''_0 \arrow[d, "d''_0"] & \\ M \arrow[r, "g"'] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

avec P''_0 projectif, donc il existe un morphisme $s_0 : P''_0 \to M$ tel que $g \circ s_0 = d''_0$. On pose alors $d_0(x, y) = f(d'_0(x)) + s_0(y)$.
On a bien

$$d_0(f_0(x)) = d_0(x, 0) = f(d'_0(x)) \text{ et}$$
$$g(d_0(x, y)) = g(f(d'_0(x))) + g(s_0(y)) = d''_0(y) = d''_0(g_0(x, y)).$$

➢ Construction de d_1. On a un diagramme

$$\begin{tikzcd} & P''_1 \arrow[d, "d''_1"] & \\ P_0 \arrow[r, "g_0"'] & P''_0 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

avec P''_1 projectif, donc il existe un morphisme $s_1 : P''_1 \to P_0$ tel que $g_0 \circ s_1 = d''_1$. On pose alors $d_1(x, y) = f_0(d'_1(x)) + s_1(y)$.
On a bien

$$d_1(f_1(x)) = d_1(x, 0) = f_0(d'_1(x)) \text{ et}$$
$$g_0(d_1(x, y)) = g_0(f_0(d'_1(x))) + g_0(s_1(y)) = d''_1(y) = d''_1(g_1(x, y)).$$

➢ La construction de d_n est similaire. □

Exercice E.8. Les résultats analogues pour les résolutions injectives sont valables aussi (renverser toutes les flèches).

Finalement, voici un lemme utile pour vérifier qu'un complexe est une résolution.

Lemme E.9. Soit $\boldsymbol{C} = (C_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un complexe de chaînes de A-modules tel que $\mathrm{id}_{\boldsymbol{C}}$ soit homotope à zéro. Alors $\boldsymbol{C}$ est une résolution de $C_0 / \operatorname{Im} d_1$.

Preuve. D'après le corollaire D.3 page 16, on sait que $H^n(\boldsymbol{C}) = 0$ pour tout n. On a donc $\operatorname{Im} d_{n+1} \subset \operatorname{Ker} d_n$ (puisque $\boldsymbol{C}$ est un complexe) et $\operatorname{Ker} d_n / \operatorname{Im} d_{n+1} = 0$, on en déduit que $\operatorname{Im} d_{n+1} = \operatorname{Ker} d_n$. □

Remarque E.10. Il suffit qu'il existe une homotopie de $\mathbb{K}$-modules, ou même de groupes abéliens, de $\mathrm{id}_{\boldsymbol{C}}$ à 0 pour avoir le résultat, car un complexe de A-modules qui est exact en tant que complexe de groupes abéliens est exact en tant que complexe de A-modules.

V *Foncteurs* Ext

A. Généralités

Définition-Proposition A.1. Soit M un A-module. Soient $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ deux résolutions projectives de M. Alors pour tout A-module N, les cohomologies de complexes de cochaînes $\mathrm{Hom}_A(\boldsymbol{P}, N)$ et $\mathrm{Hom}_A(\boldsymbol{Q}, N)$ sont isomorphes.
Cette cohomologie est notée $\mathrm{Ext}_A^*(M, N)$.

Avant d'en faire la preuve, démontrons le lemme suivant.

Lemme A.2. Soit $F : A\text{-Mod} \to \mathbb{K}\text{-Mod}$ un foncteur additif. Soient $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{D}$ deux complexes de A-modules et soient $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ deux morphismes de complexes de $\boldsymbol{C}$ vers $\boldsymbol{D}$. Soit $\boldsymbol{h}$ une homotopie de $\boldsymbol{f}$ à $\boldsymbol{g}$. Alors

(i) $F(\boldsymbol{C})$ et $F(\boldsymbol{D})$ sont des complexes de $\mathbb{K}$-modules.

(ii) $F(\boldsymbol{f})$ et $F(\boldsymbol{g})$ sont des morphismes de complexes.

(iii) $F(\boldsymbol{h})$ est une homotopie de $F(\boldsymbol{f})$ à $F(\boldsymbol{g})$.

Preuve. On fait la démonstration lorsque, par exemple, F est contravariant et $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ sont des complexes de chaînes.

(i) Dans $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$ on a $d_n \circ d_{n+1} = 0$ donc $F(d_{n+1}) \circ F(d_n) = F(0) = 0$, donc $(F(\boldsymbol{C}), F(\boldsymbol{d}))$ est un complexe.

(ii) On a des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[d, "f_n"] \\ D_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"'] & D_n \end{tikzcd}$$

donc, en appliquant le foncteur F, on a des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} F(C_{n+1}) & F(C_n) \arrow[l, "F(d_{n+1})"'] \\ F(D_{n+1}) \arrow[u, "F(f_{n+1})"] & F(D_n) \arrow[l, "F(\partial_{n+1})"] \arrow[u, "F(f_n)"'] \end{tikzcd}$$

donc $F(\boldsymbol{f})$ est bien un morphisme de complexes.

(iii) On a $f_n - g_n = h_{n+1} \circ d_n + \partial_{n+1} \circ h_n$ donc en appliquant F on obtient $F(f_n) - F(g_n) = F(d_n) \circ F(h_{n-1}) + F(h_n) \circ F(\partial_{n+1})$.

$$\begin{tikzcd} C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[dl, "h_n"'] \arrow[d, shift right, "f_n"'] \arrow[d, shift left, "g_n"] & C_{n-1} \arrow[dl, "h_{n-1}"] \\ D_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"'] & D_n \arrow[r, "\partial_n"'] & D_{n-1} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} FC_{n-1} \arrow[r, "Fd_n"] & FC_n \arrow[r, "Fd_{n+1}"] & FC_{n+1} \\ FD_{n-1} \arrow[r, "F\partial_n"'] & FD_n \arrow[r, "F\partial_{n+1}"'] \arrow[ul, "Fh_{n-1}"] \arrow[u, shift right, "Ff_n"] \arrow[u, shift left, "Fg_n"'] & FD_{n+1} \arrow[ul, "Fh_n"'] \end{tikzcd}$$

□

Preuve de la Définition-Proposition A.1. Puisque $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ sont deux résolutions projectives de M, il existe des relèvements $\boldsymbol{\varphi} : \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{Q}$ et $\boldsymbol{\psi} : \boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{P}$ de id_M. Alors $\boldsymbol{\psi} \circ \boldsymbol{\varphi} : \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{\psi} : \boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{Q}$ sont homotopes à $\mathrm{id}_{\boldsymbol{P}}$ et $\mathrm{id}_{\boldsymbol{Q}}$ respectivement d'après la remarque E.6.

Soit $F = \mathrm{Hom}_A(-, N)$. C'est un foncteur additif (contravariant). D'après le lemme, $F(\boldsymbol{P})$ et $F(\boldsymbol{Q})$ sont des complexes de $\mathbb{K}$-modules et $F(\varphi)$ et $F(\psi)$ sont des morphismes de complexes. De plus, $F(\boldsymbol{\varphi}) \circ F(\boldsymbol{\psi}) = F(\boldsymbol{\psi} \circ \boldsymbol{\varphi})$ est homotope à $F(\mathrm{id}_{\boldsymbol{P}}) = \mathrm{id}_{F(\boldsymbol{P})}$ et $F(\boldsymbol{\psi}) \circ F(\boldsymbol{\varphi})$ est homotope à $\mathrm{id}_{F(\boldsymbol{Q})}$.

On en déduit des morphismes $H^n(F(\boldsymbol{\varphi})) : H^n(F(\boldsymbol{P})) \to H^n(F(\boldsymbol{Q}))$ et $H^n(F(\boldsymbol{\psi})) : H^n(F(\boldsymbol{Q})) \to H^n(F(\boldsymbol{P}))$ pour tout n tels que $H^n(F(\boldsymbol{\psi})) \circ H^n(F(\boldsymbol{\varphi})) = H^n(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ et $H^n(F(\boldsymbol{\varphi})) \circ H^n(F(\boldsymbol{\psi})) = H^n(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$. Les morphismes de complexes $H^n(F(\boldsymbol{\varphi}))$ et $H^n(F(\boldsymbol{\psi}))$ sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre. □

Remarque A.3. On a $\mathrm{Ext}^0_A(M, N) \cong \mathrm{Hom}_A(M, N)$.

En effet, soit $(\boldsymbol{P}_\bullet, \boldsymbol{d}_\bullet)$ une résolution projective de M. On applique $\mathrm{Hom}_A(-, N)$ ce qui donne un complexe $0 \to \mathrm{Hom}_A(P_0, N) \xrightarrow{-\circ d_1} \mathrm{Hom}_A(P_1, N) \to \cdots$ donc $\mathrm{Ext}^0_A(M, N) = \mathrm{Ker}(- \circ d_1) / \mathrm{Im}\, 0 = \mathrm{Ker}(- \circ d_1)$.

Ainsi, en degré 0, les cocycles sont des cobords et on a

$$\begin{aligned} f \text{ est un cocycle} &\iff f \circ d_1 = 0 \iff f = 0 \text{ sur } \mathrm{Im}\, d_1 = \mathrm{Ker}\, d_0 \\ &\iff f \text{ induit un morphisme de } A\text{-modules } \bar{f} : M \cong P_0 / \mathrm{Ker}\, d_0 \to N. \end{aligned}$$

On a donc une bijection entre $\mathrm{Ker}(- \circ d_1)$ et $\mathrm{Hom}_A(M, N)$, dont on vérifie facilement que c'est un morphisme de $\mathbb{K}$-modules.

Exemple A.4. Soit $A = \mathbb{Z}$, soit $M = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ avec $m \geqslant 2$ et soit N un $\mathbb{Z}$-module quelconque. On a une suite exacte de $\mathbb{Z}$-modules

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{m\cdot} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to 0$$

où π est la projection naturelle. Puisque le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}$ est libre, donc projectif, c'est une résolution projective de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. On applique $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, N)$, ce qui donne le complexe

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, N) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, N) \to 0 \to 0 \to \cdots$$

avec $\varphi(f) : x \to f(mx) = mf(x)$. On a un isomorphisme $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, N) \cong N$ (en évaluant en 1) donc le complexe s'identifie à

$$0 \to N \xrightarrow{m\cdot} N \to 0 \to 0 \cdots$$

et on obtient

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, N) \cong {}_mN := \{y \in N;\, my = 0\}, \\ &\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, N) \cong N/mN, \\ &\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, N) = 0 \text{ si } n \geqslant 2. \end{aligned}$$

Exemple A.5. Soit $A = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ avec $m \geqslant 2$. Soit d un diviseur de m. Alors $M := \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ est un A-module.

Une résolution libre, donc projective, du A-module M est donnée par

$$\cdots \xrightarrow{d\cdot} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \xrightarrow{\frac{m}{d}\cdot} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \xrightarrow{d\cdot} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \xrightarrow{\frac{m}{d}\cdot} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \xrightarrow{d\cdot} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} = M \to 0$$

où le dernier morphisme envoie la classe d'un entier modulo m sur sa classe modulo d.

On applique $\mathrm{Hom}_A(-,N)$ et on utilise l'isomorphisme $\mathrm{Hom}_A(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},N) = \mathrm{Hom}_A(A,N) \cong N$, ce qui donne le complexe

$$0 \to N \xrightarrow{d\cdot} N \xrightarrow{\frac{m}{d}\cdot} N \xrightarrow{d\cdot} N \xrightarrow{\frac{m}{d}\cdot} \cdots .$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^0_A(M,N) &\cong \mathrm{Hom}_A(M,N) \cong {}_dN \\
\mathrm{Ext}^n_A(M,N) &\cong {}_{\frac{m}{d}}(N/dN) \text{ si } n \text{ est impair} \\
\mathrm{Ext}^n_A(M,N) &\cong ({}_dN) \,/\, \left(\frac{m}{d}N\right) \text{ si } n \text{ est pair, } n \geqslant 2.
\end{aligned}$$

En particulier, si p est un nombre premier, on a $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour tout $n \geqslant 0$, alors que $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$ pour tout $n \geqslant 2$.

