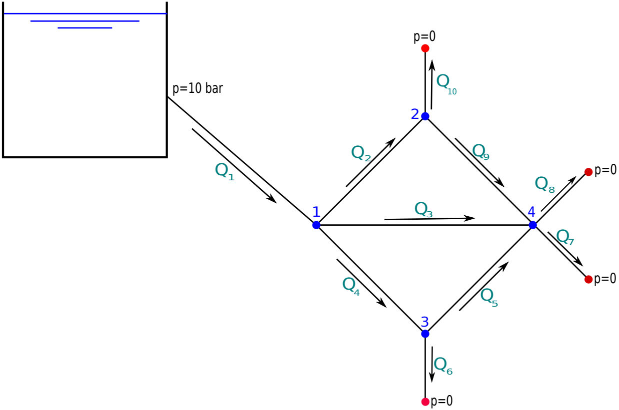
I.
MÉTHODES DIRECTES DE RÉSOLUTION DES SYSTÈMES LINÉAIRES

Analyse Numérique
Tronc Commun

On considère un réseau hydraulique comme sur la figure :



Le réseau est alimenté par un réservoir d'eau à pression constante ($p = 10$ bar). Dans chaque branche du réseau, on a la relation suivante entre le débit d'eau Q $[m^3/s]$ et la pression aux deux extrémités :

$$Q = \frac{1}{\rho L}(p_{\text{sortie}} - p_{\text{entrée}})$$

où ρ est la résistance hydraulique par unité de longueur et L est la longueur du tuyau.

Le réseau est alimenté par un réservoir d'eau à pression constante ($p = 10$ bar). Dans chaque branche du réseau, on a la relation suivante entre le débit d'eau Q $[m^3/s]$ et la pression aux deux extrémités :

$$Q = \frac{1}{\rho L}(p_{\text{sortie}} - p_{\text{entrée}})$$

où ρ est la résistance hydraulique par unité de longueur et L est la longueur du tuyau.

Pour modéliser ce problème, on écrit une équation d'équilibre des débits entrants et sortants. Par exemple, pour le nœud 2, on a

$$Q_2 - Q_{10} - Q_9 = 0.$$

Ici on a attribué un signe négatif pour les débits sortants.

On obtient ainsi les équations :

$$
\begin{aligned}
Q_1 - Q_2 - Q_3 - Q_4 &= 0 \\
Q_2 - Q_9 - Q_{10} &= 0 \\
Q_4 - Q_5 - Q_6 &= 0 \\
Q_3 + Q_5 - Q_7 - Q_8 + Q_9 &= 0
\end{aligned}
$$

On obtient ainsi les équations :

$$\begin{aligned}
Q_1 - Q_2 - Q_3 - Q_4 &= 0\\
Q_2 - Q_9 - Q_{10} &= 0\\
Q_4 - Q_5 - Q_6 &= 0\\
Q_3 + Q_5 - Q_7 - Q_8 + Q_9 &= 0
\end{aligned}$$

En supposant que les tuyaux ont la même longueur L et la même résistance hydraulique ρ, On obtient le système d'équations :

$$\begin{aligned}
4p_1 - p_2 - p_3 - p_4 &= 10\\
-p_1 + 3p_2 - p_4 &= 0\\
-p_1 + 3p_3 - p_4 &= 0\\
-p_1 - p_2 - p_3 + 5p_4 &= 0
\end{aligned}$$

On peut encore écrire ceci sous la forme *matricielle* :

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On peut encore écrire ceci sous la forme *matricielle* :

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\sum_{j=1}^{4} a_{ij} p_j = b_i \qquad 1 \leq i \leq 4,$$

On peut encore écrire ceci sous la forme *matricielle* :

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\sum_{j=1}^{4} a_{ij} p_j = b_i \qquad 1 \le i \le 4,$$

i.e.

$$A\, p = b$$

A étant une matrice carrée d'ordre 4 :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Définition

On dit que la matrice A est inversible, s'il existe une matrice notée A^{-1} telle que

$$A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I$$

où I est la matrice identité :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Élimination de Gauss : Un exemple

