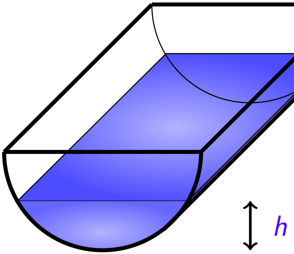
# VI

# RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES NON-LINÉAIRES

**Analyse Numérique**
**Tronc Commun**

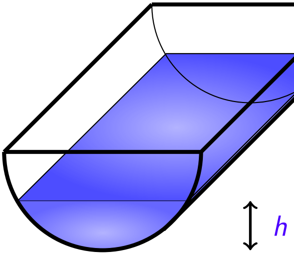
# Exemple 1 : Remplissage d'un réservoir




- Réservoir = demi-cylindre, de rayon $R$, de longueur $1$

$$V = \frac{\pi R^2}{2}$$

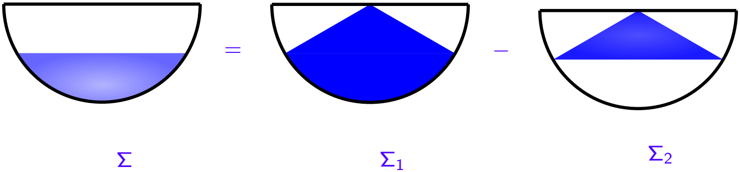
- Pour quelle hauteur d'eau $h$, le réservoir est-il rempli à moitié ?

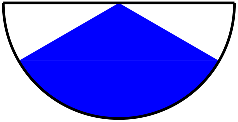


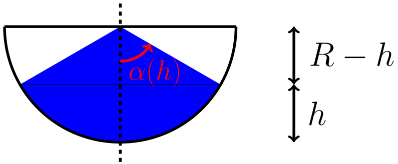

- Réservoir = demi-cylindre, de rayon $R$, de longueur $1$

$$V = \frac{\pi R^2}{2}$$

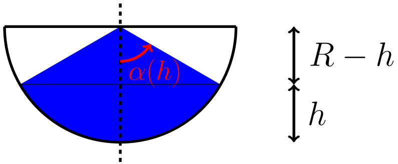
- Pour quelle hauteur d'eau $h$, le réservoir est-il rempli à moitié ?



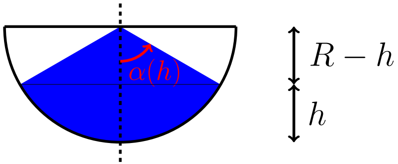




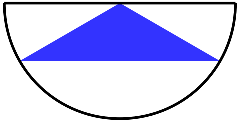
$\alpha(h)$
$R - h$
$h$



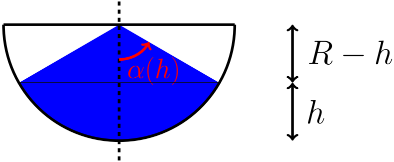

$\Sigma_1 = R^2\alpha(h).$



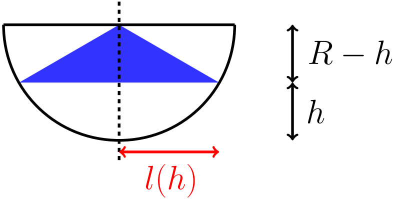

$\Sigma_1 = R^2\alpha(h).$



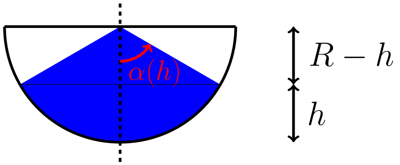
avec



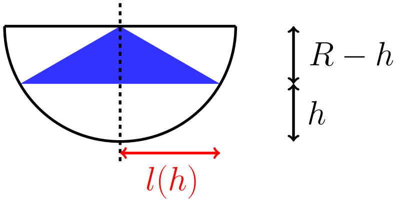

$\Sigma_1 = R^2\alpha(h).$




avec

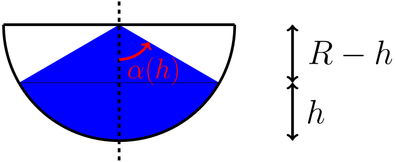



$\Sigma_1 = R^2\alpha(h).$

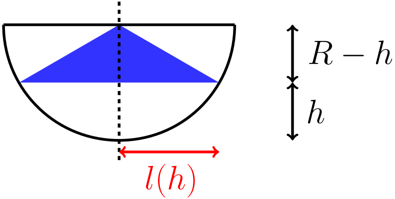



$\Sigma_2 = \ell(h)(R-h).$

avec



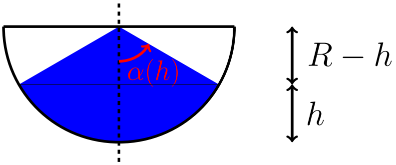

$$\Sigma_1 = R^2\alpha(h).$$



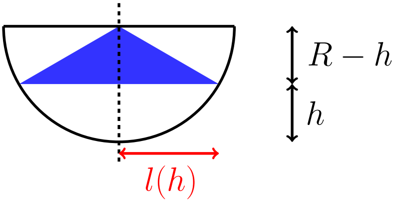

$$\Sigma_2 = \ell(h)(R-h).$$

avec

$$\cos\alpha(h) = \frac{R-h}{R}, \qquad \text{donc} \qquad \alpha(h) = \arccos\left(\frac{R-h}{R}\right)$$