Corollaire A.6. Si P est un A-module projectif, alors pour tout A-module N et pour tout entier $n \geqslant 1$ on a $\mathrm{Ext}^n_A(P,N) = 0$.

Preuve. Puisque P est projectif, $\cdots 0 \to 0 \to \cdots \to 0 \to P \xrightarrow{\mathrm{id}} P \to 0$ est une résolution projective de P. On applique $\mathrm{Hom}_A(-,N)$, ce qui donne le complexe

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(P,N) \to 0 \to 0 \cdots$$

dont la cohomologie est $\mathrm{Hom}_A(P,N) = \mathrm{Ext}^0(P,N)$ en degré 0 et 0 en degré strictement positif. □

Exemple A.7. Le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}^m$ est libre, donc projectif, et donc $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^m,N) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$ et tout $\mathbb{Z}$-module N.

Remarque A.8. A partir des exemples précédents, on peut déterminer $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(M,N)$ pour tout $\mathbb{Z}$-module M de type fini et tout $\mathbb{Z}$-module N, en utilisant le théorème de structure des groupes abéliens de type fini et la proposition A.12 ci-dessous.

En particulier, on a $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(M,N) = 0$ pour tout $n \geqslant 2$, tout $\mathbb{Z}$-module M de type fini et tout $\mathbb{Z}$-module N. On verra plus loin que c'est vrai même si M n'est pas de type fini.

Lemme A.9. Si $f : M \to M'$ est un morphisme de A-modules, alors il induit un morphisme de $\mathbb{K}$-modules $\mathrm{Ext}^n_A(M',N) \to \mathrm{Ext}^n_A(M,N)$.

Preuve. Soit $\boldsymbol{P}$ une résolution projective de M et soit $\boldsymbol{P}'$ une résolution projective de M'. Il existe un relèvement $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{P}'$ de f. On applique le foncteur additif $\mathrm{Hom}_A(-,N)$, on obtient donc un morphisme de complexes $\mathrm{Hom}_A(f,N) : \mathrm{Hom}_A(\boldsymbol{P}',N) \to \mathrm{Hom}_A(\boldsymbol{P},N)$ qui induit un morphisme en cohomologie d'après la proposition B.9 page 12. □

Théorème A.10. Pour tout A-module N et tout entier $n \geqslant 0$, $\mathrm{Ext}^n_A(-,N)$ est un foncteur additif.

Preuve. D'après la proposition B.9 page 12, H^n est un foncteur. Donc $\mathrm{Ext}^n_A(-,N)$, qui est la composée des foncteurs $\mathrm{Hom}_A(-,N)$ et H^n est un foncteur. Il reste à vérifier qu'il est additif, et pour cela il suffit de vérifier que H^n est additif. Cela découle du fait que les foncteurs de restriction (à $\mathrm{Ker}(- \circ d_{n+1})$) et de passage au quotient (par $\mathrm{Im}(- \circ d_n)$) sont additifs. □

Théorème A.11. Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de A-modules. Soit N un A-module.
Alors il existe une suite exacte longue de $\mathbb{K}$-modules

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M'',N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M,N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M',N) \arrow[r] & {} \\
{} \arrow[r, "\nabla^0"] & \mathrm{Ext}^1_A(M'',N) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_A(M,N) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_A(M',N) \arrow[r] & {} \\
{} \arrow[r, "\nabla^1"] & \mathrm{Ext}^2_A(M'',N) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2_A(M,N) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2_A(M',N) \arrow[r] & {} \\
& & \cdots & & \\
{} \arrow[r, "\nabla^{n-1}"] & \mathrm{Ext}^n_A(M'',N) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^n_A(M,N) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^n_A(M',N) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}
$$

De plus, tout morphisme de complexes entre deux suites exactes

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & R' \arrow[r] & R \arrow[r] & R'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

induit des diagrammes commutatifs

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^n_A(R',N) \arrow[r, "\nabla^n"] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^{n+1}_A(R'',N) \arrow[d] \\
\mathrm{Ext}^n_A(M',N) \arrow[r, "\nabla^n"] & \mathrm{Ext}^{n+1}_A(M'',N)
\end{tikzcd}
$$

pour tout entier $n \geqslant 0$.

Preuve. Soit $\boldsymbol{P}'$ (*resp.* $\boldsymbol{P}''$) une résolution projective de M. (*resp.* de M''). D'après le lemme du fer à cheval, il existe une résolution $\boldsymbol{P}$ de M et une suite exacte $(\mathcal{E})$ $0 \to \boldsymbol{P}' \to \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{P}'' \to 0$ de complexes de chaînes, dont toutes les lignes sont scindées.

On applique le foncteur $\mathrm{Hom}_A(-,N)$. On obtient donc une suite exacte de complexes de cochaînes

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(\boldsymbol{P}'',N) \to \mathrm{Hom}_A(\boldsymbol{P},N) \to \mathrm{Hom}_A(\boldsymbol{P}',N) \to 0$$

(l'exactitude provient du fait que les lignes de $\mathcal{E}$ sont scindées). D'après le théorème C.3 page 14 (ou plutôt sa version cohomologique), il existe une suite exacte longue comme dans l'énoncé. La fin découle du théorème C.4 page 15 (ou plutôt de la fonctorialité de la suite exacte longue de cohomologie). □

Proposition A.12. Soient M_1, M_2 et N trois A-modules. Alors

$$\mathrm{Ext}^n_A(M_1 \oplus M_2, N) \cong \mathrm{Ext}^n_A(M_1,N) \oplus \mathrm{Ext}^n_A(M_2,N).$$

Preuve. On a une suite exacte scindée $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{g} M_2 \to 0$. Notons σ une section de g et r une rétraction de f.

Notons pour simplifier $F_n = \mathrm{Ext}_A^n(-, N)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

D'après le théorème A.11, on a pour tout $n \geqslant 0$ une suite exacte

$$F_n(M_2) \xrightarrow{F_n g} F_n(M_1 \oplus M_2) \xrightarrow{F_n f} F_n(M_1).$$

Il suffit donc de démontrer que $F_n f$ est surjectif et que $F_n g$ est injectif puis que cette suite exacte est scindée.

Or on a $r \circ f = \mathrm{id}_{M_1}$ donc en appliquant F_n on a $F_n f \circ F_n r = \mathrm{id}_{F(M_1)}$ donc $F_n f$ est surjectif. De même, $g \circ \sigma = \mathrm{id}_{M_2}$ donc $F_n \sigma \circ F_n g = \mathrm{id}_{F(M_2)}$ donc $F_n g$ est injectif. De plus, $F_n r$ est une section de $F_n f$ (ou $F_n \sigma$ est une rétraction de $F_n g$). □

Proposition A.13 (Caractérisation des A-modules injectifs)**.** Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) N est un A-module injectif.

(ii) Le foncteur $\mathrm{Hom}_A(-, N)$ est exact.

(iii) Pour tout A-module M et tout $n \geqslant 1$ on a $\mathrm{Ext}_A^n(M, N) = 0$.

(iv) Pour tout A-module M on a $\mathrm{Ext}_A^1(M, N) = 0$.

Remarque A.14. Nous avons donc défini le premier groupe de la suite exacte du théorème des coefficients universels E.3, et cette proposition montre qu'il s'annule bien lorsque le groupe abélien M de coefficients est divisible (équivalent à injectif).

Preuve. *(i)* $\iff$ *(ii)* par définition d'un A-module injectif. De plus, il est évident que *(iii)*$\Rightarrow$*(iv)*.

Soit M un A-module quelconque. On sait que M est le quotient d'un A-module projectif P, on a donc une suite exacte $0 \to K \to P \to M \to 0$ avec P projectif. Elle induit, d'après le théorème A.11, des suites exactes

$$0 = \mathrm{Ext}_A^n(P, N) \to \mathrm{Ext}_A^n(K, N) \xrightarrow{\nabla^n} \mathrm{Ext}^{n+1}(M, N) \to \mathrm{Ext}_A^{n+1}(P, N) = 0$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que tous les ∇^n, $n \geqslant 1$, sont des isomorphismes (dans *cette* suite exacte longue !).

- ➢ Supposons que *(iv)* soit vérifiée et démontrons *(iii)* par récurrence sur n. Soit M un A-module quelconque et soit $0 \to K \to P \to M \to 0$ la suite exacte construite précédemment. Par hypothèse, *(iii)* est vrai pour $n = 1$. Supposons que *(iii)* soit vrai pour un n donné. On a donc (puisque le A-module dans la première composante est quelconque) $\mathrm{Ext}_A^n(K, N) = 0$. Mais $\mathrm{Ext}_A^{n+1}(M, N) \cong \mathrm{Ext}_A^n(K, N) = 0$ donc *(iii)* est vraie au rang $n + 1$.

- ➢ *(iv)*$\Rightarrow$*(ii)*. Soit $0 \to M' \xrightarrow{f} M \to M'' \to 0$ une suite exacte de A-modules. On sait que la suite

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M'', N) \to \mathrm{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_A(M', N) \xrightarrow{\nabla^0} \mathrm{Ext}_A^1(M'', N) = 0$$

est exacte. On a donc $\nabla^0 = 0$, et donc f^* surjective. La suite

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M'', N) \to \mathrm{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_A(M', N) \to 0$$

est donc exacte et *(ii)* est donc vérifiée.

➢ *(ii)⇒(iv)*. Soit M un A-module quelconque et soit $0 \to K \xrightarrow{f} P \to M \to 0$ la suite exacte construite précédemment. On a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_A(P,N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_A(K,N) \xrightarrow{\nabla^0} \mathrm{Ext}^1_A(M,N) \to \mathrm{Ext}^1_A(P,N) = 0.$$

Donc ∇^0 est surjective. Par hypothèse *(ii)*, f^* est surjective, donc $\mathrm{Ker}\,\nabla^0 = \mathrm{Hom}_A(K,N)$ et par conséquent $\nabla^0 = 0$. Finalement, $\mathrm{Ext}^1_A(M,N) = \mathrm{Im}\,\nabla^0 = \mathrm{Im}\,0 = 0$. Donc *(iv)* est vérifiée. □

Théorème A.15. Soit $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ une suite exacte de A-modules. Soit M un A-module.
Alors il existe une suite exacte longue de $\mathbb{K}$-modules

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,N') \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,N'') \longrightarrow \\ \xrightarrow{\nabla_0} \mathrm{Ext}^1_A(M,N') \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M,N'') \longrightarrow \\ \xrightarrow{\nabla_1} \mathrm{Ext}^2_A(M,N') \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_A(M,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_A(M,N'') \longrightarrow \\ \qquad\qquad\qquad \cdots \\ \xrightarrow{\nabla_{n-1}} \mathrm{Ext}^n_A(M,N') \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_A(M,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_A(M,N'') \longrightarrow \end{array}$$

De plus, tout morphisme de complexes entre deux suites exactes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N' \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & N'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & R' \arrow[r] & R \arrow[r] & R'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

induit des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ext}^n_A(M,N'') \arrow[r, "\nabla_n"] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^{n+1}_A(M,N') \arrow[d] \\ \mathrm{Ext}^n_A(M,R'') \arrow[r, "\nabla_n"] & \mathrm{Ext}^{n+1}_A(M,R') \end{tikzcd}$$

pour tout entier $n \geqslant 0$.