Pout résoudre un système linéaire, on peut éliminer succesivement chacune des inconnues :

Élimination de Gauss : Un exemple

Pout résoudre un système linéaire, on peut éliminer succesivement chacune des inconnues :
Considérons le système d'ordre 3 :

$$
\begin{aligned}
2\,x_1 + \ \ 4\,x_2 + \ \ 6\,x_3 &= \ \ 2 && (1)\\
3\,x_1 + \ \ 8\,x_2 + 13\,x_3 &= \ \ 5 && (2)\\
2\,x_1 + \ \ 9\,x_2 + 18\,x_3 &= 11 && (3)
\end{aligned}
$$

Élimination de Gauss : Un exemple

Pout résoudre un système linéaire, on peut éliminer succesivement chacune des inconnues :
Considérons le système d'ordre 3 :

$$
\begin{aligned}
2\,x_1 + \ \ 4\,x_2 + \ \ 6\,x_3 &= \ \ 2 \qquad \div 2 \qquad &(1)\\
3\,x_1 + \ \ 8\,x_2 + 13\,x_3 &= \ \ 5 &(2)\\
2\,x_1 + \ \ 9\,x_2 + 18\,x_3 &= 11 &(3)
\end{aligned}
$$

Élimination de Gauss : Un exemple

Pout résoudre un système linéaire, on peut éliminer succesivement chacune des inconnues :
Considérons le système d'ordre 3 :

$$
\begin{aligned}
1\,x_1 + \;2\,x_2 + \;\;3\,x_3 &= \;1 && && (1)\\
3\,x_1 + \;8\,x_2 + 13\,x_3 &= \;5 && (2) - (1) \times 3 && (2)\\
2\,x_1 + \;9\,x_2 + 18\,x_3 &= 11 && && (3)
\end{aligned}
$$

Élimination de Gauss : Un exemple

Pout résoudre un système linéaire, on peut éliminer succesivement chacune des inconnues :
Considérons le système d'ordre 3 :

$$
\begin{aligned}
1\,x_1 + \ 2\,x_2 + \ 3\,x_3 &= \ 1 && && (1)\\
2\,x_2 + \ 4\,x_3 &= \ 2 && && (2)\\
2\,x_1 + \ 9\,x_2 + 18\,x_3 &= 11 && (3) - (1) \times 2 && (3)
\end{aligned}
$$

Élimination de Gauss : Un exemple

Pout résoudre un système linéaire, on peut éliminer succesivement chacune des inconnues :
Considérons le système d'ordre 3 :

$$
\begin{aligned}
1\,x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 &= 1 && && (1)\\
2\,x_2 + 4\,x_3 &= 2 && \div 2 && (2)\\
5\,x_2 + 12\,x_3 &= 9 && && (3)
\end{aligned}
$$

Élimination de Gauss : Un exemple

Pout résoudre un système linéaire, on peut éliminer succesivement chacune des inconnues :
Considérons le système d'ordre 3 :

$$
\begin{aligned}
1\,x_1 + \;\; 2\,x_2 + \;\; 3\,x_3 &= \;\; 1 && && (1)\\
1\,x_2 + \;\; 2\,x_3 &= \;\; 1 && && (2)\\
5\,x_2 + 12\,x_3 &= \;\; 9 && (3) - (2) \times 5 && (3)
\end{aligned}
$$

Élimination de Gauss : Un exemple

Pout résoudre un système linéaire, on peut éliminer succesivement chacune des inconnues :
Considérons le système d'ordre 3 :

$$\begin{aligned} 1\,x_1 + \ 2\,x_2 + \ 3\,x_3 &= \ 1 \qquad (1)\\ 1\,x_2 + \ 2\,x_3 &= \ 1 \qquad (2)\\ 2\,x_3 &= \ 4 \qquad (3) \end{aligned}$$

