II.
MÉTHODES ITÉRATIVES DE RÉSOLUTION DE SYSTÈMES LINÉAIRES

Analyse Numérique
Tronc Commun

Un exemple

On veut résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} 2\,x_1 - x_2 &= 0 \\ -x_1 + 2\,x_2 &= 3 \end{aligned}$$

de solution $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Un exemple

On veut résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} 2\,x_1 - x_2 &= 0 \\ -x_1 + 2\,x_2 &= 3 \end{aligned}$$

de solution $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

On procède, pour cela, par approximations successives :
On se donne une solution initiale $x_1^{(0)} = \frac{1}{2}$, $x_2^{(0)} = \frac{3}{2}$.

Un exemple

On veut résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} 2\,x_1 - \quad x_2 &= 0 \\ -x_1 + 2\,x_2 &= 3 \end{aligned}$$

de solution $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

On procède, pour cela, par approximations successives :
On se donne une solution initiale $x_1^{(0)} = \frac{1}{2}$, $x_2^{(0)} = \frac{3}{2}$.

1e itération :
On détermine x_1, à partir de la 1e équation, par

$$2x_1^{(1)} - x_2^{(0)} = 0 \qquad \text{donc} \qquad x_1^{(1)} = \frac{3}{4}$$

POLYTECH CLERMONT-FERRAND

Un exemple

On veut résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} 2\,x_1 - \quad x_2 &= 0 \\ -x_1 + 2\,x_2 &= 3 \end{aligned}$$

de solution $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

On procède, pour cela, par approximations successives :
On se donne une solution initiale $x_1^{(0)} = \frac{1}{2}$, $x_2^{(0)} = \frac{3}{2}$.

1e itération :
On détermine x_1, à partir de la 1e équation, par

$$2x_1^{(1)} - x_2^{(0)} = 0 \qquad \text{donc} \quad x_1^{(1)} = \frac{3}{4}$$

On détermine x_2, à partir de la 2e équation, par

$$-x_1^{(0)} + 2x_2^{(1)} = 3 \qquad \text{donc} \quad x_2^{(1)} = \frac{7}{4}$$

POLYTECH CLERMONT-FERRAND

2e itération :

On détermine x_1, à partir de la 1e équation, par

$$2x_1^{(2)} - x_2^{(1)} = 0 \qquad \text{donc} \qquad x_1^{(2)} = \frac{7}{8}$$

2e itération :

On détermine x_1, à partir de la 1e équation, par

$$2x_1^{(2)} - x_2^{(1)} = 0 \qquad \text{donc} \qquad x_1^{(2)} = \frac{7}{8}$$

On détermine x_2, à partir de la 2e équation, par

$$-x_1^{(1)} + 2x_2^{(2)} = 3 \qquad \text{donc} \qquad x_2^{(2)} = \frac{15}{8}$$

2e itération :

On détermine x_1, à partir de la 1e équation, par

$$2x_1^{(2)} - x_2^{(1)} = 0 \qquad \text{donc} \qquad x_1^{(2)} = \frac{7}{8}$$

On détermine x_2, à partir de la 2e équation, par

$$-x_1^{(1)} + 2x_2^{(2)} = 3 \qquad \text{donc} \qquad x_2^{(2)} = \frac{15}{8}$$

3e itération :

$$\begin{aligned} 2x_1^{(3)} - x_2^{(2)} &= 0 \qquad \text{donc} \qquad x_1^{(3)} = \frac{15}{16} \\ -x_1^{(2)} + 2x_2^{(3)} &= 3 \qquad \text{donc} \qquad x_2^{(3)} = \frac{31}{16} \end{aligned}$$

2e itération :

On détermine x_1, à partir de la 1e équation, par

$$2x_1^{(2)} - x_2^{(1)} = 0 \qquad \text{donc} \quad x_1^{(2)} = \frac{7}{8}$$

On détermine x_2, à partir de la 2e équation, par

$$-x_1^{(1)} + 2x_2^{(2)} = 3 \qquad \text{donc} \quad x_2^{(2)} = \frac{15}{8}$$

3e itération :

$$\begin{aligned} 2x_1^{(3)} - x_2^{(2)} &= 0 \qquad \text{donc} \quad x_1^{(3)} = \frac{15}{16} \\ -x_1^{(2)} + 2x_2^{(3)} &= 3 \qquad \text{donc} \quad x_2^{(3)} = \frac{31}{16} \end{aligned}$$

Ainsi, une bonne approximation est obtenue en 3 itérations.

