V

INTÉGRATION NUMÉRIQUE

Analyse Numérique
Tronc Commun

POLYTECH
CLERMONT-FERRAND

Motivation : Calcul approché d'intégrales

Soit la fonction

$$f(x) = \cos(\pi x)\,\sqrt{x^2+1}$$

Que vaut

$$I = \int_0^2 f(x)\,dx \qquad ?$$

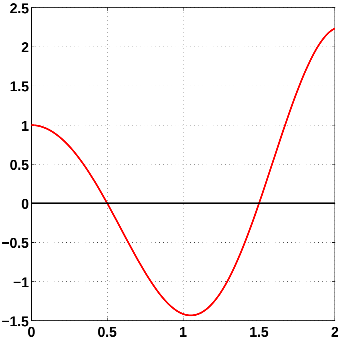
Motivation : Calcul approché d'intégrales

Soit la fonction

$$f(x) = \cos(\pi x)\,\sqrt{x^2+1}$$

Que vaut

$$I = \int_0^2 f(x)\,dx \qquad ?$$

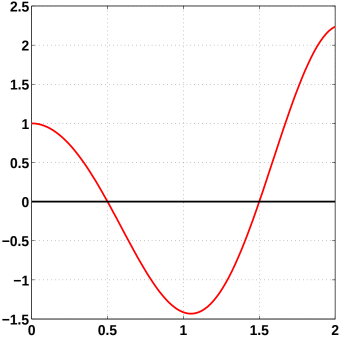


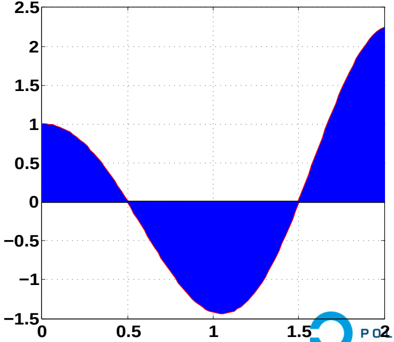
Soit la fonction

$$f(x) = \cos(\pi x)\,\sqrt{x^2+1}$$

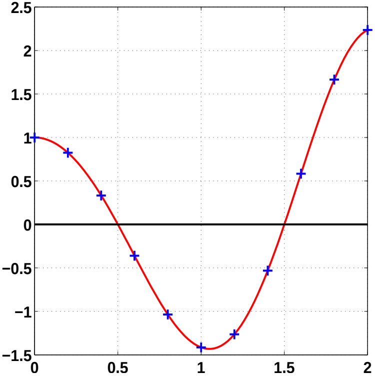
Que vaut

$$I = \int_0^2 f(x)\,dx \qquad ?$$



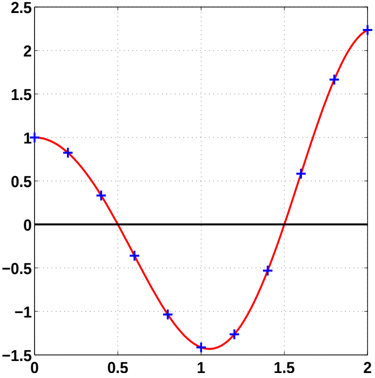


Approximation par une fonction constante par morceaux

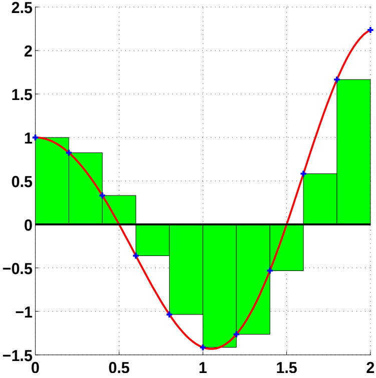


11 points

Approximation par une fonction constante par morceaux



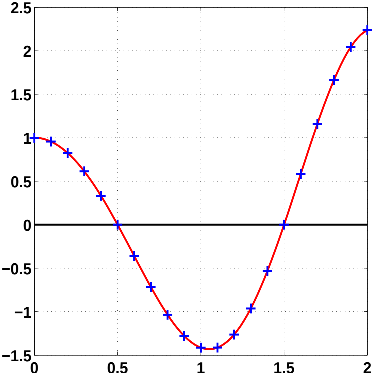
11 points



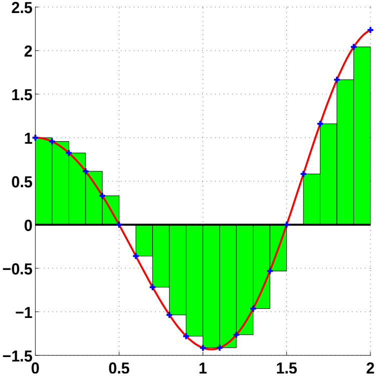
10 subdivisions

Méthodes des rectangles à gauche

Approximation par une fonction constante par morceaux



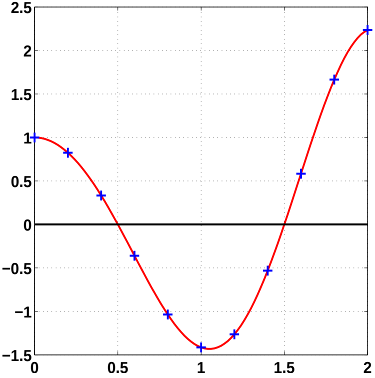
21 points



20 subdivisions

Méthodes des rectangles

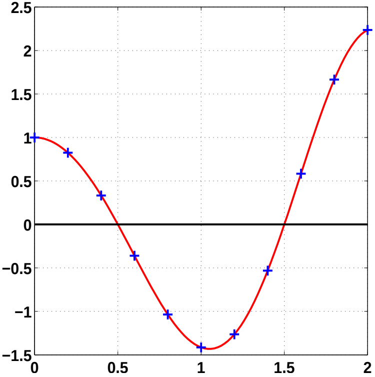
Approximation par une fonction constante par morceaux