Preuve. Soit $0 \to N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \to 0$ une suite exacte de A-modules. Soit $\boldsymbol{P}$ une résolution projective de M. On applique les foncteurs additifs $\mathrm{Hom}_A(-,N')$, $\mathrm{Hom}_A(-,N)$ et $\mathrm{Hom}_A(-,N'')$ à cette résolution, et on obtient une suite exacte de complexes

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(\boldsymbol{P},N') \xrightarrow{f\circ -} \mathrm{Hom}_A(\boldsymbol{P},N) \xrightarrow{g\circ -} \mathrm{Hom}_A(\boldsymbol{P},N'') \to 0;$$

l'exactitude vient du fait que tous les P_n sont projectifs. D'après le théorème C.3 page 14 (ou plutôt sa version cohomologique), il existe une suite exacte longue comme dans l'énoncé. La fin découle du théorème C.4 page 15 (ou plutôt de la fonctorialité de la suite exacte longue de cohomologie). □

Proposition A.16. Soient M, N_1 et N_2 trois A-modules. Alors

$$\operatorname{Ext}_A^n(M, N_1 \oplus N_2) \cong \operatorname{Ext}_A^n(M, N_1) \oplus \operatorname{Ext}_A^n(M, N_2).$$

Preuve. On a une suite exacte scindée $0 \to N_1 \xrightarrow{f} N_1 \oplus N_2 \xrightarrow{g} N_2 \to 0$. Notons σ une section de g et r une rétraction de f.

Notons pour simplifier $F_n = \operatorname{Ext}_A^n(M, -)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

D'après le théorème A.15, on a pour tout $n \geqslant 0$ une suite exacte

$$F_n(N_1) \xrightarrow{F_n f} F_n(N_1 \oplus N_2) \xrightarrow{F_n g} F_n(N_2).$$

Il suffit donc de démontrer que $F_n f$ est injectif et que $F_n g$ est surjectif puis que la suite exacte est scindée.

Or on a $r \circ f = \mathrm{id}_{N_1}$ donc en appliquant F_n on a $F_n r \circ F_n f = \mathrm{id}_{F(N_1)}$ donc $F_n f$ est injectif. De même, $g \circ \sigma = \mathrm{id}_{N_2}$ donc $F_n g \circ F_n \sigma = \mathrm{id}_{F(N_2)}$ donc $F_n g$ est surjectif. De plus, $F_n \sigma$ est une section de $F_n g$. $\square$

Proposition A.17 (Caractérisation des A-modules projectifs)**.** Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) M est un A-module projectif.

(ii) Le foncteur $\operatorname{Hom}_A(M, -)$ est exact.

(iii) Pour tout A-module N et tout $n \geqslant 1$ on a $\operatorname{Ext}_A^n(M, N) = 0$.

(iv) Pour tout A-module N on a $\operatorname{Ext}_A^1(M, N) = 0$.

Preuve. *(i)* $\iff$ *(ii)* par définition d'un A-module projectif. On a déjà vu que *(i)*$\Rightarrow$*(iii)*. De plus, il est évident que *(iii)*$\Rightarrow$*(iv)*.

Il reste à démontrer que *(iv)*$\Rightarrow$*(ii)*. Soit $0 \to N' \to N \xrightarrow{g} N'' \to 0$ une suite exacte. On sait que la suite

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(M, N') \to \operatorname{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{g_*} \operatorname{Hom}_A(M, N'') \xrightarrow{\nabla^0} \operatorname{Ext}^1(M, N') = 0$$

est exacte (théorème A.15). On en déduit que $\operatorname{Im} \nabla^0 = 0$, donc $\nabla^0 = 0$ et donc $\operatorname{Ker} \nabla^0 = \operatorname{Hom}_A(M', N) = \operatorname{Im} g_*$ donc g_* est surjective. Le foncteur $\operatorname{Hom}_A(M, -)$ est donc exact. $\square$

Théorème A.18. Soit N un A-module et soit $\boldsymbol{E_\bullet}$ une résolution injective de N. Soit M un A-module.
Alors le $n^{\text{ième}}$ $\mathbb{K}$-module de cohomologie de $\operatorname{Hom}_A(M, \boldsymbol{E_\bullet})$ est $\operatorname{Ext}_A^n(M, N)$:

$$H^n\left(\operatorname{Hom}_A(M, \boldsymbol{E_\bullet})\right) = \operatorname{Ext}_A^n(M, N).$$

Preuve. Admis. $\square$

Exemple A.19. On rappelle qu'un $\mathbb{Z}$-module est injectif si et seulement s'il est divisible, et que par conséquent un quotient d'un $\mathbb{Z}$-module injectif est injectif.

Nous allons vérifier que pour tous $\mathbb{Z}$-modules M et N et tout $n \geqslant 2$, on a $\operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}}^n(M, N) = 0$.

On sait qu'il existe un morphisme injectif de $\mathbb{Z}$-modules $N \to E$ avec E injectif. De plus, E/N est injectif aussi. On a donc une suite exacte

$$0 \to N \to E \to E/N \to 0 \to 0 \cdots$$

qui est une résolution injective de N.

On applique le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, -)$, ce qui donne le complexe

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, E) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, E/N) \to 0 \to 0 \cdots$$

dont la cohomologie en degré $\geqslant 2$ est nulle.

Exemple A.20. Soit M un $\mathbb{Z}$-module de torsion. On a une résolution injective (car formée de modules divisibles) de $\mathbb{Z}$ donnée par $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0 \cdots$. On applique $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, -)$, ce qui donne le complexe

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to 0 \to 0 \cdots$$

On en déduit que

$$\mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z}) = 0$$
$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

B. Cohomologie des groupes

Rappelons que l'algèbre du groupe G à coefficients dans $\mathbb{Z}$ est le $\mathbb{Z}$-module libre de base G muni du produit $\mathbb{Z}$-linéaire qui prolonge le produit de G.

Définition B.1. *Soit G un groupe.*
*La **cohomologie du groupe** G à coefficients dans $\mathbb{Z}$ est $H^n(G, \mathbb{Z}) := \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ où $\mathbb{Z}$ est le $\mathbb{Z}[G]$-module trivial (autrement dit, pour tout $g \in G$ et tout $\lambda \in \mathbb{Z}$ on a $g\lambda = \lambda$).*
Plus généralement, si M est un $\mathbb{Z}[G]$-module, la cohomologie de G à coefficients dans M est $H^n(G, M) := \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$.

Lemme B.2. On a

$$H^0(G, M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M) \cong M^G := \{a \in M \colon ga = a \text{ pour tout } g \in G\}.$$

Preuve. On sait que $H^0(G, M) \cong \mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$. De plus, un morphisme f de $\mathbb{Z}$ dans M est déterminé par $f(1) \in M$. Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$, on a $f(1) = f(g1) = gf(1)$ (puisque $\mathbb{Z}$ est trivial) donc $f(1) \in M^G$. Réciproquement, si $a \in M^G$, on définit bien un morphisme de $\mathbb{Z}[G]$-modules en posant $f(\lambda) = \lambda a$ pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}$, puisque $f(g\lambda) = f(\lambda) = \lambda a = g(\lambda a)$. □

Il est souvent utile dans les raisonnements théoriques et certains calculs explicites d'utiliser une résolution projective "standard" du $\mathbb{Z}[G]$-module $\mathbb{Z}$ pour calculer $H^n(G, M)$.

Proposition B.3. La suite $(\boldsymbol{L_\bullet}, \boldsymbol{d_\bullet})$ définie ci-dessous est une résolution libre du $\mathbb{Z}[G]$-module trivial $\mathbb{Z}$:

- $L_n = \mathbb{Z}[G^{n+1}]$
- Pour $n \geqslant 1$, $d_n : L_n \to L_{n-1}$ est l'application $\mathbb{Z}$-linéaire définie sur G^{n+1} par

$$(g_0, g_1, \ldots, g_n) \mapsto \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i (g_0, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots, g_n) + (-1)^n (g_0, \ldots, g_{n-1}).$$

Enfin, $d_0 : L_0 = \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}$ est l'application $\mathbb{Z}$-linéaire définie sur G par $d_0(g) = 1$.

Preuve. ➢ La structure de $\mathbb{Z}[G]$-module de L_n est donnée par

$$\forall \sigma \in G,\ \forall (g_0, g_1, \ldots, g_n),\ \sigma \cdot (g_0, g_1, \ldots, g_n) = (\sigma g_0, g_1, \ldots, g_n)$$

(que l'on prolonge par $\mathbb{Z}$-linéarité – rappelons que G^{n+1} est une base de $\mathbb{Z}[G^{n+1}]$ en tant que $\mathbb{Z}$-module).

Vérifions que L_n est un $\mathbb{Z}[G]$-module libre de base $\{1\} \times G^n$.

- ✧ Soit $x \in L_n$. Alors $x = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i (g_o^{(i)}, g_1^{(i)}, \ldots, g_n^{(i)})$ avec $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ et $g_j^{(i)} \in G$. On a donc $x = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i g_i^{(i)} \cdot (1, g_1^{(i)}, \ldots, g_n^{(i)})$ qui est une combinaison $\mathbb{Z}[G]$-linéaire d'éléments de $\{1\} \times G^n$.
- ✧ Supposons que l'on ait $\sum_{i=1}^{t} y_i (1, g_1^{(i)}, \ldots, g_n^{(i)}) = 0$ avec $y_i \in \mathbb{Z}[G]$ et $g_j^{(i)} \in G$ et les $(g_1^{(i)}, \ldots, g_n^{(i)})$ deux à deux distincts. Posons $y_i = \sum_{k=1}^{s} \lambda_{i,k} g_k$ avec $\lambda_{i,k} \in \mathbb{Z}$ et $g_k \in G$. Alors $0 = \sum_{i=1}^{t} \sum_{k=1}^{s} \lambda_{i,k} (g_k, g_1^{(i)}, \ldots, g_n^{(i)})$ qui est une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ d'éléments distincts de G^{n+1}. On a donc $\lambda_{(i,k)} = 0$ pour tout (i,k) et donc $y_i = 0$ pour tout i. Donc la famille $\{1\} \times G^n$ est libre.

On pourrait, pour ce qui suit, se contenter de démontrer que $\mathbb{Z}[G^{n+1}]$ est projectif. Pour cela, on peut utiliser les isomorphismes

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G^{n+1}], M) & \cong & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G^n], M) \\ \varphi & \mapsto & \widehat{\varphi} : [(g_1 \ldots, g_n) \to \varphi(1, g_1, \ldots, g_n)] \\ \tilde{\psi} : [(g_0, \ldots, g_n) \to g_0 \cdot \psi(g_1, \ldots, g_n)] & \leftarrow\!\shortmid & \psi \end{array}$$

(que l'on prolonge par $\mathbb{Z}$-linéarité). Le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G^n], -)$ est exact car $\mathbb{Z}[G^n]$ est le $\mathbb{Z}$-module libre de base G^n, donc le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G^{n_1}], -)$ est exact.

➢ Vérifions que $(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{d})$ est un complexe de $\mathbb{Z}[G]$-modules. On vérifie facilement que les d_n sont des morphismes de $\mathbb{Z}[G]$-modules. De plus, $(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{d})$ est le complexe associé au module pré-simplicial (c'est-à-dire objet pré-simplicial dans la catégorie A-Mod) $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont les faces sont les morphismes $\mathbb{Z}$-linéaires $\delta_i^n : L_n \to L_{n-1}$, $0 \leqslant i \leqslant n$, définis par

$$\delta_i^n (g_0, g_1, \ldots, g_n) \mapsto \begin{cases} (g_0, \ldots, g_{i-1}, g_i g_{i+1}, g_{i+2}, \ldots, g_n) & \text{si } 0 \leqslant i < n \\ (g_0, \ldots, g_{n-1}) & \text{si } i = n \end{cases}$$

sur les éléments de G^{n+1}. (La vérification est laissée en exercice.)

