VII

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

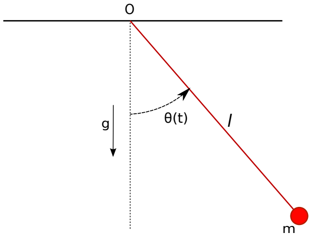
Analyse Numérique
Tronc Commun

Exemple 1 : Pendule pesant sans amortissement

- Pendule de masse m, suspendu en O et de longueur ℓ
- $\theta(t)$: position relative à une position d'équilibre (angle)

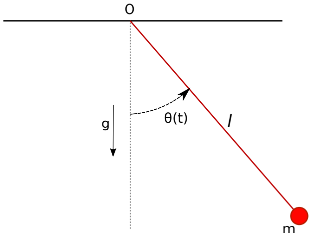
Exemple 1 : Pendule pesant sans amortissement

- Pendule de masse m, suspendu en O et de longueur ℓ
- $\theta(t)$: position relative à une position d'équilibre (angle)



Exemple 1 : Pendule pesant sans amortissement

- Pendule de masse m, suspendu en O et de longueur ℓ
- $\theta(t)$: position relative à une position d'équilibre (angle)



Énergie totale du système :

$$E = \frac{1}{2}\, m\, \ell^2 (\theta')^2 + mg\ell\,(1 - \cos\theta)$$

Mouvement du pendule gouverné par la **loi fondamentale de la dynamique**

$$E'(t) = 0$$

Mouvement du pendule gouverné par la **loi fondamentale de la dynamique**

$$E'(t) = 0$$

Donc

$$E'(t) = m\,\ell^2\theta'\theta'' + mg\ell\,\theta'\sin\theta = 0.$$

Mouvement du pendule gouverné par la **loi fondamentale de la dynamique**

$$E'(t) = 0$$

Donc

$$E'(t) = m\,\ell^2\theta'\theta'' + mg\ell\,\theta'\sin\theta = 0.$$

D'où l'équation différentielle d'ordre 2 :

$$\begin{cases} \theta''(t) = -\dfrac{g}{\ell}\sin\theta(t), \quad g > 0, \\ \theta(0) = \theta_0, \quad \theta'(0) = 0 \quad \text{(par exemple)} \end{cases}$$

Remarque

Si on considère des déplacements petits du pendule, on peut écrire

$$\sin\theta(t) \approx \theta(t)$$

D'où l'équation différentielle linéaire :

$$\begin{cases} \theta''(t) = -\dfrac{g}{\ell}\theta(t) \\ \theta(0) = \theta_0, \quad \theta'(0) = 0 \end{cases}$$

La solution de cette équation est donnée par

$$\theta(t) = \theta_0 \ \cos\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t.$$

Pendule pesant non amorti : transformation

$\theta(t)$ est solution du problème différentiel :

$$\begin{cases} \theta''(t) = -\omega^2 \sin \theta(t) \\ \theta(0) = \theta_0, \\ \theta'(0) = 0 \qquad \text{par exemple} \end{cases}$$

où $\omega^2 = \dfrac{g}{\ell}$.

Posons : $x(t) = \theta(t)$, $y(t) = \theta'(t)$ et $\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

On a alors

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

Pendule pesant non amorti : transformation

$\theta(t)$ est solution du problème différentiel :

$$\begin{cases} \theta''(t) = -\omega^2 \sin\theta(t) \\ \theta(0) = \theta_0, \\ \theta'(0) = 0 \qquad \text{par exemple} \end{cases}$$

où $\omega^2 = \dfrac{g}{\ell}$.

Posons : $x(t) = \theta(t)$, $y(t) = \theta'(t)$ et $\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

On a alors

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta'(t) \\ \theta''(t) \end{pmatrix}$$

POLYTECH CLERMONT-FERRAND

Pendule pesant non amorti : transformation

$\theta(t)$ est solution du problème différentiel :

$$\begin{cases} \theta''(t) = -\omega^2 \sin \theta(t) \\ \theta(0) = \theta_0, \\ \theta'(0) = 0 \qquad \text{par exemple} \end{cases}$$

où $\omega^2 = \dfrac{g}{\ell}$.