2e itération :

On détermine x_1, à partir de la 1e équation, par

$$2x_1^{(2)} - x_2^{(1)} = 0 \qquad \text{donc} \qquad x_1^{(2)} = \frac{7}{8}$$

On détermine x_2, à partir de la 2e équation, par

$$-x_1^{(1)} + 2x_2^{(2)} = 3 \qquad \text{donc} \qquad x_2^{(2)} = \frac{15}{8}$$

3e itération :

$$2x_1^{(3)} - x_2^{(2)} = 0 \qquad \text{donc} \qquad x_1^{(3)} = \frac{15}{16}$$
$$-x_1^{(2)} + 2x_2^{(3)} = 3 \qquad \text{donc} \qquad x_2^{(3)} = \frac{31}{16}$$

Ainsi, une bonne approximation est obtenue en 3 itérations.
Nous avons ainsi présenté la méthode de Jacobi

Une méthode itérative générique

Considérons le système linéaire

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

où $\mathbf{A}$ est une matrice carrée d'ordre n, inversible.

Une méthode itérative générique

Considérons le système linéaire

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

où $\mathbf{A}$ est une matrice carrée d'ordre n, inversible.

Supposons que l'on puisse écrire

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$$

où $\mathbf{M}$ est une matrice inversible, facile à inverser.

Une méthode itérative générique

Considérons le système linéaire

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

où $\mathbf{A}$ est une matrice carrée d'ordre n, inversible.

Supposons que l'on puisse écrire

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$$

où $\mathbf{M}$ est une matrice inversible, facile à inverser.

L'équation $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ s'écrit encore $\mathbf{Mx} = \mathbf{Nx} + \mathbf{b}$.

Une méthode itérative générique

Considérons le système linéaire

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

où $\mathbf{A}$ est une matrice carrée d'ordre n, inversible.

Supposons que l'on puisse écrire

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$$

où $\mathbf{M}$ est une matrice inversible, facile à inverser.

L'équation $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ s'écrit encore $\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{N}\mathbf{x} + \mathbf{b}$.

Étant donnée une solution initiale $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, on calcule sucessivement $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, ... en résolvant successivement :

$$\mathbf{M}\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{N}\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{M}\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{N}\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{b}$$

$$\cdots\cdots$$

Une méthode itérative générique

Considérons le système linéaire

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

où $\mathbf{A}$ est une matrice carrée d'ordre n, inversible.

Supposons que l'on puisse écrire

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$$

où $\mathbf{M}$ est une matrice inversible, facile à inverser.

L'équation $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ s'écrit encore $\mathbf{Mx} = \mathbf{Nx} + \mathbf{b}$.

Étant donnée une solution initiale $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, on calcule sucessivement $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots$ en résolvant successivement :

$$\mathbf{Mx}^{(1)} = \mathbf{Nx}^{(0)} + \mathbf{b}$$
$$\mathbf{Mx}^{(2)} = \mathbf{Nx}^{(1)} + \mathbf{b}$$
$$\dots\dots$$

ou encore

$$\mathbf{Mx}^{(k+1)} = \mathbf{Nx}^{(k)} + \mathbf{b} \qquad k = 0, 1, \dots$$

Convergence

Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; on définit la norme :

$$\|\mathbf{x}\| := \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; on définit la norme :

$$\|\mathbf{x}\| := \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Définition

On dit que la méthode itérative

$$\mathbf{M}\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{N}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$$

converge s'il existe un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| = 0$$

pour tout vecteur initial $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Convergence

Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; on définit la norme :

$$\|\mathbf{x}\| := \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Définition

On dit que la méthode itérative

$$\mathbf{M}\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{N}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$$

converge s'il existe un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| = 0$$

pour tout vecteur initial $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Remarquons que si on choisit pour $\mathbf{x}^{(0)}$ la solution exacte du système, alors on a

$$\mathbf{M}\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{N}\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{b} = \mathbf{M}\mathbf{x}^{(0)}$$

Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; on définit la norme :

$$\|\mathbf{x}\| := \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Définition

On dit que la méthode itérative

$$\mathbf{M}\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{N}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$$

converge s'il existe un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| = 0$$

pour tout vecteur initial $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Remarquons que si on choisit pour $\mathbf{x}^{(0)}$ la solution exacte du système, alors on a

$$\mathbf{M}\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{N}\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{b} = \mathbf{M}\mathbf{x}^{(0)}$$

Comme $\mathbf{M}$ est inversible, on a convergence en 1 itération.

Critère de convergence

Quelles sont les conditions sur **M** et **N** pour que la méthode itérative converge ?

Quelles sont les conditions sur $\mathbf{M}$ et $\mathbf{N}$ pour que la méthode itérative converge ?

Définition

On appelle rayon spectral de $\mathbf{A}$ ($\rho(\mathbf{A})$) la plus grande valeur propre en module, *i.e.*

$$\rho(\mathbf{A}) := \max\{|\lambda_i|;\ \lambda_i \text{ valeur propre de } \mathbf{A},\ 1 \leq i \leq n\}.$$

Quelles sont les conditions sur **M** et **N** pour que la méthode itérative converge ?