➢ Il reste à vérifier que $(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{d})$ est une résolution de $\mathbb{Z}$. Soit $h_{-1} : \mathbb{Z} \to L_0 = \mathbb{Z}[G]$ l'application $\mathbb{Z}$-linéaire définie par $h_{-1}(1) = 1$ et, pour tout $n \geqslant 0$, soit $h_n : L_n \to L_{n+1}$ l'application $\mathbb{Z}$-linéaire définie sur G^{n+1} par $h_n(g_0, \ldots, g_n) = (1, g_0, \ldots, g_n)$ (attention, h_n n'est pas $\mathbb{Z}[G]$-linéaire).

Alors h_n est une homotopie de $\mathbb{Z}$-modules de $\mathrm{id}_{\boldsymbol{L}}$ à zéro (à vérifier : $d_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n = \mathrm{id}_{L_n}$), donc $(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{d})$ est une résolution de $L_0 / \operatorname{Im} d_1$ d'après le lemme E.9 et la remarque E.10 du chapitre IV.

Pour terminer, il suffit de vérifier que d_0 est surjectif (c'est clair) et que $\operatorname{Im} d_1 = \operatorname{Ker} d_0$ (ce qui implique en particulier que $L_0 / \operatorname{Im} d_1 \cong \mathbb{Z}$). On sait déjà que $\operatorname{Im} d_1 \subset \operatorname{Ker} d_0$.

Soit maintenant $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i \in \operatorname{Ker} d_0$ avec $(\lambda_i, g_i) \in \mathbb{Z} \times G$. Alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$ donc $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (g_i - 1) = d_1 \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (1, g_i) \right) \in \operatorname{Im} d_1$. □

Théorème B.4. Soit G un groupe et soit M un $\mathbb{Z}[G]$-module. Alors $H^n(G, M)$ est le $n^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie du complexe (de $\mathbb{Z}$-modules) $(\boldsymbol{C_\bullet}, \boldsymbol{\delta_\bullet})$ défini par $C_n = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G^n], M)$ et $\delta_n : \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G^{n-1}], M) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G^n], M)$ qui à ψ associe

$$\begin{aligned}(g_1, \ldots, g_n) \mapsto g_1\psi(g_2, \ldots, g_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \psi(g_1, \ldots, g_{i-1}, g_i g_{i+1}, g_{i+2}, \ldots, g_n) \\ + (-1)^n \psi(g_1, \ldots, g_{n-1})\end{aligned}$$

(on a $H^n(G, M) = \operatorname{Ker} \delta_{n+1} / \operatorname{Im} \delta_n$). De plus, on peut remplacer $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G^n], M)$ par $\operatorname{Hom}(G^n, M)$, l'ensemble des applications de G^n dans M.

Preuve. On applique $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(-, M)$ à la résolution précédente. On obtient un complexe $(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{\partial})$ où $D_n = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(L_n, M)$ et où $\partial_n = (- \circ d_n) : D_{n+1} \to D_n$. De plus, on utilise les isomorphismes $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G^{n+1}], M) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G^n], M)$ donnés dans la démonstration précédente. On obtient un complexe $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{\delta})$ avec $C_n = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(G^n, M)$ et où δ_n est obtenu de la façon suivante.

$$\begin{tikzcd}
\psi \arrow[ddd, dotted, bend right] & \widehat{\tilde{\psi} \circ d_n} \\
C_{n+1} \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "\sim"] & C_{n+1} \\
D_{n+1} \arrow[r, "\partial_n"] & D_{n+1} \arrow[u, "\sim"'] \\
\tilde{\psi} \arrow[r, dotted, bend right] & \tilde{\psi} \circ d_n \arrow[uuu, dotted, bend right]
\end{tikzcd}$$

On en déduit la formule de l'énoncé.

Pour la remarque finale, rappelons que G^n est une base du $\mathbb{Z}$-module libre $\mathbb{Z}[G^n]$, donc un morphisme de $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G^n], M)$ est entièrement déterminé par sa restriction à G^n, autrement dit on peut identifier les groupes abéliens $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G^n], M)$ et $\operatorname{Hom}(G^n, M)$. $\square$

Proposition B.5. Soit G un groupe fini d'ordre m. Soit M un $\mathbb{Z}[G]$-module quelconque. Alors $mH^n(G, M) = 0$ pour tout $n \geqslant 0$.

Preuve. Soit $\psi \in \operatorname{Hom}(G^n, M)$ un $(n+1)$-cocycle, c'est-à-dire que $\delta_{n+1}(\psi) = 0$. Il suffit de démontrer que $m\psi$ est un cobord.

Soit $\varphi \in \operatorname{Hom}(G^{n-1}, M)$ définie par

$$\varphi(g_1, \ldots, g_{n-1}) = \sum_{\sigma \in G} \psi(g_1, \ldots, g_{n-1}, \sigma).$$

Cette expression a bien un sens puisque G est fini.

On a

$$\begin{aligned}0 = \delta_{n+1}(\psi)(g_1, \ldots, g_{n+1}) g_1\psi(g_2, \ldots, g_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \psi(g_1, \ldots, g_{i-1}, g_i g_{i+1}, g_{i+2}, \ldots, g_{n+1}) \\ + (-1)^{n+1} \psi(g_1, \ldots, g_n).\end{aligned}$$

Faisons la somme sur $\sigma = g_{n+1} \in G$ de cette identité :

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{\sigma\in G} \Big(g_1\psi(g_2,\dots,g_n,\sigma) + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\psi(g_1,\dots,g_{i-1},g_ig_{i+1},g_{i+2},\dots,g_n,\sigma) \\
&\quad + (-1)^n\psi(g_1,\dots,g_{n-1},g_n\sigma) + (-1)^{n+1}\psi(g_1,\dots,g_n)\Big). \\
&= g_1\varphi(g_1\psi(g_2,\dots,g_n) + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\varphi(g_1,\dots,g_{i-1},g_ig_{i+1},g_{i+2},\dots,g_n) \\
&\quad + (-1)^n\sum_{\tau\in G}\psi(g_1,\dots,g_{n-1},\tau) + (-1)^{n+1}m\psi(g_1,\dots,g_n) \\
&= g_1\varphi(g_1\psi(g_2,\dots,g_n) + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\varphi(g_1,\dots,g_{i-1},g_ig_{i+1},g_{i+2},\dots,g_n) \\
&\quad + (-1)^n\varphi(g_1,\dots,g_{n-1}) + (-1)^{n+1}m\psi(g_1,\dots,g_n) \\
&= \delta_{n-1}(\varphi)(g_1,\dots,g_n) + (-1)^{n+1}m\psi(g_1,\dots,g_n)
\end{aligned}$$

donc $m\psi = (-1)^n\delta_{n-1}(\varphi) = \delta_{n-1}((-1)^n\varphi)$ est bien un cobord. □

Corollaire B.6. Soit G un groupe fini et soit M un $\mathbb{Z}[G]$-module de type fini. Alors $H^n(G,M)$ est fini pour tout $n \geqslant 0$.

Preuve. En tant que groupe abélien, $\mathrm{Hom}(G^n, M)$ est de type fini. En effet, si on note $h_1,\dots,h_p$ les éléments du groupe fini G^n et si $\{m_1,\dots,m_p\}$ est une famille génératrice de M, alors les applications $f_{ij} : G^n \to M$ définies par $f_{ij}(h_k) = \begin{cases} m_j & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si } k \neq i \end{cases}$ engendrent le groupe abélien $\mathrm{Hom}(G^n, M)$.

Par conséquent, $\mathrm{Ker}\,\partial_n$ est un sous-groupe abélien d'un groupe abélien de type fini, il est donc de type fini pour tout n. En particulier, pour tout n, le groupe abélien quotient $H^n(G,M)$ est de type fini. Mais il est de torsion d'après la proposition, donc il est fini. □

Remarque B.7. Soit G un groupe et soit M un G-module. Il existe un espace topologique $K(G,1)$ appelé espace d'Eilenberg-MacLane, sur lequel G agit par automorphismes proprement et sans point fixe, et tel que la cohomologie $H^n(G,M)$ du groupe à coefficients dans M est isomorphe à la cohomologie singulière $H^n(K(G,1);M)$ (qui est l'homologie de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_\bullet(K(G,1)),A)$ ici).

C. Autre exemple : cohomologie de Hochschild

Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre. On va travailler dans la catégorie A-Bimod-A des A-bimodules ; ce sont les A-modules M à gauche et à droite qui vérifient

$$\forall (a,b) \in A,\ \forall m \in M,\ (am)b = a(mb).$$

On peut démontrer que la catégorie A-Bimod-A est équivalente à la catégorie R-Mod pour une $\mathbb{K}$-algèbre R associée à A. Tous les résultats des sections précédentes peuvent donc s'appliquer.

Définition C.1. *Soit M un A-bimodule. La* ***cohomologie de Hochschild*** *de A à coefficients dans M est $H^n(A,M) := \mathrm{Ext}^n_{A\text{-Bimod-}A}(A,M)$. Lorsque $M = A$ on note souvent $\mathrm{HH}^n(A) := H^n(A,A)$.*

Remarque C.2. On peut également définir la cohomologie de Hochschild à partir d'un module pré-cosimplicial de la façon suivante (on peut également définir un module pré-simplicial qui fournit une résolution projective du A-bimodule A et qui induit le module pré-cosimplicial ci-dessous en appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{A\text{-Bimod-}A}(-, M)$, mais nous n'avons pas les outils pour le faire ici).

Soit $\mathcal{M}(A^n, M)$ le $\mathbb{K}$-module des formes n-$\mathbb{K}$-linéaires de A^n dans M, Les cofaces δ_i^n : $\mathcal{M}(A^{n-1}, M) \to \mathcal{M}(A^n, M)$ sont les applications $\mathbb{K}$-linéaires définies par

$$\delta_i^n(f)(a_1, \ldots, a_n) = \begin{cases} a_1 \cdot f(a_2, \ldots, a_n) & \text{si } i = 0 \\ f(a_1, \ldots, a_i a_{i+1}, \ldots, a_n) & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ f(a_1, \ldots, a_{n-1}) \cdot a_n & \text{si } i = n. \end{cases}$$

Lemme C.3. On a les isomorphismes de $\mathbb{K}$-modules suivants :

$$\mathrm{HH}^0(A) \cong Z(A), \text{ le centre de } A, \text{ et}$$
$$H^0(A, M) \cong M^A = \{m \in M : am = ma \text{ pour tout } a \in A.\}$$

Preuve. On a $H^0(A, M) = \mathrm{Ext}^0_{A\text{-Bimod-}A}(A, M) \cong \mathrm{Hom}_{A\text{-Bimod-}A}(A, M)$.

Considérons φ : $\mathrm{Hom}_{A\text{-Bimod-}A}(A, M) \to M$ qui à f associe $f(1)$. Il est clair que φ est un morphisme de $\mathbb{K}$-modules.

Si $f \in \mathrm{Hom}_{A\text{-Bimod-}A}(A, M)$, on a $f(a) = af(1) = am$ puisque f est un morphisme de A-modules à gauche et $f(a) = f(1)a = ma$ puisque f est un morphisme de A-modules à droite. On a donc $m \in M^A$.

Maintenant, étant donné $m \in M^A$, soit $f : A \to M$ l'application définie par $f(a) = am$. Alors pour tout $\alpha \in A$ on a $f(\alpha a) = \alpha a m = \alpha f(a)$ donc f est un morphisme de modules à gauche, et $f(a\alpha) = a\alpha m = am\alpha = f(a)\alpha$ car $m \in M^A$, donc f est un morphisme de modules à droite. Donc $f \in \mathrm{Hom}_{A\text{-Bimod-}A}(A, M)$. On a donc un isomorphisme de $\mathbb{K}$-modules entre $\mathrm{Hom}_{A\text{-Bimod-}A}(A, M)$ et M^A.

En particulier, si $M = A$, on a $M^A = Z(A)$. □

Remarque C.4. La cohomologie de Hochschild joue un rôle important dans l'étude des A-modules.