$$\Sigma_1 = R^2\alpha(h).$$

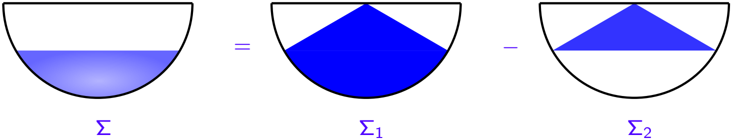



$$\Sigma_2 = \ell(h)(R-h).$$

avec

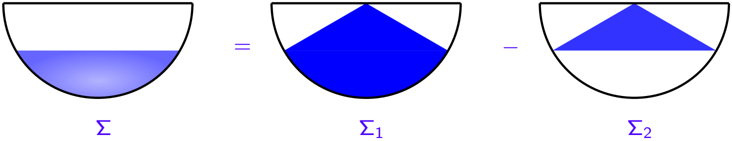
$$\cos\alpha(h) = \frac{R-h}{R}, \qquad \text{donc} \qquad \alpha(h) = \arccos\left(\frac{R-h}{R}\right)$$

$$\ell(h) = \sqrt{R^2-(R-h)^2} = \sqrt{2Rh-h^2}$$




$$\Sigma = R^2\alpha(h) - \ell(h)(R-h)$$

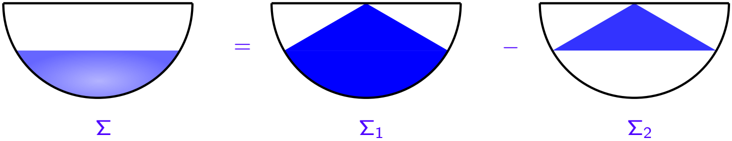
$$= R^2 \arccos\left(\frac{R-h}{R}\right) - \sqrt{2Rh-h^2}\,(R-h)$$




$$
\begin{aligned}
\Sigma &= R^2\alpha(h) - \ell(h)(R-h) \\
&= R^2 \arccos\left(\frac{R-h}{R}\right) - \sqrt{2Rh-h^2}\,(R-h)
\end{aligned}
$$

Le réservoir est à moitié plein si

$$R^2 \arccos\left(\frac{R-h}{R}\right) - \sqrt{2Rh-h^2}\,(R-h) = \frac{\pi R^2}{4}.$$




$$
\begin{aligned}
\Sigma &= R^2\alpha(h) - \ell(h)(R-h) \\
&= R^2 \ \arccos\left(\frac{R-h}{R}\right) - \sqrt{2Rh-h^2}\,(R-h)
\end{aligned}
$$

Le réservoir est à moitié plein si

$$R^2 \arccos\left(\frac{R-h}{R}\right) - \sqrt{2Rh-h^2}\,(R-h) = \frac{\pi R^2}{4}.$$

$\Longrightarrow$ Équation non linéaire en $h$ : $f(h) = 0$

$$f(h) = R^2 \arccos\left(\frac{R-h}{R}\right) - \sqrt{2Rh-h^2}\,(R-h) - \frac{\pi R^2}{4}.$$

# Exemple 2 : Calcul d'une racine carrée

On veut calculer $\sqrt{2}$ par une méthode itérative.

# Exemple 2 : Calcul d'une racine carrée

On veut calculer $\sqrt{2}$ par une méthode itérative.
Ceci revient à rechercher un zéro de la fonction $f(x) = x^2 - 2$.

# Exemple 2 : Calcul d'une racine carrée

On veut calculer $\sqrt{2}$ par une méthode itérative.
Ceci revient à rechercher un zéro de la fonction $f(x) = x^2 - 2$.
On considère la suite d'itérations :

$$\begin{aligned} x^{(0)} &> 0 && \text{donné} \\ x^{(k+1)} &= \frac{(x^{(k)})^2 + 2}{2\,x^{(k)}} && k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

# Exemple 2 : Calcul d'une racine carrée

On veut calculer $\sqrt{2}$ par une méthode itérative.
Ceci revient à rechercher un zéro de la fonction $f(x) = x^2 - 2$.
On considère la suite d'itérations :

$$\begin{aligned} &x^{(0)} > 0 && \text{donné} \\ &x^{(k+1)} = \frac{(x^{(k)})^2 + 2}{2\,x^{(k)}} && k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Supposons que cette méthode converge vers $\bar{x} > 0$. On a

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}^2 + 2}{2\bar{x}} \qquad \text{donc} \qquad \bar{x} = \sqrt{2}.$$

# Généralités

On veut résoudre l'équation algébrique non linéaire

$$f(x) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}.$$

par une méthode itérative, partant de $x^{(0)} \in \mathbb{R}$, et donnant les itérés successifs :

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$$

On veut résoudre l'équation algébrique non linéaire

$$f(x) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}.$$

par une méthode itérative, partant de $x^{(0)} \in \mathbb{R}$, et donnant les itérés successifs :

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$$

tels que

$$\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x$$

En pratique, on ne peut pas faire un nombre infini d'itérations ( ! !). On se donne alors une précision (ou tolérance) $\epsilon$ et on utilise un critère d'arrêt :

En pratique, on ne peut pas faire un nombre infini d'itérations ( ! !). On se donne alors une précision (ou tolérance) $\epsilon$ et on utilise un critère d'arrêt :

$$
\begin{array}{ll}
 & |f(x^{(k)})| < \epsilon \\
\text{ou} & |x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \epsilon \\
\text{ou} & \dfrac{|x^{(k+1)} - x^{(k)}|}{|x^{(k)}|} < \epsilon
\end{array}
$$