Définition

On appelle rayon spectral de **A** ($\rho(\mathbf{A})$) la plus grande valeur propre en module, *i.e.*

$$\rho(\mathbf{A}) := \max\{|\lambda_i|;\ \lambda_i \text{ valeur propre de } \mathbf{A},\ 1 \le i \le n\}.$$

Théorème

La méthode itérative

$$\mathbf{M}\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{N}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$$

converge si et seulement si

$$\rho(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}) < 1.$$

Remarque

Remarque

On peut écrire $\mathbf{Mx}^{(k)} = \mathbf{Nx}^{(k-1)} + \mathbf{b}$

Remarque

On peut écrire $\mathbf{M}\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{N}\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{b}$
Donc

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(k)} &= \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\,\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{M}^{-1}\,\mathbf{b}\\ &= \dots \quad \dots\\ &= (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N})^k\,\mathbf{x}^{(0)} + \sum_{\ell=0}^{k-1}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N})^\ell\,\mathbf{M}^{-1}\,\mathbf{b}\end{aligned}$$

Remarque

Remarque

On peut écrire $\mathbf{M}\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{N}\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{b}$
Donc

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(k)} &= \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\,\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{M}^{-1}\,\mathbf{b}\\ &= \dots \quad \dots\\ &= (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N})^k\,\mathbf{x}^{(0)} + \sum_{\ell=0}^{k-1}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N})^{\ell}\,\mathbf{M}^{-1}\,\mathbf{b}\end{aligned}$$

Ceci explique le critère de convergence de la méthode itérative.

On écrit $\mathbf{A}$ sous la forme $\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{U}$: où

$$d_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad \ell_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i > j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad u_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i < j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On écrit $\mathbf{A}$ sous la forme $\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{U}$: où

$$d_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad \ell_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i > j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad u_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i < j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On écrit $\mathbf{A}$ sous la forme $\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{U}$: où

$$d_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad \ell_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i > j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad u_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i < j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Méthode de Jacobi :

$$\mathbf{D}\,\mathbf{x} \quad + \mathbf{L}\,\mathbf{x} \quad + \mathbf{U}\,\mathbf{x} \quad = \mathbf{b}$$

On écrit $\mathbf{A}$ sous la forme $\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{U}$: où

$$d_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad \ell_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i > j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad u_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i < j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Méthode de Jacobi :

$$\mathbf{D}\,\mathbf{x}^{(k+1)} + \mathbf{L}\,\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{U}\,\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{b}$$

Quelques méthodes itératives

On écrit $\mathbf{A}$ sous la forme $\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{U}$: où

$$d_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad \ell_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i > j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad u_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i < j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Méthode de Jacobi :

$$\mathbf{D}\,\mathbf{x}^{(k+1)} + \mathbf{L}\,\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{U}\,\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{b}$$

ou encore

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\Big(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)}\Big) \qquad 1 \leq i \leq n \quad \text{si } a_{ii} \neq 0$$

Ainsi

$$\mathbf{M}\,\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{N}\,\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$$
$$\mathbf{D}\,\mathbf{x}^{(k+1)} = -(\mathbf{L}+\mathbf{U})\,\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$$

POLYTECH CLERMONT-FERRAND

Ainsi

$$\mathbf{M}\,\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{N}\,\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{D}\,\mathbf{x}^{(k+1)} = -(\mathbf{L} + \mathbf{U})\,\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$$

i.e.

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}, \qquad \mathbf{N} = -(\mathbf{L} + \mathbf{U})$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\,\mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{N}\,\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b} \\ \mathbf{D}\,\mathbf{x}^{(k+1)} &= -(\mathbf{L}+\mathbf{U})\,\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b} \end{aligned}$$

i.e.

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}, \qquad \mathbf{N} = -(\mathbf{L}+\mathbf{U})$$

Méthode de Gauss–Seidel

Reprenons le 1er exemple :

$$\begin{aligned} 2\,x_1 - x_2 &= 0 \\ -x_1 + 2\,x_2 &= 3 \end{aligned}$$

de solution $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, avec la solution initiale $x_1^{(0)} = \frac{1}{2}$, $x_2^{(0)} = \frac{3}{2}$.

1[e] itération :

On détermine x_1, à partir de la 1[e] équation, par

$$2x_1^{(1)} - x_2^{(0)} = 0 \qquad \text{donc } x_1^{(1)} = \frac{3}{4}$$

1^e^ itération :

On détermine x_1, à partir de la 1^e^ équation, par

$$2x_1^{(1)} - x_2^{(0)} = 0 \qquad \text{donc } x_1^{(1)} = \frac{3}{4}$$

On détermine x_2, à partir de la 2^e^ équation, par

$$-x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)} = 3 \qquad \text{donc } x_2^{(1)} = \frac{15}{8}$$

1[e] itération :

On détermine x_1, à partir de la 1[e] équation, par

$$2x_1^{(1)} - x_2^{(0)} = 0 \qquad \text{donc } x_1^{(1)} = \frac{3}{4}$$

On détermine x_2, à partir de la 2[e] équation, par

$$-x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)} = 3 \qquad \text{donc } x_2^{(1)} = \frac{15}{8}$$