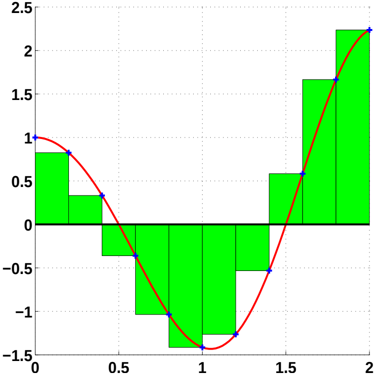
11 points

Méthodes des rectangles à droite

Approximation par une fonction constante par morceaux



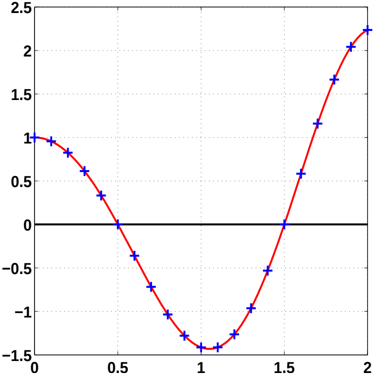
11 points



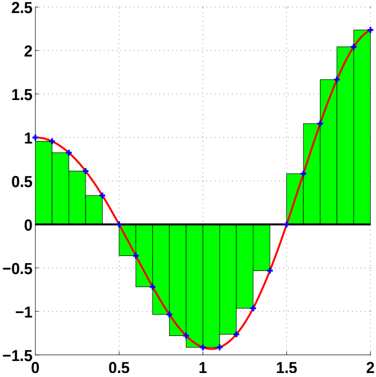
10 subdivisions

Méthodes des rectangles à droite

Approximation par une fonction constante par morceaux

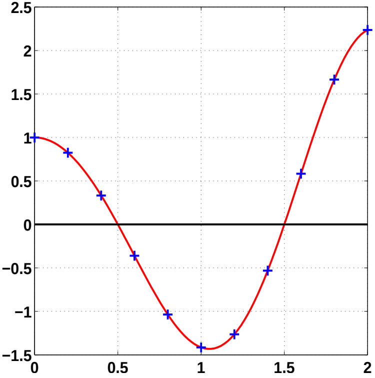


21 points



20 subdivisions

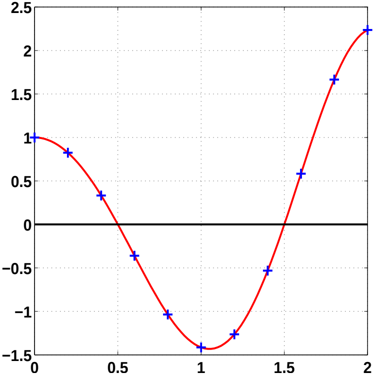
Approximation par une fonction constante par morceaux



