

INTRODUCTION AUX GROUPES QUANTIQUES

Julien Bichon

Laboratoire de Mathématiques
Univeristé Blaise Pascal, Clermont-Ferrand II
Campus des Cézeaux
63177 Aubière Cedex

E-mail : Julien.Bichon@math.univ-bpclermont.fr

Introduction

Ce texte est une introduction aux groupes quantiques, des objets qui généralisent naturellement les groupes. Il est issu d'un cours de master 2 d'une trentaine d'heures donné à l'université Blaise Pascal en 2008.

L'objectif principal est de décrire les représentations du groupe quantique $SL_q(2)$. Les prérequis sont très modestes, et les outils techniques nécessaires sont introduits dans des chapitres préliminaires.

Table des matières

1	Prélude : la dualité de Pontryagin	4
2	Catégories et foncteurs	7
2.1	Catégories	7
2.2	Foncteurs	10
2.3	Dualité	13
2.4	Algèbres diagonales et ensembles finis	14
3	Produit tensoriel	18
3.1	Applications bilinéaires et produit tensoriel	18
3.2	Produit tensoriel d'applications linéaires	21
3.3	Produit tensoriel d'algèbres	25
3.4	Vers la notion d'algèbre de Hopf	26
4	Algèbres définies par générateurs et relations	28
4.1	L'algèbre d'un monoïde	28
4.2	Présentations par générateurs et relations	30
4.3	Le plan quantique et le q -calcul	33
5	Algèbres de Hopf	35
5.1	Algèbres et cogèbres	35
5.2	Bigèbres	40
5.3	Antipode et algèbres de Hopf	44
5.4	Quelques exemples	47
5.5	Dualité sur les algèbres de Hopf	49
6	Groupes algébriques et algèbres de Hopf	53
6.1	Ensembles algébriques affines	53
6.2	Groupes algébriques affines	59
6.3	Algèbres de Hopf comatriciennes	61
6.4	Le groupe quantique SL_2	63

7	Modules et comodules	65
7.1	Modules sur une algèbre	65
7.2	Modules sur une algèbre de Hopf	66
7.3	Comodules sur une cogèbre	67
7.4	Comodules sur une algèbre de Hopf	73
7.5	Comodules sur une bigèbre de type fini	74
7.6	Représentations de groupes algébriques et comodules	76
7.7	Une des origines du groupe quantique SL_2	78
8	Cogèbres et algèbres de Hopf cosemisimples	80
8.1	Comodules semisimples	80
8.2	Cogèbres cosemisimples	84
8.3	Algèbres de Hopf compactes	85
9	Les représentations du groupe quantique $SL_q(2)$	91
9.1	Action sur le plan quantique	91
9.2	Classification des représentations irréductibles et formules de Clebsch-Gordan	93
10	Compléments sur les algèbres de Hopf cosemisimples	97
10.1	Structure des cogèbres cosemisimples	97
10.2	Mesure de Haar et relations d'orthogonalité	97
10.3	Caractères	97
10.4	Retour sur les algèbres de Hopf compactes	97

Chapitre 1

Prélude : la dualité de Pontryagin pour les groupes abéliens finis

Si V est un \mathbb{C} -espace vectoriel, on lui associe classiquement son dual $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$. On a une application linéaire injective

$$\begin{aligned} i_V : V &\longrightarrow V^{**} \\ v &\longmapsto (\phi \mapsto \phi(v), \forall \phi \in V^*) \end{aligned}$$

qui est un isomorphisme lorsque V est de dimension finie.

On obtient donc une “dualité” sur les espaces vectoriels de dimension finie, qui est connue pour rendre bien des services en algèbre linéaire.

On veut étendre cette situation au cas des groupes arbitraires. Soit G un groupe (multiplicatif). Le candidat naturel pour être le dual de G est le groupe

$$\widehat{G} = \text{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$$

où \mathbb{C}^* est le groupe multiplicatif des nombres complexes non nul. La loi de groupe de \widehat{G} est définie par

$$\begin{aligned} \widehat{G} \times \widehat{G} &\longrightarrow \widehat{G} \\ (\phi, \psi) &\longmapsto \phi \cdot \psi, \quad \phi \cdot \psi(x) = \phi(x)\psi(x), \quad \forall x \in G, \end{aligned}$$

Là encore on a un morphisme de groupe naturel

$$\begin{aligned} i_G : G &\longrightarrow \widehat{\widehat{G}} \\ x &\longmapsto (\phi \mapsto \phi(x), \forall \phi \in \widehat{G}) \end{aligned}$$

Le groupe \widehat{G} étant toujours abélien, on n’a aucun espoir que i_G soit un isomorphisme pour les groupes non abéliens.

Par contre, pour les groupes abéliens finis, on a le résultat suivant, qui est l’analogie de la dualité pour les espaces vectoriels de dimension finie.

Théorème 1.0.1 (Dualité de Pontryagin pour les groupes abéliens finis) *Soit G un groupe abélien fini. Le morphisme de groupes précédent*

$$i_G : G \longrightarrow \widehat{\widehat{G}}$$

est un isomorphisme.

La preuve est divisée en plusieurs étapes.

Étape 1. Soit G un groupe cyclique d'ordre n . Alors $G \cong \widehat{G}$.

En effet : Soit $x \in G$ un générateur de $G : G = \langle x \rangle$. Pour toute racine n -ième de l'unité $\omega \in \mu_n$, on a un unique morphisme de groupes $\phi_\omega : G \longrightarrow \mu_n$ tel que $\phi_\omega(x) = \omega$. Cela donne une application

$$\begin{aligned} \mu_n &\longrightarrow \widehat{G} \\ \omega &\longmapsto \phi_\omega \end{aligned}$$

qui est un morphisme de groupes, injectif car x engendre G . Réciproquement, si $\phi \in \widehat{G}$, on a $\phi(x)^n = \phi(x^n) = \phi(1) = 1$, donc $\phi(x) \in \mu_n$. Puisque x engendre G , on en déduit que $\phi = \phi_\omega$ pour $\omega = \phi(x)$. Ainsi on a un isomorphisme $\mu_n \cong \widehat{G}$, et μ_n étant lui même un groupe cyclique (engendré par exemple par $e^{\frac{2i\pi}{n}}$), on a bien l'isomorphisme annoncé.

Étape 2. Soient G et H des groupes. Alors $\widehat{G \times H} \cong \widehat{G} \times \widehat{H}$.

En effet : on vérifie que l'application

$$\begin{aligned} \theta : \widehat{G \times H} &\longrightarrow \widehat{G} \times \widehat{H} \\ \phi &\longmapsto (\phi \circ i_1, \phi \circ i_2), \end{aligned}$$

où $i_1 : G \rightarrow G \times H, g \mapsto (g, 1)$ et $i_2 : H \rightarrow G \times H, h \mapsto (1, h)$, désignent les injections respectives, est un isomorphisme de groupes.

Étape 3. Soit G un groupe fini abélien. Les groupes G et \widehat{G} sont isomorphes.

En effet : le théorème de structure des groupes abéliens finis affirme en particulier que G est isomorphe à un produit de groupes cycliques. Il suffit donc de combiner les étapes 1 et 2 pour avoir le résultat.

Étape 4. Soit $g \in G$ un groupe abélien fini. Pour $g \in G \setminus \{1\}$, il existe $\phi \in \widehat{G}$ tel que $\phi(g) \neq 1$.

En effet : supposons dans un premier temps G cyclique d'ordre $n : G = \langle x \rangle$. On a $g = x^k$, pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Si ω est une racine primitive n -ième de l'unité, on a alors (notations de la preuve de l'étape 1) $\phi_\omega(g) = \phi_\omega(x)^k = \omega^k \neq 1$.

Si G n'est pas cyclique, il est isomorphe à un produit de groupes cycliques, et le cas cyclique et l'étape 2 donnent le résultat.

On peut maintenant démontrer le théorème. L'étape 4 assure que le morphisme i_G est injectif, et puisque par l'étape 3 on a $G = |\widehat{G}| = |\widehat{\widehat{G}}|$, la finitude de G assure que i_G est un isomorphisme. \square

Pour construire une bonne dualité pour les groupes (finis), il faudra sortir de la catégorie des groupes et considérer des objets algébriques plus généraux : les *algèbres de Hopf*, qui correspondent exactement à ce que l'on appelle les *groupes quantiques*.

On précisera d'abord ce que l'on entend exactement par "dualité", ce qui mène dans le chapitre 2 à introduire le langage des catégories et foncteurs. Le chapitre 3 est consacré au produit tensoriel, une construction algébrique primordiale dans notre contexte. Le chapitre 4 est consacré aux présentations d'algèbres par générateurs et relations.

Commentaires

On peut adapter les constructions de ce paragraphe pour obtenir une dualité (toujours appelée dualité de Pontryagin) sur les groupes abéliens localement compacts : voir par exemple [11].

Chapitre 2

Catégories et foncteurs

Ce chapitre est une brève introduction au langage des catégories et des foncteurs, utile dans toutes les branches des mathématiques. On introduit seulement les notions minimales pour nos besoins : formuler la non-existence d'une dualité sur les groupes d'une part, et formaliser la correspondance entre algèbres et ensembles (espaces).

2.1 Catégories

Définition 2.1.1 Une *catégorie* \mathcal{C} est la donnée

- a) d'une classe $\text{ob}(\mathcal{C})$ d'objets de \mathcal{C} ,
- b) pour tout couple (X, Y) d'objets de \mathcal{C} d'un ensemble noté $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ dont les éléments sont appelés morphismes de X dans Y de \mathcal{C} (avec la notation $f : X \rightarrow Y$ pour $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$) tels que
 - pour tout triplet (X, Y, Z) d'objets de \mathcal{C} , on a une application

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ (f, g) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

appelée composition des morphismes, qui est associative ;

- pour tout objet X de \mathcal{C} , il existe un élément $1_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$, appelé identité de X (noté parfois aussi id_X), tel que $\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, on a $f \circ 1_X = f$ et $\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$, on a $1_X \circ f = f$.

Exemples. (a) **Ens** : la catégorie des ensembles. Les morphismes sont les applications, la composition est la composition des applications.

(b) **Grp** : la catégorie des groupes. Les morphismes sont les morphismes de groupes.

(c) **Top** : la catégorie des espaces topologiques. Les morphismes sont les applications continues.

(d) Soit G un groupe. On construit une catégorie $\mathcal{C}(G)$ de la manière suivante : $\text{ob}(\mathcal{C}(G)) = \{*\}$ et $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(*, *) = G$. La composition est le produit dans G .

Remarque. On désigne souvent une catégorie par le nom de ses objets. En fait l'essentiel de l'information est contenue dans les morphismes (voir le dernier exemple).

Définition 2.1.2 Une catégorie \mathcal{C} est dite **petite** si $\text{ob}(\mathcal{C})$ est un ensemble.

Exemple. Ens n'est pas une petite catégorie.

Définition 2.1.3 Soit \mathcal{C} une catégorie. On appelle **catégorie opposée** de \mathcal{C} la catégorie, notée \mathcal{C}^{op} , dont les objets sont les mêmes que ceux de \mathcal{C} et telle que si X, Y sont des objets de \mathcal{C}^{op} , on a $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$.

Définition 2.1.4 Soit \mathcal{C} une catégorie. Une **sous-catégorie** \mathcal{C}' de \mathcal{C} est la donnée d'une sous-classe $\text{ob}(\mathcal{C}')$ de $\text{ob}(\mathcal{C})$ d'objets de \mathcal{C}' , et pour tous objets X, Y de \mathcal{C}' d'un sous-ensemble $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y)$ de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, tels que

- si X est un objet de \mathcal{C}' , on a $1_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, X)$;
- si X, Y, Z sont des objets de \mathcal{C}' et si $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(Y, Z)$, on a $g \circ f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Z)$

Une sous-catégorie \mathcal{C}' de \mathcal{C} est dite **pleine** si pour tous objets X, Y de \mathcal{C}' , on a $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$

Une sous-catégorie est elle-même, pour la composition induite, une catégorie.

Exemples. (a) Soit k un corps commutatif. La catégorie $\text{Vect}_f(k)$ des k -espaces vectoriels de dimension finie est une sous-catégorie pleine de la catégorie des k -espaces vectoriels $\text{Vect}(k)$ (les morphismes sont les applications linéaires).

(b) Ab , la catégorie des groupes abéliens, est une sous-catégorie pleine de Grp .

Définition 2.1.5 Soit \mathcal{C} une catégorie et X un objet de \mathcal{C} . On dit que X est un **objet initial** (resp. **objet final**) de \mathcal{C} si pour tout objet A de \mathcal{C} l'ensemble $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A)$ (resp. $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$) est réduit à un élément.

Exemples. (a) Le groupe trivial à un élément est un objet initial et final de Grp .

(b) \mathbb{Z} est un objet initial dans Ann , la catégorie des anneaux, alors que l'anneau nul est un objet final.

Définition 2.1.6 Soient \mathcal{C} une catégorie et $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. On dit que f est un

(a) **monomorphisme** si $\forall g, h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$, on a

$$f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$$

(b) **épimorphisme** si $\forall g, h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$, on a

$$g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$$

(c) **isomorphisme** s'il existe $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ tel que $f \circ g = 1_Y$ et $g \circ f = 1_X$.

Exemples.(a) Dans Ens , Grp ou $\text{Vect}(k)$: monomorphisme = morphisme injectif, épimorphisme = morphisme surjectif, isomorphisme = morphisme bijectif = monomorphisme + épimorphisme.

(b) Un isomorphisme est un monomorphisme et un épimorphisme. La réciproque n'est pas vraie : dans Ann, l'inclusion $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ est un monomorphisme et un épimorphisme, mais pas un isomorphisme.

Parmi les assertions (a), la seule qui dont la preuve n'est pas facile est qu'un épimorphisme de groupes est nécessairement surjectif. Nous utiliserons ce résultat dans la suite, et nous en donnons donc une preuve.

Proposition 2.1.7 *Un épimorphisme dans la catégorie des groupes (resp. la catégorie des groupes finis) est surjectif.*

Preuve. Il faut montrer qu'un morphisme de groupes qui n'est pas surjectif n'est pas un épimorphisme, et donc il suffit de montrer que si $H \subsetneq G$ est un sous-groupe strict d'un groupe G , il existe un groupe K et des morphismes de groupes $\alpha, \beta : G \rightarrow K$ tels que $\alpha|_H = \beta|_H$ et $\alpha \neq \beta$.

Si H est un sous-groupe normal de G , on peut prendre $\alpha = \pi : G \rightarrow G/H$ la surjection canonique et β le morphisme trivial.

Si $[G : H] = 2$, le sous-groupe H est nécessairement normal, donc on peut supposer $[G : H] \geq 3$ et l'existence d'une permutation γ de $G/H = \{Hx, x \in G\}$ dont le seul point fixe est H . On va considérer le groupe symétrique de G , $K = S_G$, et le premier morphisme $\alpha : G \rightarrow S_G$ est obtenu en faisant agir G sur lui-même par multiplication : $\alpha(g)(x) = gx, \forall g, x \in G$. L'idée, pour construire $\beta : G \rightarrow S_G$, est de "perturber" α en utilisant γ . On procède ainsi.

Soit $\theta : G/H \rightarrow G$ une application telle que $\pi \circ \theta = \text{id}_{G/H}$ et $\theta(H) = 1$. Tout élément de G s'écrit de manière unique comme produit d'un élément de H et d'un élément de $\theta(G/H)$, car

$$\forall x \in G, x = x\theta(\pi(x))^{-1}\theta(\pi(x))$$

En effet, $x\theta(\pi(x))^{-1} \in H$ car $\pi(x) = \pi(\theta(\pi(x)))$, et si $h\theta(\pi(x)) = h'\theta(\pi(x'))$ pour $x, x' \in G$ et $h, h' \in H$, on a $\pi(x) = \pi(\theta(\pi(x))) = \pi(\theta(\pi(x'))) = \pi(x')$ et enfin $h = h'$. Soit $\lambda : G \rightarrow G$ défini par

$$\forall x \in G, \lambda(x) = x\theta(\pi(x))^{-1}\theta(\gamma(\pi(x)))$$

Alors λ est une bijection (unicité dans la décomposition précédente) et $\forall x \in G, \lambda(x) = x \iff x \in H$ (car H est le seul point fixe de γ).

Soit alors $\beta : G \rightarrow S_G, \beta(g) = \lambda^{-1} \circ \alpha(g) \circ \lambda$. Il est clair que β est un morphisme de groupes et on vérifie sans problème que $\alpha(g) = \beta(g) \iff g \in H$. On a bien construit les morphismes α, β désirés, et la preuve fonctionne aussi dans la catégorie des groupes finis car si G est fini, le groupe symétrique S_G l'est aussi. \square

Proposition 2.1.8 *Un objet initial (resp. final) d'une catégorie est, s'il existe, unique à isomorphisme près.*

Preuve. Soient X et Y des objets initiaux d'une catégorie \mathcal{C} , et soient f, g les uniques morphismes respectifs de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ et $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$. Alors on a $f \circ g = 1_Y$ et $g \circ f = 1_X$ car $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Y)$ et $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ sont réduits à un élément. La preuve pour les objets finaux est identique. \square

Définition 2.1.9 Soient \mathcal{C} et \mathcal{C}' des catégories. La **catégorie produit** $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ est la catégorie dont les objets sont les couples (X, X') d'objets de \mathcal{C} et \mathcal{C}' , dont les morphismes sont définis par

$$\text{Hom}_{\mathcal{C} \times \mathcal{C}'}((X, X'), (Y, Y')) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X', Y')$$

et dont la composition des morphismes est induite par les compositions respectives des morphismes de \mathcal{C} et \mathcal{C}' .

2.2 Foncteurs

Définition 2.2.1 Un **foncteur (covariant)** F d'une catégorie \mathcal{C} vers une catégorie \mathcal{C}' , $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$, est la donnée

(a) Pour tout objet X de \mathcal{C} d'un objet $F(X)$ de \mathcal{C}' .

(b) Pour tout couple d'objets (X, Y) de \mathcal{C} et tout $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, d'un $F(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), F(Y))$ tel que

- pour tout objet X de \mathcal{C} , $F(1_X) = 1_{F(X)}$;
- $\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), \forall g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, on a $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Exemples. (a) Le foncteur identité $1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, $X \mapsto X$, $f \mapsto f$.

(b) Le foncteur oubli $\text{Grp} \rightarrow \text{Ens}$, qui à un groupe associe l'ensemble sous-jacent.

(c) Le foncteur $\text{Ann} \rightarrow \text{Grp}$ qui associe à un anneau le groupe de ses éléments inversibles.

(d) Le foncteur $\text{Grp} \rightarrow \text{Ab}$ qui à un groupe G associe son abélianisé $G/[G, G]$.

(e) Soit X un objet d'une catégorie \mathcal{C} . Alors $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)$ est un foncteur de \mathcal{C} dans Ens avec pour $f : Y \rightarrow Z$,

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)(f) &= f \circ - : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ u &\mapsto f \circ u \end{aligned}$$

Définition 2.2.2 Un **foncteur contravariant** F d'une catégorie \mathcal{C} vers une catégorie \mathcal{C}' est un foncteur covariant $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'^{\text{op}}$.

Exemple. Soit X un objet d'une catégorie \mathcal{C} . Alors $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$ est un foncteur contravariant de \mathcal{C} dans Ens , avec pour $f : Y \rightarrow Z$,

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)(f) &= - \circ f : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \\ u &\mapsto u \circ f \end{aligned}$$

Définition 2.2.3 Soient $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ deux foncteurs. Un **morphisme de foncteurs** (ou transformation naturelle) de F dans G , $\phi : F \longrightarrow G$, est la donnée pour chaque objet X de \mathcal{C} d'un morphisme $\phi_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), G(X))$ tel que $\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, on a $G(f) \circ \phi_X = \phi_Y \circ F(f)$, c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\phi_X} & G(X) \\ \downarrow F(f) & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{\phi_Y} & G(Y) \end{array}$$

Un morphisme de foncteurs ϕ est un isomorphisme si ϕ_X est un isomorphisme pour tout objet X de \mathcal{C} .

Exemple. Soient X et X' deux objets d'une catégorie \mathcal{C} et soit $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X')$. Alors f induit in morphisme de foncteurs $f_* : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', -) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)$ défini par

$$\begin{aligned} (f_*)_Y : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \\ u &\longmapsto u \circ f \end{aligned}$$

Le morphisme de foncteurs f_* est un isomorphisme si f est un isomorphisme.

Définition 2.2.4 Deux catégories \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont dites

(a) **isomorphes** s'il existe des foncteurs $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ et $G : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ tels que $F \circ G = 1_{\mathcal{C}'}$ et $G \circ F = 1_{\mathcal{C}}$. On dit alors que F et G sont des isomorphismes de catégories.

(b) **équivalentes** s'il existe des foncteurs $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ et $G : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ et des isomorphismes de foncteurs $F \circ G \simeq 1_{\mathcal{C}'}$ et $G \circ F \simeq 1_{\mathcal{C}}$. On dit alors que F et G sont des équivalences de catégories. On dit alors que G est un **quasi-inverse** de F .

Lorsque les foncteurs précédents sont contravariants, on parle d'anti-isomorphisme et d'anti-équivalence de catégories.

Le théorème 2.2.6 à suivre est très utile pour montrer qu'un foncteur est une équivalence de catégories. On a d'abord besoin d'un peu plus de vocabulaire.

Définition 2.2.5 Soit $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur. On dit que F est **fidèle** (resp. **plein**, resp. **pleinement fidèle**) si pour tous les objets X, Y de \mathcal{C} l'application

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), F(Y)) \\ f &\longmapsto F(f) \end{aligned}$$

est injective (resp. surjective, resp. bijective).

On dit que F est **essentiellement surjectif** si pour tout objet X' de \mathcal{C}' il existe un objet X de \mathcal{C} tel que $F(X)$ est isomorphe à X' .

Théorème 2.2.6 Soient \mathcal{C} et \mathcal{C}' des catégories et $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (a) F est une équivalence de catégories.
- (b) F est essentiellement surjectif et pleinement fidèle.

Preuve. (a) \implies (b) Supposons que F est une équivalence de catégories : il existe un foncteur $G : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ et des isomorphismes de foncteurs $\eta : 1_{\mathcal{C}'} \longrightarrow F \circ G$ et $\theta : G \circ F \longrightarrow 1_{\mathcal{C}}$. Pour $U \in \mathcal{C}'$, le premier isomorphisme $U \cong F(G(U))$ assure que F est essentiellement surjectif. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de \mathcal{C} . Alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} GF(X) & \xrightarrow{\theta_X} & X \\ \downarrow GF(f) & & \downarrow f \\ GF(Y) & \xrightarrow{\theta_Y} & Y \end{array}$$

Ainsi si $F(f_1) = F(f_2)$, on a

$$f_1 = \theta_Y \circ GF(f_1) \circ \theta_X^{-1} = \theta_Y \circ GF(f_2) \circ \theta_X^{-1} = f_2$$

est F est fidèle. De même on montre que G est fidèle en utilisant η . Soit $g : F(X) \longrightarrow F(Y)$ un morphisme de \mathcal{C}' . Alors $g = F(f)$ pour $f := \theta_Y \circ G(g) \circ \theta_X^{-1}$. En effet

$$\theta_Y \circ GF(f) \circ \theta_X^{-1} = f = \theta_Y \circ G(g) \circ \theta_X^{-1}$$

et ainsi $GF(f) = G(g)$, d'où $g = F(f)$ puisque G est fidèle. Ainsi F est pleinement fidèle.

(b) \implies (a) Supposons F pleinement surjectif et essentiellement fidèle. Pour chaque objet W de \mathcal{C}' , choisissons un objet $G(W)$ de \mathcal{C} et un isomorphisme $\eta_W : W \cong F(G(W))$. Pour $g : W \longrightarrow W'$ un morphisme de \mathcal{C}' , considérons

$$\eta_{W'} \circ g \circ \eta_W^{-1} : FG(W) \longrightarrow FG(W')$$

Le foncteur F étant pleinement fidèle, il existe un unique morphisme $G(g) : G(W) \longrightarrow G(W')$ tel que

$$F(G(g)) = \eta_{W'} \circ g \circ \eta_W^{-1} : FG(W) \longrightarrow FG(W')$$

Vérifions que G est un foncteur. On a $G(1_W) = 1_{G(W)}$ car $F(G(1_W)) = \eta_W \circ \eta_W^{-1} = 1_{FG(W)} = F(1_{G(W)})$. Soient $g : W \longrightarrow W'$ et $h : W' \longrightarrow Z$. Alors

$$\begin{aligned} F(G(h \circ g)) &= \eta_Z \circ h \circ g \circ \eta_W^{-1} = \eta_Z \circ h \circ \eta_{W'}^{-1} \circ \eta_{W'} \circ g \circ \eta_W^{-1} \\ &= F(G(h)) \circ F(G(g)) = F(G(h)) \circ G(g) \end{aligned}$$

ce qui donne $G(h \circ g) = G(h) \circ G(g)$ par fidélité de F . Ainsi G est un foncteur et par construction $\eta : 1_{\mathcal{C}'} \longrightarrow F \circ G$ est un isomorphisme de foncteurs. Pour un objet X de \mathcal{C} , on définit $\theta_X : G(F(X)) \longrightarrow X$ comme l'unique morphisme tel que $F(\theta_X) = \eta_{F(X)}^{-1}$ (F est pleinement fidèle). Les θ_X sont des isomorphismes car F est fidèle. Si $f : X \longrightarrow Y$

est un morphisme de \mathcal{C} , pour montrer que $f \circ \theta_X = \theta_Y \circ GF(f)$, il suffit, par fidélité de F , de voir que $F(f) \circ \eta_{F(X)}^{-1} = \eta_{F(Y)}^{-1} \circ FGF(f)$, ce qui est vrai par construction de η et G . \square

Exemple. Soit \mathcal{C} la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Vect}_f(k)$ dont les objets sont les espaces vectoriels k^n , $n \in \mathbb{N}$ (k^0 est par convention l'espace vectoriel nul). Le foncteur inclusion $\mathcal{C} \subset \mathbf{Vect}(k)$ est une équivalence de catégories.

Définition 2.2.7 Une catégorie est dite *essentiellement petite* si elle est équivalente à une petite catégorie.

2.3 Dualité

On peut maintenant définir la notion de dualité sur une catégorie.

Définition 2.3.1 Une *dualité* sur une catégorie \mathcal{C} est un foncteur $D : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$ tel qu'il existe un isomorphisme de foncteurs $1_{\mathcal{C}} \simeq D^2 = D \circ D$.

On note \mathbf{Ab}_f la catégorie des groupes abéliens finis. Le théorème de dualité de Pontryagin se reformule ainsi :

Théorème 2.3.2 Le foncteur $G \longmapsto \widehat{G} = \text{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ est une dualité sur \mathbf{Ab}_f .

Preuve. La seule chose à vérifier que les isomorphismes $i_G : G \cong \widehat{\widehat{G}}$ définissent bien un isomorphisme de foncteurs. C'est un exercice facile. \square

On peut maintenant énoncer rigoureusement la non-existence d'une dualité sur les groupes.

Théorème 2.3.3 Il n'existe pas de dualité sur \mathbf{Grp}_f , la catégorie des groupes finis.

Pour démontrer le théorème, on introduit un peu plus de langage.

Définition 2.3.4 Soit \mathcal{C} un catégorie ayant un objet initial et final noté $\mathbf{1}$. On dit qu'un objet X de \mathcal{C} est *simple* si pour tout épimorphisme $f : X \longrightarrow Y$, alors f est un isomorphisme ou Y est isomorphe à $\mathbf{1}$. On dit que X est *cosimple* si pour tout monomorphisme $f : Y \longrightarrow X$, alors f est un isomorphisme ou Y est isomorphe à $\mathbf{1}$.

Le résultat suivant utilise des résultats bien connus de théorie des groupes, et le fait qu'un épimorphisme de groupes est surjectif.

Lemme 2.3.5 Dans la catégorie des groupes finis \mathbf{Grp}_f , dont l'objet initial et final est le groupe trivial $\{1\}$, les objets simples sont exactement les groupes simples (les groupes G dont les seuls sous-groupes normaux sont $\{1\}$ et G), et les objets cosimples sont exactement les groupes cycliques \mathbb{Z}_p pour p premier.

Lemme 2.3.6 Soient $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ une anti-équivalence de catégories et $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Alors

(a) f est un monomorphisme si et seulement si $F(f)$ est un épimorphisme.

(b) f est un épimorphisme si et seulement si $F(f)$ est un morphisme.

Si X est un objet de \mathcal{C} , alors X est simple $\iff F(X)$ est cosimple et X est cosimple $\iff F(X)$ est simple.

La preuve est laissée à titre d'exercice, ainsi que celle du résultat suivant.

Lemme 2.3.7 Soient $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ une anti-équivalence de catégories et X un objet de \mathcal{C} . Alors X est un objet initial (resp. final) de \mathcal{C} si et seulement si $F(X)$ est un objet final (resp. initial) de \mathcal{D} .

Preuve du théorème 2.3.3. Montrons plus généralement qu'il n'existe pas d'équivalence de catégories $\text{Grp}_f \longrightarrow \text{Grp}_f^{\text{op}}$. Supposons donc l'existence d'une telle équivalence $F : \text{Grp}_f \longrightarrow \text{Grp}_f^{\text{op}}$. Le groupe trivial 1 étant un objet à la fois initial et final dans Grp_f , le lemme 2.3.7 assure que $D(1) \cong 1$.

Soit p un nombre premier, et notons \mathbb{Z}_p le groupe cyclique d'ordre p . Alors \mathbb{Z}_p est un objet simple de Grp_f , donc $F(\mathbb{Z}_p)$ est un objet cosimple de Grp_f (lemme 2.3.6), et ainsi par le lemme 2.3.5 il existe un nombre premier q tel que $F(\mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_q$.

Si maintenant G est un groupe fini simple non-abélien (par exemple $G = A_5$), alors $F(G)$ est un objet cosimple de Grp_f (lemme 2.3.6), et donc $F(G) \cong \mathbb{Z}_p$ pour un nombre premier p par le lemme 2.3.5. Alors $F(G)$ est un objet simple de Grp_f , et (lemme 2.3.6) G est un objet cosimple, Mais alors $G \cong \mathbb{Z}_q$ pour un nombre premier q (lemme 2.3.5 encore), ce qui est manifestement faux. \square

On remarque que la même preuve fonctionne pour montrer qu'il n'existe pas de dualité sur Grp , la catégorie des groupes.

Remarque. On peut montrer aussi que la catégorie Grp_f n'est pas équivalente à la catégorie Grp_f^{op} en utilisant les notions de produit et sommes directe dans une catégorie, mais cela nous mènerait à considérer le produit libre de groupes, qui est en dehors de nos préoccupations.

Exercice. Montrer qu'il n'existe pas de dualité sur la catégorie des ensembles finis.

2.4 Algèbres diagonales et ensembles finis

Dans ce chapitre on établit une correspondance (en fait une anti-équivalence de catégories) entre ensembles finis et certaines algèbres commutatives. Ce cadre, techniquement très simple, permet déjà d'appréhender quelques-unes idées de la géométrie non-commutative, où les algèbres, à priori non commutatives, sont vues comme des algèbres de fonctions sur des espaces imaginaires, dits "non commutatifs", ou "quantiques".

Soit k un corps commutatif. Rappelons qu'une k -algèbre est un anneau A qui est aussi un k -espace vectoriel, et dont la multiplication $m : A \times A \longrightarrow A$ est k -bilinéaire.

On note \mathbf{Alg}_k la catégorie des k -algèbres : les morphismes sont les morphismes d'anneaux k -linéaires.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note k^n la k -algèbre dont les lois sont les lois produit de celle de k , et on fait la convention que k^0 est l'algèbre nulle.

Définition 2.4.1 Une k -algèbre A est dite **diagonale** s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ telle que les k -algèbres A et k^n soient isomorphes. La catégorie \mathbf{Diag}_k des k -algèbres diagonales est la sous-catégorie pleine de \mathbf{Alg}_k dont les objets sont les algèbres diagonales.

Soit X un ensemble. On note k^X la k -algèbre des fonctions de X dans k , et on note $k^{(X)}$ la k -espace vectoriel des fonctions à support fini (c'est une sous-espace de k^X , stable pour la multiplication, qui contient l'élément unité si et seulement si X est fini, et c'est donc une sous-algèbre dans ce cas). On fait la convention que k^\emptyset est l'algèbre nulle. Si $u : X \rightarrow Y$ est une application, elle induit un morphisme d'algèbres $u_* : k^Y \rightarrow k^X$, $u_*(f) = f \circ u$. On obtient donc un foncteur contravariant $\mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Alg}_k$.

On se restreint maintenant aux ensembles finis.

Lemme 2.4.2 Soit X un ensemble fini. Alors $k^{(X)}$ est une k -algèbre diagonale.

Preuve. Écrivons $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ et notons e_{x_i} la fonction caractéristique de x_i . On vérifie sans difficulté que l'application

$$\begin{aligned} k^n &\longrightarrow k^{(X)} \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) &\longmapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i e_{x_i} \end{aligned}$$

est un isomorphisme de k -algèbres. \square

On obtient donc un foncteur contravariant $\mathcal{F}_k : \mathbf{Ens}_f \rightarrow \mathbf{Diag}_k$, $X \mapsto k^{(X)}$.

Théorème 2.4.3 Le foncteur contravariant $\mathcal{F}_k : \mathbf{Ens}_f \rightarrow \mathbf{Diag}_k$ est une anti-équivalence de catégories.

Lemme 2.4.4 Soit X un ensemble fini. Alors on a une bijection

$$\begin{aligned} i_X : X &\longrightarrow \mathbf{Hom}_{k\text{-alg}}(k^{(X)}, k) \\ x &\longmapsto (f \longmapsto f(x)) \end{aligned}$$

Preuve. La définition du produit dans $k^{(X)}$ assure que $i_X(x)$ est bien un morphisme d'algèbres. En utilisant les fonctions caractéristiques, on voit facilement que i_X est injective. Écrivons $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ et notons $e_{x_i} = e_i$ la fonction caractéristique de x_i . La famille e_1, \dots, e_n est une base de $k^{(X)}$ telle que

$$\sum_{i=1}^n e_i = 1, \quad e_i e_j = \delta_{ij} e_i$$

on vérifie alors sans problème que pour $\phi \in \text{Hom}_{k\text{-alg}}(k^{(X)}, k)$, qu'il existe un unique i tel que $\phi(e_i) = 1$ et $\phi(e_j) = 0$ si $j \neq i$. On a donc $\phi = i_X(x_i)$. \square

On a maintenant besoin d'une autre caractérisation des algèbres diagonales.