Par exemple, on dit que deux algèbres A et B sont **Morita équivalentes** si les catégories A-Mod et B-Mod sont équivalentes ; la cohomologie de Hochschild est un *invariant d'équivalence Morita*, c'est-à-dire que si A et B sont Morita équivalentes, alors $\mathrm{HH}^n(A) \cong \mathrm{HH}^n(B)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

VI Extensions de groupes

A. Introduction

Nous allons utiliser la cohomologie des groupes pour classifier les *extensions de groupes.*

La question générale est la suivante. Etant donnés deux groupes G et N (pas nécessairement abéliens), quels sont les groupes E tels qu'il existe une suite exacte $(\mathcal{E})$ $\{1\} \to N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to \{1\}$? Peut-on classifier ces groupes (dans un sens à préciser) ? Notons que G s'identifie aux classes (à gauche par exemple) d'éléments de E modulo le sous-groupe $i(N)$; or G est un groupe donc $i(N)$ doit être normal (distingué) dans E.

Exemple A.1. Notons C_n le groupe cyclique d'ordre n. Prenons l'exemple de $N = C_2 = G$. Ce sont des groupes abéliens, on les note multiplicativement. On cherche donc les groupes E tels que $1 \to C_2 \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} C_2 \to 1$ soit exacte.

Notons que l'on doit avoir $|E| = 4$. Les éléments de E sont donc d'ordre 2 ou 4. S'il existe un élément d'ordre 4, alors E est le groupe cyclique C_4. Ce groupe convient, si on note α, β, et γ les générateurs de $N = C_2$, $E = C_4$ et $G = C_2$ respectivement, on prend $i(\alpha) = \beta^2$ et $\pi(\beta) = \gamma$. Si tous les éléments de E sont d'ordre 2, on est dans la situation $E = C_2^2$ avec $i(a) = (a, 1)$ et $\pi(a, b) = b$.

Les groupes C_4 et C_2^2 ne sont pas isomorphes, on a donc deux possibilités distinctes. Nous verrons que c'est lié au fait que $\left|H^2(C_2, C_2)\right| = 2$ (cf. plus bas).

Cette question est difficile et n'est pas complètement résolue, mais elle l'est dans certains cas. Elle a suscité beaucoup d'intérêt, car elle est un outil dans la question plus générale de la classification des groupes finis. En effet, tout groupe fini G possède une suite de Jordan-Hölder, c'est-à-dire une suite de composition

$$G = G_n \rhd G_{n-1} \rhd \cdots \rhd G_3 \rhd G_2 \rhd G_1 \rhd G_0 = \{1\}$$

dont tous les quotients successifs (G_i/G_{i-1} pour $1 \leqslant i \leqslant n$) sont simples. Les groupes finis simples ont été classifiés à isomorphisme près. De plus, on a des suites exactes $\{1\} \longrightarrow G_{i-1} \longrightarrow G_i \longrightarrow G_i/G_{i-1} \longrightarrow \{1\}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Si on connaissait toutes les suites exactes $(\mathcal{E})$ à isomorphisme près, on pourrait en déduire G_2 à partir des groupes simples G_1 et G_2/G_1, puis les groupes G_3 à partir des groupes G_2 et du groupe simple G_3/G_2 etc.

B. Le cas où $N = A$ est abélien

B.1. Classification des extensions de G par A

Lemme B.1. Soit
$$\{1\} \to A \xrightarrow{i} E \to G \xrightarrow{\pi} \{1\}$$
une suite exacte de groupes avec $i(A)$ normal dans E. Alors A est un $\mathbb{Z}[G]$-module, l'action de $g \in G$ sur $a \in A$ étant donnée par ${}^g a = i^{-1}(\hat{g} i(a) \hat{g}^{-1})$ où $\hat{g} \in \pi^{-1}(g) \in E$.

Preuve. Puisque $i(A)$ est un sous-groupe normal de E, chaque élément de E induit un automorphisme de $i(A)$ en agissant par conjugaison. On a donc un morphisme de groupes

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(i(A)) \\ e & \to & \varphi_e : i(a) \to ei(a)e^{-1}. \end{array}$$

Soit maintenant $g \in G$. Puisque π est surjectif, il existe $\hat{g} \in E$ tel que $\pi(\hat{g}) = g$. L'élément $\hat{g}$ agit donc sur $i(A)$ par conjugaison.

Supposons que $e \in E$ soit un autre antécédent de g par π. Alors $e^{-1}\hat{g} \in \operatorname{Ker} \pi = \operatorname{Im} i = i(A)$. Posons $e^{-1}\hat{g} = i(\alpha)$. On doit vérifier que $\varphi_{\hat{g}} = \varphi_e$.

Soit donc $a \in A$. On a

$$\varphi_{\hat{g}}(i(a)) = \hat{g}i(a)\hat{g}^{-1} = ei(\alpha)i(a)i(\alpha)^{-1}e^{-1} = ei(a)e^{-1} = \varphi_e(i(a))$$

puisque $i(A)$ est abélien.

On a donc une action bien définie de G sur $i(A)$.

Enfin, puisque i est injectif, le groupe abélien A est isomorphe à $i(A)$ et on en déduit que l'action de G sur A donnée dans l'énoncé est bien définie et fait de A un $\mathbb{Z}[G]$-module. □

Remarque B.2. Dans ce chapitre, tous les groupes (y compris les groupes abéliens) sont notés multiplicativement. En particulier, dire que A est un $\mathbb{Z}[G]$-module signifie que A est un groupe abélien (noté multiplicativement) muni d'une action de G sur A qui vérifie, pour tout $(a, b, g, h) \in A^2 \times G^2$:

$$\begin{aligned} {}^g(ab) &= {}^g a\, {}^g b & \qquad {}^g 1 &= 1 \\ {}^1 a &= a & {}^{gh} a &= {}^g({}^h a) \end{aligned}$$

que l'on étend à $\mathbb{Z}[G]$ en posant ${}^0 a = 1$, ${}^{g+h}a = {}^g a\, {}^h a$ et ${}^{-g}a = {}^g a^{-1} = ({}^g a)^{-1}$.

Cela signifie que l'on a un morphisme de groupes

$$\begin{array}{rcl} \varphi : G & \to & \mathrm{Aut}(A) \\ g & \to & \varphi_g : [a \to {}^g a] \end{array}$$

(la première ligne dit que φ_g est un morphisme de groupes, qui est inversible d'inverse $\varphi_{g^{-1}}$ grâce à la dernière propriété, puis la deuxième ligne dit que φ est un morphisme de groupes). On dit que G **agit sur** A **par automorphismes**.

D'autre part, si A est un groupe abélien noté multiplicativement, la différentielle δ_n : $\mathrm{Hom}(G^{n-1}, A) \to \mathrm{Hom}(G^n, A)$ du théorème B.4 du chapitre V s'écrit

$$\begin{aligned} &\delta_n(\psi)(g_1, \ldots, g_n) \\ &\quad = {}^{g_1}(g_2, \ldots, g_n) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \psi(g_1, \ldots, g_{i-1}, g_i g_{i+1}, g_{i+2}, \ldots, g_n)^{(-1)^i} \cdot \psi(g_1, \ldots, g_{n-1})^{(-1)^n}. \end{aligned}$$

Donc par exemple, en identifiant $\mathrm{Hom}(G^0, A)$ et A

$$\begin{aligned} \delta_1(a)(g) &= {}^g a a^{-1} \\ \delta_2(\psi)(g_1, g_2) &= {}^{g_1}\psi(g_2) \cdot \psi(g_1 g_2)^{-1} \cdot \psi(g_1) \\ \delta_3(\psi)(g_1, g_2, g_3) &= {}^{g_1}\psi(g_2, g_3) \cdot \psi(g_1 g_2, g_3)^{-1} \cdot \psi(g_1, g_2 g_3) \cdot \psi(g_1, g_2)^{-1}. \end{aligned}$$

Exemple B.3. Nous allons démontrer que $H^n(C_2, C_2) \cong C_2$ pour $n = 0, 1, 2$, où l'action de C_2 sur C_2 est triviale (c'est bien la situation du lemme B.1 lorsque G est abélien). Notons σ le générateur de C_2.

➢ On sait déjà que $H^0(C_2, C_2) = C_2^{C_2} = C_2$ puisque l'action est triviale.

➢ Déterminons $H^1(C_2, C_2)$.

✧ Soit $a \in C_2$. On a $\delta_1(a) = aa^{-1} = 1$ (puisque l'action est triviale), donc $\varphi \in \mathrm{Hom}(C_2, C_2)$ est un cobord si et seulement si $\varphi \equiv 1$. Ainsi $\mathrm{Im}\,\delta_1 = \{1\}$ et donc $H^1(C_2, C_2) = \mathrm{Ker}(\delta_2)$.

✧ Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}(C_2, C_2)$. On a $\delta_2\varphi(u, v) = \varphi(v)\varphi(uv)^{-1}\varphi(u)$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\delta_2\varphi(1,1) &= \varphi(1)\\
\delta_2\varphi(1,\sigma) &= \varphi(1)\\
\delta_2\varphi(\sigma,1) &= \varphi(1)\\
\delta_2\varphi(\sigma,\sigma) &= \varphi(\sigma)^2\varphi(1)^{-1} = \varphi(1)
\end{aligned}$$

donc φ est un cocycle si et seulement si $\varphi(1) = 1$. Le cocycle φ est donc déterminé par $\varphi(\sigma) \in \{1, \sigma\}$. On a donc $\mathrm{Ker}(\delta_2) \cong C_2$.

Finalement, $H^1(C_2, C_2) \cong C_2$.

➢ Déterminons $H^2(C_2, C_2)$.

✧ Le calcul précédent montre que les cobords sont les constantes ($\delta_2\varphi \equiv \varphi(1) \in C_2$). Donc $\mathrm{Im}(\delta_2) \cong C_2$.

✧ Soit $\psi \in \mathrm{Hom}(C_2^2, C_2)$. On a

$$\delta_3\psi(\sigma^a, \sigma^b, \sigma^c) = \psi(\sigma^a, \sigma^b)\psi(\sigma^b, \sigma^c)\psi(\sigma^a, \sigma^{b+c})\psi(\sigma^{a+b}, \sigma^c)$$

(où a, b, c sont dans $\{0, 1\}$).

Si ψ est un cocycle, on a donc, en prenant $a = 0$ puis en prenant $c = 0$

$$\begin{aligned}
\psi(1, \sigma^{b+c}) &= \psi(1, \sigma^b)\\
\psi(\sigma^{a+b}, 1) &= \psi(\sigma^b, 1)
\end{aligned}$$

et en particulier $\psi(1, \sigma) = \psi(1, 1) = \psi(\sigma, 1)$.

Réciproquement, supposons que $\psi(1, \sigma) = \psi(1, 1) = \psi(\sigma, 1)$ et démontrons que ψ est un cocycle. Notons que $\psi(\sigma^a, 1) = \psi(1, 1) = \psi(1, \sigma^a)$ pour tout $a \in \{0, 1\}$ et que $\psi(\sigma^a, \sigma^b) = \psi(\sigma^b, \sigma^a)$ pour tous a, b dans $\{0, 1\}$.

$$\delta_3\psi(\sigma^a, \sigma^b, \sigma^c) = \begin{cases}
\psi(\sigma^a, \sigma^b)\psi(\sigma^b, 1)\psi(\sigma^a, \sigma^b)\psi(1, 1) & \\
\qquad = \psi(\sigma^b, 1)\psi(1, 1) = 1 & \text{si } c = 0\\
\psi(1, \sigma^b)\psi(\sigma^b, \sigma^c)\psi(1, 1)\psi(\sigma^b, \sigma^c) & \\
\qquad = \psi(1, \sigma^b)\psi(1, 1) = 1 & \text{si } a = 0\\
\psi(\sigma, \sigma^b)\psi(\sigma^b, \sigma)\psi(\sigma, \sigma^{b+1})\psi(\sigma^{b+1}, \sigma) & \\
\qquad = \psi(\sigma, \sigma^b)\psi(\sigma, \sigma^b)\psi(\sigma, \sigma^{b+1})\psi(\sigma, \sigma^{b+1}) = 1 & \text{si } a = 1 = c
\end{cases}$$

donc $\delta_3\psi \equiv 1$.