Posons : $x(t) = \theta(t)$, $y(t) = \theta'(t)$ et $\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

On a alors

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta'(t) \\ \theta''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta'(t) \\ -\omega^2 \sin \theta(t) \end{pmatrix}$$

Pendule pesant non amorti : transformation

$\theta(t)$ est solution du problème différentiel :

$$\begin{cases} \theta''(t) = -\omega^2 \sin\theta(t) \\ \theta(0) = \theta_0, \\ \theta'(0) = 0 \qquad \text{par exemple} \end{cases}$$

où $\omega^2 = \dfrac{g}{\ell}$.

Posons : $x(t) = \theta(t)$, $y(t) = \theta'(t)$ et $\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

On a alors

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta'(t) \\ \theta''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta'(t) \\ -\omega^2 \sin\theta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ -\omega^2 \sin x(t) \end{pmatrix}.$$

POLYTECH CLERMONT-FERRAND

$y(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix}$ est solution du problème différentiel :

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), t) \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

avec

$$\mathbf{f}(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, t) = \begin{pmatrix} y \\ -\omega^2 \sin(x) \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Les équations différentielles apparaîssent naturellement dans différents domaines des sciences et des sciences sociales. Elles décrivent l'évolution de phénomènes dépendant du temps.

Formalisme général

- Les équations différentielles apparaîssent naturellement dans différents domaines des sciences et des sciences sociales. Elles décrivent l'évolution de phénomènes dépendant du temps.
- Une équation différentielle d'ordre 1 est de la forme :

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), t)$$

où $\mathbf{f} : \mathbb{R}^d \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$ est continue.

Formalisme général

- Les équations différentielles apparaîssent naturellement dans différents domaines des sciences et des sciences sociales. Elles décrivent l'évolution de phénomènes dépendant du temps.
- Une équation différentielle d'ordre 1 est de la forme :

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), t)$$

où $\mathbf{f} : \mathbb{R}^d \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$ est continue.

- Le problème avec condition initiale

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), t) \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

est appelé **problème de Cauchy**.

Exemple 2 : Modèle malthusien de croissance de population

$P(t)$: Nombre d'individus appartenant à une population donnée à l'instant t.

Qu'est-ce qui entraîne des variations de la population $P(t)$?

Exemple 2 : Modèle malthusien de croissance de population

$P(t)$: Nombre d'individus appartenant à une population donnée à l'instant t.

Qu'est-ce qui entraîne des variations de la population $P(t)$?

- Les naissances

  $\rightarrow$ α : taux de natalité

  $\rightarrow$ Nombre de naissances à l'instant t : $\alpha P(t)$

Exemple 2 : Modèle malthusien de croissance de population

$P(t)$: Nombre d'individus appartenant à une population donnée à l'instant t.

Qu'est-ce qui entraîne des variations de la population $P(t)$?

- Les naissances

  $\rightarrow$ α : taux de natalité

  $\rightarrow$ Nombre de naissances à l'instant t : $\alpha P(t)$

- Les décès

  $\rightarrow$ β : taux de mortalité

  $\rightarrow$ Nombre de décès à l'instant t : $\beta P(t)$

POLYTECH CLERMONT-FERRAND

$P(t)$ est définie comme solution du problème différentiel :

$$\begin{cases} P'(t) = \alpha P(t) - \beta P(t) = (\alpha - \beta) P(t) \\ P(0) = P_0 \qquad\qquad \text{(population à l'instant initial)} \end{cases}$$

$P(t)$ est définie comme solution du problème différentiel :

$$\begin{cases} P'(t) = \alpha P(t) - \beta P(t) = (\alpha - \beta)P(t) \\ P(0) = P_0 \qquad \text{(population à l'instant initial)} \end{cases}$$

Solution :

$$\boxed{P(t) = P_0 \exp((\alpha - \beta)t)}$$

POLYTECH CLERMONT-FERRAND

Ajout d'un terme de compétition entre les individus

Modèle dit “de croissance logistique”

Ajout d'un terme de compétition entre les individus

$$\begin{cases} P'(t) = aP(t) - bP(t)^2 \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

Modèle dit “de croissance logistique”