Lemme 2.4.5 *Soit A une k -algèbre de dimension finie. Alors A est diagonale si et seulement si sa transformée de Gelfand*

$$\begin{aligned} \gamma_A : A &\longrightarrow k^{\text{Hom}_{k\text{-alg}}(A, k)} \\ a &\longmapsto \widehat{a}, \widehat{a}(\phi) = \phi(a) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Preuve. Si la transformée de Gelfand est un isomorphisme, alors $k^{\text{Hom}_{k\text{-alg}}(A, k)}$ est de dimension finie et donc $\text{Hom}_{k\text{-alg}}(A, k)$ est fini, et le lemme 2.4.2 donne le résultat.

Réciproquement, supposons que A est diagonale de dimension n . L'isomorphisme $k^n \cong A$ fournit une base e_1, \dots, e_n de A telle que

$$\sum_{i=1}^n e_i = 1, \quad e_i e_j = \delta_{ij} e_i$$

Pour $\phi \in \text{Hom}_{k\text{-alg}}(A, k)$, il existe, de même que dans le lemme précédent, un unique i tel que $\phi(e_i) = 1$ et $\phi(e_j) = 0$ si $j \neq i$. Réciproquement pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on vérifie qu'il existe un unique morphisme d'algèbres $\phi_i : A \longrightarrow k$ satisfaisant les conditions précédentes. On a donc $\text{Hom}_{k\text{-alg}}(A, k) = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$, et le cardinal de cet ensemble est n . Il est clair que $\widehat{e}_i = e_{\phi_i}$, $\forall i$, et donc la transformée de Gelfand, qui transforme une base de A en une base de $k(\text{Hom}_{k\text{-alg}}(A, k))$, est donc un isomorphisme. \square

Preuve du théorème 2.4.3. On considère le foncteur $G : \text{Alg}_k \longrightarrow \text{Ens}$, $A \longmapsto \text{Hom}_{k\text{-alg}}(A, k)$, que l'on restreint à Diag_k , et qui induit, par les lemmes 2.4.2 et 2.4.4, un foncteur $G : \text{Diag}_k \longrightarrow \text{Ens}_f$. Pour des k -algèbres A, B , $u \in \text{Hom}_{k\text{-alg}}(A, B)$, des ensembles X, Y et $f : X \longrightarrow Y$, il est immédiat que les diagrammes suivant sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} A \xrightarrow{\gamma_A} k(\text{Hom}_{k\text{-alg}}(A, k)) & & X \xrightarrow{i_X} \text{Hom}_{k\text{-alg}}(k^{(X)}, k) \\ \downarrow u & & \downarrow f \\ B \xrightarrow{\gamma_B} k(\text{Hom}_{k\text{-alg}}(B, k)) & & Y \xrightarrow{i_Y} \text{Hom}_{k\text{-alg}}(k^{(Y)}, k) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \downarrow (-\circ u)_* & \downarrow -\circ f_* \\ & & \end{array}$$

Ainsi les isomorphismes des lemmes 2.4.4 et 2.4.5 induisent des isomorphismes de foncteurs $1_{\text{Ens}_f} \simeq G \circ \mathcal{F}_k$ et $1_{\text{Diag}_k} \simeq \mathcal{F}_k \circ G$, et donc \mathcal{F}_k et G sont des anti-équivalences de catégories. \square

La donnée d'un ensemble fini est donc "équivalente" à celle de son algèbre de fonctions. Ceci suggère donc que les algèbres générales peuvent être vues comme des algèbres

de fonctions sur des espaces imaginaires, dits quantiques. Ce point de vue de “géométrie non commutative” est extrêmement fécond.

Pour des espaces plus structurés que les ensembles finis (espaces topologiques, ensembles algébriques affines...), on a aussi des théorèmes du type 2.4.3, les algèbres associées étant elles aussi évidemment plus structurées (C^* -algèbres, algèbres affines...).

Commentaires

Pour (beaucoup) plus d’informations sur les catégories, on peut consulter par exemple [16], [20] ou [6]. On peut montrer que si k est algébriquement clos, alors une k -algèbre commutative de dimension finie n’ayant pas d’élément nilpotent non nul est diagonale : voir par exemple [6], 5.1.6.

Chapitre 3

Produit tensoriel

Dans ce chapitre k est un corps commutatif. Au vu du théorème 2.4.3, il est naturel de chercher l'opération sur les algèbres (diagonales) correspondant au produit des ensembles. Ceci mène au produit tensoriel, que l'on considère dans un cadre plus général.

3.1 Applications bilinéaires et produit tensoriel

Soient U, V, W des k -espaces vectoriels. On considère le problème suivant :

Peut-on réaliser les applications k -bilinéaires $U \times V \longrightarrow W$ comme des applications linéaires d'un certain espace vectoriel construit à partir de U et V , à valeurs dans W ?

Ce problème mène à la notion de produit tensoriel.

Construction du produit tensoriel

- Soit L le k -espace vectoriel de base les symboles $e_{(x,y)}$, $x \in U$, $y \in V$ (on peut voir L comme l'espace vectoriel $k^{(U \times V)}$ des fonctions à support fini de $U \times V$ dans k , la fonction $e_{(x,y)}$ étant la fonction caractéristique de (x, y)).
- Soit $f : U \times V \longrightarrow W$ une application. Alors f se prolonge en une (unique) application linéaire $\bar{f} : L \longrightarrow W$ telle que $f = \bar{f} \circ j$, où $j : U \times V \longrightarrow L$ est définie par $j((x, y)) = e_{(x,y)}$. On a $\bar{f}(e_{(x,y)}) = f((x, y))$.
- L'application f est bilinéaire si et seulement si \bar{f} s'annule sur les éléments de la forme

$$\begin{aligned} e_{(x+y,z)} - e_{(x,z)} - e_{(y,z)}, & \quad e_{(x,y+z)} - e_{(x,y)} - e_{(x,z)} \\ e_{(\lambda x,y)} - \lambda e_{(x,y)}, & \quad e_{(x,\lambda y)} - \lambda e_{(x,y)} \end{aligned}$$

ce qui est encore équivalent à ce que \bar{f} s'annule sur Q , le sous-espace de L engendré par ces éléments. Si f est bilinéaire, on a donc, par passage au quotient, une unique application linéaire $\tilde{f} : L/Q \longrightarrow W$ telle que $\tilde{f} \circ p = \bar{f}$, où $p : L \longrightarrow L/Q$ est la surjection canonique. On note i l'application bilinéaire $i = p \circ j : U \times V \longrightarrow L/Q$, $i(x, y) = p(e_{(x,y)})$.

Définition 3.1.1 *L'espace vectoriel L/Q est noté $U \otimes_k V$, et est appelé le **produit tensoriel** de U et V .*

On a montré le résultat suivant.

Théorème 3.1.2 Soient U, V, W des k -espaces vectoriels et soit $f : U \times V \longrightarrow W$ une application k -bilinéaire. Alors il existe une unique application k -linéaire $\tilde{f} : U \otimes_k V \longrightarrow W$ telle que $\tilde{f} \circ i = f$

$$\begin{array}{ccc} U \times V & \xrightarrow{f} & W \\ & \searrow i & \nearrow \tilde{f} \\ & U \otimes_k V & \end{array}$$

Notation. Pour $(x, y) \in U \times V$, on note $i(x, y) = x \otimes y$. Un élément de cette forme est appelé un **tenseur élémentaire**.

Tout élément de $X \in U \otimes V$ s'écrit de manière non unique

$$X = \sum_{x,y \text{ finie}} \lambda_{x,y} x \otimes y, \quad \lambda_{x,y} \in k$$

Dans $U \otimes V$, on a les relations ($x, x' \in U, y, y' \in V, \lambda \in k$) :

$$(x + x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y$$

$$x \otimes (y + y') = x \otimes y + x \otimes y'$$

$$\lambda x \otimes y = \lambda(x \otimes y) = x \otimes \lambda y$$

Remarque. Le produit tensoriel $U \otimes_k V$ est différent du produit direct $U \times V$. En effet, on verra plus loin que si U et V sont des espaces de dimension finie, alors $\dim(U \otimes_k V) = \dim(U) \dim(V)$, tandis que $\dim(U \times V) = \dim(U) + \dim(V)$.

Proposition 3.1.3 Soient U, V, W des k -espaces vectoriels. On a des isomorphismes k -linéaires

(a)

$$\begin{aligned} k \otimes_k U &\cong U \cong U \otimes_k k \\ \lambda \otimes x &\mapsto \lambda x \leftarrow x \otimes \lambda \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \tau_{U,V} : U \otimes_k V &\cong V \otimes_k U \\ x \otimes y &\mapsto y \otimes x \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} a_{U,V,W} : (U \otimes_k V) \otimes_k W &\cong U \otimes_k (V \otimes_k W) \\ (x \otimes y) \otimes z &\mapsto x \otimes (y \otimes z) \end{aligned}$$

Preuve. (a) L'application $k \times U \longrightarrow U, (\lambda, x) \longmapsto \lambda x$, est bilinéaire. Elle induit donc une application linéaire $k \otimes_k U \longrightarrow U, \lambda \otimes x \longmapsto \lambda x$. L'application linéaire $U \longrightarrow k \otimes_k U, x \longmapsto 1 \otimes x$ est alors l'isomorphisme réciproque. De même on construit l'isomorphisme $U \cong U \otimes_k k$.

(b) L'application $U \times V \longrightarrow V \otimes U, (x, y) \longmapsto y \otimes x$, est bilinéaire et induit donc un application linéaire $U \otimes V \longrightarrow V \otimes U, x \otimes y \longmapsto y \otimes x$. On construit de manière identique l'isomorphisme inverse $V \otimes_k U \longrightarrow U \otimes_k V, y \otimes x \longmapsto x \otimes y$ (pour vérifier que les deux morphismes sont bien inverses, on utilise le fait que les tenseurs élémentaires engendrent linéairement le produit tensoriel).

(c) Soit $z \in W$, et considérons l'application bilinéaire $f_z : U \times V \longrightarrow U \otimes_k (V \otimes_k W), (x, y) \longmapsto x \otimes (y \otimes z)$. Elle induit une application linéaire $\bar{f}_z : U \otimes_k V \longrightarrow U \otimes_k (V \otimes_k W), x \otimes y \longmapsto x \otimes (y \otimes z)$. Soit alors $f : (U \otimes_k V) \times W \longrightarrow U \otimes_k (V \otimes_k W), (X, z) \longmapsto \bar{f}_z(X)$. Cette application est bilinéaire et donc induit une application linéaire

$$\bar{f} : (U \otimes_k V) \otimes_k W \longrightarrow (U \otimes_k V) \otimes_k W, (X, z) \longmapsto \bar{f}_z(X),$$

avec $\bar{f}((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes (y \otimes z)$. On construit de manière analogue l'isomorphisme inverse. \square

La partie (c) de la proposition permet de construire, sans se soucier d'un ordre dans les parenthèses, le produit tensoriel de n espaces vectoriels V_1, \dots, V_n . On le note simplement

$$V_1 \otimes \dots \otimes V_n$$

On peut aussi le construire directement, et il transforme applications n -linéaires en applications linéaires.

Théorème 3.1.4 *Soient $(U_i)_{i \in I}$ et V des k -espaces vectoriels. Alors on a un isomorphisme k -linéaire*

$$\left(\bigoplus_{i \in I} U_i \right) \otimes_k V \cong \bigoplus_{i \in I} (U_i \otimes_k V)$$

Preuve. Pour $x \in \bigoplus_{i \in I} U_i$, on a $x = (x_i)_{i \in I}$ avec $x_i \in U_i, x_i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices. L'application

$$\begin{aligned} \left(\bigoplus_{i \in I} U_i \right) \times V &\longrightarrow \bigoplus_{i \in I} (U_i \otimes V) \\ ((x_i), y) &\longmapsto (x_i \otimes y)_{i \in I} \end{aligned}$$

est bilinéaire et induit donc une application linéaire

$$\begin{aligned} \left(\bigoplus_{i \in I} U_i \right) \otimes_k V &\longrightarrow \bigoplus_{i \in I} (U_i \otimes V) \\ (x_i) \otimes y &\longmapsto (x_i \otimes y)_{i \in I} \end{aligned}$$

Pout $x_i \in U_i$, on note $\nu(x_i)$ l'élément de $\bigoplus_{i \in I} U_i$ tel que $\nu(x_i)_i = x_i$ et $\nu(x_i)_j = 0$ si $j \neq i$. L'application bilinéaire

$$\begin{aligned} U_i \times V &\longrightarrow \left(\bigoplus_{i \in I} U_i \right) \otimes_k V \\ (x_i, y) &\longmapsto \nu(x_i) \otimes y \end{aligned}$$

induit une application linéaire

$$\begin{aligned} f_i : U_i \otimes_k V &\longrightarrow \left(\bigoplus_{i \in I} U_i \right) \otimes_k V \\ x_i \otimes y &\longmapsto \nu(x_i) \otimes y \end{aligned}$$

On obtient une application linéaire

$$\begin{aligned} \bigoplus_{i \in I} (U_i \times V) &\longrightarrow \left(\bigoplus_{i \in I} U_i \right) \otimes_k V \\ (X_i) &\longmapsto \sum_i f_i(x_i) \end{aligned}$$

On vérifie sans difficulté que les deux applications linéaires construites sont des isomorphismes inverses. \square

On peut utiliser ce résultat pour déterminer une base d'un produit tensoriel. En fait on fera cela dans le prochain paragraphe, en utilisant des produits tensoriels d'applications linéaires.

3.2 Produit tensoriel d'applications linéaires

Proposition 3.2.1 *Soient $f : U \longrightarrow U'$ et $g : V \longrightarrow V'$ des applications linéaires. Alors il existe une unique application k -linéaire, notée $f \otimes g : U \otimes_k V \longrightarrow U' \otimes_k V'$, telle que*

$$\forall (x, y) \in U \times V, f \otimes g(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y)$$

Preuve. L'application

$$\begin{aligned} U \times V &\longrightarrow U' \otimes_k V' \\ (x, y) &\longmapsto f(x) \otimes g(y) \end{aligned}$$

est bilinéaire, donc on peut appliquer la propriété universelle du produit tensoriel (le théorème 3.1.2) pour obtenir l'application linéaire désirée. \square

On vérifie sans difficulté que si (f, g) et (f', g') sont des couples d'applications linéaires composables, alors

$$(f \circ g) \otimes (f' \circ g') = (f \otimes f') \circ (g \otimes g')$$

Ainsi le produit tensoriel définit un foncteur

$$- \otimes_k - : \text{Vect} \times \text{Vect} \longrightarrow \text{Vect}$$

La notation $f \otimes g$ suggère que l'on a considéré l'élément

$$f \otimes g \in \text{Hom}_k(U, U') \otimes_k \text{Hom}_k(V, V'),$$

c'est un abus de notation, qui sera pleinement justifié un peu plus loin (théorème 3.2.6).

Voici une première application du produit tensoriel d'applications linéaires.

Théorème 3.2.2 *Soient U, V des k -espaces vectoriels, et $U' \subset U, V' \subset V$ des sous-espaces. L'application linéaire*

$$\begin{aligned} U' \otimes_k V' &\longrightarrow U \otimes_k V \\ x' \otimes y' &\longmapsto x' \otimes y' \end{aligned}$$

est injective et permet donc d'identifier $U' \otimes_k V'$ à un sous-espace de $U \otimes_k V$

Preuve. Notons ν l'application linéaire de l'énoncé. Soient $p : U \longrightarrow U', q : V \longrightarrow V'$ des applications linéaires telles que $p|_{U'} = \text{id}_{U'}$ et $q|_{V'} = \text{id}_{V'}$. Il est clair que $(p \otimes q) \circ \nu = \text{id}_{U' \otimes V'}$, et donc ν est injective. \square

On utilise maintenant les produits tensoriels d'applications linéaires pour trouver des bases dans les produits tensoriels d'espaces vectoriels.

Théorème 3.2.3 *Soient U et V des k -espaces vectoriels. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une base de U . Alors tout élément de $U \otimes_k V$ s'écrit de manière **unique** sous la forme*

$$\sum_{i \in I} x_i \otimes y_i, \quad y_i \in V$$

Preuve. La famille $(x_i)_{i \in I}$ engendre linéairement U , donc les règles de calcul dans le produit tensoriel assure que tout élément de $U \otimes_k V$ s'écrit sous la forme annoncée. Supposons maintenant que

$$\sum_{i \in I} x_i \otimes y_i = \sum_{i \in I} x_i \otimes z_i$$

Soient $(\psi_i)_{i \in I}$ les formes linéaires sur U telles que $\psi_i(x_j) = \delta_{i,j}, \forall i, j \in I$. Pour $i_0 \in I$, on a

$$y_{i_0} = \psi_{i_0} \otimes \text{id}_V \left(\sum_{i \in I} x_i \otimes y_i \right) = \psi_{i_0} \otimes \text{id}_V \left(\sum_{i \in I} x_i \otimes z_i \right) = z_{i_0}$$

ce qui donne le résultat. \square

Corollaire 3.2.4 Soient U et V des k -espaces vectoriels. Soit $(x_i)_{i \in I}$ des éléments linéairement indépendants de U . Alors pour des éléments $(y_i)_{i \in I}$ de V , on a

$$\sum_{i \in I} x_i \otimes y_i = 0 \implies y_i = 0, \forall i \in I$$

Preuve. Il suffit de compléter en une base de U et d'appliquer le résultat précédent. \square

Théorème 3.2.5 Soient U et V des k -espaces vectoriels. Soient $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_j)_{j \in J}$ des bases respectives de U et V . Alors $(x_i \otimes y_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est une base de $U \otimes_k V$. En particulier si U et V sont de dimension finie, il en est de même de $U \otimes_k V$, et on a

$$\dim(U \otimes_k V) = \dim(U) \dim(V)$$

Preuve. Le résultat se montre en utilisant la même technique que dans la preuve du théorème précédent. \square

On peut maintenant justifier maintenant l'abus de notation pour les produits tensoriels d'applications linéaires.

Théorème 3.2.6 Soient U, U', V, V' des k -espaces vectoriels. On a une application linéaire injective

$$\begin{aligned} T : \text{Hom}_k(U, V) \otimes_k \text{Hom}_k(U', V') &\longrightarrow \text{Hom}_k(U \otimes_k U', V \otimes_k V') \\ f \otimes g &\longmapsto T(f, g) = f \otimes g, \quad x \otimes y \mapsto f(x) \otimes g(y) \end{aligned}$$

Si de plus U et U' sont de dimension finie, alors T est un isomorphisme.

Preuve. L'application linéaire T est construite en utilisant une application bilinéaire adéquate. Soit $\sum_{i=1}^n f_i \otimes g_i$ un élément du noyau de T , avec f_1, \dots, f_n linéairement indépendants. Alors

$$\begin{aligned} \forall (x, x') \in U \times U', \sum_{i=1}^n f_i(x) \otimes g_i(x') &= 0 \\ \implies \forall (x, x') \in U \times U', \forall \psi \in V^*, \sum_{i=1}^n \psi(g_i(x')) f_i(x) &= 0 \\ \implies \forall x' \in U', \forall \psi \in V^*, \sum_{i=1}^n \psi(g_i(x')) f_i &= 0 \end{aligned}$$

et par l'indépendance linéaire des f_i , on a

$$\forall i, \forall \psi \in V^*, \forall x' \in U', \psi(g_i(x')) = 0 \implies \forall i, g_i = 0.$$

Ainsi T est injective. Soit maintenant $(e_i)_{i \in I}$ une base de U , et $y \in V$. On note $\phi_{e_i, y}$ l'unique application linéaire $U \longrightarrow V$ telle que $\phi_{e_i, y}(e_k) = \delta_{ik}y$. Si maintenant $(f_j)_{j \in J}$

est une base de V , les $(\phi_{e_i, f_j})_{(i,j) \in I \times J}$ forment une partie linéairement indépendante de $\text{Hom}_k(U, V)$ (et même une base si U est de dimension finie).

Considérons aussi des bases $(e'_i)_{i \in I'}$ et $(f'_j)_{j \in J'}$ de U' et V' . Alors on a

$$T(\phi_{e_i, f_j} \otimes \phi_{e'_i, f'_j}) = \phi_{e_i \otimes f_j, e'_i \otimes f'_j}$$

et si U et U' sont de dimension finie, alors T envoie une base du premier espace sur une base du second : c'est un isomorphisme \square

Corollaire 3.2.7 *Si U et V sont des espaces de dimension finie, alors on a un isomorphisme linéaire $U^* \otimes V^* \cong (U \otimes V)^*$.*

On décrit maintenant le noyau d'un produit tensoriel d'applications linéaires.

Proposition 3.2.8 *Soient $f : U \rightarrow U'$ et $g : V \rightarrow V'$ des applications linéaires. Alors*

$$\text{Ker}(f \otimes g) = \text{Ker}(f) \otimes V + U \otimes \text{Ker}(g)$$

Preuve. L'inclusion \supset est claire. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une base de $\text{Ker}(f)$ que l'on complète pour obtenir une base $(x_i)_{i \in I} \cup (y_j)_{j \in J}$ de U . La restriction de f à $W = \text{Vect}(y_j, j \in J)$ est injective. Soit $X \in \text{Ker}(f \otimes g) : X$ s'écrit de manière unique

$$X = \sum_{i \in I} x_i \otimes z_i + \sum_{j \in J} y_j \otimes t_j$$

et on a donc $\sum_{j \in J} f(y_j) \otimes g(t_j) = 0$, avec les $f(y_j)$ linéairement indépendants, donc $g(t_j) = 0, \forall j$, et on a bien $X \in \text{Ker}(f) \otimes V + U \otimes \text{Ker}(g)$. \square

On termine ce paragraphe par un résultat technique relatif à l'intersection des produits tensoriels, qui ne sera pas utilisé avant les chapitre 5 et 7.

Lemme 3.2.9 *Soient V, W des espaces vectoriels et soient $(X_i)_{i \in I} \subset V$ et $(Y_j)_{j \in J} \subset W$ des sous-espaces. Alors on a*

$$(\cap_{i \in I} X_i) \otimes_k (\cap_{j \in J} Y_j) = \cap_{i \in I, j \in J} (X_i \otimes_k Y_j)$$

$$(\cap_{i \in I} X_i) \otimes_k W = \cap_{i \in I} (X_i \otimes_k W)$$

$$(\cap_{i \in I} X_i) \otimes_k (\cap_{i \in I} X_i) = \cap_{i \in I, j \in I} (X_i \otimes_k X_j) = \cap_{i \in I} (X_i \otimes_k X_i)$$

Preuve. La remarque essentielle est que $\forall \varphi \in V^*, \forall \psi \in W^*$, on a

$$\varphi \otimes \text{id} \left(\cap_{i \in I, j \in J} (X_i \otimes_k Y_j) \right) \subset \cap_{j \in J} Y_j \quad \text{et} \quad (\text{id} \otimes \psi) \left(\cap_{i \in I, j \in J} (X_i \otimes_k Y_j) \right) \subset \cap_{i \in I} X_i$$

L'inclusion \subset dans la première égalité est claire. Soit

$$t \in \bigcap_{i \in I, j \in J} (X_i \otimes_k Y_j)$$

Fixons $i_0 \in I$ et $j_0 \in J$ et écrivons $t = \sum_k v_k \otimes w_k$, avec $\forall k, v_k \in X_{i_0}$ et $w_k \in Y_{j_0}$ et avec les w_k linéairement indépendants. En utilisant des formes linéaires adéquates ("duales" des w_k), on voit que $\forall k$, on a $v_k \in \bigcap_{i \in I} X_i$, et donc $t \in (\bigcap_{i \in I} X_i) \otimes_k Y_{j_0}$. On peut donc écrire $t = \sum_k v'_k \otimes w'_k$, avec $\forall k, v'_k \in \bigcap_{i \in I} X_i$ et $w'_k \in Y_{j_0}$, avec les v'_k linéairement indépendants. On voit alors que $\forall k, w'_k \in \bigcap_{j \in J} Y_j$, et on a bien le résultat. La deuxième égalité et un cas particulier de la première, et la troisième se montre de manière similaire. \square

3.3 Produit tensoriel d'algèbres

On peut maintenant construire le produit tensoriel d'algèbres.

Proposition-Définition 3.3.1 *Soient A et B des k -algèbres. Il existe sur $A \otimes_k B$ une unique structure de k -algèbre telle que*

$$\forall a, a' \in A, \forall b, b' \in B, (a \otimes b).(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$$

L'algèbre obtenue, toujours notée $A \otimes_k B$, est appelée **le produit tensoriel des algèbres A et B** .

Preuve. Soient $(a, b) \in A \times B$ et considérons l'application bilinéaire

$$\begin{aligned} M_{a,b} : A \times B &\longrightarrow A \otimes_k B \\ (a', b') &\longmapsto aa' \otimes bb' \end{aligned}$$

qui induit une application linéaire $m_{a,b} : A \otimes_k B \longrightarrow A \otimes_k B$. Ceci induit une application bilinéaire

$$\begin{aligned} A \times B &\longrightarrow \text{Hom}_k(A \otimes_k B, A \otimes_k B) \\ (a, b) &\longmapsto m_{a,b} \end{aligned}$$

qui induit à son tour une application linéaire $\tilde{m} : A \otimes_k B \longrightarrow \text{Hom}_k(A \otimes_k B, A \otimes_k B)$. On obtient finalement l'application bilinéaire

$$\begin{aligned} (A \otimes_k B) \times (A \otimes_k B) &\longrightarrow \text{Hom}_k(A \otimes_k B, A \otimes_k B) \\ (X, Y) &\longmapsto m_X(Y) \end{aligned}$$

qui munit $A \otimes_k B$ du produit demandé. Le produit est associatif car ceux de A et B le sont (il suffit, par bilinéarité, de le vérifier sur les tenseurs élémentaires) et l'élément neutre est $1 \otimes 1$. \square

Le produit tensoriel d'algèbres a la propriété universelle suivante. La preuve ne présente aucune difficulté.

Proposition 3.3.2 Soient A, B, C des k -algèbres et soient $\phi_1 : A \rightarrow C$ et $\phi_2 : B \rightarrow C$ des morphismes d'algèbres tels que $\forall (a, b) \in A \times B, \phi_1(a)\phi_2(b) = \phi_2(b)\phi_1(a)$. Alors il existe un unique morphisme de k -algèbres $\phi : A \otimes_k B \rightarrow C$ tel que $\phi(a \otimes b) = \phi_1(a)\phi_2(b), \forall (a, b) \in A \times B$.

On peut également considérer les produits tensoriels de morphismes d'algèbres.

Proposition 3.3.3 Soient A, A', B, B' des k -algèbres et soient $\phi : A \rightarrow A'$ et $\psi : B \rightarrow B'$ des morphismes d'algèbres. Alors l'application linéaire $\phi \otimes \psi : A \otimes_k B \rightarrow A' \otimes_k B'$ est un morphisme d'algèbres.

La preuve est immédiate. Le résultat suivant assure la compatibilité du produit tensoriel d'algèbres avec le produit cartésien d'ensembles, un des objectifs de départ du chapitre.

Proposition 3.3.4 Soient X et Y des ensembles. Alors on a un morphisme d'algèbres injectif

$$\begin{aligned} k^X \otimes_k k^Y &\longrightarrow k^{X \times Y} \\ f \otimes g &\longmapsto ((x, y) \mapsto f(x)g(y)) \end{aligned}$$

qui induit, lorsque X et Y sont finis, un isomorphisme $k^{(X)} \otimes_k k^{(Y)} \cong k^{(X \times Y)}$.

Preuve. On construit le morphisme d'algèbres en utilisant la proposition 3.3.3. Il envoie, lorsque X et Y sont finis, la base $(e_x \otimes e_y)_{(x \in X, y \in Y)}$ du premier espace vers la base $(e_{(x, y)})_{(x, y) \in X \times Y}$, et est donc un isomorphisme dans le cas fini. Revenons au cas général : soit $\sum_{i=1}^n f_i \otimes g_i$ un élément du noyau, avec f_1, \dots, f_n linéairement indépendantes. Alors

$$\forall (x, y) \in X \times Y, \sum_{i=1}^n f_i(x)g_i(y) = 0 \Rightarrow \forall y \in Y, \sum_{i=1}^n g_i(y)f_i \Rightarrow \forall i, g_i = 0$$

ce qui assure l'injectivité de notre morphisme. \square

3.4 Vers la notion d'algèbre de Hopf

Un groupe est ensemble muni d'une structure additionnelle : une loi. Les ensembles finis correspondent, par une anti-équivalence de catégorie, aux algèbres diagonales. Les axiomes de groupes doivent donc pouvoir se traduire dans la catégorie des algèbres, ce qui mène à la notion d'algèbre de Hopf.

Soit G un groupe fini. La multiplication $m : G \times G \rightarrow G$ induit un morphisme d'algèbre

$$\Delta : k^{(G)} \xrightarrow{m_*} k^{(G \times G)} \xrightarrow{\sim} k^{(G)} \otimes_k k^{(G)}$$

L'associativité de la multiplication se traduit par

$$(\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta = (\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$$

L'axiome d'élément unité se traduit par une application $\mathbf{1} \longrightarrow G$, $1 \mapsto 1$, qui à son tour induit un morphisme d'algèbres

$$\begin{aligned}\varepsilon : k^{(G)} &\longrightarrow k \\ f &\longmapsto f(1)\end{aligned}$$

vérifiant

$$(\varepsilon \otimes \text{id}) \circ \Delta = \text{id} = (\text{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta$$

Enfin, l'axiome d'inversibilité des éléments peut être traduit par l'existence d'une certaine application $G \longrightarrow G$ induisant une application linéaire $S : k^{(G)} \longrightarrow k^{(G)}$ telle que

$$m \circ (S \otimes \text{id}) \circ \Delta = u \circ \varepsilon = m \circ (\text{id} \otimes S) \circ \Delta$$

(où $u : k \longrightarrow k^{(G)}$, $\lambda \longmapsto \lambda 1$).

On a ainsi écrit tous les axiomes des algèbres de Hopf, qui seront étudiées de façon systématique au chapitre 5. Avant cela, on va introduire, dans un dernier chapitre préliminaire, une nouvelle manière de construire des algèbres, très intéressante dans notre contexte.

Commentaires

On peut définir plus généralement, de manière analogue, le produit tensoriel de modules. Certains résultats ne sont alors plus vrais, notamment le théorème 3.2.2. Pour plus d'informations, on peut consulter par exemple [15] ou [6].

Chapitre 4

Algèbres définies par générateurs et relations

4.1 L'algèbre d'un monoïde

Si X est un ensemble, on note $k^{(X)}$ le k -espace vectoriel des fonctions à support fini de X dans k . Il admet pour base la famille $(e_x)_{x \in X}$, où e_x est la fonction caractéristique de $x \in X$. Lorsque X est un monoïde, on peut définir un produit sur $k^{(X)}$: le produit de convolution (différent en général, lorsque X est fini, du produit usuel des fonctions). On obtient ainsi des algèbres extrêmement intéressantes.

Soit donc M un monoïde, c'est à dire que M est muni d'une loi associative possédant un élément unité.

Proposition-Définition 4.1.1 *Munissons $k^{(M)}$ d'une loi*

$$k^{(M)} \times k^{(M)} \longrightarrow k^{(M)}$$
$$(f, g) \longmapsto f * g, \quad f * g(x) = \sum_{yz=x} f(y)g(z)$$

appelée le **produit de convolution**. Pour $x, y \in M$, on a $e_x * e_y = e_{xy}$.

Le produit de convolution munit $k^{(M)}$ d'une structure de k -algèbre, et on note $k[M]$ la k -algèbre obtenue, appelée la **k -algèbre du monoïde M** .

Preuve. C'est un simple exercice (le neutre est e_1 et l'associativité provient de celle du monoïde M). \square

Notons $i_M : M \longrightarrow k[M]$ l'application (injective) qui envoie x sur e_x . L'algèbre du monoïde M a la propriété universelle suivante.

Théorème 4.1.2 *Soient M un monoïde, B une k -algèbre et $f : M \longrightarrow B$ une application multiplicative ($f(xy) = f(x)f(y)$ et $f(1) = 1$). Alors il existe un unique morphisme*

de k -algèbres $\bar{f} : k[M] \longrightarrow B$ tel que $\bar{f} \circ i_M = f$.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{i_M} & k[M] \\ & \searrow f & \swarrow \bar{f} \\ & & B \end{array}$$

Preuve. L'application \bar{f} est définie par $\bar{f}(\sum_x \lambda_x e_x) = \sum_x \lambda_x f(x)$, et on vérifie sans peine qu'elle a toutes les propriétés désirées. \square

Si M et M' sont des monoïdes, un morphisme de monoïdes $f : M \longrightarrow M'$ induit un unique morphisme d'algèbres $\bar{f} : k[M] \longrightarrow k[M']$ tel $\bar{f}(e_x) = e_{f(x)}$, $\forall x \in M$. On vérifie sans difficulté que cela induit un foncteur

$$k[-] : \text{Mon} \longrightarrow \text{Alg}_k$$

Exemple 1 : l'algèbre des polynômes $k[x_1, \dots, x_n]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons le monoïde additif \mathbb{N}^n . Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, notons $x_i = e_{(0, \dots, 1, \dots, 0)}$, où le 1 est situé à la i -ème place. Par définition du produit dans $k[\mathbb{N}^n]$, on a, pour $(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$,

$$e_{(i_1, \dots, i_n)} = x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$$

Les $x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$, $(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$ forment donc une base de $k[\mathbb{N}^n]$, et on écrit alors

$$k[\mathbb{N}^n] = k[x_1, \dots, x_n]$$

L'algèbre $k[x_1, \dots, x_n]$ est l'**algèbre des polynôme à n variables**. Sa propriété universelle est la suivante.