Élimination de Gauss : Un exemple

Pout résoudre un système linéaire, on peut éliminer succesivement chacune des inconnues :
Considérons le système d'ordre 3 :

$$
\begin{aligned}
1\,x_1 + \;2\,x_2 + \;3\,x_3 &= \;1 \qquad (1)\\
1\,x_2 + \;2\,x_3 &= \;1 \qquad (2)\\
2\,x_3 &= \;4 \qquad (3)
\end{aligned}
$$

On en déduit ainsi

$$x_3 = 2$$

Élimination de Gauss : Un exemple

Pout résoudre un système linéaire, on peut éliminer succesivement chacune des inconnues :
Considérons le système d'ordre 3 :

$$\begin{aligned} 1\,x_1 + \ 2\,x_2 + \ 3\,x_3 &= \ 1 \qquad (1)\\ 1\,x_2 + \ 2\,x_3 &= \ 1 \qquad (2)\\ 2\,x_3 &= \ 4 \qquad (3) \end{aligned}$$

On en déduit ainsi

$$x_3 = 2$$

L'équation (2) implique

$$x_2 = 1 - 2x_3 = -3$$

POLYTECH CLERMONT-FERRAND

Élimination de Gauss : Un exemple

Pout résoudre un système linéaire, on peut éliminer succesivement chacune des inconnues :
Considérons le système d'ordre 3 :

$$
\begin{aligned}
1\,x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 &= 1 \qquad (1)\\
1\,x_2 + 2\,x_3 &= 1 \qquad (2)\\
2\,x_3 &= 4 \qquad (3)
\end{aligned}
$$

On en déduit ainsi

$$x_3 = 2$$

L'équation (2) implique

$$x_2 = 1 - 2x_3 = -3$$

L'équation (1) implique

$$x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_3 = 1$$

Interprétation matricielle

On peut interpréter les différentes étapes de l'élimination de Gauss dans l'exemple précédent de la manière suivante :

$$A^{(1)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 13 \\ 2 & 9 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix} = b^{(1)}$$

Interprétation matricielle

On peut interpréter les différentes étapes de l'élimination de Gauss dans l'exemple précédent de la manière suivante :

$$A^{(1)}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&6\\3&8&13\\2&9&18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\11\end{pmatrix}=b^{(1)}$$

$$A^{(2)}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&4\\0&5&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\9\end{pmatrix}=b^{(2)}$$

Interprétation matricielle

On peut interpréter les différentes étapes de l'élimination de Gauss dans l'exemple précédent de la manière suivante :

$$A^{(1)}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&6\\3&8&13\\2&9&18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\11\end{pmatrix}=b^{(1)}$$

$$A^{(2)}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&4\\0&5&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\9\end{pmatrix}=b^{(2)}$$

$$A^{(3)}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}=b^{(3)}$$

On peut ainsi décrire la méthode de Gauss en trois étapes :

1. Élimination successive des inconnues ; ce qui équivaut à trouver une matrice inversible M telle que la matrice MA soit triangulaire supérieure ;

Méthode de Gauss

On peut ainsi décrire la méthode de Gauss en trois étapes :

1. Élimination successive des inconnues ; ce qui équivaut à trouver une matrice inversible M telle que la matrice MA soit triangulaire supérieure ;
2. calcul simultané du vecteur Mb ;

Méthode de Gauss

On peut ainsi décrire la méthode de Gauss en trois étapes :

1. Élimination successive des inconnues ; ce qui équivaut à trouver une matrice inversible M telle que la matrice MA soit triangulaire supérieure ;
2. calcul simultané du vecteur Mb ;
3. résolution du système linéaire $MAx = Mb$.

Cas général

Notons $a_{ij}^{(1)} := a_{ij}$.

1ère étape : On suppose $a_{11}^{(1)} \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2}^{(2)} & \dots & a_{n-1,n-1}^{(2)} & a_{n-1,n}^{(2)} \\ 0 & a_{n,2}^{(2)} & \dots & \dots & a_{n,n}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(2)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

Cas général

Notons $a_{ij}^{(1)} := a_{ij}$.