Ajout d'un terme de compétition entre les individus

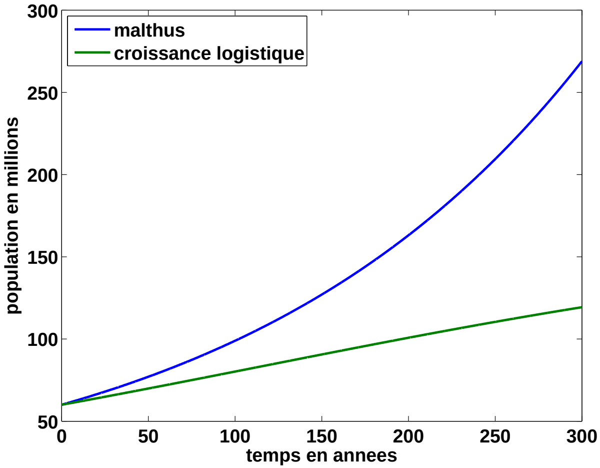
$$\begin{cases} P'(t) = aP(t) - bP(t)^2 \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Équation différentielle non linéaire

Solution :

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-at}}.$$

Comparaison des 2 modèles de population



Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Théorème

On considère le problème aux valeurs initiales :

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), t) \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^d \end{cases} \qquad (*)$$

où $\mathbf{f} : (\mathbf{y}, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, T] \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{y}, t) \in \mathbb{R}^d$. On suppose que :

- $\mathbf{f}$ est continue sur $\mathbb{R}^d \times I$
- $\mathbf{f}$ est lipschitzienne en $\mathbf{y}$: il existe $L > 0$ telle que

$$\forall\ t \in [0, T],\ \forall\ \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^d}(\mathbf{y}_0) \quad \|\mathbf{f}(\mathbf{y}_1, t) - \mathbf{f}(\mathbf{y}_2, t)\| \le L\,\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|.$$

  où $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^d}(\mathbf{y}_0)$ est un voisinage de $\mathbf{y}_0$.

Alors, le problème $(*)$ possède une solution unique.

Approximation numérique

On se restreint désormais à une équation différentielle ($d = 1$).

Approximation numérique

On se restreint désormais à une équation différentielle ($d = 1$).

On subdivise l'intervalle $[0, T]$ en N sous-intervalles $]t_n, t_{n+1}]$, avec $n = 0, 1, \ldots, N-1$

Approximation numérique

On se restreint désormais à une équation différentielle ($d = 1$).

On subdivise l'intervalle $[0, T]$ en N sous-intervalles $]t_n, t_{n+1}]$, avec $n = 0, 1, \dots, N-1$

On choisit, pour simplifier, une subdivision uniforme : $t_n = nh$.

Approximation numérique

On se restreint désormais à une équation différentielle ($d = 1$).

On subdivise l'intervalle $[0, T]$ en N sous-intervalles $]t_n, t_{n+1}]$, avec $n = 0, 1, \dots, N-1$

On choisit, pour simplifier, une subdivision uniforme : $t_n = nh$.
On appelle h pas de temps

On se restreint désormais à une équation différentielle ($d = 1$).

On subdivise l'intervalle $[0, T]$ en N sous-intervalles $]t_n, t_{n+1}]$, avec $n = 0, 1, \dots, N-1$

On choisit, pour simplifier, une subdivision uniforme : $t_n = nh$.
On appelle h pas de temps

On veut construire une méthode numérique permettant de définir des approximations y_n de $y(t_n)$ (Schémas numériques).

Remarque

En intégrant l'équation différentielle $y'(t) = f(y(t), t)$ entre $t = t_n$ et $t = t_{n+1}$, on obtient

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y(t), t)\, dt$$

Lien avec l'intégration numérique

Remarque

En intégrant l'équation différentielle $y'(t) = f(y(t), t)$ entre $t = t_n$ et $t = t_{n+1}$, on obtient

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y(t), t)\, dt$$

On peut approcher cette intégrale par la méthode des rectangles à gauche :

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) \approx h\, f(y(t_n), t_n)$$

Lien avec l'intégration numérique

Remarque

En intégrant l'équation différentielle $y'(t) = f(y(t), t)$ entre $t = t_n$ et $t = t_{n+1}$, on obtient

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y(t), t)\, dt$$

On peut approcher cette intégrale par la méthode des rectangles à gauche :

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) \approx h\, f(y(t_n), t_n)$$

On peut ainsi définir le schéma

$$y_{n+1} = y_n + h\, f(y_n, t_n) \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

POLYTECH CLERMONT-FERRAND

Schémas d'Euler

On veut approcher la dérivée $y'(t)$ en $t = t_n$. On peut utiliser pour cela une méthode de dérivation numérique :