### Définitions

- On dit qu'une méthode itérative converge s'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{k \to \infty} |x^{(k)} - x| = 0.$$

## Définitions

- On dit qu'une méthode itérative converge s'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{k\to\infty} |x^{(k)} - x| = 0.$$

- On dira qu'une méthode itérative est d'ordre $p$ ($p \geq 1$) s'il existe une constante $C$, indépendante de $k$, telle que

$$|x - x^{(k+1)}| \leq C\,|x - x^{(k)}|^p$$

### Définitions

- On dit qu'une méthode itérative converge s'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que
$$\lim_{k\to\infty} |x^{(k)} - x| = 0.$$
- On dira qu'une méthode itérative est d'ordre $p$ ($p \geq 1$) s'il existe une constante $C$, indépendante de $k$, telle que
$$|x - x^{(k+1)}| \leq C\,|x - x^{(k)}|^p$$
- Si $p = 1$, on parle de convergence linéaire
$$|x - x^{(k)}| \leq C\,|x - x^{(k-1)}| \leq \ldots \leq C^k\,|x - x^{(0)}|$$
(Convergence si $C < 1$)

## Définitions

- On dit qu'une méthode itérative converge s'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{k\to\infty} |x^{(k)} - x| = 0.$$

- On dira qu'une méthode itérative est d'ordre $p$ ($p \geq 1$) s'il existe une constante $C$, indépendante de $k$, telle que

$$|x - x^{(k+1)}| \leq C\,|x - x^{(k)}|^p$$

- Si $p = 1$, on parle de convergence linéaire

$$|x - x^{(k)}| \leq C\,|x - x^{(k-1)}| \leq \ldots \leq C^k\,|x - x^{(0)}|$$

(Convergence si $C < 1$)

- Si $p = 2$, on a convergence quadratique

$$|x - x^{(k)}| \leq C\,|x - x^{(k-1)}|^2 \leq \ldots \leq C^k\,|x - x^{(0)}|^{2k}$$

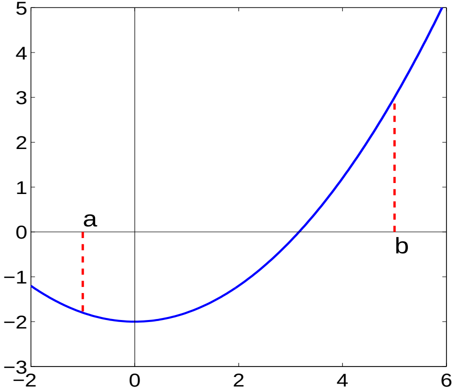
(Convergence si $C\,|x - x^{(0)}| < 1$)

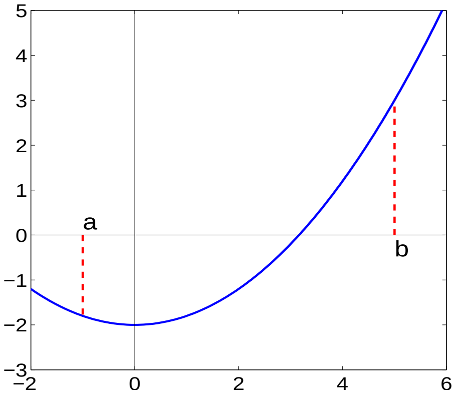
# Méthode de la bisection ou dichotomie

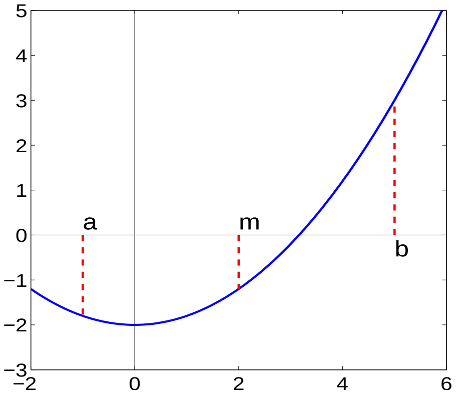
On suppose $f$ continue.
Soient $a$ et $b$ tels que $f(a)\,f(b) < 0$. Alors il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

## Méthode de la bisection ou dichotomie

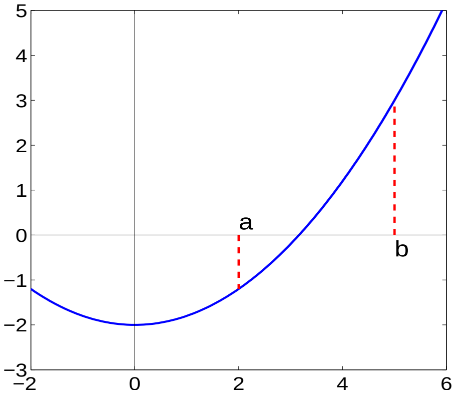
On suppose $f$ continue.
Soient $a$ et $b$ tels que $f(a)\,f(b) < 0$. Alors il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = 0$.