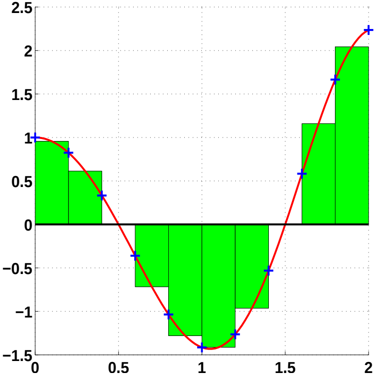
11 points

Méthodes des rectangles au point milieu

Approximation par une fonction constante par morceaux



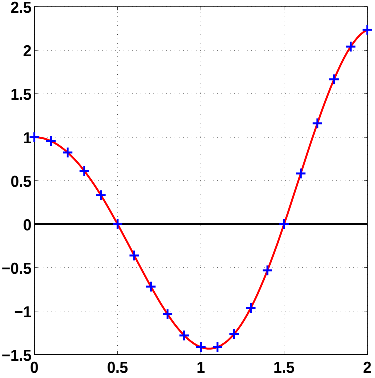
11 points



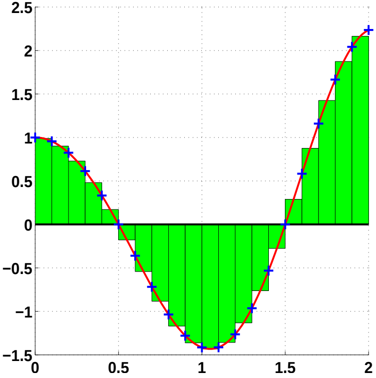
10 subdivisions

Méthodes des rectangles au point milieu

Approximation par une fonction constante par morceaux

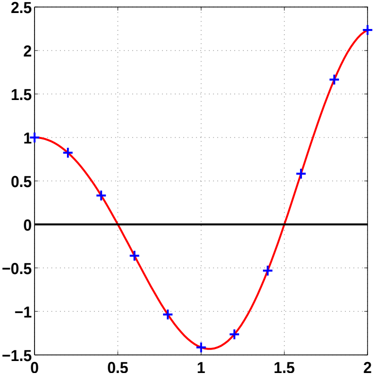


21 points



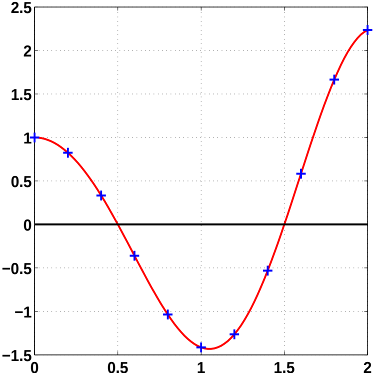
20 subdivisions

Approximation par une fonction affine par morceaux

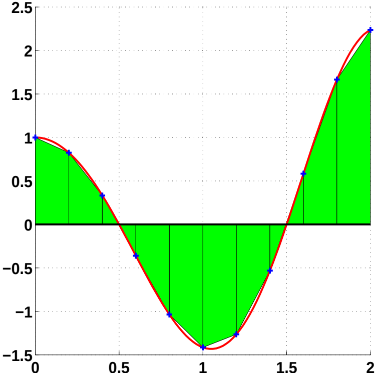


11 points

Approximation par une fonction affine par morceaux



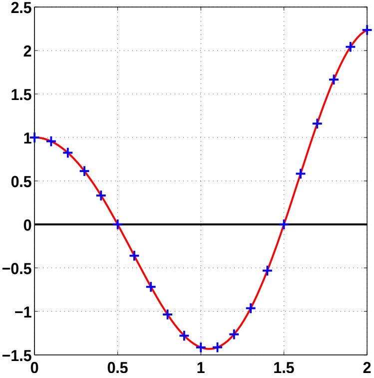
11 points



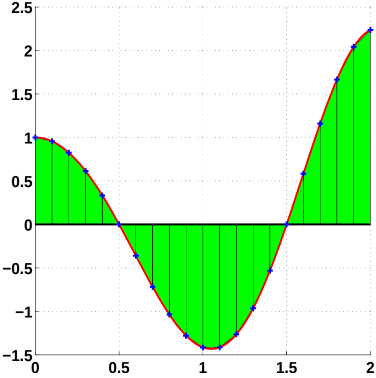
10 subdivisions

Méthodes des trapèzes

Approximation par une fonction affine par morceaux

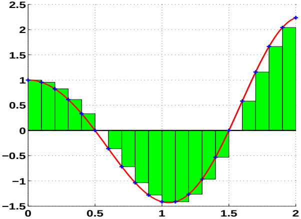


21 points



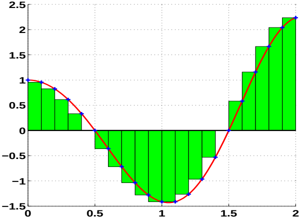
20 subdivisions