Théorème 4.1.3 Soient B une k -algèbre et $b_1, \dots, b_n \in B$ des éléments commutant deux à deux. Il existe une unique morphisme de k -algèbres

$$f : k[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow B$$

tel que $f(x_i) = b_i$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Preuve. On considère d'abord l'application $\mathbb{N}^n \longrightarrow B$, $(i_1, \dots, i_n) \longmapsto b_1^{i_1} \cdots b_n^{i_n}$, qui est multiplicative car les b_i commutent deux à deux. On applique ensuite la propriété universelle de l'algèbre du monoïde \mathbb{N}^n . \square

Exemple 2 : l'algèbre libre $k\{x_1, \dots, x_n\}$

Soit $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ un ensemble à n éléments. On considère $M(S)$, le monoïde libre engendré par S . Les éléments sont les suites finies (mots) d'éléments de S notées $s_{i_1} \cdots s_{i_k}$. La loi sur $M(S)$ est la juxtaposition des suites (concaténation des mots), et le neutre est le mot vide, noté 1. On note $\underbrace{s_i \cdots s_i}_{\alpha \text{ fois}} = s_i^\alpha$.

Notons $x_i = e_{s_i} \in k[M(S)]$. Tout élément de $k[M(S)]$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire d'éléments de la forme

$$x_{i_1}^{\alpha_1} \cdots x_{i_k}^{\alpha_k}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad i_j \neq i_{j+1}, \quad \alpha_k \in \mathbb{N}^*$$

De tels éléments sont appelés monômes. L'algèbre $k[M(S)]$ est notée $k\{x_1, \dots, x_n\}$, est appelée **la k -algèbre libre engendrée par n variables**, où encore l'algèbre des polynômes non commutatifs en n variables. Sa propriété universelle est la suivante.

Théorème 4.1.4 *Soient B une k -algèbre et $b_1, \dots, b_n \in B$. Il existe une unique morphisme de k -algèbres*

$$f : k\{x_1, \dots, x_n\} \longrightarrow B$$

tel que $f(x_i) = b_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Preuve. En reprenant les notations précédentes, il existe une unique application multiplicative $f_0 : M(S) \longrightarrow B$ telle que $f_0(s_{i_1} \cdots s_{i_k}) = b_{i_1} \cdots b_{i_k}$, et on applique la propriété universelle de $k[M(S)]$ pour avoir le morphisme d'algèbres voulu. \square

4.2 Présentations par générateurs et relations

À partir des algèbres libres, on peut construire des algèbres par générateurs et relations. Soient $(P_i)_{i \in I}$ des éléments de $k\{x_1, \dots, x_n\}$. **La k -algèbre présentée par les générateurs x_1, \dots, x_n et soumise aux relations $P_i = 0, \forall i \in I$** , est le quotient de $k\{x_1, \dots, x_n\}$ par l'idéal (bilatère) engendré par les $P_i, i \in I$. On la note

$$k\langle x_1, \dots, x_n \mid P_i = 0, \forall i \in I \rangle$$

ou encore

$$k\{x_1, \dots, x_n\} / (P_i, i \in I)$$

Sa propriété universelle est la suivante.

Théorème 4.2.1 *Soient B une k -algèbre et $b_1, \dots, b_n \in B$. Soient $(P_i)_{i \in I}$ des éléments de $k\{x_1, \dots, x_n\}$, avec $P_i(b_1, \dots, b_n) = 0, \forall i \in I$. Il existe une unique morphisme de k -algèbres*

$$f : k\langle x_1, \dots, x_n \mid P_i = 0, \forall i \in I \rangle \longrightarrow B$$

tel que $f(x_i) = b_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Preuve. Soit $f_0 : k\{x_1, \dots, x_n\} \longrightarrow B$ l'unique morphisme d'algèbres tel que $f_0(x_i) = b_i, \forall i = 1, \dots, n$. Alors par hypothèse $f_0(P_i) = 0, \forall i \in I$, et f_0 étant un morphisme d'algèbres, il s'annule sur l'idéal engendré par les P_i , d'où le résultat par passage au quotient. \square

Remarques sur les notations. Souvent dans l'écriture $k\langle x_1, \dots, x_n \mid P_i = 0, \forall i \in I \rangle$, on remplace l'expression $P_i = 0$ par une expression équivalente. par exemple

$$k\langle x, y \mid xy - yx = 0 \rangle = k\langle x, y \mid xy = yx \rangle$$

Exemple 1. On a un isomorphisme de k -algèbres

$$k[x_1, \dots, x_n] \cong k\{x_1, \dots, x_n\} / (x_i x_j = x_j x_i, \forall i, j)$$

que l'on construit en utilisant les propriétés universelles des deux algèbres considérées.

Exemple 2 : polynômes de Laurent. Considérons l'algèbre $A = k\langle x, y \mid yx = 1 = xy \rangle$. Alors A est isomorphe à l'algèbre du groupe monogène infini (qui est isomorphe à \mathbb{Z}). On la note $k[x, x^{-1}]$, c'est l'algèbre des polynômes de Laurent en une variable (une k -base est $(x^n)_{n \in \mathbb{Z}}$).

Exemple 3 : algèbres diagonales. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a un isomorphisme de k -algèbres :

$$k\langle x_1, \dots, x_n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i x_j = \delta_{ij} x_i, \forall i, j \rangle \cong k^n$$

L'isomorphisme est construit en utilisant la base canonique de k^n .

Exemple 4 : algèbres de matrices, 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a un isomorphisme de k -algèbres :

$$k\langle x_{ij}, 1 \leq i, j \leq n \mid x_{ij} x_{kl} = \delta_{jk} x_{il}, \forall i, j, k, l, \sum_{i=1}^n x_{ii} = 1 \rangle \cong M_n(k)$$

En effet : Les relations imposées assurent que tout élément de notre algèbre (appelons-la A) est combinaison linéaire des x_{ij} , et ainsi A est de dimension finie, avec $\dim(A) \leq n^2$. Considérons maintenant, pour $1 \leq i, j \leq n$, dans la matrice élémentaire $E_{ij} \in M_n(k)$ (qui vaut 0 partout sauf sur la i -ème ligne et la j -ème colonne, où elle vaut 1). Les matrices élémentaires satisfont aux relations

$$E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}, \forall i, j, k, l, \quad \sum_{i=1}^n E_{ii} = 1$$

et donc il existe un unique morphisme d'algèbres $\phi : A \longrightarrow M_n(k)$ tel que $\phi(x_{ij}) = E_{ij}$, $\forall i, j$. Le morphisme ϕ est bien sûr surjectif, donc $\dim(A) \geq n^2$, et finalement $\dim(A) = n^2$ et ϕ est un isomorphisme.

Exemple 5 : algèbres de matrices, 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que k contient une racine primitive n -ième de l'unité ω . Alors

$$k\langle x, y \mid x^n = 1 = y^n, yx = \omega xy \rangle \cong M_n(k)$$

En effet : Les relations imposées assurent que tout élément de notre algèbre (appelons-la A) est combinaison linéaire des $x^i y^j$, $0 \leq i, j \leq n-1$, et ainsi A est de dimension finie, avec $\dim(A) \leq n^2$. Soit V un k -espace vectoriel de dimension n , de base $(e_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$. On définit alors deux endomorphismes linéaires $f, g : V \longrightarrow V$ par $f(e_i) = \omega^i e_i$ et

$g(e_i) = e_{i+1}, \forall i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Les endomorphismes f, g de $\text{End}_k(V)$ satisfont aux relations qui définissent A , et on montre alors le résultat d'une manière analogue à l'exemple précédent.

Exemple 6 : l'algèbre des quaternions. On considère la \mathbb{R} -algèbre

$$\mathbb{H} = \mathbb{R}\langle x, y \mid x^2 = -1 = y^2, yx = -xy \rangle$$

Alors \mathbb{H} est une \mathbb{R} -algèbre de dimension 4 et est un corps non commutatif, appelé le corps des quaternions.

En effet : Les relations imposées dans \mathbb{H} assurent que tout élément est combinaison linéaire des $1, x, y, xy$, et ainsi \mathbb{H} est de dimension finie, avec $\dim(\mathbb{H}) \leq 4$. Considérons les éléments

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

de la \mathbb{R} -algèbre $M_2(\mathbb{C})$. Alors $A^2 = -I = B^2$ et $AB = -BA$, donc il existe un unique morphisme de \mathbb{R} -algèbres $\mathbb{H} \rightarrow M_2(\mathbb{C})$ qui envoie x sur A et y sur B . Les éléments I, A, B, AB sont linéairement indépendants, et on en déduit bien que $\dim(\mathbb{H}) = 4$. La non-commutativité de \mathbb{H} est claire. En écrivant $x = i, y = j$ et $xy = k$, un élément h de \mathbb{H} s'écrit $h = a + ib + jc + kd$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) et si $h \neq 0$, l'élément $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{-1}(a - ib - jc - kd)$ est inverse de h . \square

Autres exemples-exercices. (a) Notons C_n le groupe multiplicatif d'ordre n . Alors

$$k\langle x \mid x^n = 1 \rangle \cong k[C_n]$$

$$k\langle x, y \mid x^n = 1 = y^m, yx = xy \rangle \cong k[C_n \times C_m]$$

et si k contient une racine primitive n -ième de l'unité,

$$k\langle x \mid x^n = 1 \rangle \cong k^n$$

(b) Soit D_n le groupe diédral d'ordre $2n$. Alors

$$k\langle x, y \mid x^n = 1 = y^2, yx = x^{n-1}y \rangle \cong k[D_n]$$

(c) L'algèbre $k\langle x \mid x^n = 0 \rangle$ est de dimension n .

(d) L'algèbre

$$k\langle x_1, x_2, y_1, y_2 \mid y_i x_j = \delta_{ij}, x_1 y_1 + x_2 y_2 = 1 \rangle$$

est de dimension infinie.

4.3 Le plan quantique et le q -calcul

Soit $q \in k^*$. On définit une algèbre

$$k_q[x, y] = k\langle x, y \mid yx = qxy \rangle$$

que l'on appelle l'**algèbre des fonctions polynomiales sur le plan quantique**, ou **plan quantique** plus simplement (quand $q = 1$, $k_1[x, y] = k[x, y]$ est l'algèbre des polynômes sur le plan usuel k^2).

Théorème 4.3.1 (a) Soient A une k -algèbre et $a, b \in B$ tels que $ba = qab$. Il existe une unique morphisme de k -algèbres

$$f : k_q[x, y] \longrightarrow B$$

tel que $f(x) = a$ et $f(y) = b$.

(b) La famille $\{x^i y^j, i, j \in \mathbb{N}\}$ est une base de $k_q[x, y]$.

Preuve. L'assertion (a) est une conséquence immédiate de la définition de $k_q[x, y]$. La relation assure $yx = qxy$ assure que tout élément de $k_q[x, y]$ est une combinaison linéaire des $x^i y^j$, $i, j \in \mathbb{N}$, et pour montrer (b), il reste à voir que ces éléments sont linéairement indépendants. Pour montrer cela on construit une représentation concrète de $k_q[x, y]$. Soit V l'espace vectoriel de base les $e_{(i,j)}$, $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Soient σ et τ les éléments de $\text{End}_k(V)$ définis par

$$\sigma(e_{(i,j)}) = e_{(i+1,j)}, \quad \tau(e_{(i,j)}) = q^i e_{(i,j+1)}, \quad \forall i, j$$

On a $\tau \circ \sigma = q \sigma \circ \tau$, et il existe donc un unique morphisme d'algèbres $k_q[x, y] \longrightarrow \text{End}_k(V)$ qui envoie x sur σ et y sur τ . On vérifie alors sans difficulté que les $\sigma^i \tau^j$, $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, sont des éléments linéairement indépendants de $\text{End}_k(V)$, et on a le résultat. \square

On veut maintenant obtenir une généralisation de la forme du binôme pour des variables qui q -commutent. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$(n)_q = 1 + q + \dots + q^{n-1} = (\text{si } q \neq 1) \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

On convient que $(0)_q = 0$. On définit alors les q -factorielles

$$(n)!_q = (1)_q \cdots (n)_q = \frac{(q-1) \cdots (q^n - 1)}{(q-1)^n}$$

avec la convention habituelle $(0)!_q = 1$ et les q -polynômes de Gauss ($0 \leq k \leq n$)

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(n)!_q}{(n-k)!_q (k)!_q}$$

Proposition 4.3.2 Soit $k \in \{0, \dots, n\}$

(a) $\binom{n}{k}_q$ est un polyôme en q à coefficients entiers.

(b) On a

$$\binom{n}{k}_q = \binom{n}{n-k}_q$$

(c) On a les q -identités de Pascal ($0 \leq k \leq n-1$) :

$$\binom{n}{k}_q = \binom{n-1}{k-1}_q + q^k \binom{n-1}{k}_q$$

Preuve. Les formules (b) et (c) sont des calculs immédiats. La formule (a) se montre par récurrence à partir de (c). \square

Proposition 4.3.3 (La q -formule du binôme) Soit A une k -algèbre et $a, b \in A$ tels que $ba = qab$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_q a^k b^{n-k}$$

Preuve. Le formule se montre par récurrence sur n en utilisant les q -relations de Pascal. \square

Le corollaire suivant sera utile pour construire les algèbres de Taft.

Corollaire 4.3.4 Soit A une k -algèbre et $a, b \in A$ tels que $ba = qab$. Si $q \neq 1$ est une racine n -ième de l'unité, on a $(a+b)^n = a^n + b^n$.

Preuve. Pour $1 \leq k \leq n-1$, on a

$$\binom{n}{k}_q = 0 \quad \text{car} \quad (n)_q = 0$$

et donc la q -formule du binôme donne le résultat. \square

Commentaires

On peut trouver de plus amples informations sur le q -calcul dans [14] ou [13].

Chapitre 5

Algèbres de Hopf

On introduit dans ce chapitre les objets mathématiques correspondant aux groupes quantiques : les algèbres de Hopf. Dans la suite k est un corps commutatif. On note simplement $\otimes = \otimes_k$.

5.1 Algèbres et cogèbres

Commençons par reformuler la notion d'algèbre. Le produit bilinéaire $A \times A \rightarrow A$ induit une application linéaire et les axiomes d'associativité et d'élément unité se traduisent aisément en termes de produit tensoriels d'applications linéaires. La définition précise est la suivante.

Définition 5.1.1 Une k -algèbre $A = (A, m, u)$ est un triplet où A est un k -espace vectoriel et $m : A \otimes A \rightarrow A$ et $u : k \rightarrow A$ sont des applications k -linéaires telles que les diagrammes suivant soient commutatifs :

Associativité :

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{m \otimes \text{id}_A} & A \otimes A \\
 \downarrow \text{id}_A \otimes m & & \downarrow m \\
 A \otimes A & \xrightarrow{m} & A
 \end{array}$$

Unité :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A & & \\
 & \text{id}_A \otimes u & \rightarrow & A \otimes A & \leftarrow u \otimes \text{id}_A \\
 & \searrow & & \downarrow m & \swarrow \\
 A & & & A & & A \\
 & \swarrow & & \downarrow \text{id}_A & \searrow & \\
 & & & A & &
 \end{array}$$

Pour définir les cogèbres, on renverse simplement le sens des morphismes dans la définition précédente.

Définition 5.1.2 Une *k-cogèbre* $C = (C, \Delta, \varepsilon)$ est un triplet où C est un k -espace vectoriel et $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$ et $\varepsilon : C \rightarrow k$ sont des applications k -linéaires telles que les diagrammes suivant soient commutatifs :

Co-associativité :

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes C \\ \downarrow \Delta & & \downarrow \Delta \otimes \text{id}_C \\ C \otimes C & \xrightarrow{\text{id}_C \otimes \Delta} & C \otimes C \otimes C \end{array}$$

Co-unité :

$$\begin{array}{ccccc} k \otimes C & \xleftarrow{\text{id}_C \otimes \varepsilon} & C \otimes C & \xrightarrow{\varepsilon \otimes \text{id}_C} & C \otimes k \\ & \searrow & \uparrow \Delta & \swarrow & \\ & & C & & \end{array}$$

L'application Δ est appelée la **comultiplication** (ou le **coproduit**) de C , et l'application ε est appelée la **co-unité** de C .

Exemples (a) Le corps de base k est lui-même une cogèbre.

(b) Soit X un ensemble. Considérons $k^{(X)}$ l'espace vectoriel des fonctions à support fini sur X . Alors les formules

$$\Delta(e_x) = e_x \otimes e_x, \quad \varepsilon(e_x) = 1, \quad \forall x \in X$$

définissent sur structure de cogèbre sur $k^{(X)}$. On note $k[X]$ cette k -cogèbre.

(c) $k^{(\mathbb{N})}$ est une cogèbre pour

$$\Delta(e_n) = \sum_{i+j=n} e_i \otimes e_j, \quad \varepsilon(e_i) = \delta_{0i}$$

(d) La **cogèbre opposée**. Soit $C = (C, \Delta, \varepsilon)$ une cogèbre. Soit $\Delta^{\text{op}} = \tau \circ \Delta$, où $\tau = \tau_{C,C} : C \otimes C \rightarrow C \otimes C$ est l'isomorphisme défini par $\tau(x \otimes y) = y \otimes x$ (voir chapitre 3). Alors $(C, \Delta^{\text{op}}, \varepsilon)$ est une cogèbre, appelée la cogèbre opposée de C et notée C^{cop} .

Définition 5.1.3 On dit qu'un cogèbre $C = (C, \Delta, \varepsilon)$ est **cocommutative** lorsque $\Delta^{\text{op}} = \Delta$.

Exemple. Les cogèbres précédentes $k[X]$ et $k^{(\mathbb{N})}$ sont cocommutatives.

Pour définir les morphismes de cogèbres, on dualise simplement la notion de morphisme d'algèbres. Un morphisme d'algèbres $f : (A, m_A, u_A) \rightarrow (B, m_B, u_B)$ est une application linéaire $f : A \rightarrow B$ telle que $f \circ m_A = m_B \circ (f \otimes f)$ et $f \circ u_A = u_B$. Cela mène à la définition suivante.

Définition 5.1.4 Un morphisme de k -cogèbres $f : (C, \Delta, \varepsilon) \longrightarrow (C', \Delta', \varepsilon)$ est une application linéaire $f : C \longrightarrow C'$ telle que

$$\Delta' \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta \quad \text{et} \quad \varepsilon' \circ f = \varepsilon$$

c'est à dire que les diagrammes suivant sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & C' \\ \downarrow \Delta & & \downarrow \Delta' \\ C \otimes C & \xrightarrow{f \otimes f} & C' \otimes C' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & C' \\ \searrow \varepsilon & & \swarrow \varepsilon' \\ & k & \end{array}$$

On vérifie sans difficulté que la composée de deux morphismes de cogèbres est encore un morphisme de cogèbres, et on obtient ainsi la **catégorie des k -cogèbres**, notée \mathbf{Cog}_k .

Proposition 5.1.5 Le dual d'une cogèbre $C = (C, \Delta, \varepsilon)$ est une algèbre, avec unité $u = \varepsilon$ et produit défini par la composée

$$C^* \otimes C^* \longrightarrow (C \otimes C)^* \xrightarrow{\Delta^*} C^*$$

C'est-à-dire que pour $\phi, \psi \in C^*$, le produit de ϕ et ψ est défini par $\phi \cdot \psi = (\phi \otimes \psi) \circ \Delta$. Si $f : C \longrightarrow D$ est un morphisme de cogèbres, alors $f^* : D^* \longrightarrow C^*$ est un morphisme d'algèbres.

Preuve. La bilinéarité du produit est immédiate. Soient $\phi, \psi, \chi \in C^*$. On a

$$\begin{aligned} (\phi \cdot \psi) \cdot \chi &= ((\phi \cdot \psi) \otimes \chi) \circ \Delta = (((\phi \otimes \psi) \circ \Delta) \otimes \chi) \circ \Delta \\ &= ((\phi \otimes \psi \otimes \chi) \circ (\Delta \otimes \text{id}_C)) \circ \Delta = (\phi \otimes \psi \otimes \chi) \circ (\Delta \otimes \text{id}_C) \circ \Delta \\ &= (\phi \otimes \psi \otimes \chi) \circ (\text{id}_C \otimes \Delta) \circ \Delta = (\phi \otimes ((\psi \otimes \chi) \circ \Delta)) \circ \Delta \\ &= (\phi \otimes (\psi \cdot \chi)) \circ \Delta = \phi \cdot (\psi \cdot \chi) \end{aligned}$$

ce qui donne l'associativité. On a aussi

$$\phi \cdot \varepsilon = (\phi \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \phi \circ (\text{id}_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \phi$$

et de même $\varepsilon \cdot \phi = \phi$. Si $f : C \longrightarrow D$ est un morphisme de cogèbres, on a

$$\begin{aligned} f^*(\phi \cdot \psi) &= (\phi \cdot \psi) \circ f = (\phi \otimes \psi) \circ \Delta_D \circ f \\ &= (\phi \otimes \psi) \circ (f \otimes f) \circ \Delta_C = ((\phi \circ f) \otimes (\psi \circ f)) \circ \Delta_C = f^*(\phi) \cdot f^*(\psi) \end{aligned}$$

et $f^*(\varepsilon_D) = \varepsilon_D \circ f = \varepsilon_C : f^*$ est un morphisme d'algèbres. \square

Proposition 5.1.6 Le dual d'une algèbre de dimension finie $A = (A, m, u)$ est une cogèbre, avec co-unité $u \in A \subset (A^*)^*$ et comultiplication définie par la composée

$$\Delta : A^* \xrightarrow{m^*} (A \otimes A)^* \xrightarrow{\simeq} A^* \otimes A^*$$

Si $\phi \in A^*$, alors $\Delta(\phi) = \sum_{i=1}^n \psi_i \otimes \chi_i$, où $\psi_i, \chi_i \in A^*$ vérifient $\phi(ab) = \sum_{i=1}^n \psi_i(a)\chi_i(b)$, $\forall a, b \in A$. Si $f : A \longrightarrow B$ est un morphisme d'algèbres, alors $f^* : B^* \longrightarrow A^*$ est un morphisme de cogèbres.

Preuve. La formule donnée découle directement de la définition de Δ . Soit $\phi \in A^*$, avec $\Delta(\phi) = \sum_{i=1}^n \psi_i \otimes \chi_i$. Pour $1 \leq i \leq n$, considérons des éléments $\alpha_j^i, \beta_j^i \in A^*$, $1 \leq j \leq m_i$, $\gamma_k^i, \sigma_k^i \in A^*$, $1 \leq k \leq p_i$, où

$$\Delta(\psi_i) = \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_j^i \otimes \beta_j^i, \quad \Delta(\chi_i) = \sum_{k=1}^{p_i} \gamma_k^i \otimes \sigma_k^i$$

On a alors

$$(\Delta \otimes \text{id}_{A^*}) \circ \Delta(\phi) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_j^i \otimes \beta_j^i \otimes \chi_i \quad \text{et} \quad (\text{id}_{A^*} \otimes \Delta) \circ \Delta(\phi) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{p_i} \psi_i \otimes \gamma_k^i \otimes \sigma_k^i$$

Pour comparer ces deux éléments de $A^* \otimes A^* \otimes A^*$, il suffit de les voir, via l'inclusion $A^* \otimes A^* \otimes A^* \subset (A \otimes A \otimes A)^*$, comme des formes linéaires sur $A \otimes A \otimes A$. Pour $a, b, c \in A$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} (\alpha_j^i \otimes \beta_j^i \otimes \chi_i)(a \otimes b \otimes c) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_j^i(a) \beta_j^i(b) \chi_i(c) = \sum_{i=1}^n \phi_i(ab) \chi_i(c) \\ &= \phi((ab)c) = \phi(a(bc)) = \sum_{i=1}^n \psi_i(a) \chi_i(bc) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{p_i} \psi_i(a) \gamma_k^i(b) \sigma_k^i(c) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{p_i} (\psi_i \otimes \gamma_k^i \otimes \sigma_k^i)(a \otimes b \otimes c) \end{aligned}$$

ce qui assure la co-associativité de Δ . La co-unité est par définition $\varepsilon : A^* \longrightarrow k$, $\phi \longmapsto \phi(1)$. En reprenant les notations précédentes, on a

$$(\varepsilon \otimes \text{id}_{A^*}) \circ \Delta(\phi) = \sum_{i=1}^n \phi_i(1) \chi_i = \phi = \sum_{i=1}^n \chi_i(1) \phi_i = (\text{id}_{A^*} \otimes \varepsilon) \circ \Delta(\phi)$$

(car $\phi(a) = \phi(a1) = \phi(1a)$) et l'axiome de co-unité est bien vérifié.

Soit $f : A \longrightarrow B$ un morphisme d'algèbres et $\phi \in B^*$ avec $\Delta_{B^*}(\phi) = \sum_{i=1}^n \psi_i \otimes \chi_i$. Pour $a, a' \in A$, on a $\phi \circ f(aa') = \phi(f(a)f(a')) = \sum_{i=1}^n \psi_i(f(a)) \chi_i(f(a'))$, et donc

$$\Delta_{A^*}(f^*(\phi)) = \sum_{i=1}^n (\psi_i \circ f) \otimes (\chi_i \circ f) = \sum_{i=1}^n f^*(\psi_i) \otimes f^*(\chi_i) = (f^* \otimes f^*) \circ \Delta_{B^*}(\phi)$$

Enfin on a

$$\varepsilon_{A^*}(f^*(\phi)) = \phi(f(1_A)) = \phi(1_B) = \varepsilon_{B^*}(\phi)$$

et f^* est donc un morphisme de cogèbres. \square

Il est clair que les constructions des propositions 5.1.5 et 5.1.6 définissent des foncteurs, qui sont des anti-équivalences inverses en restriction aux algèbres et cogèbres de dimension finie.

Exemple : la cogèbre matricielle. Considérons l'algèbre des matrices $M_n(k)$. La proposition fournit une structure de cogèbre sur $M_n(k)^*$. Notons E_{ij} les matrices élémentaires de $M_n(k)$ et x_{ij} les éléments de la base duale. On vérifie alors que

$$\Delta(x_{ij}) = \sum_{k=1}^n x_{ik} \otimes x_{kj} \quad \text{et} \quad \varepsilon(x_{ij}) = \delta_{ij}$$

La bigèbre $M_n(k)^*$ n'est pas cocommutative si $n > 1$.

Définition 5.1.7 Soit $C = (C, \Delta, \varepsilon)$ une cogèbre. Un **co-idéal** de C est un sous-espace vectoriel $I \subset C$ tel que

$$\Delta(I) \subset I \otimes C + C \otimes I \quad \text{et} \quad \varepsilon(I) = 0$$

Une **sous-cogèbre** de C est un sous-espace $D \subset C$ tel que $\Delta(D) \subset D \otimes D$. Il est clair que $(D, \Delta|_D, \varepsilon|_D)$ est une cogèbre.

Proposition 5.1.8 Soient C et C' des cogèbres, et $f : C \rightarrow C'$ un morphisme de cogèbres.

- (a) $\text{Im}(f)$ est une sous-cogèbre de C' et $\text{Ker}(f)$ est un co-idéal de C .
- (b) Si I est un co-idéal de C , il existe sur C/I une unique structure de cogèbre telle que la surjection canonique $p : C \rightarrow C/I$ soit un morphisme de cogèbres.
- (c) f induit un isomorphisme de cogèbres $C/\text{Ker}(f) \cong \text{Im}(f)$.

Preuve. (a) On a

$$\Delta'(f(C)) = (f \otimes f)(\Delta(C)) \subset (f \otimes f)(C \otimes C) = f(C) \otimes f(C)$$

ce qui montre que $\text{Im}(f)$ est une sous-cogèbre de C' . Pour $x \in \text{Ker}(f)$, on a $\varepsilon(x) = \varepsilon'(f(x)) = 0$ et

$$0 = \Delta'(f(x)) = (f \otimes f)(\Delta(x)) \Rightarrow \Delta(x) \in \text{Ker}(f \otimes f) = \text{Ker}(f) \otimes C + C \otimes \text{Ker}(f)$$

ce qui montre que $\text{Ker}(f)$ est bien un co-idéal.

(b) L'application linéaire $(p \otimes p) \circ \Delta : C \rightarrow C/I \otimes C/I$ s'annule sur I , et donc induit une unique application linéaire $\bar{\Delta} : C/I \rightarrow C/I \otimes C/I$ telle $\bar{\Delta} \circ p = (p \otimes p) \circ \Delta$. De même la co-unité induit une application linéaire $\bar{\varepsilon} : C/I \rightarrow k$ telle que $\bar{\varepsilon} \circ p = \varepsilon$. On vérifie sans difficulté que $(C/I, \bar{\Delta}, \bar{\varepsilon})$ est une cogèbre.

(c) L'application linéaire f induit un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $C/\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$, dont on vérifie facilement qu'il est un morphisme de cogèbres. Il est ensuite facile de vérifier que l'inverse d'un morphisme de cogèbres bijectif est lui-même un morphisme de cogèbres. \square

Proposition 5.1.9 Les intersections et les sommes de sous-cogèbres sont des sous-cogèbres.

Preuve. L'assertion sur les sommes est immédiate, alors que l'assertion sur les intersections provient directement du lemme 3.2.9. \square

Les notations de Sweedler. On introduit maintenant les notations de Sweedler, très utiles pour faire des calculs dans les cogèbres. Soit $C = (C, \Delta, \varepsilon)$ une cogèbre. Pour $x \in C$, on notera

$$\Delta(x) = \sum x_{(1)} \otimes x_{(2)}$$

L'axiome de co-associativité se traduit par l'équation et la notation

$$\sum \Delta(x_{(1)}) \otimes x_{(2)} = x_{(1)} \otimes \Delta(x_{(2)}) = x_{(1)} \otimes x_{(2)} \otimes x_{(3)}$$

et plus généralement

$$\Delta^{(n)}(x) = \sum x_{(1)} \otimes \cdots \otimes x_{(n)}$$

où $\Delta^{(n)} : C \longrightarrow C^{\otimes n}$ est le n -ième itéré de Δ . L'axiome de co-unité se traduit par

$$\sum \varepsilon(x_{(1)})x_{(2)} = x = \sum \varepsilon(x_{(2)})x_{(1)}$$

Enfin $f : C \longrightarrow C'$ est un morphisme de cogèbres si et seulement si

$$\forall x \in C, \sum f(x)_{(1)} \otimes f(x)_{(2)} = f(x_{(1)}) \otimes f(x_{(2)}) \quad , \quad \varepsilon'(f(x)) = \varepsilon(x)$$

Proposition-Définition 5.1.10 (Produit tensoriel de cogèbres) Soient $C = (C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ et $D = (D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ des cogèbres. Alors les applications

$$\Delta = (\text{id}_C \otimes \tau_{C,D} \otimes \text{id}_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D) : C \otimes D \longrightarrow C \otimes D \otimes C \otimes D$$

$$\varepsilon = \varepsilon_C \otimes \varepsilon_D : C \otimes D \longrightarrow k$$

munissent $C \otimes D$ d'une structure de cogèbre, appelée **le produit tensoriel des cogèbres** C et D

Preuve. On vérifie directement les axiomes de cogèbre à partir des morphismes donnés, ou on peut aussi utiliser les notations de Sweedler. \square

5.2 Bigèbres

Une bigèbre est à la fois une algèbre et une cogèbre, avec une condition de compatibilité naturelle.

Définition 5.2.1 Une k -bigèbre est un quintuplet $B = (B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ où (B, m, u) est une algèbre, (B, Δ, ε) est une cogèbre, et où $\Delta : B \longrightarrow B \otimes B$ et $\varepsilon : B \longrightarrow k$ sont des morphismes d'algèbres.

Avec les notations de Sweedler, les axiomes se traduisent par

$$\forall x, y \in B, \quad \Delta(xy) = \sum (xy)_{(1)} \otimes (xy)_{(2)} = \sum x_{(1)}y_{(1)} \otimes x_{(2)}y_{(2)}$$

Exemple : la bigèbre d'un monoïde. Soit M un monoïde. Considérons $k[M]$, l'algèbre (de convolution) de M . Alors $k[M]$ admet une unique structure de bigèbre telle que $\forall x \in M$,

$$\Delta(e_x) = e_x \otimes e_x, \quad \varepsilon(e_x) = 1$$

On dit que $k[M]$ est la bigèbre du monoïde M . C'est une bigèbre cocommutative.

Le lemme suivant est très utile pour construire des structures de bigèbre sur une algèbre définie par générateurs et relations.

Lemme 5.2.2 *Soit $A = (A, m, u)$ une algèbre et soient $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$ et $\varepsilon : A \rightarrow k$ des morphismes d'algèbres. Soient $(a_i)_{i \in I}$ une famille de générateurs de A (comme algèbre). Si $\forall i \in I$, on a*

$$(\Delta \otimes \text{id}_A) \circ \Delta(a_i) = (\text{id}_A \otimes \Delta) \circ \Delta(a_i) \text{ et } (\varepsilon \otimes \text{id}_A) \circ \Delta(a_i) = a_i = (\text{id}_A \otimes \varepsilon) \circ \Delta(a_i),$$

alors $(A, m, u, \Delta, \varepsilon)$ est une bigèbre.

Preuve. On doit montrer que $\forall a \in A$, on a

$$(\Delta \otimes \text{id}_A) \circ \Delta(a) = (\text{id}_A \otimes \Delta) \circ \Delta(a) \text{ et } (\varepsilon \otimes \text{id}_A) \circ \Delta(a) = a = (\text{id}_A \otimes \varepsilon) \circ \Delta(a)$$

Les applications $(\Delta \otimes \text{id}_A) \circ \Delta$, $(\text{id}_A \otimes \Delta) \circ \Delta$, $(\varepsilon \otimes \text{id}_A) \circ \Delta$, et $(\text{id}_A \otimes \varepsilon) \circ \Delta$ sont des morphismes d'algèbres, donc il suffit de vérifier ces identités pour des générateurs de l'algèbre A . \square

Exemple : bigèbre des polynômes. Soient

$$\Delta : k[x_1, \dots, x_n] \rightarrow k[x_1, \dots, x_n] \otimes k[x_1, \dots, x_n] \quad \text{et} \quad \varepsilon : k[x_1, \dots, x_n] \rightarrow k$$

les uniques morphismes d'algèbres tels que

$$\Delta(x_i) = 1 \otimes x_i + x_i \otimes 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon(x_i) = 0, \quad \forall i$$

Ils munissent $k[x_1, \dots, x_n]$ d'une structure de bigèbre (commutative et cocommutative). Cet exemple s'adapte d'une manière évidente aux algèbres libres $k\{x_1, \dots, x_n\}$, et on obtient une bigèbre cocommutative.

