J. reine angew. Math. **726** (2017), 187–247
DOI 10.1515/crelle-2014-0096
Journal für die reine und angewandte Mathematik

Corps de Siegel

Par *Éric Gaudron* à Clermont-Ferrand et *Gaël Rémond* à Bordeaux

Résumé. Nous appelons corps de Siegel une extension algébrique du corps des nombres rationnels sur laquelle un lemme de Siegel vaut. C'est classiquement le cas pour les corps de nombres mais aussi pour le corps des nombres algébriques d'après Roy–Thunder et Zhang. Nous donnons de nouveaux exemples. Nous montrons aussi qu'il existe des corps qui ne sont pas de Siegel, à savoir les corps de degré infini qui satisfont la propriété de Northcott, introduite par Bombieri–Zannier. Notre démarche repose sur l'étude de plusieurs séries de minima successifs associés à un espace adélique. Les différentes propriétés du corps se lisent sur des quantités généralisant la constante d'Hermite. Dans le cas des nombres algébriques, nous calculons leurs valeurs exactes.

We define a Siegel field to be a subfield K of the algebraic numbers over which a Siegel lemma holds. Known examples include number fields (classical geometry of numbers) and the field of algebraic numbers itself (Roy–Thunder and Zhang). We investigate the situation for other fields. We provide new examples such as real algebraic numbers or Hilbert class fields towers, as well as counterexamples. We also relate the Siegel condition to other properties of K, for example the Northcott property introduced by Bombieri–Zannier. For this we define several series of successive minima for an adelic vector space over K, which give rise to diverse numerical invariants of K (akin to Hermite's constant). When K is the field of algebraic numbers, we determine their exact values.

Table des matières

1. Introduction
2. Places d'une extension algébrique
3. Espaces adéliques rigides
4. Minima
5. Exemples
Références

1. Introduction

Ce texte trouve son origine dans la question suivante : que se passe-t-il entre le lemme de Siegel classique (sur un corps de nombres) et le lemme de Siegel absolu de Roy–Thunder–Zhang (sur $\overline{\mathbb{Q}}$) ? Autrement dit, quels sont les corps $K \subset \overline{\mathbb{Q}}$ sur lesquels on peut énoncer un lemme de Siegel ? Nous proposons un cadre pour répondre à cette question, celui des espaces adéliques rigides sur K, et donnons plusieurs exemples de corps où nous pouvons dire s'il existe ou non un lemme de Siegel.

Avant de présenter les détails de notre travail, rappelons de quoi il s'agit. Classiquement, on appelle lemme de Siegel un énoncé permettant de trouver une petite solution à un système d'équations linéaires. Dans le cas le plus dépouillé, nous avons : si $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, alors il existe $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ avec $ax + by + cz = 0$ et

$$\max(|x|, |y|, |z|) \leq \sqrt{6}\max(|a|, |b|, |c|)^{1/2}.$$

Ceci s'obtient facilement par le principe des tiroirs. L'extension à un système arbitraire, qui a fait fortune en approximation diophantienne et théorie des nombres transcendants pour la construction de fonctions auxiliaires, porte le nom de Siegel qui l'a formulé le premier comme un lemme dans un article de 1929. On en fait toutefois généralement remonter l'idée à Thue (dans un article (en allemand) de 1909 [25] mais en réalité la même approche apparaît déjà en 1908 dans un article [24] en norvégien).

Nous pourrions même, à un petit changement de point de vue près, reculer encore dans le temps. En effet, dans l'exemple précédent, notons E l'espace vectoriel réel

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$$

muni de la norme $\|(x, y, z)\| = \max(|x|, |y|, |z|)$ puis Λ le réseau de E donné par

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \mid ax + by + cz = 0\}.$$

La question devient alors d'estimer la plus petite norme non nulle d'un élément de Λ. Alternativement, nous cherchons la plus petite valeur ρ pour laquelle le corps convexe

$$C = \{u \in E \mid \|u\| \leq \rho\}$$

contient un élément de $\Lambda \setminus \{0\}$. Nous voici dans le cadre de la géométrie des nombres de Minkowski : son fameux premier théorème (1889) affirme que $C \cap \Lambda \neq \{0\}$ dès que

$$\operatorname{vol}(C) \geq 4\operatorname{vol}(E/\Lambda)$$

pour une mesure de Haar quelconque sur E. Le calcul montre

$$\frac{4\operatorname{vol}(E/\Lambda)}{\operatorname{vol}(C)} \leq \frac{4}{3}\rho^{-2}\max(|a|, |b|, |c|),$$