Rectangles à gauche



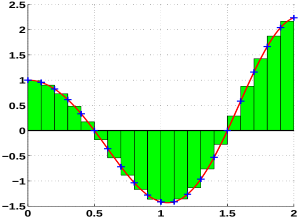
I=0.019664765868385

Rectangles à droite



I=0.143271563618364

Rectangles au point milieu



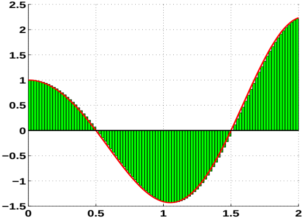
I=0.080343177070866

Trapèzes

I=0.081468164743374

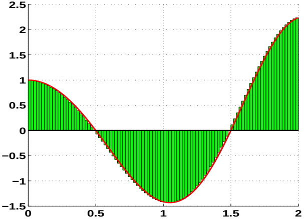
Comparaison des méthodes (100 subdivisions)

Rectangles à gauche



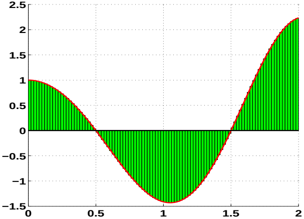
I=0.068388241234746

Rectangles à droite



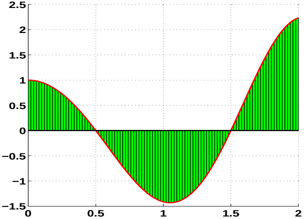
I=0.093109600784742

Rectangles au point milieu



I=0.080704188569061

Trapèzes



I=0.080748921009744

Intégration numérique et interpolation de Lagrange

On considère l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

On considère l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

Soit la subdivision

$$a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$$

et soit $p \in \mathbb{P}_n$ tel que $p(x_i) = f(x_i)$.