Exemple : bigèbre des matrices. Notons $\mathcal{O}(M_n(k))$ l'algèbre de polynômes

$$\mathcal{O}(M_n(k)) = k[x_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$$

Les morphismes d'algèbres

$$\begin{aligned} \Delta : \mathcal{O}(M_n(k)) &\rightarrow \mathcal{O}(M_n(k)) \otimes \mathcal{O}(M_n(k)) \\ x_{ij} &\mapsto \sum_{k=1}^n x_{ik} \otimes x_{kj} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varepsilon : \mathcal{O}(M_n(k)) &\longrightarrow k \\ x_{ij} &\longmapsto \delta_{ij} \end{aligned}$$

munissent $\mathcal{O}(M_n(K))$ d'une structure de bigèbre commutative et non cocommutative si $n \geq 2$. L'exemple s'adapte de manière immédiate à l'algèbre libre $k\{x_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq n}$, ce qui donne une bigèbre ni commutative ni cocommutative.

Définition 5.2.3 Soient B et B' des bigèbres. Un **morphisme de bigèbres** $B \longrightarrow B'$ est une application linéaire qui est à la fois un morphisme d'algèbres et de cogèbres.

On obtient ainsi la catégorie des k -bigèbres, notée \mathbf{Big}_k .

Définition 5.2.4 Soit $B = (B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ une bigèbre. Un **bi-idéal** de C est un idéal (bilatère) $I \subset B$ qui est aussi un co-idéal.

Une **sous-bigèbre** de B est une sous-algèbre $A \subset B$ qui est aussi une sous-cogèbre.

Le résultat suivant est une conséquence de la proposition 5.1.8.

Proposition 5.2.5 Soient B et B' des bigèbres, et $f : B \longrightarrow B'$ un morphisme de bigèbres.

(a) $\text{Im}(f)$ est une sous-bigèbre de B' et $\text{Ker}(f)$ est un bi-idéal de B .

(b) Si I est un bi-idéal de B , il existe sur B/I une unique structure de bigèbre telle que la surjection canonique $p : B \longrightarrow B/I$ soit un morphisme de bigèbres.

(c) f induit un isomorphisme de bigèbres $B/\text{Ker}(f) \cong \text{Im}(f)$.

Les constructions duales des propositions 5.1.5 et 5.1.6 induisent une dualité sur la catégorie des bigèbres de dimension finie.

Proposition 5.2.6 Soit $B = (B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ une bigèbre de dimension finie. Alors les structures respectives d'algèbre et de cogèbre sur B^* données par les propositions 5.1.5 et 5.1.6 munissent B^* d'une structure de bigèbre. Le foncteur contravariant $B \longmapsto B^*$ définit une dualité sur la catégorie des bigèbres de dimension finie.

Preuve. Rappelons que dans B^* on a, pour $\phi, \psi \in B^*$,

$$\phi \cdot \psi = (\phi \otimes \psi) \circ \Delta, \quad \phi \cdot \psi(b) = \sum \phi(b_{(1)})\psi(b_{(2)})$$

et

$$\Delta_{B^*}(\phi) = \sum \phi_{(1)} \otimes \phi_{(2)}, \quad \text{avec } \forall a, b \in B, \quad \phi(ab) = \sum \phi_{(1)}(a)\phi_{(2)}(b)$$

On a

$$\begin{aligned} \phi \cdot \psi(ab) &= \sum \phi(a_{(1)}b_{(1)})\psi(a_{(2)}b_{(2)}) = \sum \phi_{(1)}(a_{(1)})\phi_{(2)}(b_{(1)})\psi_{(1)}(a_{(2)})\psi_{(2)}(b_{(2)}) \\ &= \sum \phi_{(1)}(a_{(1)})\psi_{(1)}(a_{(2)})\phi_{(2)}(b_{(1)})\psi_{(2)}(b_{(2)}) \end{aligned}$$

et donc

$$\Delta_{B^*}(\phi \cdot \psi) = \sum \phi_{(1)} \cdot \psi_{(1)} \otimes \phi_{(2)} \cdot \psi_{(2)} = \Delta_{B^*}(\phi) \Delta_{B^*}(\psi)$$

De plus $\Delta_{B^*}(\varepsilon) = \varepsilon \otimes \varepsilon$ car ε est un morphisme d'algèbres. Ainsi Δ_{B^*} est un morphisme d'algèbres. On a aussi

$$\varepsilon_{B^*}(\phi \cdot \psi) = \phi \cdot \psi(1) = \phi(1)\psi(1) = \varepsilon_{B^*}(\phi)\varepsilon_{B^*}(\psi) \text{ et } \varepsilon_{B^*}(\varepsilon) = \varepsilon(1) = 1$$

donc ε_{B^*} est un morphisme d'algèbres, et B^* est bien une bigèbre. On a bien le foncteur contravariant annoncé. Il reste à voir que pour toute bigèbre de dimension finie B , l'isomorphisme canonique $i : B \rightarrow B^{**}$ (qui est fonctoriel) est bien un isomorphisme de bigèbres. Soient $a, b \in B$ et $\phi, \psi \in B^*$. On a

$$\begin{aligned} i(ab)(\phi) &= \phi(ab) = \sum \phi_{(1)}(a)\phi_{(2)}(b) = \sum i(a)(\phi_{(1)})i(b)(\phi_{(2)}) \\ &= (i(a) \otimes i(b)) \circ \Delta_{B^*}(\phi) = i(a) \cdot i(b)(\phi), \end{aligned}$$

$$i(1)(\phi) = \phi(1) = \varepsilon_{B^*}(\phi) \implies i(1) = 1_{B^{**}},$$

$$\begin{aligned} \Delta_{B^{**}}(i(a)) &= \sum i(a_{(1)}) \otimes i(a_{(2)}) = (i \otimes i) \circ \Delta_B(a) \quad \text{car } i(a)(\phi \cdot \psi) = \sum \phi(a_{(1)})\psi(a_{(2)}), \\ \varepsilon_{B^{**}}(i(a)) &= i(a)1_{B^*} = i(a)(\varepsilon) = \varepsilon(a), \end{aligned}$$

et donc on a notre résultat. \square

Exemple : la bigèbre des fonctions sur un monoïde fini. Soit M un monoïde fini. On munit $k^{(M)}$ d'une structure de bigèbre grâce aux morphismes d'algèbres (induits par le produit de M et son unité)

$$\Delta : k^{(M)} \longrightarrow k^{(M)} \otimes k^{(M)}, \quad \Delta(e_x) = \sum_{yz=x} e_y \otimes e_z$$

$$\varepsilon : k^{(M)} \longrightarrow k, \quad f \longmapsto f(1)$$

On vérifie sans difficulté que l'on a un isomorphisme de bigèbres $k^{(M)} \cong k[M]^*$, qui envoie e_x sur e_x^* .

On termine le paragraphe par deux constructions classiques, dont les détails sont laissés au lecteur.

Proposition-Définition 5.2.7 *Soient A et B des bigèbres. Alors $A \otimes B$, muni des structures de cogèbre et d'algèbre définies précédemment, est une bigèbre, appelée le produit tensoriel des bigèbres A et B .*

Proposition 5.2.8 *Soit $B = (B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ une bigèbre. Alors*

$$B^{\text{op}} = (B, m^{\text{op}}, u, \Delta, \varepsilon) \quad \text{et} \quad B^{\text{cop}} = (B, m, u, \Delta^{\text{op}}, \varepsilon)$$

sont des bigèbres, ainsi que $B^{\text{opcop}} = (B, m^{\text{op}}, u, \Delta^{\text{op}}, \varepsilon)$.

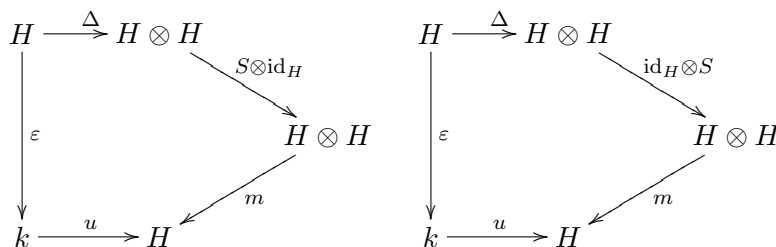
5.3 Antipode et algèbres de Hopf

On a vu que l'algèbre d'un monoïde M admet une structure naturelle de bigèbre. Si M est un groupe, l'existence d'un inverse pour chaque élément de M se traduit par une application $M \rightarrow M$, qui induit une application linéaire $k[M] \rightarrow k[M]$. Les axiomes correspondant à l'axiome d'existence d'inverses se traduisent en termes de diagrammes commutatifs, de la manière suivante.

Définition 5.3.1 Une **Algèbre de Hopf** est un sextuplet $H = (H, m, u, \Delta, \varepsilon, S)$ où $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ est une bigèbre et $S : H \rightarrow H$ est une application linéaire, appelée **l'antipode** de H , telle que

$$m \circ (S \otimes \text{id}_H) \circ \Delta = u \circ \varepsilon = m \circ (\text{id}_H \otimes S) \circ \Delta$$

c'est-à-dire que les diagrammes suivant sont commutatifs :



Avec les notations de Sweedler, les axiomes d'antipode se traduisent par

$$\forall x \in H, \quad \sum S(x_{(1)})x_{(2)} = \varepsilon(x)1 = \sum x_{(1)}S(x_{(2)})$$

Exemple : algèbres de Hopf associées à un groupe. Soit G un groupe. Alors la bigèbre $k[G]$ possède un antipode défini par

$$S(e_x) = e_{x^{-1}}, \quad \forall x \in G$$

et donc est une algèbre de Hopf. Si le groupe G est fini, alors la bigèbre $k^{(G)}$ possède un antipode défini par

$$S(e_x) = e_{x^{-1}}, \quad \forall x \in G$$

et est donc une algèbre de Hopf.

Pour montrer l'unicité de l'antipode, on utilise le résultat suivant, dont la preuve est laissée en exercice.

Proposition-Définition 5.3.2 Soient $A = (A, m, u)$ une algèbre et $C = (C, \Delta, \varepsilon)$ une cogèbre. Pour $f, g \in \text{Hom}_k(C, A)$, on pose

$$f \star g = m \circ (f \otimes g) \circ \Delta$$

et on dit que $f \star g$ est le **produit de convolution** de f et g . Alors $(\text{Hom}_k(C, A), \star, u \circ \varepsilon)$ est une k -algèbre.

Corollaire 5.3.3 *Soit B une bigèbre. Alors id_B est inversible pour \star si et seulement si B admet un antipode. En particulier l'antipode d'une algèbre de Hopf est unique.*

Preuve. La première assertion est une conséquence directe des axiomes d'antipode, et la deuxième est une conséquence de l'unicité de l'inverse éventuel d'un élément dans un monoïde. \square

Il faut maintenant définir les morphismes de groupes. Le résultat suivant est la généralisation du fait qu'un morphisme de groupes préserve les inverses.

Proposition-Définition 5.3.4 *Soient H et H' des algèbres de Hopf. Un **morphisme d'algèbres de Hopf** $f : H \longrightarrow H'$ est un morphisme entre les bigèbres sous-jacentes. On a alors $S' \circ f = f \circ S$.*

Preuve. On va vérifier que $f \circ S$ et $S' \circ f$ sont tous deux inverses de f pour la convolution, ce qui donnera le résultat. Pour $x \in H$, on a

$$(f \circ S) \star f(x) = \sum f(S(x_{(1)}))f(x_{(2)}) = \sum f(S(x_{(1)})x_{(2)}) = \sum f(\varepsilon(x)1) = \varepsilon(x)1$$

$$f \star (S' \circ f)(x) = \sum f(x_{(1)})S'(f(x_{(2)})) = \sum f(x_{(1)})S'(f(x_{(2)})) = \varepsilon'(f(x))1 = \varepsilon(x)1$$

Cela montre que f est bien inversible pour \star , d'inverse $f \circ S = S' \circ f$. \square

On obtient ainsi la **catégorie des k -algèbres de Hopf**, notée Hopf_k . La catégorie des k -algèbres de Hopf de dimension finie est notée $\text{Hopf}_{k,f}$. La dualité dans les algèbre de Hopf sera présentée dans le paragraphe 5.5. Avant cela, on présente quelques propriétés et exemples de base.

Tout d'abord on a les propriétés importantes suivantes de l'antipode.

Théorème 5.3.5 *Soit H une algèbre de Hopf.*

(a) $S : H \longrightarrow H^{\text{op}}$ est un morphisme d'algèbres :

$$\forall x, y \in H, S(xy) = S(y)S(x), \quad S(1) = 1$$

(b) $S : H \longrightarrow H^{\text{cop}}$ est un morphisme de cogèbres :

$$\forall x \in H, \Delta(S(x)) = \sum S(x_{(2)}) \otimes S(x_{(1)}), \quad \varepsilon \circ S = S$$

(c) Si H est commutative ou cocommutative, alors $S^2 = \text{id}_H$.

Preuve. (a) Soient $x, y \in H$. On a

$$\begin{aligned} S(xy) &= \sum \varepsilon(x_{(1)}y_{(1)})S(x_{(2)}y_{(2)}) = \sum S(y_{(1)})S(x_{(1)})x_{(2)}y_{(2)}S(x_{(3)}y_{(3)}) \\ &= \sum S(y_{(1)})S(x_{(1)})S((xy)_{(2)})S((xy)_{(3)}) = \sum S(y_{(1)})S(x_{(1)})\varepsilon(x_{(2)})\varepsilon(y_{(2)}) \\ &= S(y)S(x) \end{aligned}$$

On a aussi $S(1)1 = \varepsilon(1)1 = 1S(1)$, donc $S(1) = 1$.

(b) Soit $x \in H$. On a

$$\begin{aligned}
 \sum S(x_{(2)}) \otimes S(x_{(1)}) &= \sum S(x_{(2)}\varepsilon(x_{(3)})) \otimes S(x_{(1)}) \\
 &= \sum S(x_{(2)}) \otimes S(x_{(1)}) \cdot (\varepsilon(x_{(3)})1 \otimes 1) \\
 &= \sum S(x_{(2)}) \otimes S(x_{(1)}) \cdot (\Delta(x_{(3)}S(x_{(4)}))) \\
 &= \sum S(x_{(2)}) \otimes S(x_{(1)}) \cdot (x_{(3)} \otimes x_{(4)}) \cdot \Delta(S(x_{(5)})) \\
 &= \sum \varepsilon(x_{(2)})1 \otimes S(x_{(1)})x_{(3)} \cdot \Delta(S(x_{(4)})) \\
 &= \sum 1 \otimes S(x_{(1)})x_{(2)} \cdot \Delta(S(x_{(3)})) \\
 &= \Delta(S(x))
 \end{aligned}$$

(c) On montre dans les deux cas que S^2 est inverse de S pour \star . Si H est commutative, on a pour $x \in H$,

$$\begin{aligned}
 S \star S^2(x) &= \sum S(x_{(1)})S(S(x_{(2)})) = \sum S(S(x_{(2)})x_{(1)}) \\
 &= \sum S(x_{(1)}S(x_{(2)})) = S(\varepsilon(x)1) = \varepsilon(x)1
 \end{aligned}$$

et si H est cocommutative, on a

$$\begin{aligned}
 S \star S^2(x) &= \sum S(x_{(1)})S(S(x_{(2)})) = \sum S(x_{(2)})S(S(x_{(1)})) \\
 &= \sum S(S(x_{(1)})x_{(2)}) = S(\varepsilon(x)1) = \varepsilon(x)1
 \end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat. \square

L'antipode étant l'analogue de l'inversion dans les groupes, il est naturel de se demander si on a toujours $S^2 = \text{id}$. On verra un peu plus loin que ce n'est pas toujours vrai. Pire, il y des cas (un peu exotiques quand même) où l'antipode n'est pas bijectif.

Corollaire 5.3.6 *Soit $H = (H, m, u, \Delta, \varepsilon, S)$ une algèbre de Hopf. Alors*

$$H^{\text{opcop}} = (H, m^{\text{op}}, u, \Delta^{\text{op}}, \varepsilon, S)$$

est une algèbre de Hopf et $S : H \longrightarrow H^{\text{opcop}}$ est un morphisme d'algèbres de Hopf. Si de plus l'antipode est bijectif, alors

$$H^{\text{op}} = (H, m^{\text{op}}, u, \Delta, \varepsilon, S^{-1}) \quad \text{et} \quad H^{\text{cop}} = (H, m, u, \Delta^{\text{op}}, \varepsilon, S^{-1})$$

sont des algèbres de Hopf, isomorphes via S .

La preuve est laissée en exercice.

Définition 5.3.7 *Soit $H = (H, m, u, \Delta, \varepsilon, S)$ une algèbre de Hopf. Un idéal de Hopf de H est un bi-idéal $I \subset H$ tel que $S(I) \subset I$.*

Une sous-algèbre de Hopf de H est une sous-bigèbre $A \subset H$ telle que $S(A) \subset A$.

Le résultat suivant est une conséquence de la proposition 5.1.8.

Proposition 5.3.8 *Soient H et H' des bigèbres, et $f : H \rightarrow H'$ un morphisme d'algèbres de Hopf.*

(a) *$\text{Im}(f)$ est une sous-algèbre de Hopf de H' et $\text{Ker}(f)$ est un idéal de Hopf de H .*

(b) *Si $I \subset H$ est un idéal de Hopf, il existe sur H/I une unique structure d'algèbre de Hopf telle que la surjection canonique $p : H \rightarrow H/I$ soit un morphisme d'algèbres de Hopf.*

(c) *f induit un isomorphisme d'algèbres de Hopf $H/\text{Ker}(f) \cong \text{Im}(f)$.*

Proposition-Définition 5.3.9 *Soient A et B des algèbres de Hopf. Alors la bigèbre $A \otimes B$ possède un antipode, qui est $S_A \otimes S_B$. L'algèbre de Hopf obtenue est le **produit tensoriel des algèbres de Hopf** A et B .*

La preuve est laissée en exercice. Le produit tensoriel permet de construire facilement des exemples d'algèbres de Hopf qui ne sont ni commutatives ni cocommutatives. En effet si G est un groupe non abélien, alors l'algèbre de Hopf $k[G] \otimes k^{(G)}$ est de ce type. On obtient donc en particulier une algèbre de Hopf non commutative et non cocommutative en dimension 36. Des exemples plus sophistiqués sont étudiés dans le paragraphe suivant.

5.4 Quelques exemples

Le lemme suivant est très utile pour construire des algèbres de Hopf. Sa vérification est un simple exercice laissé au lecteur.

Lemme 5.4.1 *Soit $A = (A, m, u)$ une algèbre et soient $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$, $\varepsilon : A \rightarrow k$ et $S : A \rightarrow A^{\text{op}}$ des morphismes d'algèbre. Soient $(a_i)_{i \in I}$ une famille de générateurs de A . Si $\forall i \in I$, on a*

$$(\Delta \otimes \text{id}_A) \circ \Delta(a_i) = (\text{id}_A \otimes \Delta) \circ \Delta(a_i),$$

$$(\varepsilon \otimes \text{id}_A) \circ \Delta(a_i) = a_i = (\text{id}_A \otimes \varepsilon) \circ \Delta(a_i),$$

$$m \circ (S \otimes \text{id}_A) \circ \Delta(a_i) = \varepsilon(a_i)1 = m \circ (\text{id}_A \otimes S) \circ \Delta(a_i),$$

alors $A = (A, m, u, \Delta, \varepsilon, S)$ est une algèbre de Hopf.

Exemple. Les bigèbres de polynômes $k[x_1, \dots, x_n]$ et $k\{x_1, \dots, x_n\}$ construites dans le paragraphe précédent sont des algèbres de Hopf, avec antipode S défini par $S(x_i) = -x_i$, $\forall i$.

Exemple : les algèbres de Taft. Soit $n \geq 2$. On suppose que k contient une racine primitive n -ième de l'unité q . On pose

$$T_n(q) = k\langle x, g \mid g^n = 1, x^n = 0, xg = qgx \rangle$$

Alors $T_n(q)$ est une k -algèbre de dimension n^2 et admet une structure d'algèbre de Hopf avec comultiplication Δ , co-unité ε et antipode S définis par

$$\begin{aligned}\Delta(g) &= g \otimes g, & \Delta(x) &= 1 \otimes x + x \otimes g \\ \varepsilon(g) &= 1, & \varepsilon(x) &= 0 \\ S(g) &= g^{-1}, & S(x) &= -xg^{-1}\end{aligned}$$

Les algèbres de Hopf $T_n(q)$ sont les **algèbres de Taft**. Elles ne sont ni commutatives ni cocommutatives, et l'antipode est bijectif d'ordre $2n$.

En effet : notons $T_n = T_n(q)$. Il est clair que T_n est linéairement engendrée par les $g^i x^j$, $0 \leq i, j \leq n-1$, et donc est de dimension $\leq n^2$. Soit V l'espace vectoriel de base les $e_{(i,j)}$, $0 \leq i, j \leq n-1$. On définit deux endomorphismes σ et τ de V définis par

$$\begin{aligned}\sigma(e_{(i,j)}) &= e_{(i+1,j)}, & 0 \leq i \leq n-2, & 0 \leq j \leq n-1 \\ \sigma(e_{(n-1,j)}) &= e_{(0,j)}, & 0 \leq j \leq n-1 \\ \tau(e_{(i,j)}) &= q^i e_{(i,j+1)}, & 0 \leq i \leq n-1, & 0 \leq j \leq n-2 \\ \tau(e_{(i,n-1)}) &= 0, & 0 \leq i \leq n-1\end{aligned}$$

On vérifie que σ et τ satisfont aux relations de définition de T_n et on en déduit un morphisme d'algèbres $T_n \rightarrow \text{End}_k(V)$ qui permet de montrer l'indépendance linéaire des $g^i x^j$, $0 \leq i, j \leq n-1$, et donc $\dim(T_n) = n^2$.

On construit les morphismes d'algèbres Δ , ε et S en utilisant la définition par générateurs et relations de T_n : la seule identité non immédiate est $(1 \otimes x + x \otimes g)^n = 0$, qui provient du corollaire 4.3.4. On vérifie sans problème les identités du lemme 5.4.1, et on conclut que l'on a bien l'algèbre de Hopf annoncée. L'assertion sur l'ordre de l'antipode se vérifie sans difficulté. \square

Quand $n = 2$, l'algèbre de Hopf T_2 de dimension 4 est due à Sweedler. C'est le plus petit exemple possible d'algèbre de Hopf non commutative et non cocommutative. Mais la première algèbre de Hopf non commutative et non cocommutative non triviale a été découverte par Kac et Palyutkin (1963).

Exemple : l'algèbre de Kac-Palyutkin et ses généralisations. On considère maintenant une famille d'algèbre de Hopf contenant l'exemple historique d'algèbre de Hopf ni commutative ni cocommutative, dû à Kac et Palyutkin. Soit $n \geq 2$. On considère les algèbres suivantes

$$\begin{aligned}A(n) &= k\langle z, a, t \mid z^n = 1 = a^2 = t^2, tz = z^{n-1}t, az = za, at = ta \rangle \\ B(n) &= k\langle z, a, t \mid z^n = a, a^2 = 1 = t^2, tz = z^{2n-1}t, az = za, at = ta \rangle\end{aligned}$$

Alors on a les résultats suivant :

- $A(n)$ et $B(n)$ sont des algèbres de dimension $4n$, isomorphes respectivement aux algèbres de groupes $k[D_n] \otimes k[\mathbb{Z}_2]$ et à $k[D_{2n}]$. En particulier $A(n)$ est non commutative si $n \geq 3$ et $B(n)$ est non commutative pour $n \geq 2$.

- $A(n)$ et $B(n)$ possèdent toutes deux des structures d'algèbres de Hopf, définies par (mêmes formules pour les deux algèbres) :

$$\Delta(z) = z\left(\frac{1+a}{2}\right) \otimes z + z\left(\frac{1-a}{2}\right) \otimes z^{n-1}, \quad \Delta(t) = t\left(\frac{1+a}{2}\right) \otimes t + t\left(\frac{1-a}{2}\right) \otimes tz,$$

$$\Delta(a) = a \otimes a, \quad \varepsilon(z) = 1 = \varepsilon(t) = \varepsilon(a)$$

$$S(z) = z\left(\frac{1-a}{2}\right) + z^{n-1}\left(\frac{1+a}{2}\right), \quad S(t) = t\left(\frac{1+a}{2}\right) + z\left(\frac{1-a}{2}\right), \quad S(a) = a$$

et sont non cocommutatives.

- On a $S^2 = \text{id}$.

En effet : ce sont des vérifications directes, mais pénibles, et assez peu instructives.

L'algèbre de Hopf $B(2)$ est l'algèbre de dimension 8 de Kac-Palyutkin. Ces exemples seront ré-examinés un peu plus tard.

5.5 Dualité sur les algèbres de Hopf

On revient à l'objectif fixé au départ, à savoir l'extension de de la dualité de Pontryagin à une catégorie plus large qui contient celle des groupes finis.

Théorème 5.5.1 (Dualité pour les algèbres de Hopf de dimension finie) *Soit H une algèbre de Hopf de dimension finie. Alors $S^* : H^* \rightarrow H^*$ est un antipode sur H^* , qui est donc une algèbre de Hopf. On a un isomorphisme d'algèbres de Hopf $H \cong H^{**}$, et le foncteur ainsi défini est une dualité sur la catégorie $\text{Hopf}_{k,f}$.*

Preuve. Soient $\phi \in H^*$ et $x \in H$. On a

$$\begin{aligned} \sum S^*(\phi_{(1)}) \cdot \phi_{(2)}(x) &= \sum S^*(\phi_{(1)})(x_{(1)})\phi_{(2)}(x_{(2)}) = \sum \phi_{(1)}(S(x_{(1)}))\phi_{(2)}(x_{(2)}) \\ &= \sum \phi(S(x_{(1)})x_{(2)}) = \varepsilon(x)\phi(1) \implies \sum S^*(\phi_{(1)}) \cdot \phi_{(2)} = \phi(1)\varepsilon \end{aligned}$$

et de même

$$\sum \phi_{(1)} \cdot S^*(\phi_{(2)}) = \phi(1)\varepsilon$$

ce qui montre que S^* est un antipode pour H^* . La dernière assertion provient de celle pour les bigèbres. \square

Exemple. Soit G un groupe fini. Les algèbres de Hopf $k^{(G)}$ et $k[G]^*$ sont isomorphes.

Le foncteur dualité sur la catégorie des algèbres de Hopf de dimension finie nous permet de généraliser la dualité de Pontryagin :

Théorème 5.5.2 Notons $D_0 : \text{Ab}_f \rightarrow \text{Ab}_f$ le foncteur dualité sur la catégorie des groupe abéliens finis, et $D : \text{Hopf}_{\mathbb{C},f} \rightarrow \text{Hopf}_{\mathbb{C},f}$ le foncteur dualité sur la catégorie des algèbres de Hopf complexes de dimension finie. Alors on a des diagrammes commutatifs de foncteurs

$$\begin{array}{ccc} \text{Ab}_f & \xrightarrow{D_0} & \text{Ab}_f \\ \downarrow \mathbb{C}[-] & & \downarrow \mathbb{C}[-] \\ \text{Hopf}_{\mathbb{C},f} & \xrightarrow{D} & \text{Hopf}_{\mathbb{C},f} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{Ab}_f & \xrightarrow{D_0} & \text{Ab}_f \\ \downarrow \mathbb{C}(-) & & \downarrow \mathbb{C}(-) \\ \text{Hopf}_{\mathbb{C},f} & \xrightarrow{D} & \text{Hopf}_{\mathbb{C},f} \end{array}$$

La preuve de la commutativité des diagrammes de foncteurs se résume essentiellement, en vertu de l'isomorphisme $\mathbb{C}[G]^* \cong \mathbb{C}^{(G)}$, à montrer que si G est un groupe abélien fini, alors le morphisme (fonctoriel) d'algèbres de Hopf

$$\mathbb{C}[\widehat{G}] \rightarrow \mathbb{C}^{(G)}, e_\chi \mapsto \chi,$$

est un isomorphisme. Pour cela il suffit de voir que les caractères sur un groupe sont linéairement indépendants (car $|G| = |\widehat{G}|$) : c'est le lemme de Dedekind, dont on va donner une généralisation.

Proposition-Définition 5.5.3 Soit C une cogèbre. Un élément $x \in C$ est dit **group-like** si $\Delta(x) = x \otimes x$ et $\varepsilon(x) = 1$. On note $\mathcal{G}(C)$ l'ensemble des group-like de C . Si $C = B$ est une bigèbre, alors $\mathcal{G}(B)$ est un monoïde pour la multiplication de B , et c'est groupe si B est une algèbre de Hopf.

La vérification est immédiate. Le résultat suivant généralise le lemme de Dedekind.

Lemme 5.5.4 Soit C une cogèbre et soient x_1, \dots, x_n des éléments de $\mathcal{G}(C)$, deux à deux distincts. Alors ils sont linéairement indépendants.

Preuve. On montre le résultat par récurrence sur n . Pour $n = 1$, c'est immédiat. Montrons le résultat pour $n = 2$. Si $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0$, alors en appliquant ε on obtient $\lambda_2 = -\lambda_1$, donc $\lambda_1(x_1 - x_2) = 0$ et on a le résultat. Supposons maintenant le résultat montré au rang $n - 1$. Soient x_1, \dots, x_n des éléments de $\mathcal{G}(C)$, deux à deux distincts et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in k$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$. Alors on a $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \otimes x_i = 0$. Par hypothèse de récurrence, les éléments x_1, \dots, x_{n-1} de C sont linéairement indépendants, et donc il existe $\phi_1, \dots, \phi_{n-1} \in C^*$ tels que $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$. Pour $i_0 \in \{1, \dots, n-1\}$, on a

$$\phi_{i_0} \otimes \text{id}_C \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \otimes x_i \right) = 0 = \lambda_{i_0} x_{i_0} + \lambda_n \phi_{i_0}(x_n) x_n$$

Le cas $n = 2$ donne $\lambda_{i_0} = 0$ pour tout $i_0 \leq n - 1$, et finalement $\lambda_n = 0$. \square

Le lemme suivant est donc une conséquence du lemme précédent, et termine la preuve du théorème 5.5.2.

Lemme 5.5.5 Soit G un groupe abélien fini. Alors on a un isomorphisme d'algèbres de Hopf (fonctoriel) $\mathbb{C}[\widehat{G}] \cong \mathbb{C}^{(G)}$, $e_\chi \mapsto \chi$.

Pour compléter le tableau, il reste à étudier les images des foncteurs

$$k[-] : \mathbf{Gp}_f \longrightarrow \mathbf{Hopf}_{k,f}, \quad k^{(-)} : \mathbf{Gp}_f \longrightarrow \mathbf{Hopf}_{k,f}$$

Proposition 5.5.6 *Soit H une algèbre de Hopf. Alors $\mathbf{Alg}_k(H, k) = \mathbf{Hom}_{k\text{-alg}}(H, k)$, muni du produit de convolution, est un groupe.*

La preuve est laissée en exercice (l'inverse de ϕ est $\phi \circ S$).

Exemple. La bigèbre $\mathcal{O}(M_n(k))$ du paragraphe 5.2 n'est pas une algèbre de Hopf.

Si $H = k^{(G)}$ est l'algèbre des fonctions sur un groupe fini, alors la bijection

$$G \longrightarrow \mathbf{Alg}_k(k^{(G)}, k)$$

du lemme 2.4.4 est un isomorphisme de groupes. Dès lors le lecteur vérifiera aisément les détails de la preuve du résultat suivant.

Théorème 5.5.7 (a) *Le foncteur $k^{(-)} : \mathbf{Gp}_f \longrightarrow \mathbf{Hopf}_{k,f}$ induit une anti-équivalence de catégories entre groupes finis et algèbres de Hopf diagonales.*

(b) *foncteur $k[-] : \mathbf{Gp}_f \longrightarrow \mathbf{Hopf}_{k,f}$ induit une équivalence de catégories entre groupes finis et algèbres de Hopf dont le dual est une algèbre diagonale.*

En fait, avec des hypothèses adéquates sur k , on a un résultat bien plus fort, que l'on ne démontrera pas.

Théorème 5.5.8 *Supposons que k est algébriquement clos de caractéristique zéro.*

(a) *Soit H une algèbre de Hopf commutative de dimension finie. Alors il existe un groupe G , unique à isomorphisme près, tel que $H \cong k^{(G)}$. Le foncteur*

$$k^{(-)} : \mathbf{Gp}_f \longrightarrow \mathbf{Com-Hopf}_{k,f}$$

induit une anti-équivalence de catégorie entre groupes finis et algèbres de Hopf commutatives de dimension finie.

(b) *Soit H une algèbre de Hopf cocommutative de dimension finie. Alors il existe un groupe G , unique à isomorphisme près, tel que $H \cong k[G]$. Le foncteur*

$$k[-] : \mathbf{Gp}_f \longrightarrow \mathbf{CoCom-Hopf}_{k,f}$$

induit une anti-équivalence de catégorie entre groupes finis et algèbres de Hopf cocommutatives de dimension finie.

Conclusion. Soit H un algèbre de Hopf de dimension finie. On peut écrire

$$H = k^{(G)} = k[\Gamma]$$

où G et Γ sont des groupes quantiques duaux

$$\Gamma = \widehat{G}, \quad G = \widehat{\Gamma}$$

La **catégorie des groupes quantiques finis** est définie comme la catégorie opposée à celle des algèbres de Hopf. Elle est, par dualité, équivalente à la catégorie des algèbres de Hopf.

Commentaires

La notion d'algèbre de Hopf est née des travaux de Hopf en topologie algébrique dans les années 40. Elles d'abord été utilisées comme des outils dans le cadre des groupes algébriques et algèbres de Lie (voir [26]), avant le début de l'étude interne dans les années 60.

La référence la plus populaire dans le domaine est [21], mais citons également le récent [5], ou encore les classiques [23] et [1].

Il existe de nombreuses méthodes pour construire de nouvelles algèbres de Hopf à partir d'anciennes : produit bicroisé et ses multiples variantes, twisting... Voir par exemple [17, 13, 14].

Chapitre 6

Groupes algébriques et algèbres de Hopf

On veut maintenant définir maintenant les groupes quantiques infinis. Une possibilité est de voir une algèbre de Hopf H comme l'algèbre d'un groupe quantique discret Γ : $H = k[\Gamma]$. On va plutôt s'intéresser au point de vue dual, c'est-à-dire considérer les algèbres de Hopf comme des algèbres de (bonnes) fonctions sur des groupes avec des structures supplémentaires : les groupes algébriques. Dans tout le chapitre k est un corps infini.