ce qui conduit à une version améliorée de l'inégalité précédente où $\sqrt{6}$ est remplacée par $\sqrt{4/3}$. Remarquons en passant que le calcul deviendrait plus confortable avec une norme euclidienne. Avec la norme $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, la quantité $4\operatorname{vol}(E/\Lambda)/\operatorname{vol}(C)$ vaut exactement

$$\frac{4}{\pi}\rho^{-2}\frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{|\mathrm{pgcd}(a, b, c)|}$$

tandis que, pour la norme du supremum, une formule exacte pour ce quotient s'écrirait par exemple

$$\rho^{-2}|\mathrm{pgcd}(a,b,c)|^{-1}\left(\frac{1}{\max(|a|,|b|,|c|)}-\frac{\max(0,|a|+|b|+|c|-2\max(|a|,|b|,|c|))^2}{4|abc|}\right)^{-1}$$

dont on déduit la majoration ; en dimension supérieure le calcul exact n'est plus gérable et l'estimation requiert l'inégalité de *sciage du cube* de Vaaler, voir [5,28].

Ainsi le lemme de Siegel se réduit au premier théorème de Minkowski. Nous ignorons de quand date cette observation. En revanche, l'étape suivante, à savoir la remarque que l'on peut appliquer le *second* théorème de Minkowski dans ce contexte, apparaît indépendamment dans les travaux de McFeat en 1971 [17] et de Bombieri–Vaaler en 1983 [5]. Entre temps, la situation avait été généralisée aux corps de nombres. Par exemple, nous pouvons énoncer, en nous limitant au premier théorème : si K est un corps de nombres,

($*$) il existe un réel $c(2,K)>0$ tel que pour tout $(a,b,c)\in K^3\setminus\{(0,0,0)\}$
il existe $(x,y,z)\in K^3\setminus\{(0,0,0)\}$ avec
$ax+by+cz=0$ et $H(x,y,z)\le c(2,K)H(a,b,c)^{1/2}$.

Ici la hauteur peut être prise indifféremment (si l'on ne précise pas $c(2,K)$) avec la norme du supremum ou la norme hermitienne en une place infinie.

En 1995–1996, Roy–Thunder [22] et Zhang [33] montrent indépendamment le fait remarquable que l'assertion ($*$) vaut pour $K=\overline{\mathbb{Q}}$. Ceci nous amène à poser la définition suivante : un sous-corps K de $\overline{\mathbb{Q}}$ est dit de Siegel s'il satisfait ($*$). Nous cherchons à savoir quels sont les corps ayant cette propriété.

Nous nous placerons dans le cadre des espaces adéliques sur K, c'est-à-dire des espaces vectoriels de dimension finie munis de normes en toutes les places de K. De façon précise, nous nous limitons aux espaces adéliques que nous appelons *rigides*, dont les normes peuvent être définies par une matrice adélique (voir définition 3.1 et suivantes). À un tel espace E, sont attachées des notions de hauteur des points $H_E\colon E\to\mathbb{R}$ et de hauteur de l'espace $H(E)$.

Commençons par dire que nous montrerons que si K satisfait la condition apparemment faible ($*$) (pour un certain type d'espace adélique de dimension 2 et seulement sous la forme du premier théorème de Minkowski), alors il vérifie automatiquement la propriété générale que pour tout $n\ge 1$ il existe un réel $c(n,K)$ tel que si E est un espace adélique rigide sur K de dimension n, alors il existe une base $e_1,\dots,e_n$ de E avec

$$H_E(e_1)\cdots H_E(e_n)\le c(n,K)H(E).$$

Nous formaliserons ceci à l'aide de minima successifs au sens de la hauteur, notés $\Lambda_i(E)$. Nous considérerons aussi la variante $\lambda_i^{\mathrm{BV}}(E)$ introduite par Bombieri–Vaaler, les minima $\lambda_i(E)$ de Thunder, ceux de Zhang $Z_i(E)$ ainsi que des mélanges comme $\zeta_i^{\mathrm{BV}}(E)$ (Zhang et Bombieri–Vaaler). Une bonne partie de notre travail consistera à comparer ces différents minima.