Intégration numérique et interpolation de Lagrange

On considère l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

Soit la subdivision

$$a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$$

et soit $p \in \mathbb{P}_n$ tel que $p(x_i) = f(x_i)$.
Donc

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x), \qquad x \in [a, b]$$

où

$$L_i(x) := \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})\,(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})\,(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}.$$

On a

$$\int_a^b p(x)\,dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b L_i(x)\,dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) w_i$$

Le calcul des w_i est particulièrement aisé puisqu'il s'agit d'intégrales de polynômes.
On peut ainsi « approcher » l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ par

$$\int_a^b p(x)\,dx = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$$

On a

$$\int_a^b p(x)\,dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b L_i(x)\,dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) w_i$$

Le calcul des w_i est particulièrement aisé puisqu'il s'agit d'intégrales de polynômes.
On peut ainsi « approcher » l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ par

$$\int_a^b p(x)\,dx = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$$

En général, une méthode d'intégration numérique s'écrit :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx I(f) := \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$$

avec

$(x_i)_{i=0}^n$	Points d'intégration numérique
$(w_i)_{i=0}^n$	Poids de la formule d'intégration numérique.

Dans l'exemple du polynôme d'interpolation de Lagrange, si $f \in \mathbb{P}_n$, on a

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Dans l'exemple du polynôme d'interpolation de Lagrange, si $f \in \mathbb{P}_n$, on a

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

On s'intéresse donc aux formules d'intégration numérique exactes pour des polynômes.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On s'intéresse à l'intégrale

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx \qquad \text{où} \qquad a \leq \alpha < \beta \leq b.$$

Théorème

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et que la formule d'intégration numérique :

$$I(f) = (\beta - \alpha) \sum_{i=1}^{m} w_i f(\alpha + \theta_i(\beta - \alpha)) \qquad 0 \le \theta_i \le 1$$

est exacte pour des polynômes de degré n, *i.e.*

$$I(g) = \int_\alpha^\beta g(x)\,dx \qquad \forall\, g \in \mathbb{P}_n.$$

Alors

$$\Big| \int_\alpha^\beta f(x)\,dx - I(f) \Big| \le \frac{(\beta-\alpha)^{n+1}}{n\,!} \Big(1 + \sum_{i=1}^{m} |w_i| \theta_i^n\Big) \int_\alpha^\beta |f^{(n+1)}(x)|\,dx$$

La majoration

$$\left| \int_\alpha^\beta f(x)\, dx - I(f) \right| \leq \frac{(\beta-\alpha)^{n+1}}{n\,!} \Big(1 + \sum_{i=1}^{m} |w_i| \theta_i^n \Big) \int_\alpha^\beta |f^{(n+1)}(x)|\, dx$$

montre que l'erreur peut être minimisée,

- Soit en augmentant n (Degré du polynôme pour lequel la formule est exacte)

La majoration

$$\left| \int_\alpha^\beta f(x)\,dx - I(f) \right| \le \frac{(\beta-\alpha)^{n+1}}{n\,!} \Big(1 + \sum_{i=1}^m |w_i| \theta_i^n\Big) \int_\alpha^\beta |f^{(n+1)}(x)|\,dx$$

montre que l'erreur peut être minimisée,

- Soit en augmentant n (Degré du polynôme pour lequel la formule est exacte)
- Soit en rendant $\beta - \alpha$ petit

La majoration

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx - I(f) \right| \leq \frac{(\beta-\alpha)^{n+1}}{n\,!} \left(1 + \sum_{i=1}^{m} |w_i| \theta_i^n \right) \int_{\alpha}^{\beta} |f^{(n+1)}(x)|\,dx$$

montre que l'erreur peut être minimisée,

- Soit en augmentant n (Degré du polynôme pour lequel la formule est exacte)
- Soit en rendant $\beta - \alpha$ petit
- Soit les deux

Intégration numérique par morceaux

On considère une subdivision

$$
\begin{aligned}
&a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k = b, \\
&h = \max_{0 \leq i \leq k-1} (x_{i+1} - x_i).
\end{aligned}
$$