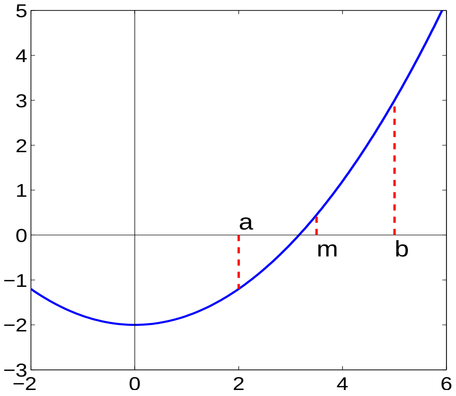

a
b
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−2
0
2
4
6



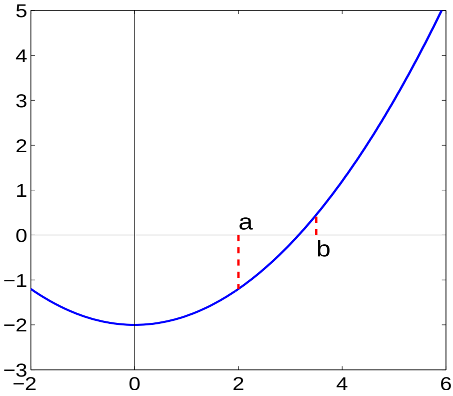

- $m = \dfrac{a+b}{2}$




- $m = \dfrac{a+b}{2}$
- si $f(m)f(a) > 0$ alors $\alpha \in ]m, b[$ : $\boxed{a := m}$

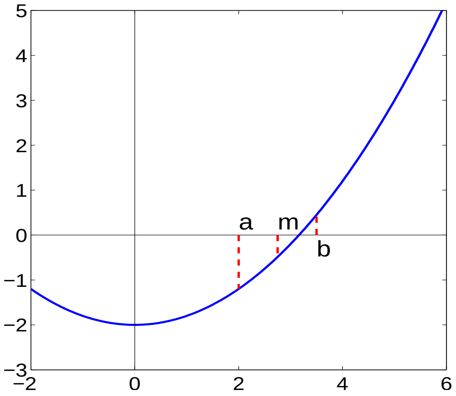



- $m = \dfrac{a+b}{2}$
- si $f(m)f(a) > 0$ alors $\alpha \in ]m, b[$ : $\boxed{a := m}$

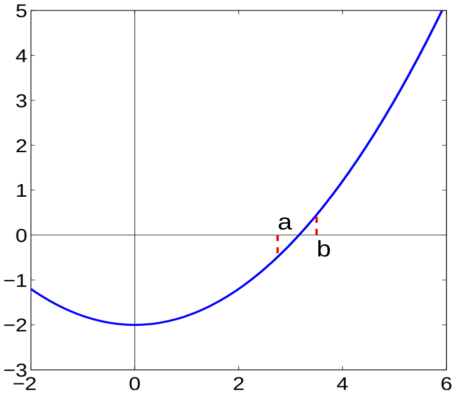



- $m = \dfrac{a+b}{2}$
- si $f(m)f(a) > 0$ alors $\alpha \in ]m, b[$ : $\boxed{a := m}$
- si $f(m)f(a) < 0$ alors $\alpha \in ]a, m[$ : $\boxed{b := m}$

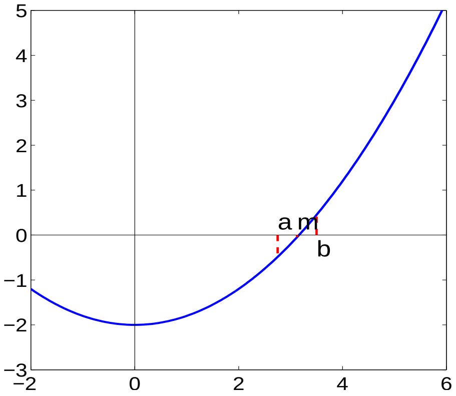
POLYTECH® CLERMONT-FERRAND




- $m = \dfrac{a+b}{2}$
- si $f(m)f(a) > 0$ alors $\alpha \in ]m, b[$ : $\boxed{a := m}$
- si $f(m)f(a) < 0$ alors $\alpha \in ]a, m[$ : $\boxed{b := m}$




- $m = \dfrac{a+b}{2}$
- si $f(m)f(a) > 0$ alors $\alpha \in ]m, b[$ : $\boxed{a := m}$
- si $f(m)f(a) < 0$ alors $\alpha \in ]a, m[$ : $\boxed{b := m}$




- $m = \dfrac{a+b}{2}$
- si $f(m)f(a) > 0$ alors $\alpha \in ]m, b[$ : $\boxed{a := m}$
- si $f(m)f(a) < 0$ alors $\alpha \in ]a, m[$ : $\boxed{b := m}$

Soient $a$ et $b$ tels que $f(a)\,f(b) < 0$ et soit $x^{(0)} = \dfrac{a+b}{2}$ :

**Algorithme**

Pour $k = 0, 1, 2, \dots$

si $f(x^{(k)}) = 0$ stop $\bar{x} = x^{(k)}$

si $f(a)\,f(x^{(k)}) < 0,$ $b := x^{(k)}$

sinon $a := x^{(k)}$

$x^{(k+1)} := (a+b)/2$

Fin $k$

# Méthode de dichotomie : Convergence

Soient $a$ et $b$ tels que $f(a)\,f(b) < 0$ et soit $x^{(0)} = \dfrac{a+b}{2}$ :

**Algorithme**

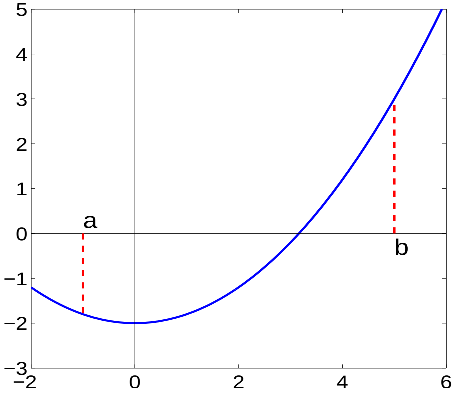
$$
\begin{array}{l}
\text{Pour } k = 0, 1, 2, \dots \\
\qquad \text{si } f(x^{(k)}) = 0 \quad \text{stop} \quad \bar{x} = x^{(k)} \\
\qquad \text{si } f(a)\,f(x^{(k)}) < 0, \qquad b := x^{(k)} \\
\qquad \text{sinon} \qquad\qquad\qquad\quad a := x^{(k)} \\
\qquad x^{(k+1)} := (a+b)/2 \\
\text{Fin } k
\end{array}
$$