On veut approcher la dérivée $y'(t)$ en $t = t_n$. On peut utiliser pour cela une méthode de dérivation numérique :

1$^{\text{ère}}$ méthode :

$$y'(t_n) \approx \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h}$$

On veut approcher la dérivée $y'(t)$ en $t = t_n$. On peut utiliser pour cela une méthode de dérivation numérique :

1ère méthode :

$$y'(t_n) \approx \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h}$$

D'où le schéma d'Euler progressif :

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(y_n, t_n) \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

2$^{\text{ème}}$ méthode :

$$y'(t_{n+1}) \approx \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h}$$

D'où le schéma d'Euler rétrograde :

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(y_{n+1}, t_{n+1}) \qquad n = 0, 1, \dots N-1$$

Le schéma d'Euler progressif : Consistance

On appelle Erreur de troncature l'expression :

$$\varepsilon_h^n = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - f(y(t_n), t_n).$$

Le schéma d'Euler progressif : Consistance

On appelle Erreur de troncature l'expression :

$$\varepsilon_h^n = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - f(y(t_n), t_n).$$

On a par la formule de Taylor :

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) + h\, y'(t_n) + \mathcal{O}(h^2) \\ &= y(t_n) + h\, f(y(t_n), t_n) + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

POLYTECH CLERMONT-FERRAND

Le schéma d'Euler progressif : Consistance

On appelle Erreur de troncature l'expression :

$$\varepsilon_h^n = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - f(y(t_n), t_n).$$

On a par la formule de Taylor :

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) + h\, y'(t_n) + \mathcal{O}(h^2) \\ &= y(t_n) + h\, f(y(t_n), t_n) + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

Donc

$$\varepsilon_h^n = \mathcal{O}(h)$$

On dit que le schéma d'Euler progressif est consistant.

Le schéma d'Euler progressif : Convergence

Soit $e_n = y(t_n) - y_n$ (Erreur à l'instant $t = t_n$).

Le schéma d'Euler progressif : Convergence

Soit $e_n = y(t_n) - y_n$ (Erreur à l'instant $t = t_n$).
On a

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) - h\,f(y(t_n), t_n) = h\,\varepsilon_h^n$$
$$y_{n+1} - y_n - h\,f(y_n, t_n) = 0$$

Le schéma d'Euler progressif : Convergence

Soit $e_n = y(t_n) - y_n$ (Erreur à l'instant $t = t_n$).
On a

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) - h\,f(y(t_n), t_n) = h\,\varepsilon_h^n$$
$$y_{n+1} - y_n - h\,f(y_n, t_n) = 0$$

En soustrayant, on obtient

$$e_{n+1} = e_n + h\left(f(y(t_n), t_n) - f(y_n, t_n)\right) + h\,\varepsilon_h^n$$

Soit $e_n = y(t_n) - y_n$ (Erreur à l'instant $t = t_n$).
On a

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) - h\,f(y(t_n), t_n) = h\,\varepsilon_h^n$$
$$y_{n+1} - y_n - h\,f(y_n, t_n) = 0$$

En soustrayant, on obtient

$$e_{n+1} = e_n + h\,\big(f(y(t_n), t_n) - f(y_n, t_n)\big) + h\,\varepsilon_h^n$$

Donc

$$|e_{n+1}| \leq |e_n| + h\,\big|f(y(t_n), t_n) - f(y_n, t_n)\big| + h\,|\varepsilon_h^n|$$

POLYTECH CLERMONT-FERRAND

Le schéma d'Euler progressif : Convergence

Soit $e_n = y(t_n) - y_n$ (Erreur à l'instant $t = t_n$).
On a

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) - y(t_n) - h\,f(y(t_n), t_n) &= h\,\varepsilon_h^n \\ y_{n+1} - y_n - h\,f(y_n, t_n) &= 0 \end{aligned}$$

En soustrayant, on obtient

$$e_{n+1} = e_n + h\left(f(y(t_n), t_n) - f(y_n, t_n)\right) + h\,\varepsilon_h^n$$

Donc

$$\begin{aligned} |e_{n+1}| &\leq |e_n| + h\left|f(y(t_n), t_n) - f(y_n, t_n)\right| + h\,|\varepsilon_h^n| \\ &\leq |e_n| + hL\left|y(t_n) - y_n\right| + Ch^2 \end{aligned}$$