La forme forte du théorème de Zhang pour un espace adélique rigide E sur $\overline{\mathbb{Q}}$ de dimension n s'écrit

$$Z_1(E)\cdots Z_n(E)H(E)^{-1}\le\exp(n(H_n-1)/2)$$

où $H_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ est le nombre harmonique. En général nous appelons corps de Zhang un corps $K\subset\overline{\mathbb{Q}}$ tel que ce produit $Z_1(E)\cdots Z_n(E)H(E)^{-1}$ est borné uniquement en fonction de $n = \dim E$ pour tout E sur K. Un de nos principaux résultats établit que cette propriété, plus forte que celle de Siegel, lui est en fait équivalente dès que $[K : \mathbb{Q}] = \infty$.

Théorème 1.1. *Un corps de Siegel qui n'est pas un corps de nombres est un corps de Zhang.*

Nous faisons aussi le lien avec la propriété de Northcott, étudiée par Bombieri–Zannier [6]. La définition des minima de Zhang montre que, sur un corps de Northcott, les $Z_i(E)$ sont infinis pour $i \geq 2$. Il s'agit là en fait d'une caractérisation des corps de Northcott (voir proposition 4.4). Par analogie, nous appelons corps de BV-Northcott un corps sur lequel les $\zeta_i^{\mathrm{BV}}(E)$ sont infinis pour $i \geq 2$. En particulier un corps de Northcott n'est jamais un corps de Zhang et nous déduisons donc du théorème la conséquence suivante.

Corollaire 1.2. *Un corps de Northcott qui n'est pas un corps de nombres n'est pas un corps de Siegel.*

Le théorème sera établi au paragraphe 4.6 (voir corollaire 4.20). Les arguments utilisés s'avèrent plus quantitatifs que ne le laisse supposer l'énoncé et permettent, de manière un peu inattendue, de montrer l'optimalité de la constante apparaissant dans le théorème de Zhang pour $K = \overline{\mathbb{Q}}$, même dans la forme faible n'impliquant que le premier minimum $\Lambda_1 = Z_1$.

Théorème 1.3. *Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \geq 1$, il existe un espace adélique rigide E sur $\overline{\mathbb{Q}}$ de dimension n tel que $\Lambda_1(E)H(E)^{-1/n} \geq \exp((H_n - 1)/2) - \varepsilon$.*

Nous pouvons formuler ce résultat en disant qu'il fournit la valeur exacte de la *constante d'Hermite* du corps $\overline{\mathbb{Q}}$ (paragraphe 5.2) alors que, à titre de comparaison, celle du corps $\mathbb{Q}$ reste inconnue pour tout $n \geq 9$, $n \neq 24$ (paragraphe 5.1).

Nous examinerons aussi un invariant intéressant du corps K, noté $c_1(K)$: il s'agit du supremum des quotients $\lambda_1^{\mathrm{BV}}(E)H(E)^{-1}$ lorsque E est un espace adélique rigide de dimension 1. Lorsqu'il est fini, il permet de comparer aisément entre elles toutes les séries de minima d'un espace E de dimension quelconque ; à l'opposé, si K est de Northcott (ou de BV-Northcott) sans être un corps de nombres, alors $c_1(K)$ est infini.

Nous donnerons de nombreux exemples : corps de Siegel, corps non de Siegel, corps de BV-Northcott mais non de Northcott, corps avec $c_1(K)$ fini, corps avec $c_1(K) = 1$. Nous passerons également en revue une liste de questions ouvertes à propos de l'existence de corps ayant telle ou telle propriété.

Précisons que les espaces adéliques rigides que nous considérons dans tout le texte sont en particulier hermitiens et *purs* au sens de [10]. Ce choix est dicté par deux raisons : d'une part, les définitions même des espaces adéliques et des hauteurs dans le cas général apparaissent beaucoup plus délicates que dans le cas hermitien pur ; d'autre part, la présente étude, majoritairement qualitative (on s'intéresse essentiellement à savoir si certains invariants du corps K sont finis ou infinis, rarement à estimer leurs valeurs), se trouverait peu modifiée par l'utilisation de normes non hermitiennes à l'infini : on se ramènerait au cas hermitien à la façon de [9] par multiplication par un défaut d'hermitianité $\Delta(E)$ majoré uniformément en fonction de $n = \dim E$. L'autorisation de normes impures aux places finies, quant à elle, interdirait complètement certaines comparaisons de minima faites ici (car le défaut de pureté de [10] n'est pas borné en fonction de la dimension). Nous espérons revenir sur ces questions dans un travail ultérieur.