**Théorème**

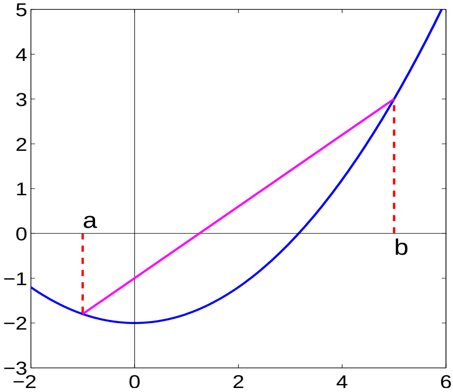
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(a)\,f(b) < 0$. Alors la méthode de dichotomie converge. De plus, la convergence est linéaire.

POLYTECH CLERMONT-FERRAND

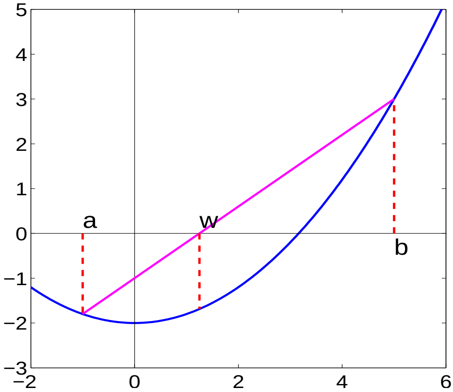
# Méthode Regula Falsi (Fausse position)



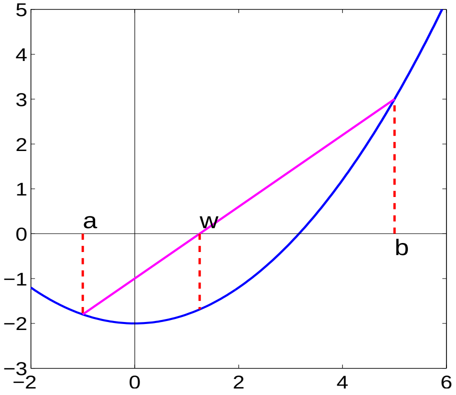
# Méthode Regula Falsi (Fausse position)



# Méthode Regula Falsi (Fausse position)

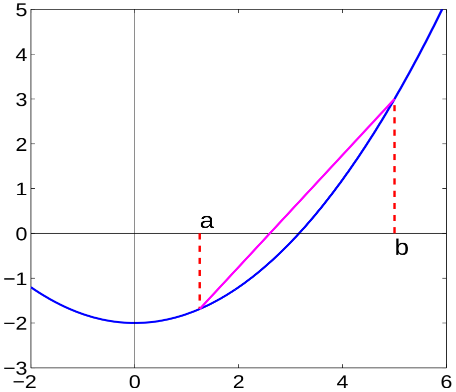



- $w = \dfrac{f(a)\,b - f(b)\,a}{f(a) - f(b)}$



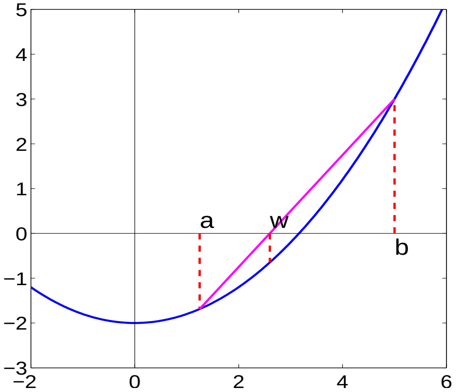

- $w = \dfrac{f(a)\,b - f(b)\,a}{f(a) - f(b)}$
- si $f(w)\,f(a) > 0$ alors $\alpha \in ]w, b[$ : $\boxed{a := w}$
- si $f(w)\,f(a) < 0$ alors $\alpha \in ]a, w[$ : $\boxed{b := w}$

# Méthode Regula Falsi (Fausse position)

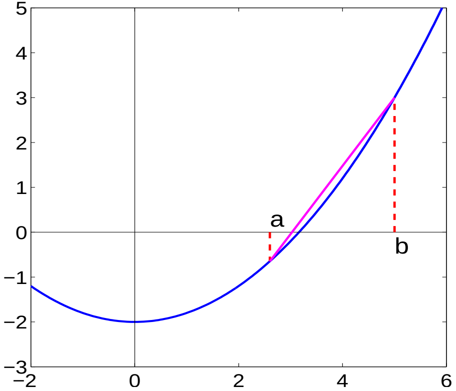



- $w = \dfrac{f(a)\,b - f(b)\,a}{f(a) - f(b)}$
- si $f(w)\,f(a) > 0$ alors $\alpha \in ]w, b[$ : $\boxed{a := w}$
- si $f(w)\,f(a) < 0$ alors $\alpha \in ]a, w[$ : $\boxed{b := w}$