Soit $e_n = y(t_n) - y_n$ (Erreur à l'instant $t = t_n$).
On a

$$
\begin{aligned}
y(t_{n+1}) - y(t_n) - h\,f(y(t_n), t_n) &= h\,\varepsilon_h^n \\
y_{n+1} - y_n - h\,f(y_n, t_n) &= 0
\end{aligned}
$$

En soustrayant, on obtient

$$
e_{n+1} = e_n + h\left(f(y(t_n), t_n) - f(y_n, t_n)\right) + h\,\varepsilon_h^n
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
|e_{n+1}| &\leq |e_n| + h\left|f(y(t_n), t_n) - f(y_n, t_n)\right| + h\,|\varepsilon_h^n| \\
&\leq |e_n| + hL\left|y(t_n) - y_n\right| + Ch^2 \\
&= (1 + hL)\,|e_n| + Ch^2
\end{aligned}
$$

On montre alors que

$$|e_n| \leq C(|e_0| + h) = Ch$$

On montre alors que

$$|e_n| \leq C(|e_0| + h) = Ch$$

Théorème

On suppose que la solution $y(t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$. Alors, il existe une constante C indépendante de h telle que

$$|y(t_n) - y_n| \leq Ch \qquad n = 1, \ldots, N$$

On montre alors que

$$|e_n| \leq C(|e_0| + h) = Ch$$

Théorème

On suppose que la solution $y(t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$. Alors, il existe une constante C indépendante de h telle que

$$|y(t_n) - y_n| \leq Ch \qquad n = 1, \dots, N$$

On dit que ce schéma est d'ordre 1.

POLYTECH CLERMONT-FERRAND

Le schéma d'Euler rétrograde

Il sécrit :

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(y_{n+1}, t_{n+1}) \qquad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Le schéma d'Euler rétrograde

Il sécrit :

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(y_{n+1}, t_{n+1}) \qquad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Notons que ce schéma est implicite :

Le schéma d'Euler rétrograde

Il sécrit :

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(y_{n+1}, t_{n+1}) \qquad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Notons que ce schéma est implicite : Étant donné y_n, on calcule y_{n+1} en résolvant une équation algébrique non-linéaire : $g(x) = 0$ où

$$g(x) = x - y_n - h\,f(x, t_{n+1}).$$

Le schéma d'Euler rétrograde

Il sécrit :

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(y_{n+1}, t_{n+1}) \qquad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Notons que ce schéma est implicite : Étant donné y_n, on calcule y_{n+1} en résolvant une équation algébrique non-linéaire : $g(x) = 0$ où

$$g(x) = x - y_n - h\,f(x, t_{n+1}).$$

Sous les mêmes hypothèses que pour le schéma d'Euler progressif, on montre que ce schéma est d'ordre 1.

Le schéma de Crank-Nicolson

Il sécrit :

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \frac{1}{2}\left(f(y_n, t_n) + f(y_{n+1}, t_{n+1})\right) \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

Le schéma de Crank-Nicolson

Il sécrit :

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \frac{1}{2}\big(f(y_n, t_n) + f(y_{n+1}, t_{n+1})\big) \qquad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Évaluons l'erreur de troncature de ce schéma :

$$\varepsilon_h^n := \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - \frac{1}{2}\big(f(y(t_n), t_n) + f(y(t_{n+1}), t_{n+1})\big)$$

Il sécrit :

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{h} = \frac{1}{2}\left(f(y_n,t_n)+f(y_{n+1},t_{n+1})\right) \qquad n=0,1,\dots,N-1$$

Évaluons l'erreur de troncature de ce schéma :

$$\varepsilon_h^n := \frac{y(t_{n+1})-y(t_n)}{h} - \frac{1}{2}\left(f(y(t_n),t_n)+f(y(t_{n+1}),t_{n+1})\right)$$

La formule de Taylor donne :

$$\begin{aligned}
y(t_{n+1}) &= y\big(t_n+\frac{h}{2}\big) + \frac{h}{2}y'\big(t_n+\frac{h}{2}\big) + \frac{h^2}{8}y''\big(t_n+\frac{h}{2}\big) + \mathcal{O}(h^3) \\
y(t_n) &= y\big(t_n+\frac{h}{2}\big) - \frac{h}{2}y'\big(t_n+\frac{h}{2}\big) + \frac{h^2}{8}y''\big(t_n+\frac{h}{2}\big) + \mathcal{O}(h^3)
\end{aligned}$$