6.1 Ensembles algébriques affines

On introduit ici quelques rudiments de géométrie algébrique.

Les éléments de l'algèbre de polynômes $P \in k[x_1, \dots, x_n]$ peuvent être vus comme des fonctions \tilde{P} sur k^n , et cette application $P \mapsto \tilde{P}$ est injective car k est infini. Plus généralement on a le lemme suivant, dont la preuve est laissée en exercice.

Lemme 6.1.1 *Soit $P \in k[x_1, \dots, x_n]$, et notons \tilde{P} la fonction polynôme associée sur k^n . S'il existe des parties infinies S_1, \dots, S_n de k telles*

$$\tilde{P}|_{S_1 \times \dots \times S_n} = 0$$

alors $P = 0$

Plus généralement on peut définir les fonctions polynômes sur un espace vectoriel de dimension finie, sans se soucier du choix d'une base.

Proposition-Définition 6.1.2 *Soit V un espace vectoriel de dimension finie n . Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de V , de base duale e_1^*, \dots, e_n^* . Le morphisme d'algèbres*

$$\begin{aligned} \Psi_e : k[x_1, \dots, x_n] &\longrightarrow k^V \\ x_i &\longmapsto e_i^* \end{aligned}$$

est injectif. De plus l'image de Ψ_e et ne dépend pas du choix de la base e . On note $\mathcal{O}(V) = \text{Im}(\Psi_e)$ la sous-algèbre de k^V obtenue, et on dit que $\mathcal{O}(V)$ est l'**algèbre des fonctions polynômes** sur V .

La preuve est un simple exercice d'algèbre linéaire. Le choix d'une base identifie $\mathcal{O}(V)$ et $k[x_1, \dots, x_n]$, et quand $V = k^n$, on identifie $\mathcal{O}(k^n)$ et $k[x_1, \dots, x_n]$ via le morphisme précédent.

Définition 6.1.3 Soit V un espace vectoriel de dimension finie.

(a) Soit $S \subset \mathcal{O}(V)$. On note

$$V(S) = \{v \in V \mid f(v) = 0, \forall f \in S\}$$

l'ensemble des zéros communs des éléments de S .

(b) Soit $X \subset V$. On note

$$\mathcal{J}(X) = \{f \in \mathcal{O}(V) \mid f(x) = 0, \forall x \in X\}$$

l'ensemble des fonctions polynômes sur V qui s'anulent sur X .

Définition 6.1.4 Un **ensemble algébrique affine** est une partie $X \subset V$ d'un espace vectoriel de dimension finie V qui est l'ensemble des zéros d'une famille de polynômes : $X = V(S)$ pour une partie $S \subset \mathcal{O}(V)$.

Si $X \subset V$ est un ensemble algébrique affine, on dira souvent simplement : soit X un ensemble algébrique affine, l'espace V étant sous-entendu. En général cela ne causera pas de confusion.

Exemples. (a) k^n et V sont des ensembles algébriques affines.

(b) $X = \{(a, b) \in k^2 \mid b = a^2\}$ est un ensemble algébrique affine.

(c) $\text{SL}_2(k) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in M_2(k), \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \right\}$ est un ensemble algébrique affine.

(d) Les ensembles finis $X \subset k^n$ sont des ensembles algébriques affines.

(e) $X = \{(a, b) \in k^2 \mid ab = 1\}$ est un ensemble algébrique affine. L'application $k^* \rightarrow X$, $\lambda \mapsto (\lambda, \lambda^{-1})$, permet d'identifier k^* et X , et ainsi on voit k^* comme un ensemble algébrique affine.

(f) Soit $X = \{(u, \lambda) \in \text{End}_k(V) \times k, \det(u)\lambda = 1\}$: c'est un ensemble algébrique affine. L'application $\text{GL}(V) \rightarrow X$, $u \mapsto (u, \det(u)^{-1})$ identifie $\text{GL}(V)$ et X , et ainsi on voit $\text{GL}(V)$ comme un ensemble algébrique affine.

Les propriétés élémentaires suivantes sont laissées en exercice.

Lemme 6.1.5 (a) Soient $S \subset T \subset \mathcal{O}(V)$. On a $V(T) \subset V(S)$.

(b) Soient $X \subset Y \subset V$. Alors on a $\mathcal{J}(Y) \subset \mathcal{J}(X)$.

(c) Soit $S \subset \mathcal{O}(V)$. On a $V(S) = V(\langle S \rangle)$, où $\langle S \rangle$ est l'idéal de $\mathcal{O}(V)$ engendré par S .

(d) Soit $X \subset V$. Alors $\mathcal{J}(X)$ est un idéal de $\mathcal{O}(V)$.

(e) Soit $X \subset V$. Alors X est un ensemble algébrique affine si et seulement si $X = V(\mathcal{J}(X))$.

Proposition-Définition 6.1.6 *Soit $X \subset V$ un ensemble algébrique affine. La restriction des fonctions polynomiales*

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(V) &\longrightarrow k^X \\ f &\longmapsto f|_X \end{aligned}$$

*est un morphisme d'algèbres dont l'image est notée $\mathcal{O}(X)$. Les éléments de $\mathcal{O}(X)$ sont appelés **les fonctions polynomiales sur X** , et on a un isomorphisme d'algèbres $\mathcal{O}(V)/\mathcal{J}(X) \cong \mathcal{O}(X)$.*

La dernière propriété découle directement de la définition de $\mathcal{J}(X)$. Là encore la notation $\mathcal{O}(X)$ est un peu abusive, puisque la construction de $\mathcal{O}(X)$ dépend de l'inclusion $X \subset V$. Pour trouver une présentation par générateurs et relations de $\mathcal{O}(X)$, il faut souvent un peu de travail et les divisions euclidiennes peuvent être bien utiles.

Exemple. On a un isomorphisme d'algèbres

$$k[a, b, c, d]/(ad - bc - 1) \cong \mathcal{O}(\mathrm{SL}_2(k))$$

En effet : On utilise l'identification $k[a, b, c, d] \cong \mathcal{O}(M_2(k))$ où a, b, c, d sont vus comme les fonctions coordonnées sur $M_2(k)$. On a $\mathrm{SL}_2(k) = V(ad - bc - 1)$, et donc

$$ad - bc - 1 \in \mathcal{J}(V(ad - bc - 1)) \Rightarrow (ad - bc - 1) \subset \mathcal{J}(V(ad - bc - 1))$$

Il s'agit de montrer que réciproquement, si $P \in \mathcal{J}(V(ad - bc - 1))$, alors $P \in (ad - bc - 1)$. Soit donc $P \in k[a, b, c, d]$ qui s'annule sur $\mathrm{SL}_2(k)$. On plonge $k[a, b, c, d]$ dans l'anneau $k[a, a^{-1}, b, c, d]$, et on effectue, dans l'anneau $k[a, a^{-1}, b, c][d]$, la division euclidienne de P par $ad - bc - 1$ (le coefficient dominant de P est inversible dans $k[a, a^{-1}, b, c]$). On obtient

$$P = (ad - bc - 1)q + r, \quad q \in k[a, a^{-1}, b, c, d], \quad r \in k[a, a^{-1}, b, c]$$

Il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $r' = a^i r \in k[a, b, c]$, et on a $a^i P = a^i(ad - bc - 1)q + r'$. Alors $\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta \in k$ tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, on $r'(\alpha, \beta, \gamma) = 0$. Donc r' s'annule sur $k^* \times k \times k$, et par le lemme 6.1.1 on a $r' = 0$ et $r = 0$. Ainsi $P \in (ad - bc - 1)$, et $\mathcal{J}(V(ad - bc - 1)) = (ad - bc - 1)$ \square

Définition 6.1.7 *Soient $X \subset V$ et $Y \subset W$ des ensembles algébriques affines. Un **morphisme d'ensembles algébriques affines** $f : X \rightarrow Y$ est une application φ de X dans Y telle que $\forall g \in \mathcal{O}(Y)$, on a $g \circ f \in \mathcal{O}(X)$. On dit aussi qu'un morphisme d'ensemble algébriques affines est une **application polynomiale**.*

On obtient ainsi la **catégorie des ensembles algébriques affines**, notée EAff_k .

De façon plus concrète, si $X \subset k^n$ et $Y \subset k^m$ sont des ensembles algébriques affines, un morphisme $X \rightarrow Y$ est une application de la forme

$$\begin{aligned} k^n \supset X &\longrightarrow Y \subset k^m \\ (a_1, \dots, a_n) &\longmapsto (P_1(a_1, \dots, a_n), \dots, P_m(a_1, \dots, a_n)) \end{aligned}$$

où $P_1, \dots, P_m \in k[x_1, \dots, x_n]$. Un morphisme écrit sous cette forme est noté (P_1, \dots, P_m) . Cela justifie la terminologie “application polynomiale” pour un morphisme d’ensembles algébriques affines.

Par construction, un morphisme d’ensembles algébriques affines $f : X \rightarrow Y$ induit un morphisme d’algèbres $f_* : \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$, $f \mapsto f \circ \varphi$. On obtient ainsi un foncteur contravariant $\mathcal{O}(-) : \mathbf{EAff}_k \rightarrow \mathbf{Alg}_k$.

Avant d’étudier ce foncteur, notons qu’on peut toujours reconstruire un ensemble algébrique affine X à partir de $\mathcal{O}(X)$.

Proposition 6.1.8 *Soit $X \subset V$ un ensemble algébrique affine. Alors on a une bijection*

$$\begin{aligned} i : X &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(\mathcal{O}(X), k) \\ x &\longmapsto i_x, \quad i_x(f) = f(x) \end{aligned}$$

Preuve. Notons d’abord que les fonctions polynomiales séparent les points d’un ensemble algébrique affine (il suffit d’utiliser les fonctions coordonnées), ce qui assure que l’application i est injective. Si $X = V$, il est clair que i est surjectif, car $\mathcal{O}(V)$ est isomorphe à l’algèbre de polynômes $k[x_1, \dots, x_n]$.

En général, soit $\pi : \mathcal{O}(V) \rightarrow \mathcal{O}(X)$ la surjection canonique de noyau $\mathcal{J}(X)$. Soit $\phi \in \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(\mathcal{O}(X), k)$. Alors $\phi \circ \pi \in \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(\mathcal{O}(V), k)$ et il existe donc $a \in V$ tel que $\phi \circ \pi = i_a : \forall P \in \mathcal{O}(V)$, on a $\phi \circ \pi(P) = P(a)$. Alors comme $\phi \circ \pi$ s’annule sur $\mathcal{J}(X)$, on a $a \in V(\mathcal{J}(X)) = X$. Si $f \in \mathcal{O}(X)$, il existe $P \in \mathcal{O}(V)$ tel que $f = \pi(P) = P|_X$, d’où $\phi(f) = \phi(\pi(P)) = P(a) = f(a)$, et $\phi = i_a$ pour $a \in X$. \square

Proposition 6.1.9 *Le foncteur contravariant $\mathcal{O}(-) : \mathbf{EAff}_k \rightarrow \mathbf{Alg}_k$ est pleinement fidèle.*

Preuve. Soient $X \subset V$ et $Y \subset V$ des ensembles algébriques affines, et soit $\varphi : \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$ un morphisme d’algèbres. On a un diagramme commutatif de morphismes d’algèbres

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(Y) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{O}(X) \\ \pi_Y \uparrow & & \uparrow \pi_X \\ \mathcal{O}(W) & \xrightarrow{\varphi_0} & \mathcal{O}(V) \end{array}$$

où π_Y et π_X sont les surjections canoniques respectives (de noyaux respectifs $\mathcal{J}(Y)$ et $\mathcal{J}(X)$) et où φ_0 est un morphisme d’algèbres choisi pour faire commuter le diagramme. Ce morphisme φ_0 existe car π_X est surjectif et $\mathcal{O}(W)$ est une algèbre de polynômes. Choisissons des bases de V et W de telle sorte que l’on ait les identifications $\mathcal{O}(V) = k[x_1, \dots, x_n]$ et $\mathcal{O}(W) = k[y_1, \dots, y_m]$. Soient $P_1, \dots, P_m \in k[x_1, \dots, x_n]$ tels que $\varphi_0(y_i) = P_i$, $1 \leq i \leq m$. Considérons l’application polynomiale

$$\begin{aligned} f : V &\longrightarrow W \\ (a_1, \dots, a_n) &\longmapsto (P_1(a_1, \dots, a_n), \dots, P_m(a_1, \dots, a_n)) \end{aligned}$$

Vérifions que $f(X) \subset Y$. Soit $q \in \mathcal{J}(Y)$. Puisque $\varphi_0(\mathcal{J}(Y)) \subset \mathcal{J}(X)$, on a $\varphi_0(q) \in \mathcal{J}(X)$. Par construction de f on a,

$$q \circ f(a_1, \dots, a_n) = \varphi_0(q)(a_1, \dots, a_n)$$

donc si $(a_1, \dots, a_n) \in X$ on a $q \circ f(a_1, \dots, a_n) = 0$ et ainsi $f(X) \subset V(\mathcal{J}(Y)) = Y$. Ainsi $f|_X : X \rightarrow Y$ est un morphisme d'ensembles algébriques affines, et par construction $\varphi = (f|_X)_*$, car pour $q \in \mathcal{O}(W)$, on a

$$(f|_X)_*(q|_Y) = q \circ f|_X = \varphi_0(q)|_X = \varphi(q|_Y)$$

Le foncteur est donc plein. Pour la fidélité, la vérification est facile, en écrivant les morphismes sous forme polynomiale. \square

On veut maintenant étudier l'image du foncteur $\mathcal{O}(-)$. L'outil essentiel est le résultat suivant.

Théorème 6.1.10 (Théorème des zéros de Hilbert) *Supposons le corps k algébriquement clos. Soit $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ un idéal. Alors on a*

$$\mathcal{J}(V(I)) = \text{Rad}(I)$$

où $\text{Rad}(I) = \{f \in k[x_1, \dots, x_n] \mid \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tq } f^n \in I\}$

Le théorème des zéros de Hilbert, souvent appelé *nullstellensatz*, est le résultat fondamental de base en géométrie algébrique. On ne le démontre pas ici.

On peut maintenant caractériser les algèbres qui sont les algèbres de fonctions polynomiales sur un ensemble algébrique affine. On dit qu'une algèbre est **affine** si elle est de type fini comme algèbre, et on dit qu'elle est **réduite** si son seul élément nilpotent est 0.

Théorème 6.1.11 *Supposons k algébriquement clos. Soit A est une k -algèbre commutative affine réduite. Alors il existe un ensemble algébrique affine X , unique à isomorphisme près, tel que $A \cong \mathcal{O}(X)$. Le foncteur contravariant $\mathcal{O}(-)$ induit donc une anti-équivalence de catégories entre la catégories des ensembles algébriques affines et celle des algèbres affines commutatives réduites.*

Preuve. L'algèbre A est affine commutative donc il existe un isomorphisme d'algèbres

$$k[x_1, \dots, x_n]/I \cong A$$

pour un certain idéal I . Comme A est réduite, on a $\text{Rad}(I) = I$, et donc par le théorème des zéros, on a $I = \mathcal{J}(V(I))$. Ainsi $A \cong \mathcal{O}(X)$, pour l'ensemble algébrique affine $X = V(I)$. Le foncteur $\mathcal{O}(-)$ est donc essentiellement surjectif, il est pleinement fidèle par une proposition précédente et on a donc notre anti-équivalence de catégories. L'unicité provient du fait que l'on a une équivalence de catégories, ou encore de la proposition 6.1.8. \square

Remarque. Si A est une algèbre affine commutative, alors le choix de générateurs de A permet toujours de munir $X_A = \text{Hom}_{k\text{-alg}}(A, k)$ d'une structure algébrique. En effet un tel choix donne un isomorphisme $A \cong k[x_1, \dots, x_n]/I$ et alors X_A s'identifie à $V(I)$. L'algèbre $\mathcal{O}(X_A)$ est alors isomorphe à $A/\text{Nil}(A)$, où $\text{Nil}(A)$ est l'idéal des éléments nilpotents de A .

Les espaces quantiques algébriques correspondent donc aux algèbres affines. L'hypothèse "réduite" serait certainement trop restrictive, car elle exclurait les algèbres de matrices.

Avant de passer aux groupes, on a besoin du produit d'ensembles algébriques affines.

Proposition 6.1.12 *Soient $X \subset V$ et $Y \subset W$ des ensembles algébriques affines. Alors $X \times Y \subset V \times W$ est un ensemble algébrique affine, et on a un isomorphisme d'algèbres*

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(X) \otimes \mathcal{O}(Y) &\cong \mathcal{O}(X \times Y) \\ f \otimes g &\longmapsto ((x, y) \mapsto f(x)g(y)) \end{aligned}$$

Preuve. Si $f \in \mathcal{O}(V)$, on note f' l'élément de $\mathcal{O}(V \times W)$ défini par $f'(v, w) = f(v)$, et de même si $f \in \mathcal{O}(W)$, on note f'' l'élément de $\mathcal{O}(V \times W)$ défini par $f''(v, w) = f(w)$. Alors si $X = V(I)$ et $Y = V(J)$, on voit facilement $X \times Y = V(I' \cup J')$ et donc $X \times Y \subset V \times W$ est un ensemble algébrique affine.

L'application de la proposition est la restriction aux fonctions polynomiales de l'injection de la proposition 3.3.3 : $\mathcal{O}(X) \otimes \mathcal{O}(Y) \longrightarrow k^{X \times Y}$. Il est clair que cette injection envoie $f \otimes g \in \mathcal{O}(X) \otimes \mathcal{O}(Y)$ sur $f'g'' \in \mathcal{O}(X \times Y)$, avec les notations précédentes. Ainsi on a bien l'injection annoncée $\mathcal{O}(X) \otimes \mathcal{O}(Y) \hookrightarrow \mathcal{O}(X \times Y)$. Enfin si $f \in \mathcal{O}(X \times Y)$, on peut écrire $f = \sum_i f'_i g''_i$, pour des $f_i \in \mathcal{O}(X)$, $g_i \in \mathcal{O}(Y)$. Cela est clair si l'on passe aux coordonnées :

$$\mathcal{O}(V) = k[x_1, \dots, x_n], \quad \mathcal{O}(W) = k[y_1, \dots, y_m] \quad \text{et} \quad \mathcal{O}(V \times W) = k[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$$

Alors f est l'image de $\sum_i f_i \otimes g_i$ et on a bien la surjectivité. \square

Exemple : le produit des matrices. Considérons $\mathcal{O}(M_n(k))$, l'algèbre des fonctions polynomiales sur les matrices. On a $\mathcal{O}(M_n(k)) = k[x_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$ où les x_{ij} sont les fonctions coordonnées. On a déjà muni cette algèbre d'une structure de bigèbre dans le paragraphe 2 du chapitre 5. En fait le coproduit provient du produit des matrices. En effet soit Δ le morphisme d'algèbre composé

$$\mathcal{O}(M_n(k)) \xrightarrow{m_*} \mathcal{O}(M_n(k) \times M_n(k)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(M_n(k)) \otimes \mathcal{O}(M_n(k))$$

On a

$$\Delta(x_{ij}) = \sum_{k=1}^n x_{ik} \otimes x_{kj}$$

car pour $M = (m_{ij})$ et $N = (n_{ij})$, on a

$$x_{ij}(MN) = (MN)_{ij} = \sum_k m_{ik} n_{kj} = \sum_k x_{ik}(M) x_{kj}(N).$$

Cette formule pour la comultiplication va être d'un usage constant dans la suite.

6.2 Groupes algébriques affines

Définition 6.2.1 *Un groupe algébrique affine est un groupe G qui est un ensemble algébrique affine, tel que la loi de groupe $G \times G \rightarrow G$ et l'inversion $G \rightarrow G$ soient des morphismes d'ensembles algébriques affines.*

De même que dans le paragraphe 3 du chapitre 4, si G est un groupe algébrique affine, la multiplication $m : G \times G \rightarrow G$ induit un morphisme d'algèbres

$$\Delta : \mathcal{O}(G) \xrightarrow{m_*} \mathcal{O}(G \times G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(G) \otimes \mathcal{O}(G)$$

L'élément unité induit un morphisme d'algèbres $\varepsilon : \mathcal{O}(G) \rightarrow k, f \mapsto f(1)$, et l'inversion $G \rightarrow G$ induit un morphisme d'algèbres $S : \mathcal{O}(G) \rightarrow \mathcal{O}(G)$. Les axiomes de groupe assurent que $\mathcal{O}(G)$ est une algèbre de Hopf.

On définit de manière évidente **la catégorie des groupes algébriques affines** : les morphismes sont les morphismes de groupes qui sont des applications polynomiales.

On vérifie sans problème qu'une application polynomiale entre deux groupes algébriques affines G et H est un morphisme de groupes si et seulement si le morphisme d'algèbres correspondant $\mathcal{O}(H) \rightarrow \mathcal{O}(G)$ est un morphisme d'algèbres de Hopf. Ainsi, quand k est algébriquement clos, la catégorie des groupes algébriques affines est anti-équivalente à la catégorie des algèbres de Hopf commutatives affines et réduites. On peut résumer la discussion et les résultats du paragraphe précédent.

Théorème 6.2.2 *Un groupe G est un groupe algébrique affine si et seulement s'il existe une algèbre de Hopf commutative affine et réduite H telle que l'on ait un isomorphisme de groupes $G \cong \text{Hom}_{k\text{-alg}}(H, k)$.*

Mieux, si k est de caractéristique zéro, un théorème de Cartier (que nous ne montreront pas, voir [26] ou [21]) affirme qu'une algèbre de Hopf est toujours réduite.

Les exemples qui suivent sont les groupes algébriques "classiques". Les vérifications des détails (présentations par générateurs et relations, formules pour le coproduit...) sont des exercices (importants) laissés au lecteur. On pourra supposer que le corps de base est k de caractéristique zéro : le théorème de Cartier assure alors que les algèbres de Hopf sont automatiquement réduites.

Exemple 1 : le groupe linéaire. On a vu $\text{GL}_n(k)$ est un ensemble algébrique affine. C'est un groupe algébrique affine et on a

$$\mathcal{O}(\text{GL}_n(k)) \cong k[x_{ij}, z]_{1 \leq i, j \leq n} / (Dz = 1)$$

où

$$D = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x_{1\sigma(1)} \cdots x_{n\sigma(n)}$$

est le déterminant de la matrice $x = (x_{ij})$. Les x_{ij} correspondent aux fonctions coordonnées. La structure d'algèbre de Hopf est donnée par

$$\Delta(x_{ij}) = \sum_{k=1}^n x_{ik} \otimes x_{kj}, \quad \Delta(z) = z \otimes z,$$

$$\varepsilon(x_{ij}) = \delta_{ij}, \quad \varepsilon(z) = 1, \quad S(x_{ij}) = (x^{-1})_{ij}, \quad S(z) = D$$

où x^{-1} est l'inverse de la matrice $x = (x_{ij})$.

Exemple 2 : le groupe spécial linéaire. Le groupe $\mathrm{SL}_n(k)$ est un groupe algébrique affine et on a

$$\mathcal{O}(\mathrm{SL}_n(k)) \cong k[x_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n} / (D = 1)$$

où

$$D = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x_{1\sigma(1)} \cdots x_{n\sigma(n)}$$

est le déterminant de la matrice $x = (x_{ij})$. Les x_{ij} correspondent aux fonctions coordonnées. La structure d'algèbre de Hopf est donnée par

$$\Delta(x_{ij}) = \sum_{k=1}^n x_{ik} \otimes x_{kj}, \quad \varepsilon(x_{ij}) = \delta_{ij}, \quad S(x_{ij}) = (x^{-1})_{ij}$$

où x^{-1} est l'inverse de la matrice $x = (x_{ij})$. Avec les notations du paragraphe précédent pour $\mathcal{O}(\mathrm{SL}_2(k))$ (engendré par a, b, c, d) les formules précédentes deviennent :

$$\Delta(a) = a \otimes a + b \otimes c, \quad \Delta(b) = a \otimes b + b \otimes d, \quad \Delta(c) = c \otimes a + d \otimes c, \quad \Delta(d) = c \otimes b + d \otimes d$$

$$\varepsilon(a) = \varepsilon(d) = 1, \quad \varepsilon(b) = \varepsilon(c) = 0,$$

$$S(a) = d, \quad S(b) = -b, \quad S(c) = -c, \quad S(d) = a$$

Exemple 3 : le groupe orthogonal. Le groupe orthogonal est

$$\mathrm{O}_n(k) = \{M \in M_n(k) \mid {}^t M M = I_n\}$$

C'est un groupe algébrique affine, avec

$$\mathcal{O}(\mathrm{O}_n(k)) = k[x_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n} / ({}^t x x = I_n = x {}^t x)$$

Ici x est la matrice (x_{ij}) et la notation ${}^t x x = I$ signifie que l'on quotiente $k[x_{ij}]$ par toutes les relations équivalentes à la relation matricielle ${}^t x x = I_n = x {}^t x$, c'est-à-dire

$$\forall i, j, \quad \sum_{k=1}^n x_{ki} x_{kj} = \delta_{ij} = \sum_{k=1}^n x_{ik} x_{jk},$$

La structure d'algèbre de Hopf est donnée par

$$\Delta(x_{ij}) = \sum_{k=1}^n x_{ik} \otimes x_{kj}, \quad \varepsilon(x_{ij}) = \delta_{ij}, \quad S(x_{ij}) = x_{ji} (= (x^{-1})_{ij})$$

Evidemment, le groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}_n(k) = \mathrm{O}_n(k) \cap \mathrm{SL}_n(k)$ est un groupe algébrique affine.

Exemple 4 : le groupe symplectique. Considérons la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix} \in M_{2n}(k)$$

Alors le groupe symplectique

$$\mathrm{Sp}_{2n}(k) = \{M \in M_{2n}(k) \mid {}^t X J X = J\}$$

est un groupe algébrique affine. On peut vérifier que $\mathrm{Sp}_2(k) = \mathrm{SL}_2(k)$ (exercice).

Bien sûr, les **groupes quantiques algébriques** vont être ceux correspondant aux algèbres de Hopf affines non nécessairement commutatives.

Définition 6.2.3 *Soit G un groupe algébrique affine. Une **représentation linéaire de G** est un couple (V, π_V) où V est un espace vectoriel de dimension finie et où $\pi_V : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ est un morphisme de groupes algébriques.*

En fait tout groupe algébrique affine admet une représentation linéaire fidèle (c'est-à-dire avec π_V injectif), ce qui justifie la terminologie équivalente "**groupes algébriques linéaires**". On montrera ce résultat plus loin, comme une conséquence immédiate de résultats sur les *comodules*.

Définition 6.2.4 *Soient (V, π_V) et (W, π_W) sont des représentations de G . Un **morphisme de représentations** de (V, π_V) dans (W, π_W) , ou encore **G -morphisme**, est une application linéaire $f : V \longrightarrow W$ telle que $\forall g \in G$, on a*

$$\pi_W(g) \circ f = f \circ \pi_V(g)$$

On obtient donc la catégorie des représentations de G , notée $\mathrm{Rep}(G)$. Que l'on travaille sur les groupes ou les groupes quantiques, l'étude des représentations linéaires est un objectif extrêmement important.

6.3 Algèbres de Hopf comatricielle

La formule générale pour les coproduit dans les groupes algébriques linéaires se généralise en fait parfaitement pour les algèbres de Hopf non commutatives. On a le résultat suivant, très utile pour construire des algèbres de Hopf.

Théorème 6.3.1 Soit $A = (A, m, u)$ une algèbre munie de morphismes d'algèbres

$$\Delta : A \longrightarrow A \otimes A, \quad \varepsilon : A \longrightarrow k, \quad \text{et} \quad S : A \longrightarrow A^{\text{op}}$$

Supposons qu'il existe des matrices $u^\lambda = (u_{ij}^\lambda) \in M_{d_\lambda}(A)$, $\lambda \in \Lambda$, dont les coefficients engendrent A comme algèbre et vérifient $\forall \lambda \in \Lambda, \forall i, j \in \{1, \dots, d_\lambda\}$,

$$\Delta(u_{ij}^\lambda) = \sum_{k=1}^n u_{ik}^\lambda \otimes u_{kj}^\lambda$$

$$\varepsilon(u_{ij}^\lambda) = \delta_{ij}, \quad \sum_{k=1}^{d_\lambda} u_{ik}^\lambda S(u_{kj}^\lambda) = \delta_{ij} = \sum_{k=1}^{d_\lambda} S(u_{ik}^\lambda) u_{kj}^\lambda$$

Alors $A = (A, m, u, \Delta, \varepsilon, S)$ est une algèbre de Hopf.

La preuve est une application directe du lemme 5.4.1, et est laissée en exercice.

Exemple : $A_u(n)$. Considérons l'algèbre

$$A_u(n) = k\langle u_{ij}, v_{ij}, 1 \leq i, j \leq n \mid u^t v = I_n = {}^t v u = {}^t u v = v^t u \rangle$$

où $u = (u_{ij})$ et $v = (v_{ij})$ et on met exactement les relations sur les u_{ij} et les v_{ij} telles que les relations matricielles écrites soient vérifiées. Alors on a des morphismes d'algèbres

$$\Delta : A_u(n) \longrightarrow A_u(n) \otimes A_u(n), \quad \varepsilon : A_u(n) \longrightarrow k, \quad \text{et} \quad S : A_u(n) \longrightarrow A_u(n)^{\text{op}}$$

définis par

$$\Delta(u_{ij}) = \sum_{k=1}^n u_{ik} \otimes u_{kj}, \quad \Delta(v_{ij}) = \sum_{k=1}^n v_{ik} \otimes v_{kj}$$

$$\varepsilon(u_{ij}) = \delta_{ij} = \varepsilon(v_{ij}), \quad S(u_{ij}) = v_{ji}, \quad S(v_{ij}) = u_{ji}$$

qui munissent $A_u(n)$ d'une structure d'algèbre de Hopf, non commutative et non-cocommutative si $n \geq 2$. On a un morphisme surjectif d'algèbres de Hopf $A_u(n) \longrightarrow \mathcal{O}(\text{GL}_n(k))$, qui est non injectif si $n \geq 2$. L'algèbre de Hopf $A_u(n)$ est due à Wang [25].

Remarque. Pour des matrices dont les coefficients appartiennent à une algèbre non commutative, on n'a pas en général la relation ${}^t(MN) = {}^t N {}^t M$. De même une matrice carrée peut être inversible à gauche sans l'être à droite. Ceci explique l'abondance de relations dans la définition de $A_u(n)$, qui sont bel et bien nécessaires.

Exemple : $A_o(n)$. Considérons l'algèbre

$$A_o(n) = k\langle x_{ij}, 1 \leq i, j \leq n \mid x^t x = I_n = {}^t x x \rangle$$

où $x = (x_{ij})$. Alors on a des morphismes d'algèbres

$$\Delta : A_o(n) \longrightarrow A_o(n) \otimes A_o(n), \quad \varepsilon : A_o(n) \longrightarrow k, \quad \text{et} \quad S : A_o(n) \longrightarrow A_o(n)^{\text{op}}$$

définis par ($1 \leq i, j \leq n$)

$$\Delta(x_{ij}) = \sum_{k=1}^n x_{ik} \otimes x_{kj}, \quad \varepsilon(x_{ij}) = \delta_{ij}, \quad S(x_{ij}) = x_{ji}$$

qui munissent $A_o(n)$ d'une structure d'algèbre de Hopf, non commutative et non-cocommutative si $n \geq 2$. On a un morphisme surjectif d'algèbre de Hopf $A_o(n) \rightarrow \mathcal{O}(O_n(k))$, qui est non injectif si $n \geq 2$. L'algèbre de Hopf $A_o(n)$ est due à Dubois-Violette et Launer [8] et indépendamment à Wang [25].

Les algèbres de Hopf $A_u(n)$ et $A_o(n)$ sont les analogues "libres" des groupes GL_n et O_n .

Exercice. Montrer que les algèbres de Hopf $A(n)$ et $B(n)$ construites en 5.4 sont des quotients de $A_o(2)$.

6.4 Le groupe quantique SL_2

On présente maintenant l'exemple le plus célèbre de groupe quantique : le groupe quantique SL_2 .

Définition 6.4.1 Soit $q \in k^*$. L'algèbre $\mathcal{O}_q(SL_2(k))$ est l'algèbre engendrée par des générateurs a, b, c, d et soumise aux relations

$$\begin{aligned} ba &= qab, & ca &= qac, & db &= qbd, & dc &= qcd \\ bc &= cb, & ad - da &= (q^{-1} - q)bc \\ ad - q^{-1}bc &= 1 \end{aligned}$$

Quand $q = 1$, on a $\mathcal{O}_1(SL_2(k)) = \mathcal{O}(SL_2(k))$, ce qui mène à dire que $\mathcal{O}_q(SL_2(k))$ est une "déformation" de $\mathcal{O}(SL_2(k))$. La structure d'algèbre de Hopf de $\mathcal{O}(SL_2(k))$ "survit" à la déformation :

Proposition 6.4.2 L'algèbre $\mathcal{O}_q(SL_2(k))$ est une algèbre de Hopf, avec coproduit, co-unité et antipode définis par les formules :

$$\begin{aligned} \Delta(a) &= a \otimes a + b \otimes c, & \Delta(b) &= a \otimes b + b \otimes d, & \Delta(c) &= c \otimes a + d \otimes c, & \Delta(d) &= c \otimes b + d \otimes d \\ \varepsilon(a) &= \varepsilon(d) = 1, & \varepsilon(b) &= \varepsilon(c) = 0, \\ S(a) &= d, & S(b) &= -qb, & S(c) &= -q^{-1}c, & S(d) &= a \end{aligned}$$

La preuve, laissée en exercice, utilise le théorème 6.3.1.

L'algèbre de Hopf $\mathcal{O}_q(\mathrm{SL}_2(k))$ est donc l'algèbre de Hopf des fonctions polynomiales sur un groupe quantique (algébrique), appelé le groupe quantique SL_2 , que l'on note souvent $\mathrm{SL}_q(2)$ (ou encore $\mathrm{SL}_q(2, k)$ si l'on ne veut pas oublier le corps de base). On peut alors écrire $\mathcal{O}_q(\mathrm{SL}_2(k)) = \mathcal{O}(\mathrm{SL}_q(2, k))$.