Dans la partie suivante, nous étudions places et adèles de K, en mettant l'accent sur la topologie et la mesure sur l'ensemble $V(K)$ des places de K. Cette façon d'envisager la hauteur sur K s'inspire de l'approche d'Allcock–Vaaler [1] que nous généralisons. Nous consacrons ensuite la partie 3 aux définitions de la notion d'espace adélique rigide et des différentes hauteurs associées (points, espaces) ainsi qu'à leurs propriétés de base. La partie 4 introduit les minima et rassemble toutes les comparaisons qui les lient entre eux. Enfin, la dernière partie contient nos exemples de corps.

2. Places d'une extension algébrique

2.1. Topologie. Soit K une extension algébrique de $\mathbb{Q}$. Nous notons $V(K)$ l'ensemble des places de K, c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence de valeurs absolues non triviales sur K. Pour $v \in V(K)$, nous ne considérons qu'un seul représentant de la classe d'équivalence v, noté $|\cdot|_v$, à savoir celui qui étend une valeur absolue usuelle sur $\mathbb{Q}$; nous pouvons le caractériser par $|p|_v \in \{1, p, p^{-1}\}$ pour tout nombre premier p. Lorsque L est un sous-corps de K, nous notons toujours $v_{|L}$ la restriction de $v \in V(K)$ à L et écrivons à l'occasion res: $V(K) \to V(L)$ pour l'application correspondante.

Notre première tâche est de munir $V(K)$ d'une topologie et d'une mesure. Cette construction généralise celle d'Allcock et Vaaler qui traitent le cas où K est une extension galoisienne d'un corps de nombres (voir [1]).

Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des extensions finies de $\mathbb{Q}$ contenues dans K. Pour tous $L, L' \in \mathcal{E}$ avec $L \subset L'$, nous disposons d'une application de restriction $V(L') \to V(L)$ qui fait de la famille $(V(L))_{L\in\mathcal{E}}$ un système projectif d'ensembles. De la même façon, pour tout $L \in \mathcal{E}$, la restriction donne une application $V(K) \to V(L)$. La collection de ces flèches fournit une application

$$r: V(K) \to \varprojlim_{L\in\mathcal{E}} V(L).$$

Lemme 2.1. *L'application r est bijective.*

Démonstration. Si nous réalisons la limite projective comme la partie du produit $\prod_{L\in\mathcal{E}} V(L)$ formée des familles $(v_L)_{L\in\mathcal{E}}$ telles que $v_{L'|L} = v_L$ pour tous $L, L' \in \mathcal{E}$ avec $L \subset L'$, alors l'application r est donnée par $r(v) = (v_{|L})_{L\in\mathcal{E}}$. Elle est injective car si $r(v) = r(v')$, alors, pour tout $x \in K$, nous avons $|x|_v = |x|_{v'}$ en choisissant $L = \mathbb{Q}(x)$. De même, pour la surjectivité, nous reconstruisons une place de K à partir des v_L en posant pour $x \in K$ la définition $|x|_v = |x|_{v_{\mathbb{Q}(x)}}$. On vérifie sans peine que ceci définit une valeur absolue donc une place v et que $v_{|L} = v_L$ pour tout $L \in \mathcal{E}$. □

Nous munissons à présent les ensembles $V(L)$ $(L \in \mathcal{E})$ de leur topologie discrète. Les applications de restriction sont alors évidemment continues et nous pouvons donc munir $V(K)$ de la topologie de la limite projective. Il s'agit de la topologie la moins fine pour laquelle les applications de restriction $V(K) \to V(L)$ $(L \in \mathcal{E})$ sont continues. En d'autres termes, la topologie est engendrée par les ouverts

$$V_v(K) = \{w \in V(K) \mid w_{|L} = v\}$$

pour tous $L \in \mathcal{E}$ et $v \in V(L)$. Ces ensembles sont aussi fermés. La topologie obtenue sur $V(K)$ est totalement discontinue (en effet : si $w \neq w'$, il existe $L \in \mathcal{E}$ avec $w_{|L} \neq w'_{|L}$ et w et w' sont séparés par la partie ouverte et fermée $V_{w_{|L}}(K)$) et donc séparée. Elle est, de plus, localement compacte : en effet, comme pour tout $L \in \mathcal{E}$, on a $V(L) = \coprod_{p \in V(\mathbb{Q})} V_p(L)$ (somme directe topologique), on trouve $V(K) = \coprod_{p \in V(\mathbb{Q})} V_p(K)$ avec

$$V_p(K) \simeq \varprojlim_{L \in \mathcal{E}} V_p(L)$$

pour tout $p \in V(\mathbb{Q})$; chaque $V_p(L)$ est fini donc compact, ce qui entraîne que $V_p(K)$ est compact (c'est un fermé de $\prod_{L \in \mathcal{E}} V_p(L)$ pour la topologie produit et cet espace est compact par le théorème de Tychonoff). Par suite, les ouverts fondamentaux $V_v(K)$ sont aussi compacts (puisque fermés dans un compact $V_{v_{|\mathbb{Q}}}(K)$).