Intégration numérique par morceaux

On considère une subdivision

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k = b,$$
$$h = \max_{0 \le i \le k-1} (x_{i+1} - x_i).$$

On a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

Formules des rectangles

On définit la formule d'intégration numérique

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx (x_{i+1} - x_i)\,f(s_i) \qquad \text{où} \quad s_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

On définit la formule d'intégration numérique

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx (x_{i+1} - x_i)\,f(s_i) \qquad \text{où} \quad s_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

Pour les rectangles à gauche, on a $s_i = x_i$

Formules des rectangles

On définit la formule d'intégration numérique

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx (x_{i+1}-x_i)\,f(s_i) \qquad \text{où} \quad s_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

Pour les rectangles à gauche, on a $s_i = x_i$
Donc, dans la majoration

$$\Big|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx - I(f)\Big| \le \frac{(\beta-\alpha)^{n+1}}{n\,!}\Big(1+\sum_{i=1}^m |w_i|\theta_i^n\Big)\int_\alpha^\beta |f^{(n+1)}(x)|\,dx$$

$$\alpha = x_i,\ \ \beta = x_{i+1},\ \ n=0,\ \ s_i = x_i,\ \ \theta_1 = 0, w_1 = 1.$$

Formules des rectangles

On définit la formule d'intégration numérique

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx (x_{i+1} - x_i)\, f(s_i) \qquad \text{où} \quad s_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

Pour les rectangles à gauche, on a $s_i = x_i$
Donc, dans la majoration

$$\Big| \int_\alpha^\beta f(x)\,dx - I(f) \Big| \leq \frac{(\beta-\alpha)^{n+1}}{n\,!} \Big(1 + \sum_{i=1}^m |w_i| \theta_i^n \Big) \int_\alpha^\beta |f^{(n+1)}(x)|\,dx$$

$$\alpha = x_i,\ \ \beta = x_{i+1},\ \ n = 0,\ \ s_i = x_i,\ \ \theta_1 = 0, w_1 = 1.$$

On en déduit

$$\Big| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - (x_{i+1} - x_i)\, f(x_i) \Big| \leq (x_{i+1} - x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f'(x)|\,dx.$$

Ainsi, en notant $h = \max_i(x_{i+1} - x_i)$, on a la majoration d'erreur

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{k-1}(x_{i+1} - x_i)\,f(x_i)\Big| \le \sum_{i=1}^{k-1}\Big|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - (x_{i+1} - x_i)\,f(x_i)\Big|$$

Ainsi, en notant $h = \max_i(x_{i+1} - x_i)$, on a la majoration d'erreur

$$\begin{aligned}\Big|\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{k-1}(x_{i+1}-x_i)\,f(x_i)\Big| &\le \sum_{i=1}^{k-1}\Big|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - (x_{i+1}-x_i)\,f(x_i)\Big| \\ &\le \sum_{i=1}^{k-1}(x_{i+1}-x_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f'(x)|\,dx\end{aligned}$$

Ainsi, en notant $h = \max_i (x_{i+1} - x_i)$, on a la majoration d'erreur

$$\begin{aligned}
\Big| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{k-1} (x_{i+1} - x_i)\, f(x_i) \Big| &\leq \sum_{i=1}^{k-1} \Big| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - (x_{i+1} - x_i)\, f(x_i) \Big| \\
&\leq \sum_{i=1}^{k-1} (x_{i+1} - x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f'(x)|\,dx \\
&\leq h \int_a^b |f'(x)|\,dx
\end{aligned}$$

Ainsi, en notant $h = \max_i (x_{i+1} - x_i)$, on a la majoration d'erreur

$$\begin{aligned}
\Big| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{k-1} (x_{i+1} - x_i)\, f(x_i) \Big| &\leq \sum_{i=1}^{k-1} \Big| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - (x_{i+1} - x_i)\, f(x_i) \Big| \\
&\leq \sum_{i=1}^{k-1} (x_{i+1} - x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f'(x)|\,dx \\
&\leq h \int_a^b |f'(x)|\,dx
\end{aligned}$$