Le fait remarquable ici est que la plupart des propriétés du groupe classique SL_2 restent encore vraies, dans un sens appropriés et pour q générique, pour la version quantique : c'est notamment le cas de la structure de la catégorie des représentations. Par exemple on a

Proposition 6.4.3 *L'ensemble*

$$\{a^i b^j c^k, \mid i, j, k \in \mathbb{N}\} \cup \{b^i c^j d^k \mid i, j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^*\}$$

est une base du k -espace vectoriel $\mathcal{O}_q(\mathrm{SL}_2(k))$.

Ce résultat se démontre avec des techniques similaires à celles qui permettent de trouver une base de $k_q[x, y]$.

À ce stade, la question naturelle est : d'où vient cette algèbre de Hopf $\mathcal{O}_q(\mathrm{SL}_2(k))$? L'approche standard, due à Manin [19], est de chercher les bigèbres qui co-agissent sur l'algèbre des fonctions sur le plan quantique $\mathcal{O}_q(k^2) = k_q[x, y]$ (de la même manière que $\mathrm{SL}_2(k)$ agit sur le plan k^2). On arrive à la bigèbre $\mathcal{O}_q(M_2(k))$, et des considérations naturelles sur le "déterminant quantique" mènent à la présente définition de $\mathcal{O}_q(\mathrm{SL}(2))$. Voir également [13] pour cette approche.

On peut aussi, en vertu de l'égalité $\mathrm{SL}_2(k) = \mathrm{Sp}_2(k)$, chercher les groupes quantiques qui "agissent" sur certaines formes bilinéaires. C'est l'approche de Dubois-Violette et Launer [8], que l'on étudiera en 7.7.

Commentaires

On peut trouver une preuve du théorème des zéros de Hilbert dans [15], ou encore dans [10], qui offre une très agréable introduction à la géométrie algébrique.

Il existe de nombreux textes dédiés aux groupes algébriques : citons par exemple [12], [22] ou [26].

Le groupe quantique $\mathrm{SL}_q(2)$ est dû à Drinfeld [7], et indépendamment à Woronowicz [27] dans un cadre technique un peu différent.

On peut construire plus généralement des déformations $\mathcal{O}_q(G)$ pour tous les groupes classiques du paragraphe 2 : voir [14].

Chapitre 7

Modules et comodules

Pour obtenir des informations sur les algèbres, on étudie leurs modules (ou représentations). Pour les cogèbres, c'est le concept dual de comodule qui s'impose. Cette section est consacrée à ces notions. Nous privilégieront la notion de comodule, car si G est un groupe algébrique affine, les représentations de G s'identifient aux $\mathcal{O}(G)$ -comodules de dimension finie. On travaille toujours sur un corps quelconque k (qui est supposé infini dès qu'il est question de groupes algébriques).

7.1 Modules sur une algèbre

Rappelons d'abord la définition d'un module, d'une manière similaire à celle d'une algèbre.

Définition 7.1.1 *Soit $A = (A, m, u)$ une algèbre. Un A -module (à gauche) est une paire (V, μ_V) où V est un espace vectoriel et $\mu_V : A \otimes V \rightarrow V$ est une application linéaire telle que les diagrammes suivant soient commutatifs :*

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A \otimes V & \xrightarrow{m \otimes \text{id}_V} & A \otimes V \\
 \downarrow \text{id}_V \otimes \mu_V & & \downarrow \mu_V \\
 A \otimes V & \xrightarrow{\mu_V} & V
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 k \otimes V & \xrightarrow{u \otimes \text{id}_V} & A \otimes V \\
 \searrow \cong & & \swarrow \mu_V \\
 & & V
 \end{array}$$

Comme à l'accoutumée, on note av ou $a.v$ l'élément $\mu_V(a \otimes v)$ de V .

Si V est un espace vectoriel, la donnée d'une structure de A -module sur V est équivalente à la donnée d'un morphisme d'algèbres $A \rightarrow \text{End}_k(V)$.

Les morphismes de A -modules sont les applications A -linéaires. Si (V, μ_V) et (W, μ_W) sont des A -modules, un morphisme de A -modules est donc une application k -linéaire $f : V \rightarrow W$ telle que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes V & \xrightarrow{\mu_V} & V \\
 \downarrow \text{id}_A \otimes f & & \downarrow f \\
 A \otimes W & \xrightarrow{\mu_W} & W
 \end{array}$$

La catégorie des A -modules est notée $\text{Mod}(A)$, et la catégorie des A -modules de dimension finie (ceux qui sont de dimension finie comme k -espaces vectoriels) est notée $\text{Mod}_f(A)$.

7.2 Modules sur une algèbre de Hopf

Si A est une algèbre et V, W sont des A -modules, il n'existe pas en général de structure de A -module sur l'espace vectoriel $V \otimes W$. On peut cependant définir une telle structure si A est une bigèbre.

Proposition-Définition 7.2.1 *Soit $B = (B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ une bigèbre et soient $V = (V, \mu_V)$ et $W = (W, \mu_W)$ des B -modules. L'application linéaire*

$\mu_{V \otimes W} := (\mu_V \otimes \mu_W) \circ (\text{id}_B \otimes \tau_{B, W} \otimes \text{id}_V) \circ (\Delta \otimes \text{id}_V \otimes \text{id}_W) : B \otimes V \otimes W \longrightarrow V \otimes W$ munit $V \otimes W$ d'une structure de B -module. Le B -module $(V \otimes W, \mu_{V \otimes W})$ est appelé le **produit tensoriel des B -modules V et W** . Pour $v \in V$ et $w \in W$ et $b \in B$, on a donc

$$b.(v \otimes w) = \sum b_{(1)}.v \otimes b_{(2)}.w$$

La vérification est laissée en exercice, ainsi que celle du résultat suivant (on peut utiliser les notations de Sweedler).

Proposition 7.2.2 *Soit B une bigèbre, soient V, V', W, W' des B -modules et soient $f : V \longrightarrow V', g : W \longrightarrow W'$ des applications H -linéaires. Alors $f \otimes g : V \otimes W \longrightarrow V' \otimes W'$ est H -linéaire.*

Proposition-Définition 7.2.3 *Soit $B = (B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ une bigèbre. Alors la co-unité $\varepsilon : B \longrightarrow k$ munit k d'une structure de B -module ($b.\lambda = \varepsilon(b)\lambda$), appelé le B -module trivial.*

Proposition 7.2.4 *Soit B une bigèbre et soient U, V, W , des B -modules. Alors les isomorphismes naturels de la proposition 3.1.3*

$$k \otimes U \cong U \cong U \otimes k \quad \text{et} \quad (U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W)$$

sont des isomorphismes de B -modules.

Cette proposition, dont la vérification (facile) est laissée au lecteur, permet ici aussi de construire des produits tensoriels "multiples" de B -modules sans s'inquiéter d'un ordre dans les parenthèses.

Finalement, si H est une algèbre de Hopf, on peut munir le dual d'un H -module d'une structure de H -module. Là encore la vérification est laissée en exercice.

Proposition-Définition 7.2.5 *Soient H une algèbre de Hopf V un H -module. Alors il existe sur V^* une unique structure de H -module telle que*

$$\forall x \in H, \forall f \in V^*, \forall v \in V, (x.f)(v) = f(S(x).v)$$

L'application "évaluation" $V^* \otimes V \longrightarrow k, f \otimes v \longmapsto f(v)$, est alors H -linéaire.

7.3 Comodules sur une cogèbre

Le concept de comodule est dual de celui de module.

Définition 7.3.1 Soit $C = (C, \Delta, \varepsilon)$ une cogèbre. Un C -comodule (à droite) est une paire (V, α_V) où V est un espace vectoriel et $\alpha_V : V \rightarrow V \otimes C$ est une application linéaire telle que les diagrammes suivant soient commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\alpha_V} & V \otimes C \\ \downarrow \alpha_V & & \downarrow \alpha_V \otimes \text{id}_C \\ V \otimes C & \xrightarrow{\text{id}_V \otimes \Delta} & V \otimes C \otimes C \end{array} \quad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\alpha_V} & V \otimes C \\ \searrow \cong & & \swarrow \text{id}_V \otimes \varepsilon \\ & & V \otimes k \end{array}$$

On dit que l'application linéaire $\alpha_V : V \rightarrow V \otimes C$ est la **co-action** de C sur V .

Définition 7.3.2 Soient C une cogèbre et $V = (V, \alpha_V)$ et $W = (W, \alpha_W)$ des C -comodules. Un **morphisme de C -comodules** est une application k -linéaire $f : V \rightarrow W$ telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow \alpha_V & & \downarrow \alpha_W \\ V \otimes C & \xrightarrow{f \otimes \text{id}_C} & W \otimes C \end{array}$$

On dit aussi qu'un morphisme de C -comodules est une **application C -colinéaire**, et on note $\text{Hom}_C(V, W)$ l'ensemble des morphismes de C -comodules de V dans W .

La catégorie des C -comodules est notée $\text{Comod}(C)$, et la sous-catégorie pleine des C -comodules de dimension finie (ceux qui sont de dimension finie comme k -espaces vectoriels) est notée $\text{Comod}_f(C)$.

Notations de Sweedler pour les comodules. Soit $V = (V, \alpha_V)$ un C -comodule. Pour $v \in V$ on notera

$$\alpha_V(v) = \sum v_{(0)} \otimes v_{(1)}$$

Les axiomes se traduisent par

$$(\text{id}_V \otimes \Delta) \circ \alpha_V(v) = (\alpha_V \otimes \text{id}_C) \circ \alpha_V(v) = \sum v_{(0)} \otimes v_{(1)} \otimes v_{(2)}$$

$$\text{et } \sum \varepsilon(v_{(1)})v_{(0)} = v$$

Exemple : (C, Δ) est un C -comodule.

Exemple : si G est un groupe algébrique affine, on verra au paragraphe 6 que la catégorie des $\mathcal{O}(G)$ -comodules de dimension finie est équivalente à celle des représentations linéaires de G .

Exemple : soit X un ensemble, et considérons la cogèbre $k[X]$. Pour un k -espace vectoriel V , il est équivalent de se donner :

1. une structure de $k[X]$ -comodule sur V ,
2. une X -gradation sur V , c'est-à-dire une décomposition en somme directe $V = \bigoplus_{x \in X} V_x$.

En effet : Soit $\alpha : V \longrightarrow V \otimes k[X]$ une structure de $k[X]$ -comodule sur V . Pour $x \in X$, posons

$$V_x = \{v \in V \mid \alpha(v) = v \otimes e_x\}$$

et montrons que $V = \bigoplus_{x \in X} V_x$. Soit $v \in V$. On a $\alpha(v) = \sum_{i=1}^n v_i \otimes e_{x_i}$ pour des éléments x_1, \dots, x_n de X deux à deux distincts. On a $v = \sum_i \varepsilon(e_{x_i})v_i$ et

$$\sum_{i=1}^n \alpha(v_i) \otimes e_{x_i} = \sum_{i=1}^n v_i \otimes \Delta(e_{x_i}) = \sum_{i=1}^n v_i \otimes e_{x_i} \otimes e_{x_i}$$

ainsi $v_i \in V_{x_i}$ pour tout i et $V = \sum_{x \in X} V_x$. Si $\sum_{i=1}^n v_i = 0$ pour des $v_i \in V_{x_i}$ (avec toujours $x_1, \dots, x_n \in X$ deux à deux distincts), alors $0 = \alpha(\sum_{i=1}^n v_i) = \sum_{i=1}^n v_i \otimes e_{x_i}$, et donc on a $v_i = 0, \forall i$, et la somme est bien directe.

Réciproquement, si $V = \bigoplus_{x \in X} V_x$, on vérifie que l'on définit une structure de $k[X]$ -comodule sur V en posant, pour $v \in V_x, \alpha(v) = v \otimes e_x$. \square

Exemple : Munissons l'espace vectoriel k^n de sa base canonique e_1, \dots, e_n , et considérons l'application linéaire

$$\begin{aligned} \alpha_n : k^n &\longrightarrow k^n \otimes M_n(k)^* \\ e_i &\longmapsto \sum_{k=1}^n e_k \otimes x_{ki} \end{aligned}$$

Alors (k^n, α_n) est un $M_n(k)^*$ -comodule.

Il est souvent utile de décrire une co-action en utilisant une base de l'espace vectoriel sous-jacent, ce qui mène à la définition suivante.

Définition 7.3.3 Soit C une cogèbre, et $x = (x_{ij}) \in M_n(C)$ une matrice à coefficients dans C . On dit que x est une **matrice multiplicative** si $\forall i, j$, on a

$$\Delta(x_{ij}) = \sum_{k=1}^n x_{ik} \otimes x_{kj}, \quad \varepsilon(x_{ij}) = \delta_{ij}$$

L'exemple précédent fournit des exemples de matrices multiplicatives.

Proposition 7.3.4 Soient C une cogèbre et $V = (V, \alpha_V)$ un C -comodule de dimension $n > 0$. Soit v_1, \dots, v_n une base de V . Il existe une matrice multiplicative $x = (x_{ij}) \in M_n(C)$ telle que $\forall i$,

$$\alpha_V(v_i) = \sum_{j=1}^n v_j \otimes x_{ji}$$

Réciproquement si $x = (x_{ij}) \in M_n(C)$ est une matrice multiplicative, pour chaque base de V , la formule précédente définit sur V une structure de C -comodule.

Preuve. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe des éléments x_{ij} de C tels que $\alpha_V(v_i) = \sum_{j=1}^n v_j \otimes x_{ji}$. On a alors

$$v_i = \sum_j \varepsilon(x_{ji})v_j \text{ et } \sum_{j=1}^n v_j \otimes \Delta(x_{ji}) = \sum_{j=1}^n \alpha_V(v_j) \otimes x_{ji} = \sum_{j,k=1}^n v_k \otimes x_{kj} \otimes x_{ji}$$

ce qui montre que $x = (x_{ij})$ est une matrice multiplicative. La réciproque est identique à la vérification de l'exemple précédent. \square

La notion de morphisme de comodules s'interprète en termes de matrices multiplicatives.

Proposition 7.3.5 *Soient C une cogèbre et V, W des C -comodules de dimension respectives n et m . Choisissons des bases de V et W , et soient $x = (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $y = (y_{kl})_{1 \leq k, l \leq m}$ les matrices multiplicatives associées. Soit $f : V \rightarrow W$ une application linéaire, et soit $M \in M_{m,n}(k)$ sa matrice dans les bases choisies. Alors f est un morphisme de C -comodules si et seulement si $yM = Mx$.*

Preuve. Soient e_1, \dots, e_n et e'_1, \dots, e'_m des bases respectives de V et W , avec

$$\alpha_V(e_i) = \sum_{k=1}^n e_k \otimes x_{ki} \quad \text{et} \quad \alpha_W(e'_j) = \sum_{l=1}^m e_l \otimes y_{lj}$$

Notons $M = (\lambda_{ji})$ la matrice de f dans ces bases. Comme f est linéaire, alors f est un morphisme de comodules si et seulement si,

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \alpha_W \circ f(e_i) &= (f \otimes \text{id}_C) \circ \alpha_V(e_i) \\ \iff \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \sum_{l=1}^m e'_l \otimes \left(\sum_{j=1}^m \lambda_{ji} y_{lj} \right) &= \sum_{l=1}^m e'_l \otimes \left(\sum_{k=1}^n \lambda_{lk} x_{ki} \right) \end{aligned}$$

ce qui donne bien le résultat. \square .

Pour étudier un comodule, il est souvent utile de lui associer une cogèbre, de la manière suivante.

Proposition-Définition 7.3.6 *Soient C une cogèbre et $V = (V, \alpha_V)$ un C -comodule. Alors*

$$C(V) := \{(\phi \otimes \text{id}_C)(\alpha_V(v)), \phi \in V^*, v \in V\} \subset C$$

*est une sous-cogèbre de C , appelée la **cogèbre associée à V** . Si V est de dimension finie et si $x = (x_{ij}) \in M_n(C)$ est la matrice multiplicative associée au choix d'une base de V , alors on a*

$$C(V) = \text{Vect}(x_{ij}, 1 \leq i, j \leq n)$$

Preuve. Soit $v \in V$ avec $\alpha(v) = \sum_{i=1}^n v_i \otimes x_i$, où les $v_i \in V$ sont linéairement indépendants. En utilisant des formes linéaires duales des v_i , on voit que les x_i sont dans $C(V)$. On a

$$\sum_{i=1}^n v_i \otimes \Delta(x_i) = \sum_{i=1}^n \sum (v_i)_{(0)} \otimes (v_i)_{(1)} \otimes x_i$$

et donc pour tout i ,

$$\Delta(x_i) = \sum_{j=1}^n \sum v_i^*((v_j)_{(0)})(v_j)_{(1)} \otimes x_j \in C(V) \otimes C(V)$$

Ainsi $\forall \phi \in V^*$, on a $\Delta(\phi(v_{(0)})v_{(1)}) \in C(V) \otimes C(V)$ et $C(V)$ est une sous-cogèbre de C . Si V est de dimension finie, on fixe une base de V , de matrice multiplicative associée $x = (x_{ij}) \in M_n(C)$ et on voit facilement, en utilisant une base duale, que $C(V) = \text{Vect}(x_{ij}, 1 \leq i, j \leq n)$. \square

Définition 7.3.7 Soient C une cogèbre et (V, α_V) un C -comodule. Un **sous-comodule** de V est un sous-espace vectoriel $W \subset V$ tel que $\alpha_V(W) \subset W \otimes C$.

Il est clair qu'un sous-comodule est lui-même un comodule.

Proposition 7.3.8 Soit C une cogèbre, soient V et W des C -comodules et $f : V \rightarrow W$ un morphisme de C -comodules.

(a) $\text{Im}(f)$ est une sous-comodule de W et $\text{Ker}(f)$ est un sous-comodule de W .

(b) Si M est un sous-comodule de V , il existe sur V/M une unique structure de C -comodule telle que la surjection canonique $p : V \rightarrow V/M$ soit un morphisme de C -comodules.

(c) f induit un isomorphisme de C -comodules $V/\text{Ker}(f) \cong \text{Im}(f)$.

Preuve. (a) On a

$$\alpha_W(f(V)) = (f \otimes \text{id}_C)(\alpha_V(V)) \subset (f \otimes \text{id}_C)(V \otimes C) = f(V) \otimes C$$

ce qui montre que $\text{Im}(f)$ est un sous-comodule de W . Pour $x \in \text{Ker}(f)$, on a

$$0 = \alpha_W(f(x)) = (f \otimes \text{id}_C)(\alpha_V(x)) \Rightarrow \alpha_V(x) \in \text{Ker}(f \otimes \text{id}_C) = \text{Ker}(f) \otimes C$$

ce qui montre que $\text{Ker}(f)$ est bien un sous-comodule de V .

(b) L'application linéaire $(p \otimes \text{id}_C) \circ \alpha_V : V \rightarrow V/M \otimes C$ s'annule sur M , et donc induit une unique application linéaire $\overline{\alpha_V} : V/M \rightarrow V/M \otimes C$ telle $\overline{\alpha_V} \circ p = (p \otimes \text{id}_C) \circ \alpha_V$. On vérifie sans difficulté que $(V/M, \overline{\alpha_V})$ est bien un C -comodule.

(c) L'application linéaire f induit un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $V/\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$, dont on vérifie facilement qu'il est un morphisme de comodules. Il est ensuite facile de vérifier que l'inverse d'un morphisme de comodules bijectif est lui-même un morphisme de comodules. \square

Proposition 7.3.9 *Soit C une cogèbre, soit V un C -comodule et soient $(V_i)_{i \in I}$ des sous-comodules de V .*

- (a) $\sum_{i \in I} V_i$ est un sous-comodule de V et $C(\sum_{i \in I} V_i) = \sum_{i \in I} C(V_i)$.
- (b) $\cap_{i \in I} V_i$ est un sous-comodule de V .

Preuve. La première assertion est une vérification immédiate, et la deuxième provient du lemme 3.2.9. \square

On peut maintenant montrer un résultat fondamental pour l'étude des comodules.

Théorème 7.3.10 (Théorème fondamental de finitude des comodules) *Soient C une cogèbre et V un C -comodule. Toute partie finie de V est contenue dans un sous-comodule de dimension finie de V .*

Preuve. Montrons d'abord le résultat pour une partie à un élément. Soit $v \in V$, avec $\alpha(v) = \sum_{i=1}^n v_i \otimes x_i$, où les $x_i \in C$ sont linéairement indépendants. Soit $X_v = \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$. Montrons que $v \in X_v$ et que X_v est un sous-comodule de V . On a $v = \sum_i \varepsilon(x_i)v_i$, donc $v \in X_v$. On a

$$\sum_{i=1}^n \alpha(v_i) \otimes x_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i \otimes (x_i)_{(1)} \otimes (x_i)_{(2)}$$

Si ψ_j est une forme linéaire sur C telle que $\psi_j(x_i) = \delta_{ij}$, $\forall i$, on voit donc que

$$\alpha(v_j) = \sum_i v_i \otimes \left(\sum \psi_j((x_i)_{(2)})(x_i)_{(1)} \right)$$

ce qui montre X_v est un sous-comodule de V .

Si maintenant v_1, \dots, v_n sont des éléments de V , le sous-comodule de dimension finie $X_{v_1} + \dots + X_{v_n}$ contient nos éléments. \square

Ce résultat montre la différence entre modules et comodules : il n'est pas vrai en général qu'un élément d'un module est contenu dans un sous-module de dimension finie.

Corollaire 7.3.11 (Théorème fondamental de finitude des cogèbres) *Soit C une cogèbre. Toute partie finie de C est contenue dans un sous-cogèbre de dimension finie de C .*

Preuve. Soit S une partie finie de C et soit V un sous- C -comodule de dimension finie de C contenant S : on a $\Delta(V) \subset V \otimes C$. Pour $v \in V$, on a $v = \sum \varepsilon(v_{(1)})v_{(2)}$, donc $v \in C(V)$. Ainsi $V \subset C(V)$, et $C(V)$ est donc une sous-cogèbre de dimension finie de C contenant S . \square

On termine ce paragraphe en reliant comodules et modules.

Théorème 7.3.12 Soient C une cogèbre et $V = (V, \alpha_V)$ un C -comodule. L'application linéaire

$$\begin{aligned} C^* \otimes V &\longrightarrow V \\ \phi \otimes v &\longmapsto \sum \phi(v_{(1)})v_{(0)} \end{aligned}$$

munit V d'une structure de C^* -module. Cette construction définit un foncteur pleinement fidèle

$$\text{Comod}(C) \longrightarrow \text{Mod}(C^*)$$

qui est une équivalence de catégories si C est de dimension finie.

Preuve. Soit $v \in V$ et $\phi, \psi \in C^*$. On a

$$(\phi\psi).v = \sum (\phi\psi)(v_{(1)})v_{(0)} = \sum \phi(v_{(1)})\psi(v_{(2)})v_{(0)} = \sum \phi.(\psi(v_{(1)})v_{(0)}) = \phi.(\psi.v)$$

et $\varepsilon.v = \sum \varepsilon(v_{(1)})v_{(0)} = v$, donc V est bien un C^* -module. Soient V, W des C -comodules et $f \in \text{Hom}_C(V, W)$. Pour $\phi \in V^*$, on a

$$f(\phi.v) = \sum \phi(v_{(1)})f(v_{(0)}) = \sum \phi(f(v)_{(1)})f(v)_{(0)} = \phi.f(v)$$

donc $f \in \text{Hom}_{C^*}(V, W)$, et on a bien votre foncteur $\text{Comod}(C) \longrightarrow \text{Mod}(C^*)$. Soit $f \in \text{Hom}_{C^*}(V, W)$. Pour montrer que $\alpha_W \circ f = (f \otimes \text{id}_C) \circ \alpha_V$, il suffit de voir que $\forall \phi \in C^*$, on a $(\text{id}_W \otimes \phi) \circ \alpha_W \circ f = (\text{id}_W \otimes \phi) \circ (f \otimes \text{id}_C) \circ \alpha_V$. Pour $v \in V$, on a

$$\begin{aligned} (\text{id}_W \otimes \phi) \circ \alpha_W \circ f(v) &= \sum \phi(f(v)_{(1)})f(v)_{(0)} = \phi.f(v) = f(\phi.v) \\ &= \sum f(\phi(v_{(1)})v_{(0)}) = (\text{id}_W \otimes \phi) \circ (f \otimes \text{id}_C) \circ \alpha_V(v) \end{aligned}$$

et ainsi $f \in \text{Hom}_C(V, W)$, notre foncteur est donc pleinement fidèle.

Pour montrer la dernière assertion, il reste à montrer qu'il est essentiellement surjectif si C est de dimension finie. Supposons donc C de dimension finie et soit x_1, \dots, x_n une base de C , de base duale x_1^*, \dots, x_n^* . Soit V un C^* -module. On définit une application linéaire $\alpha : V \longrightarrow V \otimes C$ par $\alpha(v) = \sum_{i=1}^n x_i^*.v \otimes x_i$, $\forall v \in V$. Montrons que (V, α) est un C -comodule. On a

$$(\text{id}_V \otimes \varepsilon)(\alpha(v)) = \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon(x_i)x_i^* \right).v = \varepsilon.v = v$$

Il faut ensuite montrer que

$$\sum_{i=1}^n \alpha(x_i^*.v) \otimes x_i = \sum_{i=1}^n x_i^*.v \otimes \Delta(x_i) \in V \otimes C \otimes C$$

c'est-à-dire que

$$\sum_{i,j=1}^n x_j^*. (x_i^*.v) \otimes x_j \otimes x_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i^*.v \otimes x_{i(1)} \otimes x_{i(2)}$$

C'est équivalent à montrer que $\forall j, k$, on a

$$x_j^*.(x_k^*.v) = \sum_{i=1}^n \sum x_j^*(x_{i(1)})x_k^*(x_{i(2)})x_i^*.v$$

Mais on a

$$\sum_{i=1}^n \sum x_j^*(x_{i(1)})x_k^*(x_{i(2)})x_i^*.v = \sum_{i=1}^n (x_j^*x_k^*)(x_i)x_i^*.v = (x_j^*x_k^*).v = x_j^*(x_k^*.v)$$

et ainsi (V, α) est bien un C -comodule. Il est alors clair que la structure de C^* -module donnée par la foncteur du théorème est la même que la structure initiale, et le résultat est donc montré. \square

Exemples. 1. soit X un ensemble fini. La catégorie des $k[X]$ -comodules est équivalente à la catégorie des $k^{(X)}$ -modules, car $k^{(X)} \cong k[X]^*$.

2. Soit G un groupe fini. La catégorie des $k^{(G)}$ -comodules est équivalente à la catégorie des $k[G]$ -modules, car les algèbres $(k^{(G)})^*$ et $k[G]$ sont isomorphes. Ainsi la catégorie des représentations de G étant de manière évidente équivalente à la catégorie des $k[G]$ -modules de dimension finie, la catégorie des représentations de G est équivalente à celle des $k^{(G)}$ -comodules de dimension finie. On généralisera ce résultat aux groupes algébriques affines au paragraphe 6.

7.4 Comodules sur une algèbre de Hopf

On dualise les constructions du paragraphe 7.2. Tout d'abord, si B est une bigèbre, on peut construire un produit tensoriel de comodules.

Proposition-Définition 7.4.1 Soit $B = (B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ une bigèbre et soient $V = (V, \alpha_V)$ et (W, α_W) des B -comodules. L'application linéaire

$$\alpha_{V \otimes W} := (\text{id}_V \otimes \text{id}_W \otimes m) \circ (\text{id}_V \otimes \tau_{B,W} \otimes \text{id}_B) \circ (\alpha_V \otimes \alpha_W) : V \otimes W \longrightarrow V \otimes W \otimes B$$

munie $V \otimes W$ d'une structure de B -comodule. Le comodule $(V \otimes W, \alpha_{V \otimes W})$ est appelé le **produit tensoriel des comodules V et W** . Pour $v \in V$ et $w \in W$, on a donc

$$\alpha_{V \otimes W}(v \otimes w) = \sum v_{(0)} \otimes w_{(0)} \otimes v_{(1)}w_{(1)}$$

La vérification (directe) est laissée en exercice, ainsi que celle du résultat suivant.

Proposition 7.4.2 Soit B une bigèbre, soient V, V', W, W' des B -comodules et soient $f : V \longrightarrow V', g : W \longrightarrow W'$ des applications H -colinéaires. Alors $f \otimes g : V \otimes W \longrightarrow V' \otimes W'$ est H -colinéaire.

Proposition-Définition 7.4.3 Soit $B = (B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ une bigèbre. L'application linéaire $k \rightarrow k \otimes B, 1 \mapsto 1 \otimes 1_B$, munie k d'une structure de B -comodule, appelé le **B -comodule trivial**.

Proposition 7.4.4 *Soit B une bigèbre et soient U, V, W des B -comodules. Alors les isomorphismes naturels de la proposition 3.1.3*

$$k \otimes U \cong U \cong U \otimes k \quad \text{et} \quad (U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W)$$

sont des isomorphismes de B -comodules.

Cette proposition, dont la vérification (facile) est laissée au lecteur, permet ici aussi de construire des produits tensoriels "multiples" de B -comodules sans s'inquiéter d'un ordre dans les parenthèses.

On peut aussi construire le dual d'un comodule sur une algèbre de Hopf, en utilisant le résultat suivant.

Proposition 7.4.5 *Soient H une algèbre de Hopf et soit $x = (x_{ij}) \in M_n(H)$ une matrice multiplicative. Alors x est inversible, d'inverse $S(x) = (S(x_{ij}))$.*

Preuve. Le résultat est une conséquence directe des axiomes d'antipode. \square

Proposition-Définition 7.4.6 *Soit $H = (H, m, u, \Delta, \varepsilon, S)$ une algèbre de Hopf et soit $V = (V, \alpha_V)$ un H -comodule de dimension finie. Il existe une structure de H -comodule $\alpha_{V^*} : V^* \rightarrow V^* \otimes H$ sur V^* telle que l'application "évaluation" $V^* \otimes V \rightarrow k, f \otimes v \mapsto f(v)$, soit H -colinéaire. L'application linéaire α_{V^*} est définie ainsi : si v_1, \dots, v_n est une base de V avec $\alpha_V(v_i) = \sum_j v_j \otimes u_{ji}$, on a $\alpha_{V^*}(v_i^*) = \sum_j v_j^* \otimes S(u_{ij})$. L'application linéaire $\delta_V : k \rightarrow V \otimes V^*, 1 \mapsto \sum_i v_i \otimes v_i^*$, est H -colinéaire.*

La vérification est laissée en exercice, tout comme celle du résultat suivant.

Proposition 7.4.7 *Soit $B = (B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ une bigèbre et soient $V = (V, \alpha_V)$ et (W, α_W) des B -comodules. On a $B(V \otimes W) = B(V)B(W)$. Si $B = H$ est une algèbre de Hopf et si V est de dimension finie, alors $H(V^*) = S(H(V))$.*

7.5 Comodules sur une bigèbre de type fini

On étudie maintenant les comodules sur une bigèbre qui est de type fini comme algèbre. Le fait remarquable est l'existence d'un comodule à partir duquel on peut construire tous les autres.

Proposition-Définition 7.5.1 *Soit B une bigèbre. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (a) B est de type fini comme k -algèbre.
- (b) Il existe un B -comodule de dimension finie V tel que $B(V)$ engendre B comme k -algèbre.
- (c) Il existe un B -comodule de dimension finie V tel que $B = \sum_{n \in \mathbb{N}} B(V)^n$.
- (d) Il existe un B -comodule de dimension finie V tel que $B = \sum_{n \in \mathbb{N}} B(V^{\otimes n})$.
- (e) Il existe une matrice multiplicative $x \in M_n(B)$ dont les coefficients engendrent B comme k -algèbre.

Un B -comodule **générateur** est un B -comodule de dimension finie satisfaisant à l'une des conditions équivalentes (b), (c) ou (d).

Preuve. Les équivalences $(b) \iff (c) \iff (d)$ proviennent de la dernière proposition du paragraphe précédent, et l'équivalence $(b) \iff (e)$ provient de la proposition 7.3.6. Il est clair que $(e) \implies (a)$, et donc il reste à montrer que $(a) \implies (b)$. Si S une partie de B qui engendre B comme algèbre, soit V un sous-comodule de dimension finie de B contenant S . On a $S \subset V \subset B(V)$, et donc $B(V)$ engendre B comme algèbre. \square

Notations. Si B est une bigèbre et V est un B -comodule. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $V^{[k]}$ le B -comodule $V^{[k]} = k \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \dots \oplus V^{\otimes k}$.

Le résultat suivant est important : il assure que si V est un comodule générateur d'une bigèbre, alors on peut construire tous les B -comodules de dimension finie à partir de V .

Théorème 7.5.2 *Soit B une bigèbre de type fini et soit V un B -comodule générateur. Soit W un B -comodule de dimension finie. Alors il existe des entiers $k_1, \dots, k_p, m_1, \dots, m_p$, et des sous-comodules $M_1 \subset (V^{[k_1]})^{m_1}, \dots, M_p \subset (V^{[k_p]})^{m_p}$ tels que W soit isomorphe à un sous-comodule de $(V^{[k_1]})^{m_1}/M_1 \oplus \dots \oplus (V^{[k_p]})^{m_p}/M_p$.*

On a besoin d'une série de lemmes.