2[e] itération :

$$2x_1^{(2)} - x_2^{(1)} = 0 \qquad \text{donc } x_1^{(2)} = \frac{15}{16}$$

$$-x_1^{(2)} + 2x_2^{(2)} = 3 \qquad \text{donc } x_2^{(2)} = \frac{63}{32}$$

1e itération :

On détermine x_1, à partir de la 1e équation, par

$$2x_1^{(1)} - x_2^{(0)} = 0 \qquad \text{donc } x_1^{(1)} = \frac{3}{4}$$

On détermine x_2, à partir de la 2e équation, par

$$-x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)} = 3 \qquad \text{donc } x_2^{(1)} = \frac{15}{8}$$

2e itération :

$$2x_1^{(2)} - x_2^{(1)} = 0 \qquad \text{donc } x_1^{(2)} = \frac{15}{16}$$

$$-x_1^{(2)} + 2x_2^{(2)} = 3 \qquad \text{donc } x_2^{(2)} = \frac{63}{32}$$

Nous approchons ainsi la solution exacte en 2 itérations

Méthode de Gauss–Seidel :

$$\mathbf{D}\,\mathbf{x} \quad + \mathbf{L}\,\mathbf{x} \quad + \mathbf{U}\,\mathbf{x} \quad = \mathbf{b}$$

Méthode de Gauss–Seidel :

$$\mathbf{D}\,\mathbf{x}^{(k+1)} + \mathbf{L}\,\mathbf{x}^{(k+1)} + \mathbf{U}\,\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{b}$$

Méthode de Gauss–Seidel :

$$\mathbf{D}\,\mathbf{x}^{(k+1)} + \mathbf{L}\,\mathbf{x}^{(k+1)} + \mathbf{U}\,\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{b}$$

ou encore

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\Big(b_i - \sum_{j<i} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij}x_j^{(k)}\Big) \qquad 1 \le i \le n \qquad \text{si } a_{ii} \neq 0$$

Méthode de Gauss–Seidel :

$$\mathbf{D}\,\mathbf{x}^{(k+1)} + \mathbf{L}\,\mathbf{x}^{(k+1)} + \mathbf{U}\,\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{b}$$

ou encore

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\Big(b_i - \sum_{j<i} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij}x_j^{(k)}\Big) \qquad 1 \le i \le n \qquad \text{si } a_{ii} \neq 0$$

Ainsi

$$\mathbf{M} = \mathbf{D} + \mathbf{L}, \qquad \mathbf{N} = -\mathbf{U}$$

Méthode de Gauss–Seidel :

$$\mathbf{D}\,\mathbf{x}^{(k+1)} + \mathbf{L}\,\mathbf{x}^{(k+1)} + \mathbf{U}\,\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{b}$$

ou encore

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\Big(b_i - \sum_{j<i} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij}x_j^{(k)}\Big) \qquad 1 \le i \le n \qquad \text{si } a_{ii} \neq 0$$

Ainsi

$$\mathbf{M} = \mathbf{D} + \mathbf{L}, \qquad \mathbf{N} = -\mathbf{U}$$

Méthode de relaxation

$$\Big(\frac{1}{\omega}\mathbf{D} + \mathbf{L}\Big)\,\mathbf{x} \qquad = \Big(\frac{1-\omega}{\omega}\mathbf{D} - \mathbf{U}\Big)\,\mathbf{x} \quad + \mathbf{b}$$

pour $\omega > 0$.

Méthode de Gauss–Seidel :

$$\mathbf{D}\,\mathbf{x}^{(k+1)} + \mathbf{L}\,\mathbf{x}^{(k+1)} + \mathbf{U}\,\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{b}$$

ou encore

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\Big(b_i - \sum_{j<i} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij}x_j^{(k)}\Big) \qquad 1 \le i \le n \qquad \text{si } a_{ii} \neq 0$$

Ainsi

$$\mathbf{M} = \mathbf{D} + \mathbf{L}, \qquad \mathbf{N} = -\mathbf{U}$$

Méthode de relaxation

$$\Big(\frac{1}{\omega}\mathbf{D} + \mathbf{L}\Big)\,\mathbf{x}^{(k+1)} = \Big(\frac{1-\omega}{\omega}\mathbf{D} - \mathbf{U}\Big)\,\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b} \qquad k = 0, 1, \dots$$

pour $\omega > 0$.

Méthode de Gauss–Seidel :

$$\mathbf{D}\,\mathbf{x}^{(k+1)} + \mathbf{L}\,\mathbf{x}^{(k+1)} + \mathbf{U}\,\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{b}$$

ou encore

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\Big(b_i - \sum_{j<i} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij}x_j^{(k)}\Big) \qquad 1 \le i \le n \qquad \text{si } a_{ii} \neq 0$$

Ainsi

$$\mathbf{M} = \mathbf{D} + \mathbf{L}, \qquad \mathbf{N} = -\mathbf{U}$$

Méthode de relaxation

$$\Big(\frac{1}{\omega}\mathbf{D} + \mathbf{L}\Big)\,\mathbf{x}^{(k+1)} = \Big(\frac{1-\omega}{\omega}\mathbf{D} - \mathbf{U}\Big)\,\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b} \qquad k = 0, 1, \ldots$$

pour $\omega > 0$.
On retrouve ainsi la méthode de Gauss-Seidel pour $\omega = 1$.