Il sécrit :

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \frac{1}{2}\big(f(y_n, t_n) + f(y_{n+1}, t_{n+1})\big) \qquad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Évaluons l'erreur de troncature de ce schéma :

$$\varepsilon_h^n := \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - \frac{1}{2}\big(f(y(t_n), t_n) + f(y(t_{n+1}), t_{n+1})\big)$$

La formule de Taylor donne :

$$y(t_{n+1}) = y\big(t_n + \frac{h}{2}\big) + \frac{h}{2} y'\big(t_n + \frac{h}{2}\big) + \frac{h^2}{8} y''\big(t_n + \frac{h}{2}\big) + \mathcal{O}(h^3)$$
$$y(t_n) = y\big(t_n + \frac{h}{2}\big) - \frac{h}{2} y'\big(t_n + \frac{h}{2}\big) + \frac{h^2}{8} y''\big(t_n + \frac{h}{2}\big) + \mathcal{O}(h^3)$$

En soustrayant, on obtient

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = h\, y'\big(t_n + \frac{h}{2}\big) + \mathcal{O}(h^3)$$

Donc

$$\frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} = y'\left(t_n + \frac{h}{2}\right) + \mathcal{O}(h^2)$$

Donc

$$\frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} = y'\left(t_n + \frac{h}{2}\right) + \mathcal{O}(h^2)$$

De même

$$\frac{1}{2}\big(f(y(t_n), t_n) + f(y(t_{n+1}), t_{n+1})\big) = f\left(y(t_n + \frac{h}{2}), t_n + \frac{h}{2}\right) + \mathcal{O}(h^2).$$

Donc

$$\frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} = y'(t_n + \frac{h}{2}) + \mathcal{O}(h^2)$$

De même

$$\frac{1}{2}\big(f(y(t_n), t_n) + f(y(t_{n+1}), t_{n+1})\big) = f\Big(y(t_n + \frac{h}{2}), t_n + \frac{h}{2}\Big) + \mathcal{O}(h^2).$$

Ainsi

$$\epsilon_h^n = \mathcal{O}(h^2)$$

Donc

$$\frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} = y'(t_n + \frac{h}{2}) + \mathcal{O}(h^2)$$

De même

$$\frac{1}{2}\big(f(y(t_n), t_n) + f(y(t_{n+1}), t_{n+1})\big) = f\Big(y(t_n + \frac{h}{2}), t_n + \frac{h}{2}\Big) + \mathcal{O}(h^2).$$

Ainsi

$$\epsilon_h^n = \mathcal{O}(h^2)$$

On montre alors que le schéma de Crank-Nicolson est d'ordre 2 :

$$|y(t_n) - y_n| \leq Ch^2$$

Méthodes basées sur la formule de Taylor

Supposons la fonction f dérivable. On a par la formule de Taylor :

$$
\begin{aligned}
y(t_{n+1}) &= y(t_n + h) \\
&= y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) + \cdots + \frac{1}{k!} h^k y^{(k)}(t_n) + \frac{1}{(k+1)!} h^{k+1} y^{(k+1)}(\xi_n)
\end{aligned}
$$

où $\xi_n \in [t_n, t_{n+1}]$

Méthodes basées sur la formule de Taylor

Supposons la fonction f dérivable. On a par la formule de Taylor :

$$
\begin{aligned}
y(t_{n+1}) &= y(t_n + h) \\
&= y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(t_n) + \cdots + \frac{1}{k!}h^k y^{(k)}(t_n) + \frac{1}{(k+1)!}h^{k+1}y^{(k+1)}(\xi_n)
\end{aligned}
$$

où $\xi_n \in [t_n, t_{n+1}]$

Donc si $h \ll 1$:

$$
y(t_{n+1}) \approx y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(t_n) + \cdots + \frac{1}{k!}h^k y^{(k)}(t_n).
$$

Méthodes basées sur la formule de Taylor

Supposons la fonction f dérivable. On a par la formule de Taylor :