Lemme 7.5.3 *Soient C une cogèbre, V un C -comodule et M un k -espace vectoriel. L'application linéaire $\text{id}_M \otimes \alpha_V : M \otimes V \longrightarrow M \otimes V \otimes C$ munit $M \otimes V$ d'une structure de C -comodule. Si M est de dimension finie, alors le comodule obtenu $M \otimes V$ est isomorphe à $V^{\dim(M)}$.*

Preuve. La preuve est une vérification directe. \square

Lemme 7.5.4 *Soient C une cogèbre et V un C -comodule de dimension n . Alors on a un isomorphisme de comodules $V^n/M \cong C(V)$ pour un certain sous-comodule $M \subset V^n$.*

Preuve. On fixe une base v_1, \dots, v_n de V , de matrice multiplicative associée $(x_{ij}) : \alpha_V(v_i) = \sum_j v_j \otimes x_{ji}$. L'application linéaire $f : V^* \otimes V \longrightarrow C(V)$, $v_i^* \otimes v_j \longmapsto x_{ij}$, est C -colinéaire pour la structure de C -comodule sur $V^* \otimes V$ fournie par le lemme précédent, qui assure aussi que $V^n/M \cong C(V)$, pour $M = \text{Ker}(f)$, en tant que C -comodule. \square

Lemme 7.5.5 *Soient C une cogèbre et $V = (V, \alpha_V)$ un C -comodule. Notons V_0 l'espace vectoriel sous-jacent (on oublie la structure de C -comodule sur V) et considérons le C -comodule $V_0 \otimes C$ du lemme 7.5.3. Alors la co-action α_V est un morphisme injectif de comodules $V \longrightarrow V_0 \otimes C$.*

Preuve. La co-action $\alpha_V : V \longrightarrow V_0 \otimes C$ est un morphisme de comodules, et est injective, par définition d'un comodule. \square

Preuve du théorème. Premier cas : supposons dans un premier temps que W est un sous-comodule du comodule régulier $B = (B, \Delta)$. Comme W est de dimension finie, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $W \subset \sum_{i=0}^k B(V)^i = B(V^{[k]})$, et W est un sous-comodule de $B(V^{[k]})$. L'avant dernier lemme assure l'existence de $m \in \mathbb{N}$ et d'un sous-comodule

$M \subset (V^{[k]})^m$ tel que les comodules $B(V^{[k]})$ et $(V^{[k]})^m/M$ sont isomorphes, et ainsi W est isomorphe à un sous-comodule de $(V^{[k]})^m/M$.

Cas général : si maintenant W est un comodule quelconque, les lemmes 7.5.5 et 7.5.3 assurent que W est isomorphe à un sous-comodule de B^k , où $k = \dim(W)$, et notons $\theta : W \hookrightarrow B^k$ l'injection B -colinéaire associée. Notons p_1, \dots, p_k les k projections $B^k \rightarrow B$, qui sont des morphismes de B -comodules. Pour $i \in \{1, \dots, k\}$ soit $W_i = p_i(\theta(W))$, c'est un sous-comodule de B , et W est isomorphe à un sous-comodule de $W_1 \oplus \dots \oplus W_k$. Le premier cas permet de conclure. \square

7.6 Représentations de groupes algébriques et comodules

On va appliquer les résultats précédents aux représentations de groupes algébriques. Montrons tout d'abord que les représentations d'un groupe algébrique affine G correspondent aux $\mathcal{O}(G)$ -comodules de dimension finie.

Théorème 7.6.1 *Soit G un groupe algébrique affine. Soit V un $\mathcal{O}(G)$ -comodule de dimension finie. Pour $g \in G$, l'application linéaire $\pi_V(g) : V \rightarrow V$, $v \mapsto \sum v_{(1)}(g)v_{(0)}$ est bijective, et on obtient ainsi une représentation linéaire de G*

$$\pi_V : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$$

Cette construction définit un foncteur

$$\mathrm{Comod}_f(\mathcal{O}(G)) \longrightarrow \mathrm{Rep}(G)$$

qui est une équivalence de catégories.

Preuve. Soient $g, h \in G$ et $v \in V$. On a

$$\begin{aligned} \pi_V(gh)(v) &= \sum v_{(1)}(gh)v_{(0)} = \sum v_{(1)}(g)v_{(2)}(h)v_{(0)} \\ &= \pi_V(g)\left(\sum v_{(1)}(h)v_{(0)}\right) = \pi_V(g) \circ \pi_V(h)(v) \end{aligned}$$

Comme $\pi_V(1) = \mathrm{id}_V$, ce calcul montre à la fois que $\pi_V(g)$ est un isomorphisme et que π_V est un morphisme de groupes. Vérifions que π_V est un morphisme de groupes algébriques. Fixons une base e_1, \dots, e_n de V : elle permet d'identifier $\mathrm{GL}(V)$ et $\mathrm{GL}_n(k)$, et soit $(\pi_{ij}) \in M_n(\mathcal{O}(G))$ la matrice multiplicative correspondante :

$$\alpha(e_i) = \sum_{j=1}^n e_j \otimes \pi_{ji}$$

Alors via l'identification entre $\mathrm{GL}(V)$ et $\mathrm{GL}_n(k)$, $\pi_V(g)$ est la matrice $(\pi_{ij}(g))$. La matrice (π_{ij}) est inversible dans $M_n(\mathcal{O}(G))$ d'après une proposition précédente, et donc l'inverse de son déterminant est dans $\mathcal{O}(G)$. Notons x_{ij} les fonctions coordonnées sur $\mathrm{GL}_n(k)$ (exemple 1 du paragraphe 6). On a alors $x_{ij} \circ \pi_V = \pi_{ij} \in \mathcal{O}(G)$ pour tous i, j ,

et aussi $\det(x_{ij})^{-1} \circ \pi_V = \det(\pi_{ij})^{-1} \in \mathcal{O}(G)$. Ceci montre que $\forall f \in \mathcal{O}(\mathrm{GL}_n(k))$, on a $f \circ \pi_V \in \mathcal{O}(G)$, et donc π_V est bien un morphisme de groupes algébriques affines.

Soient V et W sont des $\mathcal{O}(G)$ -comodules de dimension finie, et $f \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$. En utilisant la caractérisation matricielle des morphismes de comodules (proposition 7.3.5), on voit facilement que $f \in \mathrm{Hom}_G(V, W) \iff f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(G)}(V, W)$. Ainsi on définit bien un foncteur $\mathrm{Comod}_f(\mathcal{O}(G)) \longrightarrow \mathrm{Rep}(G)$, qui est pleinement fidèle.

Soit $\pi_V : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ une représentation de G . En fixant une base v_1, \dots, v_n de V , on identifie $\mathrm{GL}(V)$ et $\mathrm{GL}_n(k)$ et on peut écrire $\pi_V = (\pi_{ij})$, avec $\forall i, j, \pi_{ij} \in \mathcal{O}(G)$ car π_V est une application polynomiale. On a

$$\pi_{ij}(gh) = (\pi_V(gh))_{ij} = (\pi_V(g)\pi_V(h))_{ij} = \sum_{k=1}^n (\pi_V(g))_{ik} (\pi_V(h))_{kj} = \sum_{k=1}^n \pi_{ik}(g) \pi_{kj}(h)$$

d'où $\Delta(\pi_{ij}) = \sum_{k=1}^n \pi_{ik} \otimes \pi_{kj}$ et $\varepsilon(\pi_{ij}) = \delta_{ij}$ (car $\pi_{ij}(1) = \delta_{ij}$). Ainsi (π_{ij}) est une matrice multiplicative et on a une structure de $\mathcal{O}(G)$ -comodule sur V définie par $\alpha(v_i) = \sum_j v_j \otimes \pi_{ji}$. Il est clair que la représentation π_V provient de cette structure de comodule, et ainsi notre foncteur est essentiellement surjectif, et est une équivalence de catégories. \square

Théorème 7.6.2 *Soit G un groupe algébrique affine. Alors G admet une représentation fidèle : il existe un espace vectoriel de dimension finie V et un morphisme injectif de groupes algébriques affines $\pi_V : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$.*

Preuve. L'algèbre $\mathcal{O}(G)$ est de type fini, donc il existe $u = (u_{ij}) \in M_n(\mathcal{O}(G))$ une matrice multiplicative dont les coefficients engendrent $\mathcal{O}(G)$ comme algèbre. La matrice u est inversible par la proposition 7.4.5, donc il existe un morphisme d'algèbre de Hopf surjectif $f : \mathcal{O}(\mathrm{GL}_n(k)) \longrightarrow \mathcal{O}(G)$, qui induit un morphisme de groupes algébriques affines $G \longrightarrow \mathrm{GL}_n(k)$, qui est injectif. \square

Les constructions du paragraphe 7.4 s'appliquent à l'algèbre de Hopf $\mathcal{O}(G)$, et donc aux représentations de G . Ainsi si $\pi_V : G \longrightarrow V$, et $\pi_W : G \longrightarrow \mathrm{GL}(W)$ sont des représentations de G , leur produit tensoriel est

$$\begin{aligned} \pi_{V \otimes W} : G &\longrightarrow \mathrm{GL}(V \otimes W) \\ g &\longmapsto \pi_V(g) \otimes \pi_W(g) \end{aligned}$$

On a également la représentation duale $\pi_{V^*} : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V^*)$, définie par $\pi_{V^*}(g)(\phi) = \phi \circ \pi_V(g^{-1})$, $\forall \phi \in V^*$.

Le théorème 7.5.2 se traduit alors de la manière suivante.

Théorème 7.6.3 *Soit $G \subset \mathrm{GL}(V)$ un groupe algébrique affine, et considérons la représentation $X = V \oplus V^*$. Soit W une représentation linéaire de G . Alors il existe des entiers $k_1, \dots, k_p, m_1, \dots, m_p$, et des sous-représentations $M_1 \subset (X^{[k_1]})^{m_1}, \dots, M_p \subset (X^{[k_p]})^{m_p}$ tels que W soit isomorphe à un sous-représentation de $(X^{[k_1]})^{m_1}/M_1 \oplus \dots \oplus (X^{[k_p]})^{m_p}/M_p$.*

Preuve. Le comodule X est générateur pour l'algèbre de Hopf $\mathcal{O}(G)$, et ainsi le résultat est une reformulation du théorème 7.5.2. \square

7.7 Une des origines du groupe quantique SL_2

Une idée naturelle pour trouver de nouveaux groupes est de chercher des sous-groupes de groupes connus, qui vont préserver certaines structures. Par exemple, si V est un espace vectoriel et $\psi : V \otimes V \rightarrow k$ est une application linéaire, le groupe des automorphismes de ψ est le sous-groupe de $GL(V)$ défini par

$$\text{Aut}(\psi) = \{g \in GL(V) \mid g(v) \otimes g(v') = v \otimes v', \forall v, v' \in V\}$$

On obtient ainsi, par exemple, les groupes orthogonaux et symplectiques.

Dubois-Violette et Launer [8] ont défini un analogue quantique de cette construction de groupes. La remarque-clé est que l'application linéaire $\psi : V \otimes V \rightarrow k$ est un morphisme de représentations de $\text{Aut}(\psi)$. Il faut donc chercher les algèbres de Hopf H telles que V soit un H -comodule et $\psi : V \otimes V \rightarrow k$ soit H -colinéaire. La construction de base est la suivante. La preuve est laissée en exercice (on utilise le théorème 6.3.1).

Proposition-Définition 7.7.1 *Soit $E \in GL_n(k)$. On pose*

$$\mathcal{B}(E) = k\langle a_{ij}, 1 \leq i, j \leq n \mid E^{-1t}aEa = I_n = aE^{-1t}aE \rangle$$

où $a = (a_{ij})$. Alors on a des morphismes d'algèbres

$$\Delta : \mathcal{B}(E) \rightarrow \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E), \quad \varepsilon : \mathcal{B}(E) \rightarrow k, \quad \text{et} \quad S : \mathcal{B}(E) \rightarrow \mathcal{B}(E)^{\text{op}}$$

définis par ($1 \leq i, j \leq n$)

$$\Delta(a_{ij}) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \otimes a_{kj}, \quad \varepsilon(a_{ij}) = \delta_{ij}, \quad S(a)_{ij} = (E^{-1t}aE)_{ij}$$

qui munissent $\mathcal{B}(E)$ d'une structure d'algèbre de Hopf,

Le résultat suivant montre que l'algèbre de Hopf $\mathcal{B}(E)$ est l'analogue quantique du groupe des automorphismes de la forme bilinéaire associée à E .

Théorème 7.7.2 *Soit V un k -espace vectoriel de dimension finie, de base e_1, \dots, e_n , soit $E = (\alpha_{ij}) \in GL_n(k)$ et soit $\psi_E : V \otimes V \rightarrow k$ l'unique forme linéaire telle que $\forall i, j$, $\psi_E(e_i \otimes e_j) = \alpha_{ij}$.*

(a) *Munissons V de la structure de $\mathcal{B}(E)$ -comodule $\alpha : V \rightarrow V \otimes \mathcal{B}(E)$ telle que $\forall i$, $\alpha(e_i) = \sum_j e_j \otimes a_{ji}$. Alors $\psi_E : V \otimes V \rightarrow k$ est $\mathcal{B}(E)$ -colinéaire.*

(b) *Soit H une algèbre de Hopf, et $\beta : V \rightarrow V \otimes H$ une structure de H -comodule sur V telle que $\psi_E : V \otimes V \rightarrow k$ soit H -colinéaire. Alors il existe un unique morphisme d'algèbres de Hopf $f : \mathcal{B}(E) \rightarrow H$ tel que $\beta = (\text{id}_V \otimes f) \circ \alpha$.*

Preuve. Soit H une algèbre de Hopf et soit $\beta : V \rightarrow V \otimes H$ une co-action avec $\beta(e_i) = \sum_j e_j \otimes b_{ji}$. Alors on voit facilement que ψ_E est H -colinéaire si et seulement si $\mathcal{B}Eb = E$, avec $b = (b_{ij})$, c'est-à-dire si $E^{-1t}\mathcal{B}Eb = I_n$. Cela montre donc la partie

(a) du théorème. En revenant au cas général, la matrice multiplicative b est inversible, et donc nécessairement l'inverse est $E^{-1}bE$, d'où $bE^{-1}bE = I_n$, et ainsi il existe un unique morphisme d'algèbres (de Hopf) $f : \mathcal{B}(E) \longrightarrow H$ tel que $f(a_{ij}) = b_{ij}$, $\forall i, j$, et la dernière condition du théorème est vérifiée. \square .

Le groupe classique $\mathrm{SL}_2(k) = \mathrm{Sp}_2(k)$ est le groupe des automorphismes de la forme bilinéaire associé à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. On obtient le groupe quantique $\mathrm{SL}_q(2)$ en perturbant légèrement cette matrice.

Proposition 7.7.3 *Pour $q \in k^*$, on a*

$$\mathcal{B}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q^{-1} & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathcal{O}_q(\mathrm{SL}_2(k))$$

La vérification directe est laissée en exercice.

Chapitre 8

Cogèbres et algèbres de Hopf cosemisimples

Si C est une cogèbre, un objectif important est de décrire tous les C -comodules à isomorphisme près. C'est un problème extrêmement ardu en général, mais il existe des classes de cogèbres pour lesquelles le problème classification des comodules est plus raisonnable, par exemple les cogèbres cosemisimples. Ce chapitre est consacré à cette notion. Le corps k est quelconque dans les paragraphes 8.1 et 8.2, et on supposera $k = \mathbb{C}$ dans le paragraphe 8.3.

8.1 Comodules semisimples

Dans la suite C est une cogèbre.

Définition 8.1.1 *Un C -comodule V est dit **simple** s'il est non nul et si les seuls sous-comodules de V sont (0) et V .*

Proposition 8.1.2 *Soit V un C -comodule simple. Alors V est de dimension finie.*

C'est une conséquence immédiate du théorème 7.3.10.

Le résultat suivant fournit les premiers exemples de comodules simples.

Proposition 8.1.3 *Soit $V = (V, \alpha)$ un C -comodule de dimension $n > 0$. Soit e_1, \dots, e_n une base de V et soient x_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$, les éléments de C tels que, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$,*

$$\alpha(e_i) = \sum_j e_j \otimes x_{ji}$$

Si les éléments x_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$, sont linéairement indépendants, alors V est un C -comodule simple. En particulier k^n est un $M_n(k)^$ -comodule simple.*

Preuve. Soit $(0) \subsetneq W \subsetneq V$ un sous-comodule. Choisissons une base v_1, \dots, v_n de V telle que v_1, \dots, v_p soit une base de W , et considérons la matrice multiplicative associée $y = (y_{ij}) \in M_n(C)$. Pour $i \leq p$, on a

$$\alpha(v_i) = \sum_j v_j \otimes y_{ji} \in W \otimes C$$

donc $y_{ji} = 0$ si $j > p$. Ainsi l'espace vectoriel $C(V)$ est de dimension $< n^2$, et les coefficients de la matrice multiplicative donnée $x = (x_{ij})$ ne sont donc pas linéairement indépendants. \square

Remarque. Si k est algébriquement clos, la réciproque de ce résultat est vraie : si V est simple, alors les éléments x_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$, sont linéairement indépendants.

Le résultat suivant, de preuve très simple, est fondamental.

Théorème 8.1.4 (Lemme de Schur) *Soient V et W des C -comodules simples.*

1. *Si V et W ne sont pas isomorphes, alors $\text{Hom}_C(V, W) = (0)$.*
2. *$\text{End}_C(V)$ est un corps.*
3. *Si k est algébriquement clos, alors $\text{End}_C(V) = k$.*

Preuve. Soit $f \in \text{Hom}_C(V, W)$. Montrons que $f = 0$ ou que f est un isomorphisme. Supposons $f \neq 0$. Alors $\text{Ker}(f) \neq V$ et est un sous-comodule du comodule simple V , donc f est injectif. De même $\text{Im}(f) \neq (0)$, donc $\text{Im}(f) = W$. Ainsi f est un isomorphisme, et ce raisonnement montre les deux premiers points. Si k est algébriquement clos et $f \in \text{End}_C(V)$, considérons une valeur propre λ de f . Alors le morphisme de comodules $f - \lambda \text{id}_V$ est non injectif, et il est donc nul. \square .

Définition 8.1.5 *Un C -comodule est dit **semisimple** s'il est somme directe de sous-comodules simples.*

On autorise éventuellement une somme directe vide, de telle sorte que le comodule nul est semisimple. Le théorème suivant donne diverses caractérisations équivalentes de la semisimplicité d'un comodule.

Théorème 8.1.6 *Soit V un C -comodule. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *V est semisimple.*
2. *V est somme de sous-comodules simples.*
3. *Pour tout sous-comodule $W \subset V$, il existe un sous-comodule $W' \subset V$ tel que $V = W \oplus W'$.*
4. *Pour tout C -comodule W est tout morphisme surjectif de C -comodules $f : V \rightarrow W$, il existe un morphisme de C -comodules $s : W \rightarrow V$ tel que $f \circ s = \text{id}_W$.*

On commence la démonstration deux lemmes.

Lemme 8.1.7 *Soit V un C -comodule avec $V = \sum_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$, où les V_λ sont des sous-comodules simples. Soit W un sous-comodule de V . Alors il existe $\Omega \subset \Lambda$ tel que $V = W \oplus (\oplus_{\lambda \in \Omega} V_\lambda)$.*

Preuve. Soit \mathcal{E} l'ensemble des parties Ω de Λ telles que la somme $W + (\sum_{\lambda \in \Omega} V_\lambda)$ soit directe. L'ensemble \mathcal{E} est non vide car la partie vide est un élément de \mathcal{E} . On vérifie sans difficulté que l'ensemble ordonné (\mathcal{E}, \subset) est inductif, et le lemme de Zorn fournit alors une partie maximale $\Omega \subset \Lambda$ telle que la somme $W + (\sum_{\lambda \in \Omega} V_\lambda) = M$ soit directe. Montrons maintenant que $M = V$. Comme $V = \sum_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$, il suffit de montrer que $V_\lambda \subset M$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Si $V_\lambda \not\subset M$, alors $\lambda \notin \Omega$ et $V_\lambda \cap M = (0)$ car V_λ est simple, et ainsi la somme $M + V_\lambda$ est directe, ce qui contredit la maximalité de Ω . \square

Lemme 8.1.8 *Soit V un C -comodule non nul. Alors V contient un sous-comodule simple.*

Preuve. Soit W un sous-comodule de dimension finie (> 0) de V : il contient un sous-comodule de dimension minimale non nulle, qui est donc un sous-comodule simple de V . \square

Preuve du théorème 8.1.6. On suppose bien sûr que V est non nul, sinon il n'y a rien à montrer. (1) \implies (2) est immédiat et le lemme 8.1.7 assure que (2) \implies (3).

Montrons que (3) \implies (2). Comme V contient un sous-comodule simple, on peut considérer S , la somme de tous les sous-comodules simples de V . Par (3), il existe M un sous-comodule tel que $V = S \oplus M$. Si $M \neq (0)$, il contient un sous-comodule simple qui devrait être un sous-comodule de S , et alors $S \cap M \neq (0)$, ce qui donne une contradiction. On a donc $V = S$ et le résultat cherché.

On montre (2) \implies (1) grâce au lemme 8.1.7, en prenant $W = (0)$.

Montrons maintenant (3) \implies (4) : soit $f : V \rightarrow W$ une application C -colinéaire surjective : $\text{Ker}(f)$ est un sous-comodule. Soit M un sous-comodule de V tel que $V = \text{Ker}(f) \oplus M$. Alors f induit un isomorphisme de C -comodules $M \cong W$, d'inverse $s_0 : W \rightarrow M$ qui induit un morphisme de C -comodules $s : W \rightarrow V$ tel que $f \circ s = \text{id}_W$.

Il reste à montrer que (4) \implies (3) : soit $W \subset V$ un sous-comodule, et considérons la surjection canonique $p : V \rightarrow V/W$. Il existe alors une application C -colinéaire $s : V/W \rightarrow V$ telle que $p \circ s = \text{id}_{V/W}$, et on vérifie sans difficulté que $V = W \oplus \text{Im}(f)$. \square

Corollaire 8.1.9 *Soit V un C -comodule avec $V = \sum_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$, où les V_λ sont des sous-comodules simples. Soit W un sous-comodule de V . Alors il existe $\Omega \subset \Lambda$ tel que $W \cong \oplus_{\lambda \in \Omega} V_\lambda$.*

Preuve. Par le théorème 8.1.6 il existe un sous-comodule M tel que $V = W \oplus M$. Alors par le lemme 8.1.7 il existe $\Omega \subset \Lambda$ tel que $V = M \oplus (\oplus_{\lambda \in \Omega} V_\lambda)$ et on a alors $W \cong V/M \cong \oplus_{\lambda \in \Omega} V_\lambda$. \square

Corollaire 8.1.10 *Soit V un C -comodule semisimple. Tout sous-comodule et tout comodule quotient de V est semisimple.*

Preuve. Le corollaire précédent assure que tout sous-comodule de V est semisimple. Soit W un comodule quotient : il existe une application C -colinéaire surjective $f : V \longrightarrow W$. Soit M un C -comodule tel que $V = \text{Ker}(f) \oplus M$ (théorème 8.1.6) : f induit un isomorphisme de comodules $M \cong W$, et puisque M est semisimple il en est de même pour W . \square

On termine ce paragraphe par des résultats d'unicité de la décomposition d'un comodule semisimple en somme directe de comodules simples.

Proposition 8.1.11 *Soient V un C -comodule simple et W un C -comodule.*

- (a) V est isomorphe à un sous-comodule de W si et seulement si $\text{Hom}_C(V, W) \neq (0)$.
 (b) Si W est semisimple avec $W = \bigoplus_{i \in I} V_i$, les V_i , $i \in I$, étant simples, alors V est isomorphe à un sous-comodule de W si et seulement si il existe i tel que V soit isomorphe à V_i .

Preuve. (a) Si V est isomorphe à un sous-comodule de W , il est clair que $\text{Hom}_C(V, W) \neq (0)$. Réciproquement, si f est un élément non nul de $\text{Hom}_C(V, W) \neq (0)$, alors $\text{Ker}(f) \neq V$ et donc f est injectif car V est simple.

(b) Si maintenant W est semisimple avec $W = \bigoplus_{i \in I} V_i$, le corollaire 8.1.9 assure que si V est isomorphe à un sous-comodule de W , alors il existe $i \in I$ tel que $V \cong V_i$. La réciproque est immédiate. \square

Proposition 8.1.12 *Soit C une cogèbre semisimple et soit $(V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme de C -comodules simples. Soient $\lambda \in \Lambda$ et V un C -comodule de dimension finie. On pose*

$$m_\lambda(V) = \frac{\dim(\text{Hom}_C(V_\lambda, V))}{\dim(\text{End}_C(V_\lambda))}$$

(a) On a $m_\lambda(V) \in \mathbb{N}$ et un isomorphisme de C -comodules

$$V \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda^{m_\lambda(V)}$$

(b) Si V, V' sont des C -comodules semisimples de dimension finie, alors $V \cong V'$ (comme C -comodules) si et seulement si $\forall \lambda \in \Lambda$, on a $m_\lambda(V) = m_\lambda(V')$.

(c) Si V, W, W' sont des C -comodules semisimples de dimension finie tels que $V \oplus W \cong V \oplus W'$, alors $W \cong W'$.

Preuve. (a) On sait que l'on a un isomorphisme de C -comodules

$$V \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda^{d_\lambda}$$

pour des entiers $d_\lambda \in \mathbb{N}$, qui induit, pour $\lambda_0 \in \Lambda$, un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\text{Hom}_C(V_{\lambda_0}, V) = \text{Hom}_C(V_{\lambda_0}, \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda^{d_\lambda}) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \text{Hom}_C(V_{\lambda_0}, V_\lambda)^{d_\lambda} \cong \text{End}_C(V_{\lambda_0})^{d_{\lambda_0}}$$

(le dernier isomorphisme provient du lemme de Schur) et ainsi on a $d_{\lambda_0} = m_{\lambda_0}(V)$. L'assertion (b) résulte de manière immédiate de la précédente. Enfin si $V \oplus W \cong V \oplus W'$, on a, pour tout $\lambda \in \Lambda$, $m_\lambda(V) + m_\lambda(W) = m_\lambda(V \oplus W) = m_\lambda(V \oplus W') = m_\lambda(V) + m_\lambda(W')$, d'où $m_\lambda(W) = m_\lambda(W')$, et l'assertion (b) permet de conclure. \square

8.2 Cogèbres cosemisimples

Définition 8.2.1 *On dit qu'une cogèbre C est **cosemisimple** si tout C -comodule est semisimple. On dit qu'une bigèbre ou une algèbre de Hopf est cosemisimple si elle est cosemisimple en tant que cogèbre.*

*On dit qu'un groupe algébrique affine G est **linéairement réductif** si $\mathcal{O}(G)$ est cosemisimple.*

Exemples. (1) Soit X un ensemble. La cogèbre $k[X]$ est cosemisimple.
 (2) Soit C la cogèbre de dimension 2, de base e, x , telle que

$$\Delta(e) = e \otimes e, \quad \Delta(x) = e \otimes x + x \otimes e, \quad \varepsilon(e) = 1, \quad \varepsilon(x) = 0$$

Alors C n'est pas cosemisimple.

(3) Le groupe algébrique $G = (k, +)$ n'est pas linéairement réductif.

En effet : (1) Cela résulte de la description de $k[X]$ -comodules donnée dans le paragraphe 3 du chapitre 7.

(2) Supposons au contraire que C est cosemisimple : en particulier le comodule C est semisimple. Soit $V = ke$, c'est un sous-comodule de C , et il existe un sous-comodule M de C tel que $C = M \oplus V$. On a $M = km$ pour $m \in C$, et puisque M est un sous-comodule de C , il existe $w \in C$ tel que $\Delta(m) = m \otimes w$. On a alors

$$\Delta(w) = w \otimes w \quad \text{et} \quad \varepsilon(w) = 1$$

On voit facilement que e est le seul élément de C vérifiant ces propriétés, donc $\Delta(m) = m \otimes e$, et $m \in ke = V$: contradiction avec $C = M \oplus V = km \oplus ke$.

(3) On a $\mathcal{O}(G) = k[x]$, avec $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$ et $\varepsilon(x) = 0$. On démontre que $\mathcal{O}(G)$ n'est pas cosemisimple de manière similaire au cas précédent, en construisant un comodule non semisimple de dimension 2. Les détails sont laissés en exercice. \square

Proposition 8.2.2 *Soit C une cogèbre. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (a) C est cosemisimple.
- (b) le C -comodule C est semisimple.
- (c) Tout C -comodule de dimension finie est semisimple.

Preuve. (a) \Rightarrow (b) est immédiat. Supposons que le comodule C est semisimple, et soit W un comodule de dimension finie n . Alors par les lemmes 7.5.3 et 7.5.5, W est isomorphe à un sous-comodule du comodule semisimple C^n , et donc est semisimple par le corollaire 8.1.10, et on a donc (b) \Rightarrow (c). Supposons finalement que tout comodule de dimension finie est semisimple et soit V un C -comodule quelconque. On peut écrire V

comme une somme de sous-comodules de dimension finie (7.3.10), qui sont sommes de comodules simples, donc V est semisimple par 8.1.6, et on a (c) \Rightarrow (a). \square

Exemple : La cogèbre $C = M_n(k)^*$ est cosemisimple.

En effet : Soit V le C -comodule de base e_1, \dots, e_n telle que $\alpha(e_i) = \sum_j e_j \otimes x_{ji}$. Le comodule V est simple par la proposition 8.1.3, et le lemme 7.5.4 et sa preuve assure qu'en tant que C -comodule, on a $C \cong V^n$. \square

Proposition 8.2.3 *Soit C une cogèbre cosemisimple et soit V un C -comodule. Alors V est simple si et seulement si $\text{End}_C(V)$ est un corps.*

Preuve. Si V est simple, alors $\text{End}_C(V)$ est un corps par le lemme de Schur. Réciproquement, si V n'est pas simple, soit $\{0\} \subsetneq W \subsetneq V$ un sous-comodule non trivial, et W' un sous-comodule tel que $V = W \oplus W'$ (C est cosemisimple). Soit $p : V \rightarrow V$ la projection sur V parallèlement à W : on a $p \in \text{End}_C(V)$, $p \circ p = p$, $p \neq 0$ et $p \neq \text{id}_V$, ce qui montre que $\text{End}_C(V)$ n'est pas un corps. \square

Proposition 8.2.4 *Soient B une bigèbre et V un B -comodule générateur. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. B est cosemisimple.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, le B -comodule $V^{\otimes n}$ est semisimple.

Si l'une de ces conditions est vérifiée, tout comodule simple de dimension finie est isomorphe à un sous-comodule de $V^{\otimes n}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

Preuve. Il est immédiat que (1) \Rightarrow (2). Réciproquement, supposons que $\forall n \in \mathbb{N}$, le B -comodule $V^{\otimes n}$ est semisimple. Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, le B -comodule $V^{[k]} = k \oplus V \oplus \dots \oplus V^{\otimes k}$ est semisimple, ainsi que ses sous-comodules et ses quotients (par 8.1.10). Le résultat est donc une conséquence immédiate du théorème 7.4.6 et du corollaire 8.1.10. \square

Exemple : L'algèbre $B = k\{x_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq n}$, munie de l'unique structure de bigèbre telle que la matrice (x_{ij}) soit multiplicative, est cosemisimple.

En effet : Soit V le B -comodule de base e_1, \dots, e_n dont la co-action est définie par $\alpha(e_i) = \sum_j e_j \otimes x_{ji}$. C'est un comodule générateur de B , et la proposition 8.1.3 assure que les comodules $V^{\otimes n}$, $n \in \mathbb{N}$, sont simples. \square

8.3 Algèbres de Hopf compactes

Dans ce paragraphe $k = \mathbb{C}$. On cherche un moyen naturel d'assurer qu'une algèbre de Hopf est cosemisimple. Un des moyens classiques pour construire un supplémentaire pour un sous-espace est de considérer son orthogonal, pour un produit scalaire sur le grand espace ambiant. Cette idée mène aux considérations suivantes.

Définition 8.3.1 *Une $*$ -algèbre est une algèbre A munie d'une application $*$: $A \rightarrow A$, $a \mapsto a^*$ telle que*

$$(a) \quad * \text{ est semi-linéaire : } \forall a, b \in A, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \text{ on a } (a + \lambda b)^* = a^* + \bar{\lambda}b^*.$$

(b) $*$ est antimultiplicative : $\forall a, b \in A$, on a $(ab)^* = b^*a^*$.

(c) $*$ est involutive : $\forall a \in A$, on a $(a^*)^* = a^{**} = a$.

Si A et B sont des $*$ -algèbres, un morphisme de $*$ -algèbres (ou un $*$ -morphisme) de A vers B est un morphisme d'algèbres $f : A \rightarrow B$ tel que $\forall a \in A$, on a $f(a^*) = f(a)^*$.

Exemples. (a) \mathbb{C} est une $*$ -algèbre, avec $\lambda^* = \bar{\lambda}$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.

(b) Soit X un ensemble fini : $\mathbb{C}^{(X)}$ est une $*$ -algèbre, avec pour $f \in \mathbb{C}^{(X)}$, $f^*(x) = \overline{f(x)}$, $\forall x \in X$.

(c) Soit G un groupe : l'algèbre du groupe $\mathbb{C}[G]$ est une $*$ -algèbre, avec $\forall g \in G$, $e_g^* = e_{g^{-1}}$.

(d) Si V est un espace de Hilbert de dimension finie, l'algèbre $\text{End}(V)$ est une $*$ -algèbre : pour $u \in \text{End}(V)$, u^* est l'adjoint usuel de u .

Si A et B sont des $*$ -algèbres, l'algèbre produit tensoriel $A \otimes B$ est naturellement une $*$ -algèbre, avec $(a \otimes b)^* = a^* \otimes b^*$.

Définition 8.3.2 Une $*$ -algèbre de Hopf est une algèbre de Hopf H , qui est une $*$ -algèbre, telle que la comultiplication $\Delta : H \rightarrow H \otimes H$ soit un $*$ -morphisme.

Exemples. (a) Si G est un groupe fini, l'algèbre de Hopf $\mathbb{C}^{(G)}$ est une $*$ -algèbre de Hopf.

(b) Si G est un groupe, l'algèbre de Hopf $\mathbb{C}[G]$ est une $*$ -algèbre de Hopf.

Notations. Si V est un espace vectoriel, on note \bar{V} l'espace vectoriel conjugué de V : on a une bijection $j_V : V \rightarrow \bar{V}$, $v \mapsto \bar{v}$, et la structure d'espace vectoriel de \bar{V} est définie par

$$\forall v, w \in V, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \bar{v} + \bar{w} = \overline{v + w}, \quad \lambda \cdot \bar{v} = \overline{\lambda \cdot v}$$

La bijection $j_V : V \rightarrow \bar{V}$ est alors un isomorphisme semi-linéaire. Si A est une algèbre, alors \bar{A} est également une algèbre, avec, $\forall a, b \in A$, $\overline{ab} = \bar{a}\bar{b}$.