1ère étape : On suppose $a_{11}^{(1)} \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2}^{(2)} & \dots & a_{n-1,n-1}^{(2)} & a_{n-1,n}^{(2)} \\ 0 & a_{n,2}^{(2)} & \dots & \dots & a_{n,n}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(2)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

avec

$$a_{1j}^{(2)} = \frac{a_{1j}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, \qquad b_1^{(2)} = \frac{b_1^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$$

Cas général

Notons $a_{ij}^{(1)} := a_{ij}$.

1[ère] étape : On suppose $a_{11}^{(1)} \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2}^{(2)} & \dots & a_{n-1,n-1}^{(2)} & a_{n-1,n}^{(2)} \\ 0 & a_{n,2}^{(2)} & \dots & \dots & a_{n,n}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(2)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

avec

$$a_{1j}^{(2)} = \frac{a_{1j}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, \qquad b_1^{(2)} = \frac{b_1^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$$

$$a_{kj}^{(2)} = a_{kj}^{(1)} - a_{k1}^{(1)}\, a_{1j}^{(2)}, \qquad b_k^{(2)} = b_k^{(1)} - a_{k1}^{(1)}\, b_1^{(2)} \qquad k = 2, \dots, n$$

POLYTECH CLERMONT-FERRAND

k$^{\text{ème}}$ étape :

On suppose $a_{kk}^{(k)} \neq 0$.

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix}
\times & \times & \times & \times & \dots & \dots & \times \\
0 & \times & \dots & \times & \dots & \dots & \vdots \\
0 & 0 & \times & \dots & & \dots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \times & \dots & \dots & \vdots \\
\vdots & \dots & \vdots & \dots & \ddots & \dots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \times & & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \times & \dots & \dots & \times
\end{pmatrix}
\begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow k^{\text{e}} \text{ ligne} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Factorisation LU

Supposons que tous les pivots sont non nuls. L'élimination de Gauss a permis de construire une suite de matrices :

$$
\begin{aligned}
A^{(1)} &= A \\
A^{(2)} &= E^{(2)}\, A^{(1)} = E^{(2)}\, A \\
\ldots &= \ldots \\
A^{(n)} &= E^{(n)}\, A^{(n-1)} \\
&= E^{(n)}\, E^{(n-1)}\, E^{(n-2)}\, \ldots\, E^{(2)}\, A^{(1)}
\end{aligned}
$$

Factorisation LU

Supposons que tous les pivots sont non nuls. L'élimination de Gauss a permis de construire une suite de matrices :

$$
\begin{aligned}
A^{(1)} &= A \\
A^{(2)} &= E^{(2)}\, A^{(1)} = E^{(2)}\, A \\
\dots &= \dots \\
A^{(n)} &= E^{(n)}\, A^{(n-1)} \\
&= E^{(n)}\, E^{(n-1)}\, E^{(n-2)} \, \dots \, E^{(2)}\, A^{(1)}
\end{aligned}
$$

Comme les matrices $E^{(k)}$ sont triangulaires inférieures, la matrice $E^{(n)}\, E^{(n-1)}\, E^{(n-2)} \, \dots \, E^{(2)}$ est triangulaire inférieure. Donc

$$L = (E^{(n)}\, E^{(n-1)}\, E^{(n-2)} \, \dots \, E^{(2)})^{-1}$$

est triangulaire inférieure.

Factorisation LU

Supposons que tous les pivots sont non nuls. L'élimination de Gauss a permis de construire une suite de matrices :

$$\begin{aligned}
A^{(1)} &= A \\
A^{(2)} &= E^{(2)}\, A^{(1)} = E^{(2)}\, A \\
\dots &= \dots \\
A^{(n)} &= E^{(n)}\, A^{(n-1)} \\
&= E^{(n)}\, E^{(n-1)}\, E^{(n-2)} \dots E^{(2)}\, A^{(1)}
\end{aligned}$$

Comme les matrices $E^{(k)}$ sont triangulaires inférieures, la matrice $E^{(n)}\, E^{(n-1)}\, E^{(n-2)} \dots E^{(2)}$ est triangulaire inférieure. Donc

$$L = (E^{(n)}\, E^{(n-1)}\, E^{(n-2)} \dots E^{(2)})^{-1}$$

est triangulaire inférieure.
Donc $A = L\,U$ où $U = A^{(n)}$.