# Méthode Regula Falsi (Fausse position)

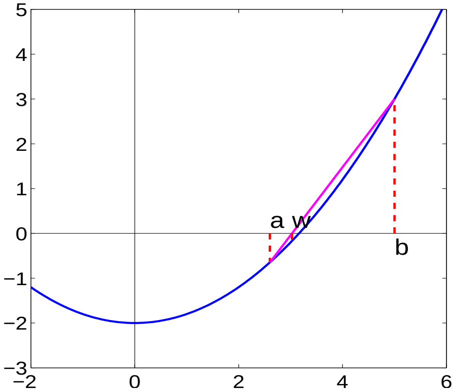



- $w = \dfrac{f(a)\,b - f(b)\,a}{f(a) - f(b)}$
- si $f(w)\,f(a) > 0$ alors $\alpha \in ]w, b[$ : $\boxed{a := w}$
- si $f(w)\,f(a) < 0$ alors $\alpha \in ]a, w[$ : $\boxed{b := w}$




- $w = \dfrac{f(a)\,b - f(b)\,a}{f(a) - f(b)}$
- si $f(w)\,f(a) > 0$ alors $\alpha \in ]w, b[$ : $\boxed{a := w}$
- si $f(w)\,f(a) < 0$ alors $\alpha \in ]a, w[$ : $\boxed{b := w}$

# Méthode Regula Falsi (Fausse position)



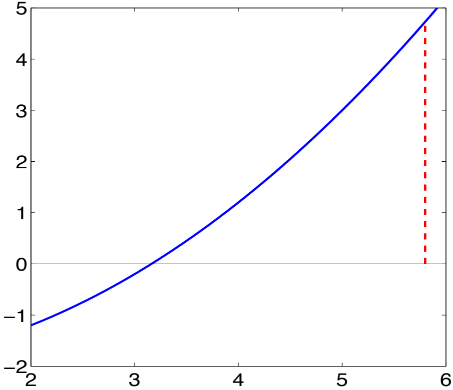

- $w = \dfrac{f(a)\,b - f(b)\,a}{f(a) - f(b)}$
- si $f(w)\,f(a) > 0$ alors $\alpha \in ]w, b[$ : $\boxed{a := w}$
- si $f(w)\,f(a) < 0$ alors $\alpha \in ]a, w[$ : $\boxed{b := w}$

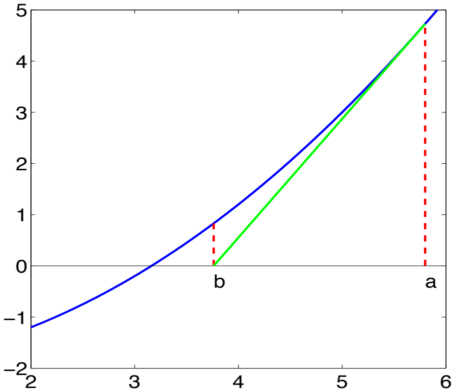
# Méthode Regula Falsi : Convergence

**Théorème**

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$ telle que $f(a)f(b) < 0$. Supposons que $f''$ est de signe constant sur $[a,b]$. Alors la méthode de *Regula Falsi* converge vers l'unique zéro $\bar{x} \in ]a,b[$ de $f$.

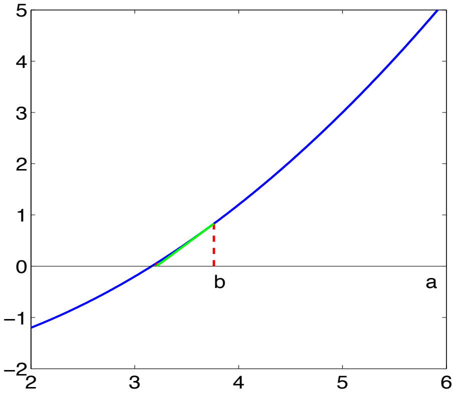
# Méthode de Newton






$$f'(a) = \frac{f(a)}{a - b}$$

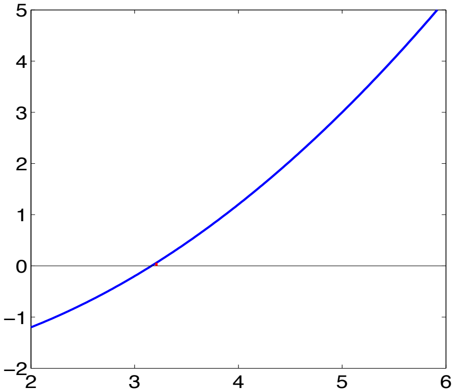
# Méthode de Newton




$$f'(a) = \frac{f(a)}{a - b}$$

ou encore

$$b = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$




$$f'(a) = \frac{f(a)}{a-b}$$

ou encore

$$b = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

## Algorithme de Newton

- On se donne $x^{(0)} \in \mathbb{R}$
- Pour $k = 0, 1, \ldots$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

### Algorithme de Newton

- On se donne $x^{(0)} \in \mathbb{R}$
- Pour $k = 0, 1, \dots$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

### Théorème

On suppose que $x^{(0)}$ est assez proche de $\bar{x}$ et que $f'(x) \neq 0$ pour $x$ dans un voisinage de $\bar{x}$. Alors la méthode de Newton converge.
De plus, la convergence est quadratique.

On peut obtenir une variante de cette méthode en considérant l'approximation de la dérivée par un quotient différentiel.