Proposition 8.3.3 Soit $q \in \mathbb{R}^*$. L'algèbre de Hopf $\mathcal{O}_q(\text{SL}_2(\mathbb{C}))$ admet une structure de $*$ -algèbre de Hopf définie par

$$a^* = d, \quad b^* = -q^{-1}c, \quad c^* = -qb, \quad d^* = a$$

Preuve. Notons $A = \mathcal{O}_q(\text{SL}_2(\mathbb{C}))$. On construit sans problème un morphisme d'algèbres $\nu : A \rightarrow \bar{A}^{\text{op}}$ tel que

$$\nu(a) = \bar{d}, \quad \nu(b) = \overline{-q^{-1}c}, \quad \nu(c) = \overline{-qb}, \quad \nu(d) = \bar{a}$$

et alors l'application $*$: $j_A^{-1} \circ \nu : A \rightarrow A$ munit A d'une structure de $*$ -algèbre. On vérifie ensuite sans difficulté que la comultiplication est un $*$ -morphisme. \square

On peut aussi définir le conjugué d'un comodule, de la manière suivante (la vérification est immédiate) :

Proposition-Définition 8.3.4 Soient H une $*$ -algèbre de Hopf et $V = (V, \alpha_V)$ un H -comodule. L'application linéaire

$$\begin{aligned} \alpha_{\bar{V}} : \bar{V} &\longrightarrow \bar{V} \otimes H \\ \bar{v} &\longmapsto \sum \bar{v}_{(0)} \otimes v_{(1)}^* \end{aligned}$$

munit \bar{V} d'une structure de H -comodule, appelé le **comodule conjugué** de V .

On peut maintenant introduire la notion de produit scalaire invariant sur un comodule.

Définition 8.3.5 Soient H une $*$ -algèbre de Hopf et $V = (V, \alpha_V)$ un H -comodule. Un **produit scalaire H -invariant** sur V est une application linéaire $\psi : \bar{V} \otimes V \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant les conditions suivantes :

- (a) ψ est un morphisme de H -comodules,
- (b) $\forall v, w \in V$, on a $\psi(\bar{v} \otimes w) = \psi(\bar{w} \otimes v)$,
- (c) $\forall v \in V$, $\psi(\bar{v} \otimes v) = 0 \implies v = 0$.

On peut caractériser l'existence d'un produit scalaire invariant en utilisant les matrices multiplicatives. On a d'abord besoin de la définition suivante.

Définition 8.3.6 Soit A une $*$ -algèbre. On dit qu'une matrice $u = (u_{ij}) \in M_n(A)$ est unitaire si elle est inversible, d'inverse u^* , où u^* est la matrice transposée de $\bar{u} = (u_{ij}^*)$.

Proposition 8.3.7 Soient H une $*$ -algèbre de Hopf et $V = (V, \alpha_V)$ un H -comodule. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. Il existe un produit scalaire H -invariant sur V .
2. Il existe une base e_1, \dots, e_n de V telle que si $\forall i$, $\alpha_V(e_i) = \sum_j e_j \otimes x_{ji}$, la matrice multiplicative $x = (x_{ij})$ est unitaire.

Preuve. (1) \implies (2) Soit H un produit scalaire H -invariant sur V et soit e_1, \dots, e_n une base orthonormée : $\phi(\bar{e}_i \otimes e_j) = \delta_{ij}$. Soit $x = (x_{ij})$ la matrice multiplicative associée. Alors comme ϕ est un morphisme de H -comodules, on a, pour tous i, j ,

$$\delta_{ij} = \sum_k x_{ki}^* x_{kj}$$

et ainsi l'inverse de la matrice x est x^* .

(2) \implies (1) Supposons qu'il existe une base e_1, \dots, e_n de V telle que si $\forall i$, $\alpha_V(e_i) = \sum_j e_j \otimes x_{ji}$, la matrice multiplicative $x = (x_{ij})$ est unitaire. Soit alors $\phi : \bar{V} \otimes V \longrightarrow \mathbb{C}$ l'application linéaire définie par $\phi(\bar{e}_i \otimes e_j) = \delta_{ij}$. Alors ϕ est un produit scalaire sur V , et est H -invariant si x est unitaire. \square

Proposition 8.3.8 Soient H une $*$ -algèbre de Hopf et $V = (V, \alpha_V)$ un H -comodule. S'il existe un produit scalaire H -invariant sur V , alors V est semisimple.

Preuve. Soit $\phi : \bar{V} \otimes V \longrightarrow \mathbb{C}$ un produit scalaire H -invariant, soit W un sous-comodule de V , et soit $W^\perp = \{x \in V \mid \phi(w \otimes \bar{x}) = 0, \forall w \in W\}$. On sait que $V = W \oplus W^\perp$, et il suffit donc de voir que W^\perp est un sous-comodule de V . L'application linéaire

$$\begin{aligned} \bar{V} &\longrightarrow W^* \\ \bar{v} &\longmapsto \phi(\bar{v} \otimes -) \end{aligned}$$

est H -colinéaire car elle est égale à la composée d'applications H -colinéaires $(\phi \otimes \text{id}_{W^*}) \circ (\text{id}_{\bar{V}} \otimes \delta_V)$ avec δ_V définie en 7.4.6. Notons X le noyau : on a $v \in W^\perp \iff \bar{v} \in X$, et X étant un sous-comodule de \bar{V} , on voit facilement que W^\perp est un sous-comodule de V . \square

Définition 8.3.9 Une algèbre de Hopf est dite **compacte** si elle admet une structure de $*$ -algèbre de Hopf H telle que tout H -comodule de dimension finie possède un produit scalaire H -invariant.

La terminologie “compacte” provient de certaines algèbres de Hopf de fonctions sur des groupes topologiques compacts.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la proposition 8.3.8.

Théorème 8.3.10 Une algèbre de Hopf compacte est cosemisimple.

Les premiers exemples d'algèbres de Hopf compactes sont obtenus à partir de groupes.

Théorème 8.3.11 Soit G un groupe fini. Alors l'algèbre de Hopf $\mathbb{C}^{(G)}$ est compacte, et ainsi G est linéairement réductif.

Preuve. Soit V un $\mathbb{C}^{(G)}$ -comodule de dimension finie et $\pi : G \longrightarrow \text{GL}(V)$ la représentation correspondante. Soit $\phi : \bar{V} \otimes V \longrightarrow \mathbb{C}$ un produit scalaire et soit $\psi : \bar{V} \otimes V \longrightarrow \mathbb{C}$ défini par

$$\forall v, w \in V \times V, \quad \psi(\bar{v} \otimes w) = \sum_{g \in G} \phi(\overline{\pi(g)(v)} \otimes \pi(g)(w))$$

On vérifie sans difficulté que ψ est un produit scalaire sur V , et est un morphisme de représentations de G (la structure de représentation de \bar{V} étant induite par celle de $\mathbb{C}^{(G)}$ -comodule, c'est-à-dire que $\bar{\pi} : G \longrightarrow \text{GL}(\bar{V})$ est défini par $\bar{\pi}(g)(\bar{v}) = \overline{\pi(g)(v)}$, pour $g \in G$ et $v \in V$). Ainsi ψ est un produit scalaire $\mathbb{C}^{(G)}$ -invariant (ou plus simplement G -invariant). \square

Théorème 8.3.12 Soit G un groupe. Alors l'algèbre de Hopf $\mathbb{C}[G]$ est compacte.

Preuve. Soit V un $\mathbb{C}[G]$ -comodule de dimension finie. Alors il existe une base e_1, \dots, e_n de V et des éléments g_1, \dots, g_n de G tels que $\forall i, \alpha_V(e_i) = e_i \otimes e_{g_i}$. L'existence d'une telle base provient de la description des $\mathbb{C}[G]$ -comodules comme des espaces vectoriels G -gradués (début du paragraphe 3 du chapitre 7). La matrice multiplicative $(\delta_{ij} e_{g_i})$ est

alors unitaire ($\forall g \in G$, on a $e_g^* = e_{g^{-1}}$), et donc la proposition 8.3.7 assure l'existence d'un produit scalaire $\mathbb{C}[G]$ -invariant. \square

On cherche maintenant un critère simple qui assure qu'une $*$ -algèbre de Hopf est compacte, et qui évitera de vérifier que tous les comodules possèdent des produits scalaires invariants.

Lemme 8.3.13 *Soient H une $*$ -algèbre de Hopf et soient V, W des H -comodules.*

(1) *On a un isomorphisme de H -comodules $\overline{V} \otimes \overline{W} \longrightarrow \overline{W} \otimes \overline{V}$, $v \otimes w \longmapsto \overline{w} \otimes \overline{v}$.*

(2) *Si V et W possèdent des produits scalaires invariants, alors $V \otimes W$ possède un produit scalaire H -invariant.*

Preuve. Le premier isomorphisme est construit facilement, notons le θ . Soient $\psi : \overline{V} \otimes V \longrightarrow \mathbb{C}$ et $\phi : \overline{W} \otimes W \longrightarrow \mathbb{C}$ des produits scalaires H -invariants. Alors la composée

$$\overline{V} \otimes \overline{W} \otimes V \otimes W \xrightarrow{\theta \otimes \text{id}_{V \otimes W}} \overline{W} \otimes \overline{V} \otimes V \otimes W \xrightarrow{\text{id}_{\overline{V}} \otimes \psi \otimes \text{id}_V} \overline{W} \otimes W \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}$$

est H -colinéaire, et est un produit scalaire (on le voit en prenant des bases orthonormées de V et W). \square

Théorème 8.3.14 *Soit H une $*$ -algèbre de Hopf. Supposons que H est engendrée, comme algèbre, par les coefficients d'une matrice multiplicative unitaire $u = (u_{ij}) \in M_n(H)$. Alors H est une algèbre de Hopf compacte, et est donc cosemisimple.*

Preuve. Soit V le H -comodule de base e_1, \dots, e_n défini par $\alpha(e_i) = \sum_j e_j \otimes u_{ji}$. Alors il existe un unique produit scalaire sur V tel que la base e_1, \dots, e_n soit orthonormée, qui est H -colinéaire car la matrice u est unitaire. Par le lemme précédent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le comodule $V^{\otimes n}$ possède un produit scalaire H -invariant. Tous ses sous-comodules possèdent donc un produit scalaire invariant, ainsi que tous ses comodules quotients (car ils sont isomorphes à des sous-comodules, utiliser le supplémentaire orthogonal). Par hypothèse le H -comodule V est générateur, et donc le théorème 7.5.2 permet de conclure que tout H -comodule possède un produit scalaire invariant, et est semisimple. \square

Théorème 8.3.15 *Pour $q \in \mathbb{R}^*$, l'algèbre de Hopf $\mathcal{O}_q(\text{SL}_2(\mathbb{C}))$ est compacte, et est donc cosemisimple.*

Preuve. L'inverse de la matrice multiplicative

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est

$$\begin{pmatrix} S(a) & S(b) \\ S(c) & S(d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -qb \\ -q^{-1}c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^*$$

On peut donc appliquer le théorème précédent. \square

Théorème 8.3.16 *Les algèbres de Hopf $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$, $\mathcal{O}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$, $\mathcal{O}(\mathrm{O}_n(\mathbb{C}))$, $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_n(\mathbb{C}))$ et $\mathcal{O}(\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C}))$ sont compactes, donc cosemisimples. Les groupes algébriques correspondant sont donc linéairement réductifs.*

Preuve. On construit pour chacune de ces algèbres de Hopf une structure de $*$ -algèbre de Hopf telle la matrice multiplicative dont les coefficients engendrent (par définition) l'algèbre sous-jacente, et le théorème 8.3.14 donne le résultat. \square

Commentaires

On peut développer de même une théorie des modules semisimples, avec des énoncés identiques ainsi que leurs preuves, à l'exception notable du lemme 8.1.8, dont la preuve pour les modules est beaucoup plus compliquée.

La notion d'algèbre de Hopf compacte est inspirée par les structures présentes sur les algèbres de Hopf de fonctions représentatives sur des groupes compacts. Voir [3]. Par exemple l'algèbre de Hopf $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ est l'algèbre des fonctions représentatives sur le groupe compact $U(n)$.

On peut montrer qu'il existe au plus (à isomorphisme près), sur une algèbre de Hopf donnée H , une structure de $*$ -algèbre de Hopf sur H telle que H soit compacte : voir [2].

Chapitre 9

Les représentations du groupe quantique $SL_q(2)$

On décrit dans ce chapitre les représentations du groupe quantique $SL_q(2)$ lorsque q est réel. Dans ce cas on sait que $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))$ est cosemisimple, et il suffit donc de construire les $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))$ -comodules simples. Ces comodules seront construits en utilisant une co-action de $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))$ sur l'algèbre $\mathbb{C}_q[x, y]$ des fonctions sur le plan quantique, qui est la généralisation de l'action naturelle du groupe algébrique $SL_2(\mathbb{C})$ sur le plan \mathbb{C}^2 .

9.1 Action sur le plan quantique

Dans ce paragraphe k est un corps quelconque. Le concept suivant est la dualisation de la notion de groupe opérant sur un ensemble : si G est un groupe algébrique affine agissant à droite sur un ensemble algébrique affine X via une application polynomiale $X \times G \rightarrow X$, on obtient un morphisme d'algèbres

$$\mathcal{O}(X) \rightarrow \mathcal{O}(X \times G) \cong \mathcal{O}(X) \otimes \mathcal{O}(G)$$

satisfaisant des axiomes. Cette notion est formalisée de la manière suivante.

Définition 9.1.1 *Soit H une algèbre de Hopf. Une **algèbre H -comodule** est une paire (A, α) où A est une algèbre et où $\alpha : A \rightarrow A \otimes H$ est un morphisme d'algèbres tel que (A, α) soit un H -comodule.*

Exemple. Si H est une algèbre de Hopf, alors $H = (H, \Delta)$ est une algèbre H -comodule.

Proposition 9.1.2 *Soit H une algèbre de Hopf et A une algèbre H -comodule. Alors la multiplication de A , $m_A : A \otimes A \rightarrow A$, est un morphisme de H -comodules.*

Preuve. Soient $a, b \in A$. On a

$$\alpha \circ m_A(a \otimes b) = \alpha(ab) = \alpha(a)\alpha(b) = \sum a_{(0)}b_{(0)} \otimes a_{(1)}b_{(1)} = (m_A \otimes \text{id}_H) \circ \alpha_{A \otimes A}(a \otimes b)$$

ce qui signifie bien que $m_A : A \otimes A \longrightarrow A$ est un morphisme de H -comodules. \square

Pour construire des algèbres H -comodules, le lemme suivant est très utile. La preuve, très similaire à celle du lemme 5.2.2, est laissée en exercice.

Lemme 9.1.3 *Soient H une algèbre de Hopf, A une algèbre et $\alpha : A \longrightarrow A \otimes H$ un morphisme d'algèbre. Soit $(a_i)_{i \in I}$ des générateurs de l'algèbre A . Supposons que $\forall i \in I$, on a*

$$(\alpha \otimes \text{id}_H) \circ \alpha(a_i) = (\text{id}_A \otimes \Delta) \circ \alpha(a_i) \quad \text{et} \quad (\text{id}_A \otimes \varepsilon) \circ \alpha(a_i) = a_i$$

Alors (A, α) est une algèbre H -comodule.

On construit maintenant une structure d'algèbre $\mathcal{O}_q(SL_2(k))$ -comodule sur

$$k_q[x, y] = k\langle x, y \mid yx = qxy \rangle$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $k_q[x, y]_n = \text{Vect}(x^i y^{n-i}, 0 \leq i \leq n)$. C'est un sous-espace de dimension $n + 1$ de $k_q[x, y]$.

Proposition 9.1.4 *Il existe un unique morphisme d'algèbres*

$$\alpha : k_q[x, y] \longrightarrow k_q[x, y] \otimes \mathcal{O}_q(SL_2(k))$$

tel que $\alpha(x) = x \otimes a + y \otimes c$ et $\alpha(y) = x \otimes b + y \otimes d$, qui munit $k_q[x, y]$ d'une structure d'algèbre $\mathcal{O}_q(SL_2(k))$ -comodule. On a, pour $0 \leq i \leq n$,

$$\alpha(x^i y^{n-i}) = \sum_{j=0}^n x^j y^{n-j} \otimes \left(\sum_{\substack{r+s=j \\ 0 \leq r \leq i \\ 0 \leq s \leq n-i}} \binom{i}{r}_{q^2} \binom{n-i}{s}_{q^2} q^{(i-r)s} a^r b^s c^{i-r} d^{n-i-s} \right)$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $k_q[x, y]_n$ est un sous-comodule de $k_q[x, y]$.

Preuve. La construction du morphisme d'algèbres α est laissée en exercice. Le lemme précédent assure que α munit $k_q[x, y]$ d'une structure d'algèbre $\mathcal{O}_q(SL_2(k))$ -comodule. On a $(y \otimes c)(x \otimes a) = q^2(x \otimes a)(y \otimes c)$, et donc la q^2 -formule du binôme (4.3.3) donne

$$\alpha(x^i) = \alpha(x)^i = (x \otimes a + y \otimes c)^i = \sum_{r=0}^i \binom{i}{r}_{q^2} x^r y^{i-r} \otimes a^r c^{i-r}$$

De même on a

$$\alpha(y^{n-i}) = \alpha(y)^{n-i} = (x \otimes b + y \otimes d)^{n-i} = \sum_{s=0}^{n-i} \binom{n-i}{s}_{q^2} x^s y^{n-i-s} \otimes b^s d^{n-i-s}$$

On obtient bien la formule annoncée pour $\alpha(x^i y^{n-i})$, et il est clair que $k_q[x, y]_n$ est un sous- $\mathcal{O}_q(SL_2(k))$ -comodule de $k_q[x, y]$. \square

9.2 Classification des représentations irréductibles et formules de Clebsch-Gordan

Les comodules $V_n = \mathbb{C}_q[x, y]_n$ du paragraphe précédent permettent d'obtenir tous les $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))$ -comodules simples lorsque q est réel. Le but du paragraphe est de montrer le résultat suivant.

Théorème 9.2.1 *Soit $q \in \mathbb{R}^*$.*

(a) *L'algèbre de Hopf $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))$ est cosemisimple.*

(b) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))$ -comodule $V_n = \mathbb{C}_q[x, y]_n$ est simple de dimension $n + 1$, et tout $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))$ -comodule simple est isomorphe à l'un des V_n .*

(c) *Pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, On a les formules (de Clebsch-Gordan)*

$$V_n \otimes V_m \cong V_{|n-m|} \oplus V_{|n-m|+2} \oplus \cdots \oplus V_{n+m-2} \oplus V_{n+m} = \bigoplus_{i=0}^{\min(n,m)} V_{n+m-2i}$$

On a déjà montré la partie (a) au chapitre précédent, et les parties (b) et (c) seront des conséquences du résultat suivant. Ici k est à nouveau un corps quelconque.

Théorème 9.2.2 *Soit $q \in k^*$. Supposons que les deux conditions suivantes sont réalisées.*

(A) $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $(n)_q = 1 + q + \cdots + q^{n-1} \neq 0$.

(B) *L'algèbre de Hopf $\mathcal{O}_q(SL_2(k))$ est cosemisimple.*

Alors

(1) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le $\mathcal{O}_q(SL_2(k))$ -comodule $V_n = k_q[x, y]_n$ est simple de dimension $n + 1$, et tout $\mathcal{O}_q(SL_2(k))$ -comodule simple est isomorphe à l'un des V_n .*

(2) *Pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, On a les formules (de Clebsch-Gordan)*

$$V_n \otimes V_m \cong V_{|n-m|} \oplus V_{|n-m|+2} \oplus \cdots \oplus V_{n+m-2} \oplus V_{n+m} = \bigoplus_{i=0}^{\min(n,m)} V_{n+m-2i}$$

Il est clair que si $k = \mathbb{C}$ et si $q \in \mathbb{R}^*$, alors les conditions (A) et (B) précédentes sont réalisées, et le théorème 9.2.1 est donc une conséquence immédiate du théorème 9.2.2. Le but du paragraphe est donc maintenant de démontrer le théorème 9.2.2.

Proposition 9.2.3 *Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\forall i \leq n$, on a $(i)_q = 1 + q + \cdots + q^{i-1} \neq 0$ (cela est vrai si k est de caractéristique zéro et si $q = \pm 1$ ou q n'est pas une racine de l'unité). Alors on a*

$$\text{End}_{\mathcal{O}_q(SL_2(k))}(V_n) = k$$

Ainsi si de plus $\mathcal{O}_q(SL_2(k))$ est cosemisimple, alors les V_n , $n \in \mathbb{N}$, sont des $\mathcal{O}_q(SL_2(k))$ -comodules simples, deux à deux non isomorphes.

Preuve. Pour $i \in \{0, \dots, n\}$, posons $e_i = x^i y^{n-i}$, et travaillons dans la base (e_0, \dots, e_n) de $V_n = k_q[x, y]_n$. Soit $f \in \text{End}_{\mathcal{O}_q(SL_2(k))}(V_n)$, de matrice $(\lambda_{ij})_{0 \leq i, j \leq n}$ dans la base (e_0, \dots, e_n) . Pour $i, j \in \{0, \dots, n\}$, posons

$$x_{ji} = \sum_{\substack{r+s=j \\ 0 \leq r \leq i \\ 0 \leq s \leq n-i}} \binom{i}{r}_{q^2} \binom{n-i}{s}_{q^2} q^{(i-r)s} a^r b^s c^{i-r} d^{n-i-s}$$

La matrice (x_{ij}) est la matrice multiplicative associée à la base (e_0, \dots, e_n) , et on a, par la proposition 7.3.5,

$$\forall i, l \in \{0, \dots, n\}, \quad \sum_{j=0}^n \lambda_{ij} x_{jl} = \sum_{j=0}^n x_{ij} \lambda_{jl} \quad (\star)$$

Considérons maintenant le morphisme d'algèbres $\phi : \mathcal{O}_q(SL_2(k)) \longrightarrow k[z, z^{-1}]$ défini par $\phi(a) = z$, $\phi(d) = z^{-1}$ et $\phi(b) = \phi(c) = 0$ (on vérifie que ϕ existe bien). Un calcul immédiat montre que $\phi(x_{ji}) = \delta_{ji} z^{-n+2i}$, et en appliquant ϕ à (\star) , il vient $\lambda_{il} z^{-n+2l} = \lambda_{il} z^{-n+2i}$, d'où $\lambda_{il} = 0$ si $i \neq l$. Les égalités (\star) deviennent

$$\forall i, l \in \{0, \dots, n\}, \quad \lambda_{ii} x_{il} = \lambda_{il} x_{il}$$

et pour montrer que la matrice (λ_{ij}) est scalaire, il suffit donc de voir que $x_{il} \neq 0$. Pour cela considérons l'algèbre

$$B = k\langle g, g^{-1}, x \mid gg^{-1} = 1 = g^{-1}g, xg = qgx \rangle$$

On vérifie sans problème que la famille $g^i x^j$, $i \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{N}$, est une base de B . On vérifie aussi l'existence de deux morphismes d'algèbres

$$\phi^+ : \mathcal{O}_q(SL_2(k)) \longrightarrow B \quad \text{et} \quad \phi^- : \mathcal{O}_q(SL_2(k)) \longrightarrow B$$

tels que

$$\phi^+(a) = g = \phi^-(a), \phi^+(c) = 0 = \phi^-(b), \phi^+(b) = x = \phi^-(c), \phi^+(d) = g^{-1} = \phi^-(d)$$

On a, si $j \geq i$,

$$\phi^+(x_{ji}) = \binom{n-i}{j-i}_{q^2} q^{(j-i)(j-n)} g^{i+j-n} x^{j-i}$$

L'hypothèse assure que le coefficient binomial de gauche est non nul, et donc $\phi^+(x_{ji}) \neq 0$. Si $j \leq i$, on a

$$\phi^-(x_{ji}) = \binom{i}{j}_{q^2} q^{(i-j)(i-n)} g^{i+j-n} x^{i-j}$$

et donc on a de même $\phi^-(x_{ji}) \neq 0$. Ainsi les comodules V_n sont simples, et deux à deux non isomorphes car de dimensions différentes. \square

Proposition 9.2.4 *Pour $n \geq 1$, on a une suite exacte de $\mathcal{O}_q(SL_2(k))$ -comodules*

$$0 \longrightarrow V_{n-1} \xrightarrow{\nu} V_n \otimes V_1 \xrightarrow{\mu} V_{n+1} \longrightarrow 0$$

c'est-à-dire que ν et μ sont des morphismes de $\mathcal{O}_q(SL_2(k))$ -comodules, ν est injectif, μ est surjectif, et $\text{Ker}(\mu) = \text{Im}(\nu)$. Si de plus $\mathcal{O}_q(SL_2(k))$ est cosemisimple, alors on a un isomorphisme de $\mathcal{O}_q(SL_2(k))$ -comodules

$$V_n \otimes V_1 \cong V_{n-1} \oplus V_{n+1}$$

Preuve. On définit μ comme la restriction de la multiplication sur $k_q[x, y]$ à $V_n \otimes V_1$. On a donc, pour $i \in \{0, \dots, n\}$,

$$\mu(x^i y^{n-i} \otimes x) = q^{n-i} x^{i+1} y^{n-i} \quad \text{et} \quad \mu(x^i y^{n-i} \otimes y) = x^i y^{n+1-i}$$

On a bien $\mu(V_n \otimes V_1) \subset V_{n+1}$ et μ est un morphisme de comodules car la multiplication d'une algèbre comodule est un morphisme de comodules (proposition 9.1.2). Par ailleurs il est clair que μ est surjectif. Considérons l'application linéaire

$$\begin{aligned} \delta : k &\longrightarrow V_1 \otimes V_1 \\ 1 &\longmapsto -qx \otimes y + y \otimes x \end{aligned}$$

On vérifie sans difficulté que δ est $\mathcal{O}_q(SL_2(k))$ -colinéaire. On définit alors ν comme la composée

$$V_{n-1} \xrightarrow{\text{id}_{V_{n-1}} \otimes \delta} V_{n-1} \otimes V_1 \otimes V_1 \xrightarrow{\mu \otimes \text{id}_{V_1}} V_n \otimes V_1$$

Alors ν est un morphisme de $\mathcal{O}_q(SL_2(k))$ -comodules et on a, pour $i \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$\nu(x^i y^{n-1-i}) = -q^{n-i} x^{i+1} y^{n-1-i} \otimes y + x^i y^{n-i} \otimes x$$

On voit facilement que ν est injectif et que $\mu \circ \nu = 0$, d'où $\text{Im}(\nu) \subset \text{Ker}(\mu)$. On a

$$\dim(\text{Ker}(\mu)) = \dim(V_n) \dim(V_1) - \dim(\text{Im}(\mu)) = 2n - (n+1) = n-1 = \dim(\text{Im}(\nu))$$

donc finalement $\text{Im}(\nu) = \text{Ker}(\mu)$, et on a bien la suite exacte annoncée. Si $\mathcal{O}_q(SL_2(k))$ est cosemisimple, soit $s : V_{n+1} \longrightarrow V_n \otimes V_1$ une application $\mathcal{O}_q(SL_2(k))$ -colinéaire telle que $\mu \circ s = \text{id}_{V_{n+1}}$. Soit alors $p = s \circ \mu : V_n \otimes V_1 \rightarrow V_n \otimes V_1$: p est un projecteur $\mathcal{O}_q(SL_2(k))$ -colinéaire, et on a $V_n \otimes V_1 = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p) \cong V_{n-1} \oplus V_{n+1}$. \square

Preuve du théorème 9.2.2. Rappelons que l'on suppose

- (A) $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $(n)_q = 1 + q + \dots + q^{n-1} \neq 0$;
- (B) L'algèbre de Hopf $\mathcal{O}_q(SL_2(k))$ est cosemisimple.

La proposition 9.2.3 est valable sous ces hypothèses, donc les V_n , $n \in \mathbb{N}$ sont des $\mathcal{O}_q(SL_2(k))$ -comodules simples. D'autre part V_1 est un $\mathcal{O}_q(SL_2(k))$ -comodule générateur, donc la proposition 8.2.4 assure que tout $\mathcal{O}_q(SL_2(k))$ -comodule simple est isomorphe à un sous-comodule d'un $V_1^{\otimes m}$, $m \in \mathbb{N}$. D'autre part une récurrence facile à

partir de la proposition précédente assure que les $V_1^{\otimes m}$, $m \in \mathbb{N}$, sont somme directe de comodules V_i , $i \in \mathbb{N}$. Ainsi si W est un $\mathcal{O}_q(SL_2(k))$ -comodule simple, la proposition 8.1.11 assure qu'il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $W \cong V_i$, et la partie (1) est donc démontrée.

Pour démontrer les formules de Clebsch-Gordan, on peut supposer $n, m \geq 1$. Fixons $n \geq 1$ et montrons par récurrence sur m . Pour $m = 1$, le résultat est donné par la proposition 9.2.4. Supposons $m \geq 1$ et le résultat montré au rang m . On a alors

$$\begin{aligned} (V_n \otimes V_m) \otimes V_1 &\cong \left(\bigoplus_{i=0}^{\min(n,m)} V_{n+m-2i} \right) \otimes V_1 \cong \bigoplus_{i=0}^{\min(n,m)} V_{n+m-2i} \otimes V_1 \\ &\cong \begin{cases} \left(\bigoplus_{i=0}^n V_{n+m-1-2i} \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^n V_{n+m+1-2i} \right) & \text{si } n < m - 1 \\ \left(\bigoplus_{i=0}^{n-1} V_{2n-1-2i} \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^{n-1} V_{2n+1-2i} \right) \oplus V_1 & \text{si } n = m \\ \left(\bigoplus_{i=0}^m V_{n+m-1-2i} \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^m V_{n+m+1-2i} \right) & \text{si } n \geq m + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V_n \otimes (V_m \otimes V_1) &\cong V_n \otimes (V_{m-1} \oplus V_{m+1}) \\ &\cong \left(\bigoplus_{i=0}^{\min(n,m-1)} V_{n+m-1-2i} \right) \oplus (V_n \otimes V_{m+1}) \\ &\cong \begin{cases} \left(\bigoplus_{i=0}^n V_{n+m-1-2i} \right) \oplus (V_n \otimes V_{m+1}) & \text{si } n < m - 1 \\ \left(\bigoplus_{i=0}^{n-1} V_{2n-1-2i} \right) \oplus (V_n \otimes V_{m+1}) & \text{si } n = m \\ \left(\bigoplus_{i=0}^{m-1} V_{n+m-1-2i} \right) \oplus (V_n \otimes V_{m+1}) & \text{si } n \geq m + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

On conclut en utilisant la proposition 8.1.12 que

$$V_n \otimes V_{m+1} \cong \bigoplus_{i=0}^{\min(n,m+1)} V_{n+m-1-2i}$$

et la formule de Clebsch-Gordan est démontrée. \square

Commentaires

La description des représentations du groupe quantique $SL_q(2)$ ($q \in \mathbb{R}^*$) est due à Woronowicz [27]. On peut trouver diverses preuves dans la littérature, voir le livre [14] et ses références.

La preuve relativement simple donnée ici combine diverses idées bien connues. En particulier, la démonstration de la formule de Clebsch-Gordan, en utilisant seulement les isomorphismes $V_n \otimes V_1 \cong V_{n-1} \oplus V_{n+1}$, est tirée de [9].

Chapitre 10

Compléments sur les algèbres de Hopf cosemisimples

10.1 Structure des cogèbres cosemisimples

10.2 Mesure de Haar et relations d'orthogonalité

10.3 Caractères

10.4 Retour sur les algèbres de Hopf compactes

Bibliographie

- [1] E. ABE, *Hopf algebras*, Cambridge University Press, 1980.
- [2] N. ANDRUSKIEWITSCH, Compact involutions of semisimple quantum groups, *Czech. J. Phys.* 44, 963-972.
- [3] T. BRÖCKER T. T. DIECK, *Representations of compact Lie Groups*, GTM 98, Springer, 1985.
- [4] K. BROWN, K. GOODEARL, *Lectures on algebraic quantum groups*, Birkhäuser Verlag, 2002.
- [5] S. DASCALESCU, C. NASTASESCU, S. RAIANU, *Hopf algebras. An introduction*, Marcel Dekker, 2001.
- [6] R. et A. DOUADY, *Algèbre et théories galoisiennes*, deuxième édition, Cassini, 2005.
- [7] V.G. DRINFELD, Quantum groups, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986), 798-820, Amer. Math. Soc., 1987.
- [8] M. DUBOIS-VIOLETTE, G. LAUNER, The quantum group of a non-degenerate bilinear form, *Phys. Lett. B* 245, No.2 (1990), 175-177.
- [9] E. GUNNLAUGSDÓTTIR, Monoidal structure of the category of u_q^+ -modules, *Linear Algebra Appl.* 365 (2003), 183-199.
- [10] W. FULTON, *Algebraic curves*, Benjamin, 1969.
- [11] E. HEWITT et K.A. ROSS, *Abstract harmonic analysis*, vol. 1, Springer, 1963.
- [12] J.E. HUMPHREYS, *Linear algebraic groups*, GTM 21. Springer, 1975.
- [13] C. KASSEL, *Quantum groups*, GTM 155, Springer, 1995.
- [14] A. KLIMYK et K. SCHMÜDGEN, *Quantum groups and their representations*, Texts and Monographs in Physics, Springer, 1997.
- [15] S. LANG, *Algebra*, 3rd edition, Addison-Wesley, 1993.
- [16] S. MACLANE, *Categories for the working mathematician*, Springer, GTM 5, 1971.
- [17] S. MAJID, *Foundations of quantum group theory*, Cambridge University Press, 1995.
- [18] S. Majid, *A quantum groups primer*, London Mathematical Society Lecture Note Series 292, Cambridge University Press, 2002.
- [19] Y. MANIN, *Quantum groups and noncommutative geometry*. Publications du CRM 1561, Univ. de Montréal, 1988.
- [20] B. MITCHELL, *Theory of categories*, Academic Press, 1965.
- [21] S. MONTGOMERY, *Hopf algebras and their actions on rings*, Amer. Math. Soc., Providence, 1993.

- [22] T.A. SPRINGER, *Linear algebraic groups*, Second edition, Birkhäuser, 1998.
- [23] M. SWEEDLER, *Hopf algebras*, Benjamin, 1969.
- [24] T. TIMMERMANN, *An invitation to quantum groups and duality. From Hopf algebras to multiplicative unitaries and beyond*. EMS Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society (EMS), 2008.
- [25] S. WANG, Free products of compact quantum groups, *Comm. Math. Phys.* 167 (1995), 671-692.
- [26] W.C. WATERHOUSE, *Introduction to affine group schemes*, Springer, 1979.
- [27] S.L. WORONOWICZ, Twisted $SU(2)$ group. An example of a noncommutative differential calculus, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 23 (1987), 117-181.