On obtient ainsi la décomposition ou factorisation de A :

$$A = L\,U$$

où L est triangulaire inférieure et U est triangulaire supérieure.

On obtient ainsi la décomposition ou factorisation de A :

$$A = L\,U$$

où L est triangulaire inférieure et U est triangulaire supérieure.
Le système linéaire $A\,x = b$ s'écrit donc $L\,U\,x = b$.

On obtient ainsi la décomposition ou factorisation de A :

$$A = L\,U$$

où L est triangulaire inférieure et U est triangulaire supérieure.
Le système linéaire $A\,x = b$ s'écrit donc $L\,U\,x = b$.
Soit $y = U\,x$. Pour résoudre le système linéaire :

Résolution par factorisation LU

- On détermine L et U tels que $A = L\,U$.

On obtient ainsi la décomposition ou factorisation de A :

$$A = L\,U$$

où L est triangulaire inférieure et U est triangulaire supérieure.
Le système linéaire $A\,x = b$ s'écrit donc $L\,U\,x = b$.
Soit $y = U\,x$. Pour résoudre le système linéaire :

Résolution par factorisation LU

- On détermine L et U tels que $A = L\,U$.
- On résoud le système triangulaire inférieur (Descente) $L\,y = b$.

On obtient ainsi la décomposition ou factorisation de A :

$$A = L\,U$$

où L est triangulaire inférieure et U est triangulaire supérieure.
Le système linéaire $A\,x = b$ s'écrit donc $L\,U\,x = b$.
Soit $y = U\,x$. Pour résoudre le système linéaire :

Résolution par factorisation LU

- On détermine L et U tels que $A = L\,U$.
- On résoud le système triangulaire inférieur (Descente) $L\,y = b$.
- On résoud le système triangulaire supérieur (Remontée) $U\,x = y$.

Définition

Pour tout $k = 1, 2, \dots, n$, la matrice

$$\boldsymbol{\Delta}_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

est appelée sous–matrice principale de A d'ordre k.

Existence d'un factorisation LU

Définition

Pour tout $k = 1, 2, \dots, n$, la matrice

$$\boldsymbol{\Delta}_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

est appelée sous–matrice principale de A d'ordre k.

Ainsi, on a

$$\boldsymbol{\Delta}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Delta}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Delta}_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \dots$$

Théorème

Soit A une $n \times n$–matrice où toutes les sous–matrices principales sont inversibles. Alors, il existe une matrice triangulaire inférieure $L = (\ell_{ij})$ avec $\ell_{ii} = 1$, $1 \leq i \leq n$ et une matrice triangulaire supérieure U telles que

$$A = L\,U.$$

De plus, une telle factorisation est unique.

Un exemple de factorisation LU

Considérons le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Un exemple de factorisation LU

Considérons le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \ell_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ \ell_{21}\,u_{11} & \ell_{21}\,u_{12} + u_{22} \end{pmatrix}$$

Un exemple de factorisation LU

Considérons le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \ell_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ \ell_{21} u_{11} & \ell_{21} u_{12} + u_{22} \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{aligned} u_{11} &= 1 \\ u_{12} &= -1 \\ \ell_{21} u_{11} &= -1 \\ \ell_{21} u_{12} + u_{22} &= 5 \end{aligned}$$

Un exemple de factorisation LU

Considérons le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \ell_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ \ell_{21}\, u_{11} & \ell_{21}\, u_{12} + u_{22} \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{aligned} u_{11} &= 1 \\ u_{12} &= -1 \\ \ell_{21}\, u_{11} &= -1 \qquad \Rightarrow \quad \ell_{21} = -1 \\ \ell_{21}\, u_{12} + u_{22} &= 5 \end{aligned}$$