On peut obtenir une variante de cette méthode en considérant l'approximation de la dérivée par un quotient différentiel. On définit

$$f'(x^{(k)}) \approx \frac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}}.$$

On peut obtenir une variante de cette méthode en considérant l'approximation de la dérivée par un quotient différentiel. On définit

$$f'(x^{(k)}) \approx \frac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}}.$$

On obtient la méthode itérative :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})} (x^{(k)} - x^{(k-1)})$$

Soit le système d'équations :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

ou encore

$$\begin{aligned} f_1(x_1,\dots,x_n) &= 0 \\ f_2(x_1,\dots,x_n) &= 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad & \vdots \\ f_n(x_1,\dots,x_n) &= 0 \end{aligned}$$

Soit le système d'équations :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

ou encore

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad &\vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

Méthode de Newton pour une fonction $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ : Par la formule de Taylor :

$$f_i(\mathbf{x}^{(k+1)}) = f_i(\mathbf{x}^{(k)}) + \sum_{j=1}^{n} (x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathcal{O}(|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}|^2)$$

Notons par $\delta \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}$ l'incrément à l'itération $k$, nous avons :

$$\begin{cases} \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})\, \delta \mathbf{x}^{(k)} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} := \mathbf{x}^{(k)} + \delta \mathbf{x}^{(k)} \end{cases}$$

où $\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$ est la matrice de coefficients

$$\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

Notons par $\delta\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}$ l'incrément à l'itération $k$, nous avons :

$$\begin{cases} \nabla\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})\,\delta\mathbf{x}^{(k)} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} := \mathbf{x}^{(k)} + \delta\mathbf{x}^{(k)} \end{cases}$$

où $\nabla\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$ est la matrice de coefficients

$$\nabla\mathbf{f}(\mathbf{x})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \qquad 1 \le i,j \le n$$

On doit donc résoudre, à chaque itération $k$, un système linéaire faisant intervenir une matrice dépendant de l'itération $k$.

## Principe :

On transforme le problème $f(x) = 0$ en $g(x) = x$.
Par exemple :

$$g(x) = x - f(x) \quad \text{ou} \quad g(x) = x - \lambda f(x), \; \lambda \neq 0$$

## Principe :

On transforme le problème $f(x) = 0$ en $g(x) = x$.
Par exemple :

$$g(x) = x - f(x) \quad \text{ou} \quad g(x) = x - \lambda f(x), \ \lambda \neq 0$$

### Définition

On dit que $\bar{x}$ est un point fixe de $g$ si $g(\bar{x}) = \bar{x}$.

## Principe :

On transforme le problème $f(x) = 0$ en $g(x) = x$.
Par exemple :

$$g(x) = x - f(x) \quad \text{ou} \quad g(x) = x - \lambda f(x), \ \lambda \neq 0$$

### Définition

On dit que $\bar{x}$ est un point fixe de $g$ si $g(\bar{x}) = \bar{x}$.

### Méthode de point fixe

Une méthode de point fixe consiste en une méthode itérative :

$$\begin{cases} x^{(0)} & \text{donné} \\ x^{(k+1)} = g(x^{(k)}), & k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

POLYTECH CLERMONT-FERRAND

## Principe :

On transforme le problème $f(x) = 0$ en $g(x) = x$.
Par exemple :

$$g(x) = x - f(x) \quad \text{ou} \quad g(x) = x - \lambda f(x), \ \lambda \neq 0$$

### Définition

On dit que $\bar{x}$ est un point fixe de $g$ si $g(\bar{x}) = \bar{x}$.

### Méthode de point fixe

Une méthode de point fixe consiste en une méthode itérative :

$$\begin{cases} x^{(0)} & \text{donné} \\ x^{(k+1)} = g(x^{(k)}), & k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

- Si $g$ est continue et si $\lim x^{(k)} = \bar{x}$ alors $g(x) = x$. Donc $f(x) = 0$.

## Principe :

On transforme le problème $f(x) = 0$ en $g(x) = x$.
Par exemple :

$$g(x) = x - f(x) \quad \text{ou} \quad g(x) = x - \lambda f(x),\ \lambda \neq 0$$

### Définition

On dit que $\bar{x}$ est un point fixe de $g$ si $g(\bar{x}) = \bar{x}$.

### Méthode de point fixe

Une méthode de point fixe consiste en une méthode itérative :

$$\begin{cases} x^{(0)} & \text{donné} \\ x^{(k+1)} = g(x^{(k)}), & k = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

- Si $g$ est continue et si $\lim x^{(k)} = \bar{x}$ alors $g(x) = x$. Donc $f(x) = 0$.
- Convergence ?

POLYTECH CLERMONT-FERRAND

**Théorème**

Soit $g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose :

- $I$ est un intervalle fermé non vide de $\mathbb{R}$
- Pour tout $x \in I$, $g(x) \in I$
- La fonction $g$ est contractante : Il existe une constante $0 \leq C < 1$ telle que

$$|g(x) - g(y)| \leq C\,|x - y| \qquad \text{pour tous} \quad x, y \in I$$

Alors $g$ admet un unique point fixe $\bar{x} \in I$

## Unicité :

Supposons l'existence de 2 points fixes $x$ et $y$. On a

$$|x-y| = |g(x)-g(y)| \le C\,|x-y|$$

Impossible car $C < 1$.

## Unicité :

Supposons l'existence de 2 points fixes $x$ et $y$. On a

$$|x - y| = |g(x) - g(y)| \leq C\,|x - y|$$

Impossible car $C < 1$.

## Existence :

Considérons la suite $(x^{(k)})$ où $x^{(0)}$ est donné et

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}).$$

## Unicité :

Supposons l'existence de 2 points fixes $x$ et $y$. On a

$$|x-y| = |g(x)-g(y)| \leq C\,|x-y|$$

Impossible car $C<1$.