POLYTECH CLERMONT-FERRAND

Méthode de Richardson

Pour résoudre le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, on définit la méthode suivante :

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{r}^{(k)}$$

où

$$\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}^{(k)}$$

est le résidu à l'itération k, et α_k est un coefficient à choisir.

Théorème

Soit $\mathbf{A}$ une matrice symétrique définie positive et soit $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$ une décomposition de $\mathbf{A}$ où $\mathbf{M}$ est inversible. On suppose que la matrice $\mathbf{M}^T + \mathbf{N}$ est symétrique définie positive. Alors, la méthode itérative $\mathbf{M}\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{N}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$ converge.

Corollaire

Si $\mathbf{A}$ est symétrique définie positive, la méthode de relaxation avec $0 < \omega < 2$ converge.

Corollaire

Si $\mathbf{A}$ est symétrique définie positive, la méthode de relaxation avec $0 < \omega < 2$ converge.

Démonstration

Pour la méthode de relaxation, on a

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\omega}\mathbf{D} + \mathbf{L}, \quad \mathbf{N} = \frac{1-\omega}{\omega}\mathbf{D} - \mathbf{U}.$$

Comme $\mathbf{A}$ est symétrique, on a $\mathbf{L} = \mathbf{U}^T$. La diagonale de $\mathbf{M}$ est celle de $\mathbf{D}$.

Corollaire

Si $\mathbf{A}$ est symétrique définie positive, la méthode de relaxation avec $0 < \omega < 2$ converge.

Démonstration

Pour la méthode de relaxation, on a

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\omega}\mathbf{D} + \mathbf{L}, \quad \mathbf{N} = \frac{1-\omega}{\omega}\mathbf{D} - \mathbf{U}.$$

Comme $\mathbf{A}$ est symétrique, on a $\mathbf{L} = \mathbf{U}^T$. La diagonale de $\mathbf{M}$ est celle de $\mathbf{D}$.
On en déduit que $\mathbf{M}$ est inversible puisque les éléments d_{ii} sont positifs.

Corollaire

Si $\mathbf{A}$ est symétrique définie positive, la méthode de relaxation avec $0 < \omega < 2$ converge.

Démonstration

Pour la méthode de relaxation, on a

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\omega}\mathbf{D} + \mathbf{L}, \quad \mathbf{N} = \frac{1-\omega}{\omega}\mathbf{D} - \mathbf{U}.$$

Comme $\mathbf{A}$ est symétrique, on a $\mathbf{L} = \mathbf{U}^T$. La diagonale de $\mathbf{M}$ est celle de $\mathbf{D}$. On en déduit que $\mathbf{M}$ est inversible puisque les éléments d_{ii} sont positifs.

Soit

$$\mathbf{M}^T + \mathbf{N} = \frac{1}{\omega}\mathbf{D} + L^T + \frac{1-\omega}{\omega}\mathbf{D} - \mathbf{L}^T = \frac{2-\omega}{\omega}\mathbf{D}.$$

Cette matrice diagonale est définie positive si et seulement si $0 < \omega < 2$.

COROLLAIRE

Soit $\mathbf{A}$ une matrice symétrique définie positive telle que $2\mathbf{D} - \mathbf{A}$ soit définie positive. Alors, la méthode de Jacobi converge.

Corollaire

Soit $\mathbf{A}$ une matrice symétrique définie positive telle que $2\mathbf{D} - \mathbf{A}$ soit définie positive. Alors, la méthode de Jacobi converge.

En effet, on a $\mathbf{M}^T + \mathbf{N} = 2\mathbf{D} - \mathbf{A}$.

Corollaire

Soit $\mathbf{A}$ une matrice symétrique définie positive telle que $2\mathbf{D} - \mathbf{A}$ soit définie positive. Alors, la méthode de Jacobi converge.

En effet, on a $\mathbf{M}^T + \mathbf{N} = 2\mathbf{D} - \mathbf{A}$.

Théorème

On suppose que la matrice $\mathbf{A}$ est symétrique définie positive et que $\alpha_k > 0$ est choisi assez petit. Alors la méthode de Richardson converge.

Corollaire

Soit $\mathbf{A}$ une matrice symétrique définie positive telle que $2\mathbf{D} - \mathbf{A}$ soit définie positive. Alors, la méthode de Jacobi converge.

En effet, on a $\mathbf{M}^T + \mathbf{N} = 2\mathbf{D} - \mathbf{A}$.