Ainsi, ψ est un cocycle si, et seulement si, $\psi(1, \sigma) = \psi(1, 1) = \psi(\sigma, 1)$. Un tel cocycle est donc déterminé par $(\psi(1, 1), \psi(\sigma, \sigma)) \in C_2^2$. Donc $\mathrm{Ker}\,\delta_3 \cong C_2^2$.

Finalement, $H^2(C_2, C_2) \cong C_2^2/C_2 \cong C_2$.
(Des représentants des deux classes de cohomologie sont donnés par $(\psi(1,1), \psi(\sigma,\sigma)) = (1,1)$ et $(\psi(1,1), \psi(\sigma,\sigma)) = (1,\sigma)$, les autres cocycles sont obtenus à partir de ceux-ci en multipliant par le cobord constant égal à σ.)

Dans la suite, on se donne un groupe G et un $\mathbb{Z}[G]$-module A, c'est-à-dire une action de G sur le groupe abélien A par automorphismes (l'action est prédéfinie).

Définition B.4. *Une **extension de** G **par** A est une suite exacte de groupes*

$$(\mathcal{E})\ \{1\} \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to \{1\}$$

avec $i(A)$ normal dans E et telle que la structure de $\mathbb{Z}[G]$-module induite par la suite exacte $(\mathcal{E})$ sur A est celle que nous nous sommes donnés.
*L'expression "**extension de** G **par** A" est aussi utilisée pour désigner le triplet (E, i, π), ou le groupe E si le contexte (i, π) est clair.*
On notera $E(G, A)$ l'ensemble des extensions de G par A.

Définition-Proposition B.5. On définit une relation d'équivalence sur $E(G, A)$ de la façon suivante. Soient (E, i, π) et (E', i', π') deux extensions de G par A. On dit qu'elles sont **équivalentes** et on note $E \sim E'$ s'il existe un morphisme de groupes $\varphi : E \longrightarrow E'$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
\{1\} \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi"] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & \{1\} \\
\{1\} \arrow[r] & A \arrow[r, "i'"] & E' \arrow[r, "\pi'"] & G \arrow[r] & \{1\}
\end{tikzcd}$$

Preuve. ➢ Il est clair que $E \sim E$, il suffit de prendre $\varphi = \mathrm{id}_E$.

➢ Si $E \sim E'$ au moyen de $\varphi : E \to E'$ et $E' \sim E''$ au moyen de $\psi : E' \to E''$, alors $E \sim E''$ au moyen de $\psi \circ \varphi : E \to E''$.

➢ Supposons que $E \sim E'$ au moyen de $\varphi : E \to E'$.
Démontrons donc que φ est un isomorphisme.

✧ Soit $x \in \operatorname{Ker}\varphi$. Alors $\varphi(x) = 1$ donc $\pi'(\varphi(x)) = 1$, *ie.* $\pi(x) = 1$ donc il existe $a \in A$ tel que $x = i(a)$ ($\operatorname{Ker}\pi = \operatorname{Im} i$) donc $1 = \varphi(x) = \varphi(i(a)) = i'(a)$ et donc $a = 1$ puisque i' est injectif et finalement $x = i(a) = 1$. Donc $\operatorname{Ker}\varphi = \{1\}$ et φ est injectif.

✧ Soit $x' \in E'$. On a $\pi'(x') \in G$ donc puisque π est surjectif il existe $x \in E$ tel que $\pi(x) = \pi'(x')$. On en déduit que $x'\varphi(x)^{-1} \in \operatorname{Ker}\pi' = \operatorname{Im} i'$ donc il existe $a \in A$ tel que $x'\varphi(x)^{-1} = i'(a) = \varphi(i(a))$ et finalement $x' = \varphi(i(a)x) \in \operatorname{Im}\varphi$. Donc φ est surjectif.

Il est maintenant facile de vérifier que $E' \sim E$ au moyen de φ^{-1}. □

Le but de cette partie est d'établir un lien entre les extensions de G par A (avec A abélien) et $H^2(G, A)$. Plus précisément, nous allons démontrer le théorème suivant.

Théorème B.6. Soit G un groupe et qui agit sur un groupe abélien A par automorphismes. Alors il existe une bijection entre l'ensemble des classes d'équivalence $E(G, A)/\sim$ et $H^2(G, A)$.

a). Définition d'une classe de cohomologie à partir d'une extension.

Définition B.7. *Soit $\pi : E \longrightarrow G$ un morphisme surjectif de groupes. Une* ***section*** *de π est une* application *$\sigma : G \longrightarrow E$ telle que $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_G$.*

Soit $(\mathcal{E})$ $\{1\} \to A \xrightarrow{i} E \to G \xrightarrow{\pi} \{1\}$ une extension de G par A. On veut lui associer un élément de $H^2(G, A)$.

Rappelons qu'en utilisant la résolution standard, $H^2(G, A) = Z^2(G, A)/B^2(G, A)$ où le groupe des cocycles $Z^2(G, A)$ est le noyau de $d : \mathrm{Hom}(G^2, A) \to \mathrm{Hom}(G^3, A)$ défini par $df : (u, v, w) \to {}^u f(v, w) \cdot f(uv, w)^{-1} \cdot f(u, vw) \cdot f(u, v)^{-1}$ et le groupe des cobords $B^2(G, A)$ est l'image de $d : \mathrm{Hom}(G, A) \to \mathrm{Hom}(G^2, A)$ défini par $dg(u, v) = {}^u g(v) \cdot g(uv)^{-1} \cdot g(u)$.

Construction d'un élément de $\mathrm{Hom}(G^2, A)$

Fixons une section σ de π (autrement dit, une règle pour choisir un antécédent de chaque élément de G par π). Rappelons que l'action de G sur $i(A)$ est donnée par ${}^g i(a) = \sigma(g)i(a)\sigma(g)^{-1}$.

Lemme B.8. Tout élément de E s'écrit de manière unique sous la forme $i(a)\sigma(g)$ avec $(a, g) \in A \times G$.

Preuve. ➢ Soit $x \in E$. Alors $g = \pi(x) \in G$. Posons $y = x\sigma(g)^{-1} \in E$. On a $\pi(y) = \pi(x)\pi(\sigma(g)^{-1}) = g\pi(\sigma(g))^{-1} = gg^{-1} = 1$ donc $y \in \mathrm{Ker}\,\pi = \mathrm{Im}\,i$ et donc $y = i(a)$ pour un $a \in A$. Finalement, $x = i(a)\sigma(g)$.

➢ Démontrons maintenant unicité. Supposons que $i(a)\sigma(g) = i(b)\sigma(h)$. On a alors $\sigma(h)\sigma(g)^{-1} = i(b)^{-1}i(a) = i(b^{-1}a) \in \mathrm{Im}\,i = \mathrm{Ker}\,\pi$ donc $1 = \pi(\sigma(h)\sigma(g)^{-1}) = \pi(\sigma(h))\pi(\sigma(g))^{-1} = hg^{-1}$. On a donc $g = h$, d'où $i(a) = i(b)$ et, puisque i est injectif, $a = b$. □

Ecrivons le produit de E pour deux éléments sous cette forme. Soient $e = i(a)\sigma(g)$ et $e' = i(b)\sigma(h)$. On a $ee' = i(a)\sigma(g)i(b)\sigma(h) = i(a)\sigma(g)i(b)\sigma(g)^{-1}\sigma(g)\sigma(h) = i(a)\,{}^g i(b)\sigma(g)\sigma(h)$. Or $i(A)$ est normal dans E, donc ${}^g i(b) = \sigma(g)i(b)\sigma(g)^{-1} \in i(A)$. D'autre part, $\sigma(g)\sigma(h)$ et $\sigma(gh)$ ont tous deux pour image gh par π, donc ils diffèrent par un élément de $i(A)$. Puisque i est injectif, il existe un unique $f_\sigma(g, h) \in A$ tel que $\sigma(g)\sigma(h) = i(f_\sigma(g, h))\sigma(gh)$. Finalement, $ee' = i(a)\,{}^g i(b)i(f_\sigma(g, h))\sigma(gh)$ qui est de la forme $i(c)\sigma(k)$.

Nous avons donc démontré le résultat suivant.

Définition-Proposition B.9. Soit σ une section de π et soit $(g, h) \in G^2$. Alors $f_\sigma(g, h)$ est l'unique élément de A tel que $\sigma(g)\sigma(h) = i(f_\sigma(g, h))\sigma(gh)$.
Ceci définit une application $f_\sigma : G^2 \to A$.

f_σ est un 2-cocycle

Pour démontrer que f_σ est un 2-cocycle, on utilise l'associativité de la loi de E. Soit $(g, h, k) \in G^3$. On a

$$(\sigma(g)\sigma(h))\sigma(k) = i(f_\sigma(g, h))\sigma(gh)\sigma(k) = i(f_\sigma(g, h))i(f_\sigma(gh, k))\sigma(ghk)$$
$$\sigma(g)(\sigma(h)\sigma(k)) = \sigma(g)\,(i(f_\sigma(h, k))\sigma(hk)) = {}^g i(f_\sigma(h, k))i(f_\sigma(g, hk))\sigma(ghk).$$

Par identification (en utilisant le fait que A est abélien), on en déduit que $i(f_\sigma(g, h))i(f_\sigma(gh, k)) = {}^g i(f_\sigma(h, k))i(f_\sigma(g, hk))$ et donc, puisque i est injectif, ${}^g f_\sigma(h, k)f_\sigma(gh, k)^{-1}f_\sigma(g, hk)f_\sigma(g, h)^{-1} = 1$, c'est-à-dire que $df_\sigma = 1$.

La classe de f_σ dans $H^2(G,A)$ ne dépend pas du choix de σ

Si τ est une autre section de π, nous allons démontrer que $(u,v) \to f_\sigma(u,v)f_\tau(u,v)^{-1}$ est dans $B^2(G,A)$.

Soit $g \in G$. Alors $\pi(\tau(g)\sigma(g)^{-1}) = gg^{-1} = 1$ donc $\tau(g)\sigma(g)^{-1} \in \operatorname{Ker}\pi = \operatorname{Im} i$ donc il existe un unique $a_g \in A$ tel que $\tau(g)\sigma(g)^{-1} = i(a_g)$ (l'unicité vient de l'injectivité de i).

Ceci définit une application $\alpha : G \to A$ par $\alpha(g) = a_g$.

Maintenant considérons $\tau(g)\tau(h)$ où $(g,h) \in G^2$. On a

$$\begin{aligned} & \tau(g)\tau(h) = i(f_\tau(g,h))\tau(gh) \\ \text{et} \quad & \tau(g)\tau(h) = i(a_g)\sigma(g)i(a_h)\sigma(h) \\ & \qquad\qquad = i(a_g)\,{}^g i(a_h)i(f_\sigma(g,h))\sigma(gh) \end{aligned}$$

donc, par identification et en utilisant l'injectivité de i et la commutativité de A, on a $f_\tau(g,h)f_\sigma(g,h)^{-1} = {}^g a_h a_{gh}^{-1} a_g = d\alpha(g,h)$, donc f_τ et f_σ diffèrent d'un cobord.

Nous avons donc démontré que la classe du cocycle f_σ est un élément bien défini de $H^2(G,A)$.

b). Définition d'une classe de cohomologie à partir d'une *classe d'équivalence* d'extensions.

Il nous faut maintenant démontrer que deux extensions équivalentes définissent la même classe de cohomologie.

Soient donc (E,i,π) et (E',i',π') deux extensions équivalentes. Il existe donc un isomorphisme $\varphi : E \to E'$ tel que $\varphi \circ i = i'$ et $\pi' \circ \varphi = \pi$.