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n + h) \\ &= y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(t_n) + \cdots + \frac{1}{k!}h^k y^{(k)}(t_n) + \frac{1}{(k+1)!}h^{k+1}y^{(k+1)}(\xi_n) \end{aligned}$$

où $\xi_n \in [t_n, t_{n+1}]$

Donc si $h \ll 1$:

$$y(t_{n+1}) \approx y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(t_n) + \cdots + \frac{1}{k!}h^k y^{(k)}(t_n).$$

Pour $k = 1$:

$$y(t_{n+1}) \approx y(t_n) + hy'(t_n) = y(t_n) + hf(y(t_n), t_n)$$

Pour $k = 2$:

$$y(t_{n+1}) \approx y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) = y(t_n) + hf(y(t_n), t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n)$$

Pour $k = 2$:

$$y(t_{n+1}) \approx y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) = y(t_n) + hf(y(t_n), t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n)$$

Pour évaluer $y''(t_n)$, on dérive l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} y''(t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(y(t), t) + \frac{\partial f}{\partial y}(y(t), t)\, y'(t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(y(t), t) + \frac{\partial f}{\partial y}(y(t), t)\, f(y(t), t) \end{aligned}$$

Pour $k = 2$:

$$y(t_{n+1}) \approx y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) = y(t_n) + hf(y(t_n), t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n)$$

Pour évaluer $y''(t_n)$, on dérive l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} y''(t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(y(t), t) + \frac{\partial f}{\partial y}(y(t), t)\, y'(t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(y(t), t) + \frac{\partial f}{\partial y}(y(t), t)\, f(y(t), t) \end{aligned}$$

D'où le schéma :

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n, t_n) + \frac{h^2}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial t}(y_n, t_n) + \frac{\partial f}{\partial y}(y_n, t_n)\, f(y_n, t_n)\Big)$$

On montre que ce schéma est d'ordre 2

Une méthode de Runge-Kutta d'ordre 2

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + hf(y_n, t_n)$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\big(f(y_n, t_n) + f(\tilde{y}_{n+1}, t_{n+1})\big)$$

Une méthode de Runge-Kutta d'ordre 2

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + hf(y_n, t_n)$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\big(f(y_n, t_n) + f(\tilde{y}_{n+1}, t_{n+1})\big)$$

Cette méthode est aussi appelée Schéma de Heun.

Une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

$$y_{n,1} = y_n + \frac{h}{2} f(y_n, t_n)$$
$$y_{n,2} = y_n + \frac{h}{2} f(y_{n,1}, t_n + \frac{h}{2})$$
$$y_{n,3} = y_n + h\, f(y_{n,2}, t_n + \frac{h}{2})$$
$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{1}{6} f(y_n, t_n) + \frac{1}{3} f(y_{n,1}, t_n + \frac{h}{2}) + \frac{1}{3} f(y_{n,2}, t_n + \frac{h}{2}) + \frac{1}{6} f(y_{n,3}, t_{n+1})\right)$$

Une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

$$y_{n,1} = y_n + \frac{h}{2} f(y_n, t_n)$$
$$y_{n,2} = y_n + \frac{h}{2} f(y_{n,1}, t_n + \frac{h}{2})$$
$$y_{n,3} = y_n + h\, f(y_{n,2}, t_n + \frac{h}{2})$$
$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{1}{6} f(y_n, t_n) + \frac{1}{3} f(y_{n,1}, t_n + \frac{h}{2}) + \frac{1}{3} f(y_{n,2}, t_n + \frac{h}{2}) + \frac{1}{6} f(y_{n,3}, t_{n+1})\right)$$

On montre que cette méthode est d'ordre 4.

Équations différentielles d'ordre 2

$$\begin{cases} y''(t) = f(y(t), y'(t), t) & 0 < t \le T \\ y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} y''(t) = f(y(t), y'(t), t) & 0 < t \leq T \\ y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$$

1ère approche :

On approche les dérivées première et seconde par des quotients différentiels. On a le schéma

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} = f\left(y_n, \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h}, t_n\right)$$

2[e] approche :

On se ramène à un système différentiel du premier ordre.
Soit la nouvelle inconnue $z(t) = y'(t)$.
On obtient :

$$\begin{cases} z'(t) = f(y(t), z(t), t), & 0 < t \leq T \\ y'(t) = z(t), & 0 < t \leq T \\ y(0) = a \\ z(0) = b \end{cases}$$