## Existence :

Considérons la suite $(x^{(k)})$ où $x^{(0)}$ est donné et

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}).$$

On a

$$|x^{(k+1)}-x^{(k)}| = |g(x^{(k)})-g(x^{(k-1)})| \leq C\,|x^{(k)}-x^{(k-1)}| \leq C^k\,|x^{(1)}-x^{(0)}|$$

## Unicité :

Supposons l'existence de 2 points fixes $x$ et $y$. On a

$$|x - y| = |g(x) - g(y)| \leq C\,|x - y|$$

Impossible car $C < 1$.

## Existence :

Considérons la suite $(x^{(k)})$ où $x^{(0)}$ est donné et

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}).$$

On a

$$|x^{(k+1)} - x^{(k)}| = |g(x^{(k)}) - g(x^{(k-1)})| \leq C\,|x^{(k)} - x^{(k-1)}| \leq C^k\,|x^{(1)} - x^{(0)}|$$

Donc

$$\lim_{k,\ell\to\infty} |x^{(k)} - x^{(\ell)}| = 0$$

## Unicité :

Supposons l'existence de 2 points fixes $x$ et $y$. On a

$$|x-y| = |g(x)-g(y)| \leq C\,|x-y|$$

Impossible car $C<1$.

## Existence :

Considérons la suite $(x^{(k)})$ où $x^{(0)}$ est donné et

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}).$$

On a

$$|x^{(k+1)}-x^{(k)}| = |g(x^{(k)})-g(x^{(k-1)})| \leq C\,|x^{(k)}-x^{(k-1)}| \leq C^k\,|x^{(1)}-x^{(0)}|$$

Donc

$$\lim_{k,\ell\to\infty} |x^{(k)}-x^{(\ell)}| = 0$$

*i.e.* $(x^{(k)})$ est une suite de Cauchy. Donc elle converge vers $\bar{x}\in\mathbb{R}$.

# Démonstration du théorème du point fixe

## Unicité :

Supposons l'existence de 2 points fixes $x$ et $y$. On a

$$|x-y| = |g(x)-g(y)| \le C\,|x-y|$$

Impossible car $C<1$.

## Existence :

Considérons la suite $(x^{(k)})$ où $x^{(0)}$ est donné et

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}).$$

On a

$$|x^{(k+1)}-x^{(k)}| = |g(x^{(k)})-g(x^{(k-1)})| \le C\,|x^{(k)}-x^{(k-1)}| \le C^k\,|x^{(1)}-x^{(0)}|$$

Donc

$$\lim_{k,\ell\to\infty} |x^{(k)}-x^{(\ell)}| = 0$$

*i.e.* $(x^{(k)})$ est une suite de Cauchy. Donc elle converge vers $\bar{x}\in\mathbb{R}$. Par continuité

$$\lim_{k\to\infty} g(x^{(k)}) = g(\bar{x}) = \bar{x}$$

## Méthode de Newton

On prend $f(x) = x^2 - 2$. Donc $f'(x) = 2x$.

## Méthode de Newton

On prend $f(x) = x^2 - 2$. Donc $f'(x) = 2x$.
D'où la méthode itérative

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} = x^{(k)} - \frac{(x^{(k)})^2 - 2}{2x^{(k)}} = \frac{(x^{(k)})^2 + 2}{2x^{(k)}}$$

## Méthode de Newton

On prend $f(x) = x^2 - 2$. Donc $f'(x) = 2x$.
D'où la méthode itérative

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} = x^{(k)} - \frac{(x^{(k)})^2 - 2}{2x^{(k)}} = \frac{(x^{(k)})^2 + 2}{2x^{(k)}}$$

Notons que si $x^{(0)} > 0$ alors $x^{(k)} > 0$ pour tout $k$.

## Méthode de Newton

On prend $f(x) = x^2 - 2$. Donc $f'(x) = 2x$.
D'où la méthode itérative

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} = x^{(k)} - \frac{(x^{(k)})^2 - 2}{2x^{(k)}} = \frac{(x^{(k)})^2 + 2}{2x^{(k)}}$$

Notons que si $x^{(0)} > 0$ alors $x^{(k)} > 0$ pour tout $k$.
On montre que la suite $(x^{(k)})$ est positive, décroissante (à partir du deuxième terme) et bornée. Donc elle converge.

Choisissons par exemple : $x^{(0)} = 1$.

Choisissons par exemple : $x^{(0)} = 1$. On a

$$x^{(1)} = \frac{(x^{(0)})^2 + 2}{2x^{(0)}} = 1{,}5$$
$$x^{(2)} = \frac{(x^{(1)})^2 + 2}{2x^{(1)}} = 1{,}41666666666667$$
$$x^{(3)} = \frac{(x^{(2)})^2 + 2}{2x^{(2)}} = 1{,}41421568627451$$

Choisissons par exemple : $x^{(0)} = 1$. On a

$$x^{(1)} = \frac{(x^{(0)})^2 + 2}{2x^{(0)}} = 1{,}5$$
$$x^{(2)} = \frac{(x^{(1)})^2 + 2}{2x^{(1)}} = 1{,}41666666666667$$
$$x^{(3)} = \frac{(x^{(2)})^2 + 2}{2x^{(2)}} = 1{,}41421568627451$$

*Rappel :* $\sqrt{2} = 1{,}414213562373095\ldots$

Erreur : 0,00015 %