Soit σ une section de π. Alors $\sigma' = \varphi \circ \sigma$ est une section de π'. En effet, on a

$$\pi' \circ \sigma' = \pi' \circ \varphi \circ \sigma = \pi \circ \sigma = \mathrm{id}_G\,.$$

Soit maintenant $(g,h) \in G^2$. Alors $\sigma'(g)\sigma'(h) = i'(f_{\sigma'}(g,h))\sigma'(gh)$ et

$$\begin{aligned} \sigma'(g)\sigma'(h) &= \varphi(\sigma(g))\varphi(\sigma(h)) = \varphi(\sigma(g)\sigma(h)) = \varphi(i(f_\sigma(g,h))\sigma(gh)) = \varphi \circ i(f_\sigma(g,h))\varphi \circ \sigma(gh) \\ &= i'(f_\sigma(g,h))\sigma'(gh). \end{aligned}$$

Par identification, on a donc $f_\sigma = f_{\sigma'}$. En particulier, ces applications définissent la même classe de cohomologie.

Nous avons donc défini une application

$$\begin{aligned} \Phi : E(G,A)/\sim \quad &\to \quad H^2(G,A) \\ (E,i,\pi) \quad &\to \quad \bar{f}_\sigma \quad \text{où } \sigma \text{ est une section de } \pi. \end{aligned}$$

c). Φ est injective

Soient $\mathcal{E} = (E,i,\pi)$ et $\mathcal{E} = (E',i',\pi')$ deux extensions de A par G dont les classes d'équivalence ont la même image par Φ. Nous devons démontrer qu'elles sont equivalentes.

Fixons une section σ de π et une section σ' de π'. Notre hypothèse est que $\bar{f}_\sigma = \bar{f}_{\sigma'}$, c'est-à-dire que $f_{\sigma'} = f_\sigma \cdot d\alpha$ pour une application $\alpha : G \to A$.

Nous devons définir un morphisme de groupes $\varphi : E \to E'$. Soit $e \in E$; il existe un unique $(a,g) \in A \times G$ tel que $e = i(a)\sigma(g)$. Posons alors $\varphi(e) = i'(a\alpha(g)^{-1})\sigma'(g)$. Ceci définit une application $E \to E'$.

Vérifions que φ est un morphisme de groupes. On a

$$\begin{aligned}
\varphi(i(a)\sigma(g))\varphi(i(b)\sigma(h)) &= i'(a\alpha(g)^{-1})\sigma'(g)i'(b\alpha(h)^{-1})\sigma'(h) \\
&= i'(a\alpha(g)^{-1})\,{}^{g}i'(b\alpha(h)^{-1})i'(f_{\sigma'}(g,h))\sigma'(gh) \\
&= i'(a\,{}^{g}b)i'(f_{\sigma}(g,h)d\alpha(g,h)\alpha(g)^{-1}\,{}^{g}\alpha(h)^{-1})\sigma'(gh) \\
&= i'(a\,{}^{g}b)i'(f_{\sigma}(g,h)\alpha(gh)^{-1})\sigma'(gh) \\
&= \varphi(i(a\,{}^{g}bf_{\sigma}(g,h))\sigma(gh)) \\
&= \varphi(i(a)\sigma(g)i(b)\sigma(h))
\end{aligned}$$

Il nous reste à vérifier que $\pi' \circ \varphi = \pi$ et que $\varphi \circ i = i'$.
Notons que $\pi \circ i \equiv 1$ and $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_G$ et de même pour l'autre extension. On a donc

$$\begin{aligned}
\pi'(\varphi(i(a)\sigma(g))) =& \pi'(i'(a\alpha(g)^{-1})\sigma'(g)) = \pi'(i'(a\alpha(g)^{-1}))\pi'(\sigma'(g)) \\
&= 1 \cdot g = \pi(i(a))\pi(\sigma(g)) = \pi(i(a)\sigma(g)).
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\varphi(i(a)\sigma(1)) &= i'(a\alpha(1)^{-1})\sigma'(1) = i'(a)i'(\alpha(1)^{-1})\sigma'(1) \\
\text{et } \varphi(i(a)\sigma(1)) &= \varphi(i(a))\varphi(\sigma(1)) = \varphi(i(a))i'(\alpha(1)^{-1})\sigma'(1)
\end{aligned}$$

donc en identifiant on obtient $\varphi(i(a)) = i'(a)$.

On a donc démontré que $\mathcal{E} \sim \mathcal{E}'$ et donc que φ est une application injective.

d). Φ est surjective

Pour démontrer que Φ est surjective, il suffit de définir, pour tout 2-cocycle f, une extension $(\mathcal{E}_f)$ telle que l'image par Φ de la classe d'équivalence $(\mathcal{E}_f)$ est f.

Soit donc $f \in Z^2(G, A)$ un 2-cocycle. Nous aurons besoin à plusieurs reprises du lemme suivant.

Lemme B.10. Posons $\varepsilon = f(1,1)^{-1}$. Pour tout $u \in G$ on a

$$\begin{aligned}
f(1,u) &= \varepsilon^{-1} \\
f(u,1) &= {}^{u}\varepsilon^{-1}
\end{aligned}$$

Preuve. Puisque f est un 2-cocycle, on a

$$1 = df(1,1,u) = {}^{1}f(1,u)f(1,u)^{-1}f(1,u)f(1,1)^{-1} = f(1,u)\varepsilon$$

donc $f(1,u) = \varepsilon^{-1}$ et

$$1 = df(u,1,1) = {}^{u}f(1,1)f(u,1)^{-1}f(u,1)f(u,1)^{-1} = {}^{u}\varepsilon^{-1}f(u,1)^{-1}$$

donc $f(u,1) = {}^{u}\varepsilon^{-1}$. □

Lemme B.11. Soit E_f l'ensemble $A \times G$ muni de la loi $E_f \times E_f \to E_f$ définie par

$$\forall (a,g) \in A \times G,\ \forall (b,h) \in A \times G,\ (a,g) * (b,h) = (a\,{}^{g}b\,f(g,h), gh).$$

Alors E_f est un groupe.

Preuve. ➢ La loi est associative. Soient (a,g), (b,h) et (c,k) dans E_f. Notons que puisque f est un 2-cocycle (et A est abélien), on a ${}^g f(h,k)f(g,hk) = f(gh,k)f(g,h)$.

$$\begin{aligned}
((a,g)*(b,h))*(c,k) &= (a\,{}^g b\, f(g,h), gh)*(c,k) \\
&= (a\,{}^g b f(g,h)\,{}^{gh} c f(gh,k), ghk) \\
(a,g)*((b,h)*(c,k)) &= (a,g)*(b\,{}^h c f(h,k), hk) \\
&= (a\,{}^g b\,{}^{gh} c\,{}^g f(h,k) f(g,hk), ghk) \\
&= (a\,{}^g b\,{}^{gh} c f(gh,k) f(g,h), ghk) \\
&= ((a,g)*(b,h))*(c,k).
\end{aligned}$$

➢ La loi possède un élément neutre, $(\varepsilon, 1)$, où $\varepsilon = f(1,1)^{-1}$. Soit (a,g) dans E_f.

$$\begin{aligned}
(a,g)*(\varepsilon,1) &= (a\,{}^g \varepsilon f(g,1), g) \\
&= (a f(g,1)^{-1} f(g,1), g) = (a,g) \\
(\varepsilon,1)*(a,g) &= (\varepsilon\,{}^1 a f(1,g), g) \\
&= (a\varepsilon\varepsilon^{-1}, g) = (a,g).
\end{aligned}$$

➢ Tout élément $(a,g) \in E_f$ possède un inverse, $\left({}^{g^{-1}}(a^{-1}\varepsilon f(g,g^{-1})^{-1}), g^{-1}\right)$.

$$\begin{aligned}
(a,g)*\left({}^{g^{-1}}\left(a^{-1}\varepsilon f(g,g^{-1})^{-1}\right), g^{-1}\right) &= \left(a\left(a^{-1}\varepsilon f(g,g^{-1})^{-1}\right) f(g,g^{-1}), gg^{-1}\right) = (\varepsilon,1) \\
\left({}^{g^{-1}}\left(a^{-1}\varepsilon f(g,g^{-1})^{-1}\right), g^{-1}\right)*(a,g) &= \left({}^{g^{-1}}\left(a^{-1}\varepsilon f(g,g^{-1})^{-1}\right)\,{}^{g^{-1}} a f(g^{-1},g), g^{-1}g\right) \\
&= \left({}^{g^{-1}}\varepsilon\,{}^{g^{-1}} f(g,g^{-1})^{-1} f(g^{-1},g), 1\right).
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
1 = df(g^{-1},g,g^{-1}) &= {}^{g^{-1}} f(g,g^{-1}) f(1,g^{-1})^{-1} f(g^{-1},1) f(g^{-1},g)^{-1} \\
&= {}^{g^{-1}} f(g,g^{-1})\varepsilon\,{}^{g^{-1}}\varepsilon^{-1} f(g^{-1},g)^{-1}
\end{aligned}$$

donc le dernier élément de E_f ci-dessus est bien $(\varepsilon,1)$. □

Lemme B.12. On définit les applications $\pi_f : E_f \to G$ et $i_f : A \to E_f$ par

$$\pi_f(a,g) = g \quad \text{et} \quad i_f(a) = (a\varepsilon, 1).$$

Alors π_f et i_f sont des morphismes de groupe et

$$(\mathcal{E}_f)\ \ \{1\} \to A \xrightarrow{i_f} E_f \xrightarrow{\pi_f} G \to \{1\}$$

est une extension de G par A.

Preuve. ➢ π_f est un morphisme de groupes : $\pi_f((a,g)*(b,h)) = \pi_f(a\,{}^g b f(g,h), gh) = gh = \pi_f(a,g)\pi_f(b,h)$.

➢ i_f est un morphisme de groupes : $i_f(a)i_f(b) = (a\varepsilon,1)(b\varepsilon,1) = (a\varepsilon b\varepsilon f(1,1),1) = (ab\varepsilon,1) = i_f(ab)$.

➢ i_f est injectif. En effet, si $i_f(a) = (\varepsilon,1)$ alors $a\varepsilon = \varepsilon$ et donc $a = 1$ donc $\operatorname{Ker} i_f = \{1\}$.

➢ π_f est surjectif. En effet, pour tout $g \in G$ on a $g = \pi_f(\varepsilon, g)$.

➢ On a $\pi_f \circ i_f(a) = \pi_f(a\varepsilon, 1) = 1$ donc $\pi_f \circ i_f \equiv 1$ et donc $\operatorname{Im} i_f \subseteq \operatorname{Ker} \pi_f$.

➢ Soit $(a, g) \in \operatorname{Ker} \pi_f$. On a donc $g = 1$. On en déduit que $(a, g) = (a, 1) = i_f(a\varepsilon^{-1}) \in \operatorname{Im} i_f$. On a donc $\operatorname{Ker} \pi_f = \operatorname{Im} i_f$.

➢ La suite $(\mathcal{E}_f)$ est donc exacte. Il reste à vérifier que l'action de G sur A induite par cette suite exacte est la même que l'action de G sur A donnée au départ.
Notons que l'application $\sigma_f : G \to E_f$ définie par $\sigma_f(g) = (1, g)$ est une section de π_f. Nous devons alors vérifier que pour tout $g \in G$ et tout $a \in A$ on a $i_f({}^g a) = \sigma_f(g) i_f(a) \sigma_f(g)^{-1}$. On a

$$
\begin{aligned}
\sigma_f(g) i_f(a) \sigma_f(g)^{-1} &= (1, g)(a\varepsilon, 1)({}^{g^{-1}}(\varepsilon f(g, g^{-1})^{-1}), g^{-1}) \\
&= ({}^g(a\varepsilon) f(g, 1), g)({}^{g^{-1}}(\varepsilon f(g, g^{-1})^{-1}), g^{-1}) \\
&= ({}^g(a\varepsilon) f(g, 1) \varepsilon f(g, g^{-1})^{-1} f(g, g^{-1}), 1) \\
&= ({}^g a \varepsilon\, {}^g \varepsilon f(g, 1), 1) \\
&= ({}^g a \varepsilon\, {}^g \varepsilon\, {}^g \varepsilon^{-1}, 1) \\
&= ({}^g a \varepsilon, 1) = i_f({}^g a).
\end{aligned}
$$
□

Lemme B.13. L'image de la classe d'équivalence de $(\mathcal{E}_f)$ par Φ est f.