Un exemple de factorisation LU

Considérons le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \ell_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ \ell_{21}\, u_{11} & \ell_{21}\, u_{12} + u_{22} \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{aligned}
u_{11} &= 1 \\
u_{12} &= -1 \\
\ell_{21}\, u_{11} &= -1 && \Rightarrow \quad \ell_{21} = -1 \\
\ell_{21}\, u_{12} + u_{22} &= 5 && \Rightarrow \quad u_{22} = 5 - 1 = 4
\end{aligned}$$

Ainsi

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Vérification :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Vérification :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Résolution :

On résout $Ly = b$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Vérification :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Résolution :

On résout $Ly = b$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

POLYTECH CLERMONT-FERRAND

Ainsi

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Vérification :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Résolution :

On résout $Ly = b$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On résout $Ux = y$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Vérification :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Résolution :

On résout $Ly = b$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On résout $Ux = y$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Coût

Combien coûte une élimination de Gauss ?
On s'intéresse aux opérations sur la matrice.

Combien coûte une élimination de Gauss ?
On s'intéresse aux opérations sur la matrice.
Écrivons une étape k de l'élimination :

Pour $i = k+1, \dots, n$ faire

$s := a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}$

Pour $j = k, \dots, n+1$ faire

$a_{ij}^{(k+1)} := a_{ij}^{(k)} - s * a_{kj}^{(k)}$

fin j

fin i.

Coût

Combien coûte une élimination de Gauss ?
On s'intéresse aux opérations sur la matrice.
Écrivons une étape k de l'élimination :

Pour $i = k+1,\dots,n$ faire	$(n-k)$ fois
$\quad s := a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{(k)}$	1 division
$\quad$ Pour $j = k,\dots,n+1$ faire	$(n-k+2)$ fois
$\qquad a_{ij}^{(k+1)} := a_{ij}^{(k)} - s * a_{kj}^{(k)}$	1 multiplication
$\quad$ fin j	
fin i.	

Coût

Combien coûte une élimination de Gauss ?
On s'intéresse aux opérations sur la matrice.
Écrivons une étape k de l'élimination :

Pour $i = k+1, \dots, n$ faire	$(n-k)$ fois
$\quad s := a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}$	1 division
$\quad$ Pour $j = k, \dots, n+1$ faire	$(n-k+2)$ fois
$\quad\quad a_{ij}^{(k+1)} := a_{ij}^{(k)} - s * a_{kj}^{(k)}$	1 multiplication
$\quad$ fin j	
fin i.	

Donc, on a $(n-k)(n-k+3)$ opérations.

Coût

Combien coûte une élimination de Gauss ?
On s'intéresse aux opérations sur la matrice.
Écrivons une étape k de l'élimination :

Pour $i = k+1, \ldots, n$ faire	$(n-k)$ fois
$\quad s := a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}$	1 division
$\quad$ Pour $j = k, \ldots, n+1$ faire	$(n-k+2)$ fois
$\qquad a_{ij}^{(k+1)} := a_{ij}^{(k)} - s * a_{kj}^{(k)}$	1 multiplication
$\quad$ fin j	
fin i.	

Donc, on a $(n-k)(n-k+3)$ opérations.
On somme pour $k = 1, \ldots, n-1$ pour obtenir

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)(n-k+3) = \frac{n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2) = \mathcal{O}\left(\frac{n^3}{3}\right) \quad \text{opérations}$$

Définition

Une matrice carrée A symétrique est dite définie positive si on a

$$x^T A x > 0 \qquad \text{pour tout } x \neq 0.$$

Définition

Une matrice carrée A symétrique est dite définie positive si on a

$$x^T A x > 0 \qquad \text{pour tout } x \neq 0.$$

Théorème

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice A soit symétrique et définie positive est qu'il existe une matrice L inversible triangulaire inférieure telle que

$$A = L\,L^T \qquad \text{(Factorisation de Cholesky)}$$

Si les éléments diagonaux ℓ_{ii} de L sont choisis strictement positifs, la décomposition est unique.

Comment déterminer L ?