Théorème

On suppose que la matrice $\mathbf{A}$ est symétrique définie positive et que $\alpha_k > 0$ est choisi assez petit. Alors la méthode de Richardson converge.

Démonstration

Pour la méthode de Richardson, on a

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\alpha_k}\mathbf{I}, \quad \mathbf{N} = \frac{1}{\alpha_k}\mathbf{I} - \mathbf{A}.$$

Donc

$$\mathbf{M}^T + \mathbf{N} = \frac{2}{\alpha_k}\mathbf{I} - \mathbf{A}.$$

D'où le résultat.

Matrices à diagonale dominante

Définition

On dit qu'une matrice $\mathbf{A}$ est à diagonale dominante si on a

$$\sum_{j\neq i} |a_{ij}| \leq |a_{ii}| \qquad \forall\ i = 1, \dots, n.$$

On dit qu'elle est à diagonale strictement dominante si l'inégalité ci-dessus est stricte.

Définition

On dit qu'une matrice **A** est à diagonale dominante si on a

$$\sum_{j \neq i} |a_{ij}| \leq |a_{ii}| \qquad \forall\ i = 1, \dots, n.$$

On dit qu'elle est à diagonale strictement dominante si l'inégalité ci-dessus est stricte.

Théorème

Soit **A** une matrice à diagonale strictement dominante ; alors **A** est inversible. De plus, les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent.

Démonstration

Montrons que $\mathbf{A}$ est inversible :

Démonstration

Montrons que $\mathbf{A}$ est inversible :
Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ avec $\mathbf{x} \neq 0$ et $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$.

Démonstration

Montrons que $\mathbf{A}$ est inversible :
Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ avec $\mathbf{x} \neq 0$ et $\mathbf{Ax} = 0$.
Soit i tel que $|x_i| \geq |x_j|$ pour tout $j = 1, \ldots, n$.

Démonstration

Montrons que $\mathbf{A}$ est inversible :
Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ avec $\mathbf{x} \neq 0$ et $\mathbf{Ax} = 0$.
Soit i tel que $|x_i| \geq |x_j|$ pour tout $j = 1, \dots, n$.

$$a_{ii}x_i = -\sum_{j\neq i} a_{ij}x_j.$$

Donc

$$|a_{ii}||x_i| = \Big|\sum_{j\neq i} a_{ij}x_j\Big| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\,|x_j| \leq |x_i| \sum_{j\neq i} |a_{ij}|.$$

Démonstration

Montrons que $\mathbf{A}$ est inversible :
Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ avec $\mathbf{x} \neq 0$ et $\mathbf{Ax} = 0$.
Soit i tel que $|x_i| \geq |x_j|$ pour tout $j = 1, \dots, n$.

$$a_{ii} x_i = -\sum_{j \neq i} a_{ij} x_j.$$

Donc

$$|a_{ii}||x_i| = \Big|\sum_{j \neq i} a_{ij} x_j\Big| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|\,|x_j| \leq |x_i| \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

Puisque $\mathbf{x} \neq 0$, on en déduit

$$|a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

Démonstration

Montrons que $\mathbf{A}$ est inversible :
Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ avec $\mathbf{x} \neq 0$ et $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$.
Soit i tel que $|x_i| \geq |x_j|$ pour tout $j = 1, \dots, n$.

$$a_{ii} x_i = -\sum_{j \neq i} a_{ij} x_j.$$

Donc

$$|a_{ii}||x_i| = \Big|\sum_{j \neq i} a_{ij} x_j\Big| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|\,|x_j| \leq |x_i| \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

Puisque $\mathbf{x} \neq 0$, on en déduit

$$|a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

Impossible ! ! Donc $\mathbf{A}$ est inversible.

Démonstration

Montrons que $\mathbf{A}$ est inversible :
Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ avec $\mathbf{x} \neq 0$ et $\mathbf{Ax} = 0$.
Soit i tel que $|x_i| \geq |x_j|$ pour tout $j = 1, \dots, n$.

$$a_{ii} x_i = -\sum_{j \neq i} a_{ij} x_j.$$

Donc

$$|a_{ii}||x_i| = \Big|\sum_{j \neq i} a_{ij} x_j\Big| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|\,|x_j| \leq |x_i| \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

Puisque $\mathbf{x} \neq 0$, on en déduit

$$|a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

Impossible ! ! Donc $\mathbf{A}$ est inversible.

Montrons la convergence :

Démonstration

Montrons que $\mathbf{A}$ est inversible :
Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ avec $\mathbf{x} \neq 0$ et $\mathbf{Ax} = 0$.
Soit i tel que $|x_i| \geq |x_j|$ pour tout $j = 1, \ldots, n$.

$$a_{ii} x_i = -\sum_{j \neq i} a_{ij} x_j.$$

Donc

$$|a_{ii}||x_i| = \Big|\sum_{j \neq i} a_{ij} x_j\Big| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|\,|x_j| \leq |x_i| \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

Puisque $\mathbf{x} \neq 0$, on en déduit

$$|a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

Impossible ! ! Donc $\mathbf{A}$ est inversible.