Preuve. Il suffit de démontrer que $f_{\sigma_f} = f$. Pour cela, considérons $\sigma_f(g)\sigma_f(h)$ pour $(g, h) \in G^2$. Par définition de f_{σ_f} on a

$$
\begin{aligned}
\sigma_f(g)\sigma_f(h) &= i_f(f_{\sigma_f}(g, h))\sigma(gh) \\
&= (f_{\sigma_f}(g, h)\varepsilon, 1) * (1, gh) \\
&= (f_{\sigma_f}(g, h)\varepsilon f(1, gh), gh) \\
&= (f_{\sigma_f}(g, h)\varepsilon\varepsilon^{-1}, gh) \\
&= (f_{\sigma_f}(g, h), gh) \\
\text{et } \sigma_f(g)\sigma_f(h) &= (1, g) * (1, h) = (f(gh), gh)
\end{aligned}
$$

donc en idenfiant on obtient $f_{\sigma_f}(g, h) = f(g, h)$. □

B.2. $H^1(G, A)$ et les extensions triviales

Dans cette partie, nous supposons toujours que A est abélien. Nous savons maintenant que $H^2(G, A)$ correspond aux classes d'équivalence d'extensions de G par A.
Nous allons voir maintenant comment interpréter $H^1(G, A)$ en termes d'extensions.

Définition B.14. *Une extension E de G par A est dite **triviale** s'il existe une section σ de π qui est un morphisme de groupes.*

Rappel. Soient N et G deux groupes tels que G agit par automorphismes sur N, c'est-à-dire qu'il existe un morphisme de groupes $\varphi : G \to \operatorname{Aut}(N)$. Le **produit semi-direct** de N par G est le groupe noté $N \rtimes G$ dont l'ensemble sous-jacent est $N \times G$ et la loi est donnée par $(n, g)(m, h) = (n\varphi(g)(m), gh)$.

En particulier, si $\{1\} \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow \{1\}$ est une extension de G par le $\mathbb{Z}[G]$-module A, on peut considérer le produit semi-direct $A \rtimes G$ dont la loi est donnée par $(a,g)(b,h) = (a\,{}^g b, gh)$.

Proposition B.15. Une extension est triviale si, et seulement si, elle est équivalente à

$$(\mathcal{F})\ 1 \to A \xrightarrow{i} A \rtimes G \xrightarrow{\pi} G \to 1$$

où $i(a) = (a,1)$ et $\pi(a,g) = g$ pour tout $(a,g) \in A \times G$.

Preuve. ➢ Supposons que l'extension $\{1\} \to A \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} G \longrightarrow \{1\}$ est équivalente à $(\mathcal{F})$. On a donc un isomorphisme de groupes $\varphi : E \to A \rtimes G$ tel que $\varphi \circ j = i$ et $\pi \circ \varphi = p$. On définit une section σ de p par $\sigma(g) = \varphi^{-1}(1,g)$.
En effet, σ est un morphisme de groupes puisque $\sigma(gh) = \varphi^{-1}(1,gh) = \varphi^{-1}((1,g)(1,h)) = \varphi^{-1}(1,g)\varphi^{-1}(1,h) = \sigma(g)\sigma(h)$.
De plus, on a $p \circ \sigma(g) = \pi \circ \varphi \circ \varphi^{-1}(1,g) = \pi(1,g) = g$ donc $p \circ \sigma = \mathrm{id}_G$, c'est-à-dire que σ est une section de p, et donc l'extension E est scindée.

➢ Supposons que $(\mathcal{E})\ \{1\} \to A \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} G \longrightarrow \{1\}$ est triviale. Il existe donc une section σ de p qui est un morphisme de groupes. Puisque tout élément de E s'écrit de manière unique sous la forme $j(a)\sigma(g)$, on définit une bijection (ensembliste) $\alpha : A \rtimes G \to E$ par $\alpha(a,g) = j(a)\sigma(g)$. Démontrons que α est un morphisme de groupes.
On a (voir page 71)

$$\begin{aligned}\alpha((a,g)(b,h)) = \alpha(a\,{}^g b, gh) = j(a\,{}^g b)\sigma(gh) &= j(a)\,{}^g(j(b))\sigma(g)\sigma(h)\\ &= (j(a)\sigma(g))\,(j(b)\sigma(h)) = \alpha(a,g)\alpha(b,h).\end{aligned}$$

Enfin, on a $\alpha \circ i(a) = \alpha(a,1) = j(a)\sigma(1) = j(a)$ donc $\alpha \circ i = j$, et $p \circ \alpha(a,g) = p(j(a)\sigma(g)) = p(j(a))p(\sigma(g)) = 1g = g = \pi(a,g)$ donc $p \circ \alpha = \pi$.
Donc $E \sim A \rtimes G$. □

Remarque B.16. Cette proposition dit qu'à équivalence près, il n'y a qu'une extension triviale de G par A. Notons qu'elle correspond à l'élément neutre du groupe $H^2(G,A)$, car si la section σ est un morphisme de groupes on a $f_\sigma \equiv 1$.

Mais dans le cas où il y a une section qui est un morphisme de groupes, il y en a plusieurs (qui définissent toutes des extensions – triviales – équivalentes), ces sections peuvent être classifiées grâce au groupe $H^1(G,A)$.

On dira que deux sections σ et τ de π qui sont des morphismes de groupes sont conjuguées par un élément de A s'il existe $a \in A$ tel que $\tau(g) = i(a)^{-1}\sigma(g)i(a)$ pour tout $g \in G$.

Proposition B.17. Soit $1 \to A \to E \to G \to 1$ une extension triviale. L'ensemble des classes de conjugaison par des éléments de A des sections de π qui sont des morphismes de groupe est en bijection avec $H^1(G,A)$.

Preuve. E est une extension triviale de A par G, donc π admet des sections qui sont des morphismes. Dans la suite, fixons une section $\sigma : G \to E$ de π qui est un morphisme.

Rappelons que tout élément de E s'écrit de manière unique sous la forme $i(a)\sigma(g)$ avec $(a,g) \in A \times G$ et que le produit de E s'écrit alors $(i(a)\sigma(g))\,(i(b)\sigma(h)) = i(a\,{}^g b)\sigma(gh)$.

➢ Soit $\tau : G \to E$ une autre section qui est un morphisme de groupes. Pour tout $g \in G$, il existe un unique $\ell_\tau(g) \in A$ tel que $\tau(g) = i(\ell_\tau(g))\sigma(g)$. Ceci définit une application $\ell : G \to A$. Vérifions que ℓ_τ est un 1-cocycle. Soit $(g,h) \in G^2$. On a

$$i(\ell_\tau(gh))\sigma(gh) = \tau(gh) = \tau(g)\tau(h) = i(\ell_\tau(g))\sigma(g)i(\ell_\tau(h))\sigma(h) = i(\ell_\tau(g)\,{}^g\ell_\tau(h))\sigma(gh)$$

donc en identifiant on obtient $\ell_\tau(gh) = {}^g\ell_\tau(h)\ell_\tau(g)$ c'est-à-dire que ℓ_τ est un cocycle.

➢ Supposons que τ est conjugué à σ par un élément de A, c'est-a-dire qu'il existe $a \in A$ tel que $\tau = i(a)^{-1}\sigma(-)i(a)$. On a

$$i(\ell_\tau(g))\sigma(g) = \tau(g) = i(a)^{-1}\sigma(g)i(a) = i(a^{-1}\,{}^g a)\sigma(g)$$

donc en identifiant on a $\ell_\tau(g) = a^{-1}\,{}^g a = da(g)$ donc ℓ_τ est un cobord.

Nous avons donc défini une application

$$\Psi : \{\text{classes de conjugaison par } A \text{ des sections morphismes}\} \to H^1(G,A).$$

➢ Supposons que τ et ω sont deux sections de π qui sont des morphismes de groupes telles que $\Psi(\tau) = \Psi(\sigma)$. Les classes de cohomologie de ℓ_τ et de ℓ_ω sont égales, il existe donc un cobord da tel que $\ell_\tau = da \cdot \ell_\omega$. Soit $g \in G$. On a alors

$$\begin{aligned}\tau(g) = i(\ell_\tau(g))\sigma(g) = i(da(g)\ell_\omega(g))\sigma(g) &= i(a^{-1}\ell_\omega(g)\,{}^g a)\sigma(g)\\ &= i(a^{-1})i(\ell_\omega(g))\sigma(g)i(a) = i(a)^{-1}\omega(g)i(a)\end{aligned}$$

donc τ et ω sont conjuguées par un élément de A. Donc Ψ est injective.

➢ Il reste à démontrer que Ψ est surjective.
Soit donc ℓ un 1-cocyle. Soit $\tau : G \to E$ défini par $\tau(g) = i(\ell(g))\sigma(g)$.
  ✧ τ est une section de π. En effet, $\pi\tau(g) = \pi(i(\ell(g)))\pi(\sigma(g)) = 1g = g$.
  ✧ τ est un morphisme de groupes. En effet,

$$\begin{aligned}\tau(gh) =& i(\ell(gh))\sigma(gh) = i({}^g\ell(h))i(\ell(h))\sigma(g)\sigma(h)\\ &= i(\ell(g))\sigma(g)i(\ell(h))\sigma(h) = \tau(g)\tau(h).\end{aligned}$$

  ✧ $\Psi(\tau) = \ell$ par définition de τ et de $\Psi(\tau)$.

Donc Ψ est surjective. C'est donc une bijection. □

Corollaire B.18. Si A est un $\mathbb{Z}[G]$-module trivial, alors l'extension E de G par A est triviale si, et seulement si, elle est équivalente à $1 \to A \xrightarrow{i} A \times G \xrightarrow{\pi} G \to 1$ dont les morphismes i et π sont l'injection et la projection naturelles. De plus, l'ensemble des sections de π qui sont des morphismes de groupe est en bijection avec $H^1(G,A)$.

Preuve. Il suffit de vérifier le dernier point. Notons que $i(a) = (a,1)$ pour tout $a \in A$. Donc $i(A) = A \times \{1\}$, qui agit trivialement par conjugaison sur $A \times G$ puisque A est abélien ($i(a)^{-1}(b,g)i(a) = (a^{-1},1)(b,g)(a,1) = (a^{-1}ab,g) = (b,g)$), donc les classes de conjugaison par des éléments de A de sections de π qui sont des morphismes de groupes sont toutes réduites à un élément. □

B.3. $H^3(G,A)$?

On peut se demander à quoi correspond $H^3(G,A)$. Ce groupe est en bijection avec les classes d'équivalence de suites exactes de la forme $\{1\} \to A \to N \to E \to G \to \{1\}$ pour une relation d'équivalence plus compliquée que la précédente et où N est un "module croisé" sur E (muni d'une action particulière de E) et A est central dans N.

Bibliographie

[1] Weibel, C. A. : *An introduction to homological algebra*

[2] Rotman, J. J. : *An introduction to homological algebra*

[3] Serre, J.-P. : *Groupes finis, Ch. 4*, http ://front.math.ucdavis.edu/0503.5154

[4] (Hilton, P. J. & Stammbach, U. : *A course in homological algebra*)