On dit alors que la méthode est d'ordre **1**

Ainsi, en notant $h = \max_i(x_{i+1} - x_i)$, on a la majoration d'erreur

$$\begin{aligned}
\Big| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{k-1}(x_{i+1} - x_i)\,f(x_i)\Big| &\le \sum_{i=1}^{k-1}\Big| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - (x_{i+1} - x_i)\,f(x_i)\Big| \\
&\le \sum_{i=1}^{k-1}(x_{i+1} - x_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f'(x)|\,dx \\
&\le h \int_a^b |f'(x)|\,dx
\end{aligned}$$

On dit alors que la méthode est d'ordre **1**

Pour la méthode des rectangles à droite, on a

$$\alpha = x_i,\;\; \beta = x_{i+1},\;\; n = 0,\;\; \theta_1 = 1,\;\; w_1 = 1$$

On en déduit

$$\Big| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - (x_{i+1} - x_i)\,f(x_i) \Big| \le 2\,(x_{i+1} - x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f'(x)|\,dx$$

On en déduit

$$\left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - (x_{i+1} - x_i)\, f(x_i) \right| \leq 2\,(x_{i+1} - x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f'(x)|\,dx$$

La méthode est donc aussi d'ordre 1.

On en déduit

$$\Big|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - (x_{i+1}-x_i)\,f(x_i)\Big| \leq 2\,(x_{i+1}-x_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f'(x)|\,dx$$

La méthode est donc aussi d'ordre 1.

Méthode du point milieu : On prend $s_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$. Donc

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx (x_{i+1}-x_i)\,f\Big(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\Big).$$

On en déduit

$$\Big| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - (x_{i+1} - x_i)\,f(x_i) \Big| \le 2\,(x_{i+1} - x_i)\,\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f'(x)|\,dx$$

La méthode est donc aussi d'ordre 1.

Méthode du point milieu : On prend $s_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$. Donc

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx (x_{i+1} - x_i)\,f\Big(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\Big).$$

Cette formule est exacte pour les polynômes de degré 1.

POLYTECH CLERMONT-FERRAND

Donc on a

$$\alpha = x_i,\ \ \beta = x_{i+1},\ \ n = 1,\ \ s_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2},\ \ \theta_1 = \frac{1}{2}, w_1 = 1$$

Donc on a

$$\alpha = x_i,\ \beta = x_{i+1},\ n = 1,\ s_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2},\ \theta_1 = \frac{1}{2}, w_1 = 1$$

D'où la majoration d'erreur :

$$\Big| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - (x_{i+1} - x_i)\, f\Big(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\Big) \Big| \leq \frac{3}{2}\,(x_{i+1} - x_i)^2 \int_a^b |f''(x)|\,dx$$

Donc on a

$$\alpha = x_i,\ \ \beta = x_{i+1},\ \ n = 1,\ \ s_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2},\ \ \theta_1 = \frac{1}{2}, w_1 = 1$$

D'où la majoration d'erreur :

$$\Big| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - (x_{i+1} - x_i)\, f\Big(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\Big)\Big| \le \frac{3}{2}\,(x_{i+1} - x_i)^2 \int_a^b |f''(x)|\,dx$$

Ainsi

$$\Big| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{k-1} (x_{i+1} - x_i)\, f\Big(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\Big)\Big| \le \frac{3}{2}\,h^2 \int_a^b |f''(x)|\,dx$$

Formule des trapèzes

Elle s'écrit :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\big(f(x_i) + f(x_{i+1})\big)$$

Formule des trapèzes

Elle s'écrit :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \frac{x_{i+1}-x_i}{2}\,\big(f(x_i)+f(x_{i+1})\big)$$