Montrons la convergence :
On pose $\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$.

Démonstration

Montrons que $\mathbf{A}$ est inversible :
Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ avec $\mathbf{x} \neq 0$ et $\mathbf{Ax} = 0$.
Soit i tel que $|x_i| \geq |x_j|$ pour tout $j = 1, \dots, n$.

$$a_{ii} x_i = -\sum_{j \neq i} a_{ij} x_j .$$

Donc

$$|a_{ii}||x_i| = \Big|\sum_{j \neq i} a_{ij} x_j\Big| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|\,|x_j| \leq |x_i| \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

Puisque $\mathbf{x} \neq 0$, on en déduit

$$|a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

Impossible !! Donc $\mathbf{A}$ est inversible.

Montrons la convergence :
On pose $\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$.
Soit λ une valeur propre de $\mathbf{B}$ et $\mathbf{x}$ vecteur propre associé, *i.e.*

$$\mathbf{Bx} = \lambda \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \neq 0.$$

Démonstration

Montrons que $\mathbf{A}$ est inversible :
Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ avec $\mathbf{x} \neq 0$ et $\mathbf{Ax} = 0$.
Soit i tel que $|x_i| \geq |x_j|$ pour tout $j = 1, \dots, n$.

$$a_{ii}x_i = -\sum_{j\neq i} a_{ij}x_j.$$

Donc

$$|a_{ii}||x_i| = \Big|\sum_{j\neq i} a_{ij}x_j\Big| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\,|x_j| \leq |x_i| \sum_{j\neq i} |a_{ij}|.$$

Puisque $\mathbf{x} \neq 0$, on en déduit

$$|a_{ii}| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|.$$

Impossible ! ! Donc $\mathbf{A}$ est inversible.

Montrons la convergence :
On pose $\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$.
Soit λ une valeur propre de $\mathbf{B}$ et $\mathbf{x}$ vecteur propre associé, *i.e.*

$$\mathbf{Bx} = \lambda\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \neq 0.$$

Puisque l'on s'intéresse à la plus grande valeur propre en module, on suppose $\lambda \neq 0$.

On a ainsi

$$\Big(\mathbf{M} - \frac{1}{\lambda}\mathbf{N}\Big)\mathbf{x} = 0.$$

Pour la méthode de Jacobi, cela devient

$$\left(\mathbf{D} + \frac{1}{\lambda}\mathbf{L} + \frac{1}{\lambda}\mathbf{U}\right)\mathbf{x} = 0.$$

Pour la méthode de Jacobi, cela devient

$$\left(\mathbf{D} + \frac{1}{\lambda}\mathbf{L} + \frac{1}{\lambda}\mathbf{U}\right)\mathbf{x} = 0.$$

Soit

$$\mathbf{C} = \mathbf{D} + \frac{1}{\lambda}\mathbf{L} + \frac{1}{\lambda}\mathbf{U}.$$

Pour la méthode de Jacobi, cela devient

$$\left(\mathbf{D} + \frac{1}{\lambda}\mathbf{L} + \frac{1}{\lambda}\mathbf{U}\right)\mathbf{x} = 0.$$

Soit

$$\mathbf{C} = \mathbf{D} + \frac{1}{\lambda}\mathbf{L} + \frac{1}{\lambda}\mathbf{U}.$$

Supposons, par contradiction, que $|\lambda| \geq 1$. On a

$$|c_{ii}| = |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \geq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{j \neq i} |a_{ij}| = \sum_{j \neq i} |c_{ij}|.$$

On en déduit que $\mathbf{C}$ est à diagonale strictement dominante, donc inversible. Donc $\mathbf{x} = 0$.

Pour la méthode de Jacobi, cela devient

$$\left(\mathbf{D} + \frac{1}{\lambda}\mathbf{L} + \frac{1}{\lambda}\mathbf{U}\right)\mathbf{x} = 0.$$

Soit

$$\mathbf{C} = \mathbf{D} + \frac{1}{\lambda}\mathbf{L} + \frac{1}{\lambda}\mathbf{U}.$$

Supposons, par contradiction, que $|\lambda| \geq 1$. On a

$$|c_{ii}| = |a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \geq \frac{1}{|\lambda|}\sum_{j\neq i} |a_{ij}| = \sum_{j\neq i} |c_{ij}|.$$

On en déduit que $\mathbf{C}$ est à diagonale strictement dominante, donc inversible. Donc $\mathbf{x} = 0$.

Ceci est une contradiction avec le fait que $\mathbf{x}$ est vecteur propre.