Algorithme de Cholesky

Comment déterminer L ? On a $A = L\,L^T$, donc

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \ell_{ik}\ell_{jk} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} \ell_{ik}\ell_{jk} \qquad 1 \le i,j \le n.$$

Comment déterminer L ? On a $A = L\,L^T$, donc

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \ell_{ik}\ell_{jk} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} \ell_{ik}\ell_{jk} \qquad 1 \leq i,j \leq n.$$

On a

$$a_{ii} = \sum_{k=1}^{i} \ell_{ik}^2 = \ell_{ii}^2 + \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik}^2, \qquad i = 1,\dots,n;$$

d'où

$$\ell_{ii} = \pm\sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik}^2}.$$

Pour $1 \leq i < j \leq n$:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} \ell_{ik}\ell_{jk} = \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik}\ell_{jk} + \ell_{ii}\ell_{ji}.$$

D'où

$$\ell_{ii} = \pm\sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik}^2} \qquad 1 \leq i \leq n$$

$$\ell_{ji} = \frac{1}{\ell_{ii}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik}\ell_{jk}\right) \qquad 1 \leq i < j \leq n$$

Pour $1 \leq i < j \leq n$:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} \ell_{ik}\ell_{jk} = \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik}\ell_{jk} + \ell_{ii}\ell_{ji}.$$

D'où

$$\ell_{ii} = \pm\sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik}^2} \qquad 1 \leq i \leq n$$

$$\ell_{ji} = \frac{1}{\ell_{ii}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik}\ell_{jk}\right) \qquad 1 \leq i < j \leq n$$

Ces deux relations ont un sens d'après le théorème précédent. De plus, la condition $\ell_{ii} > 0$ permet de choisir la valeur positive de la racine.

Les coefficients de L se calculent dans l'ordre suivant :

$$\ell_{11} = \sqrt{a_{11}},$$
$$\ell_{21} = \frac{a_{12}}{\ell_{11}},\ \ell_{22} = \sqrt{a_{22} - \ell_{21}^2},$$
$$\dots$$

i.e., ligne par ligne.

Les coefficients de L se calculent dans l'ordre suivant :

$$\ell_{11} = \sqrt{a_{11}},$$
$$\ell_{21} = \frac{a_{12}}{\ell_{11}}, \ \ell_{22} = \sqrt{a_{22} - \ell_{21}^2},$$
$$\dots$$

i.e., ligne par ligne.

On montre que le coût de l'algorithme de Cholesky est $\mathcal{O}(n^3/6)$, soit la moitié du nombre d'opérations pour une factorisation $L\,U$.

POLYTECH CLERMONT-FERRAND

Un exemple de factorisation de Cholesky

Considérons le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Un exemple de factorisation de Cholesky

Considérons le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On a

$$\ell_{11} = \sqrt{a_{11}} = 1$$

Un exemple de factorisation de Cholesky

Considérons le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On a

$$\ell_{11} = \sqrt{a_{11}} = 1$$

$$\ell_{21} = \frac{a_{12}}{\ell_{11}} = -1$$

Un exemple de factorisation de Cholesky

Considérons le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On a

$$\ell_{11} = \sqrt{a_{11}} = 1$$
$$\ell_{21} = \frac{a_{12}}{\ell_{11}} = -1$$
$$\ell_{22} = \sqrt{a_{22} - \ell_{21}^2} = \sqrt{5-1} = 2$$

Un exemple de factorisation de Cholesky

Considérons le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On a

$$\ell_{11} = \sqrt{a_{11}} = 1$$
$$\ell_{21} = \frac{a_{12}}{\ell_{11}} = -1$$
$$\ell_{22} = \sqrt{a_{22} - \ell_{21}^2} = \sqrt{5-1} = 2$$

Vérification :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$L\,y = b, \quad L^{\mathsf{T}} x = y.$$

$$L\,y = b, \quad L^{\mathsf{T}} x = y.$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

D'où

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$L\,y = b, \quad L^{\mathsf{T}} x = y.$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

D'où

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ensuite

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

D'où

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$