Elle est donc exacte pour les polynômes de degré 1. Donc

$$\alpha = x_i,\ \ \beta = x_{i+1},\ \ n = 1,\ \ \theta_1 = 0,\ \ \theta_2 = 1,\ \ w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$$

Formule des trapèzes

Elle s'écrit :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \frac{x_{i+1}-x_i}{2}\,\big(f(x_i)+f(x_{i+1})\big)$$

Elle est donc exacte pour les polynômes de degré 1. Donc

$$\alpha = x_i,\ \beta = x_{i+1},\ n=1,\ \theta_1 = 0,\ \theta_2 = 1,\ w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$$

Ainsi

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{x_{i+1}-x_i}{2}\,\big(f(x_i)+f(x_{i+1})\big)\Big| \le \frac{3}{2}\,h^2 \int_a^b |f''(x)|\,dx$$

Elle s'écrit :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \frac{x_{i+1}-x_i}{2}\,\big(f(x_i)+f(x_{i+1})\big)$$

Elle est donc exacte pour les polynômes de degré 1. Donc

$$\alpha = x_i,\ \ \beta = x_{i+1},\ \ n=1,\ \ \theta_1 = 0,\ \ \theta_2 = 1,\ \ w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$$

Ainsi

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{k-1}\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\,\big(f(x_i)+f(x_{i+1})\big)\Big| \le \frac{3}{2}\,h^2\int_a^b |f''(x)|\,dx$$

Cette méthode est donc du même ordre que la méthode des rectangles au milieu.

Formule de Simpson

On utilise une moyenne pondérée entre la formule des trapèzes et le formule des rectangles aux milieu :

On utilise une moyenne pondérée entre la formule des trapèzes et le formule des rectangles aux milieu :

$$\begin{aligned}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx &\approx \frac{1}{3}(x_{i+1}-x_i)\left(\frac{1}{2}(f(x_i)+f(x_{i+1}))+2f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\right)\\ &= \frac{1}{6}(x_{i+1}-x_i)\left(f(x_i)+4f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)+f(x_{i+1})\right)\\ &= I(f)\end{aligned}$$

Formule de Simpson

On utilise une moyenne pondérée entre la formule des trapèzes et le formule des rectangles aux milieu :

$$
\begin{aligned}
\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx &\approx \frac{1}{3}(x_{i+1}-x_i)\left(\frac{1}{2}(f(x_i)+f(x_{i+1}))+2f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\right)\\
&= \frac{1}{6}(x_{i+1}-x_i)\left(f(x_i)+4f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)+f(x_{i+1})\right)\\
&= I(f)
\end{aligned}
$$

Cette formule est exacte pour les polynômes de degré 3. Ainsi

$$
n=3,\ \theta_1=0,\ \theta_2=\frac{1}{2},\ \theta_3=1,\ w_1=\frac{1}{6},\ w_2=\frac{4}{6},\ w_3=\frac{1}{6}
$$

POLYTECH CLERMONT-FERRAND

Formule de Simpson

On utilise une moyenne pondérée entre la formule des trapèzes et le formule des rectangles aux milieu :

$$\begin{aligned}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx &\approx \frac{1}{3}(x_{i+1}-x_i)\left(\frac{1}{2}(f(x_i)+f(x_{i+1}))+2f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\right)\\ &= \frac{1}{6}(x_{i+1}-x_i)\left(f(x_i)+4f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)+f(x_{i+1})\right)\\ &= I(f)\end{aligned}$$

Cette formule est exacte pour les polynômes de degré 3. Ainsi

$$n=3,\ \theta_1=0,\ \theta_2=\frac{1}{2},\ \theta_3=1,\ w_1=\frac{1}{6},\ w_2=\frac{4}{6},\ w_3=\frac{1}{6}$$

D'où la majoration d'erreur

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - I(f)\right| \le \frac{5}{24}\,h^4 \int_a^b |f^{(4)}(x)|\,dx$$