Pour la méthode de Gauss-Seidel, on pose

$$\mathbf{C} = \mathbf{D} + \mathbf{L} + \frac{1}{\lambda}\,\mathbf{U}.$$

Pour la méthode de Gauss-Seidel, on pose

$$\mathbf{C} = \mathbf{D} + \mathbf{L} + \frac{1}{\lambda}\,\mathbf{U}.$$

Ici encore, par contradiction, si $|\lambda| \geq 1$, on déduit

$$\begin{aligned}|c_{ii}| = |a_{ii}| &> \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \\ &\geq \sum_{j<i} |a_{ij}| + \frac{1}{|\lambda|} \sum_{j>i} |a_{ij}| = \sum_{j\neq i} |c_{ij}|.\end{aligned}$$

Pour la méthode de Gauss-Seidel, on pose

$$\mathbf{C} = \mathbf{D} + \mathbf{L} + \frac{1}{\lambda}\,\mathbf{U}.$$

Ici encore, par contradiction, si $|\lambda| \geq 1$, on déduit

$$\begin{aligned} |c_{ii}| = |a_{ii}| &> \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \\ &\geq \sum_{j<i} |a_{ij}| + \frac{1}{|\lambda|} \sum_{j>i} |a_{ij}| = \sum_{j \neq i} |c_{ij}|. \end{aligned}$$

On obtient encore une contradiction.

Quelques remarques

- L'utilisation des méthodes itératives est généralement plus avantageuse lorsque celles-ci convergent.

Quelques remarques

- L'utilisation des méthodes itératives est généralement plus avantageuse lorsque celles-ci convergent.
- Les méthodes de Jacobi, de Gauss-Seidel et de relaxation ne convergent le plus souvent que dans les cas que nous avons décrits dans ce chapitre. Il existe des méthodes itératives beaucoup plus élaborées et qui convergent dans des cas plus généraux que ceux décrits ici.

Quelques remarques

- L'utilisation des méthodes itératives est généralement plus avantageuse lorsque celles-ci convergent.
- Les méthodes de Jacobi, de Gauss-Seidel et de relaxation ne convergent le plus souvent que dans les cas que nous avons décrits dans ce chapitre. Il existe des méthodes itératives beaucoup plus élaborées et qui convergent dans des cas plus généraux que ceux décrits ici.
- La méthode de Gauss-Seidel converge généralement plus vite et plus souvent que la méthode de Jacobi. La méthode de relaxation nécessite la connaissance d'une valeur optimale du paramètre de relaxation ω.

Quelques remarques

- L'utilisation des méthodes itératives est généralement plus avantageuse lorsque celles-ci convergent.
- Les méthodes de Jacobi, de Gauss-Seidel et de relaxation ne convergent le plus souvent que dans les cas que nous avons décrits dans ce chapitre. Il existe des méthodes itératives beaucoup plus élaborées et qui convergent dans des cas plus généraux que ceux décrits ici.
- La méthode de Gauss-Seidel converge généralement plus vite et plus souvent que la méthode de Jacobi. La méthode de relaxation nécessite la connaissance d'une valeur optimale du paramètre de relaxation ω.
- La convergence des méthodes itératives se teste généralement en utilisant un paramètre de tolérance ϵ. On arrête ainsi les calculs dès que l'erreur relative est assez petite :

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|}{\|\mathbf{x}^{(k)}\|} < \epsilon.$$

Quelques remarques

- L'utilisation des méthodes itératives est généralement plus avantageuse lorsque celles-ci convergent.
- Les méthodes de Jacobi, de Gauss-Seidel et de relaxation ne convergent le plus souvent que dans les cas que nous avons décrits dans ce chapitre. Il existe des méthodes itératives beaucoup plus élaborées et qui convergent dans des cas plus généraux que ceux décrits ici.
- La méthode de Gauss-Seidel converge généralement plus vite et plus souvent que la méthode de Jacobi. La méthode de relaxation nécessite la connaissance d'une valeur optimale du paramètre de relaxation ω.
- La convergence des méthodes itératives se teste généralement en utilisant un paramètre de tolérance ϵ. On arrête ainsi les calculs dès que l'erreur relative est assez petite :

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|}{\|\mathbf{x}^{(k)}\|} < \epsilon.$$

Quelques remarques

- L'utilisation des méthodes itératives est généralement plus avantageuse lorsque celles-ci convergent.
- Les méthodes de Jacobi, de Gauss-Seidel et de relaxation ne convergent le plus souvent que dans les cas que nous avons décrits dans ce chapitre. Il existe des méthodes itératives beaucoup plus élaborées et qui convergent dans des cas plus généraux que ceux décrits ici.
- La méthode de Gauss-Seidel converge généralement plus vite et plus souvent que la méthode de Jacobi. La méthode de relaxation nécessite la connaissance d'une valeur optimale du paramètre de relaxation ω.
- La convergence des méthodes itératives se teste généralement en utilisant un paramètre de tolérance ϵ. On arrête ainsi les calculs dès que l'erreur relative est assez petite :

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|}{\|\mathbf{x}^{(k)}\|} < \epsilon.$$

  Une autre alternative est de tester le résidu :

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{b}\| < \epsilon.$$