Lemme 2.2. *Soit Y une partie de $V(K)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Y est ouverte et compacte.*

(2) *Y est une union finie de parties de la forme $V_v(K)$ où $v \in V(L)$ et $L \in \mathcal{E}$.*

(3) *Y est une union finie de parties de la forme $V_v(K)$ où $v \in V(L)$ pour un élément fixé L de $\mathcal{E}$.*

(4) *$Y = \mathrm{res}^{-1}(X)$ pour une partie finie X de $V(L)$ avec $L \in \mathcal{E}$.*

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2) : Les parties $V_v(K)$ forment une base d'ouverts de $V(K)$. Comme Y est ouvert, il s'écrit comme union de tels ouverts. Par compacité une union finie suffit.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Si $Y = \bigcup_{i=1}^n V_{v_i}(K)$ avec $v_i \in V(L_i)$, on considère le compositum L des L_i et, alors, on a $Y = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{w \in V_{v_i}(L)} V_w(K)$.

(3) $\Leftrightarrow$ (4) : Reformulation évidente.

(3) $\Rightarrow$ (1) : Clair car $V_v(K)$ est ouvert et compact. □

2.2. Mesure. Nous introduisons ensuite des mesures (boréliennes) sur les espaces $V(L)$ pour $L \in \mathcal{E}$. Puisque la topologie est discrète, il s'agit de mesures de comptage pondérées ; tout ensemble est mesurable et la mesure d'un point est fournie par

$$\mu(\{v\}) = \frac{[L_v : \mathbb{Q}_v]}{[L : \mathbb{Q}]}$$

où L_v désigne le complété du corps de nombres L en la place v et $\mathbb{Q}_v$ le complété de $\mathbb{Q}$ en la place $v_{|\mathbb{Q}}$. En vertu de l'isomorphisme $L \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \simeq \bigoplus_{v \in V_p(L)} L_v$, nous constatons que $\mu(V_p(L)) = 1$.

Plus généralement, la compatibilité des mesures μ sur les $V(L)$ s'exprime par

$$\mu(V_v(L')) = \mu(\{v\})$$

si $v \in V(L)$ et $L \subset L'$, comme on le voit en écrivant $L' \otimes_L L_v \simeq \bigoplus_{w \in V_v(L')} L'_w$. Par conséquent, à l'aide de l'additivité, on a $\mu(\mathrm{res}^{-1}(X)) = \mu(X)$ pour tout $X \subset V(L)$ et toute restriction res: $V(L') \to V(L)$.

Ces propriétés permettent de munir $V(K)$ de la limite de ces mesures. Nous obtenons une mesure borélienne μ pour laquelle

$$\mu(V_v(K)) = \frac{[L_v : \mathbb{Q}_v]}{[L : \mathbb{Q}]}$$

(si $v \in V(L)$) et en particulier $\mu(V_p(K)) = 1$ si $p \in V(\mathbb{Q})$.

Décrivons par exemple la construction de la mesure sur $V_p(K)$. La formule

$$\mu(\mathrm{res}^{-1}(X)) = \mu(X)$$

pour toute restriction res: $V_p(K) \to V_p(L)$ avec $L \in \mathcal{E}$ définit une mesure μ sur le clan des compacts-ouverts de $V_p(K)$. En effet, si $A = \coprod_{n \in \mathbb{N}} B_n$ avec des compacts ouverts A et B_n, alors $B_n = \emptyset$ pour n assez grand donc, en prenant un compositum, on peut écrire $A = \mathrm{res}^{-1}(Y)$ et $B_n = \mathrm{res}^{-1}(X_n)$ pour $Y, X_n \subset V_p(L)$ et $L \in \mathcal{E}$ (indépendant de n). De la sorte, on a $Y = \coprod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ et donc l'égalité $\mu(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n)$ résulte du fait que μ est une mesure sur $V_p(L)$ (ensemble fini).

Un théorème classique permet donc d'étendre la mesure du clan à une tribu. On écrit pour cela $\mu(B) = \inf\{\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \mid B \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\}$ où chaque A_n est de la forme $V_v(K)$ ($v \in V_p(L)$, $L \in \mathcal{E}$) pour toute partie B de $V_p(K)$. Cette formule définit une mesure sur la tribu

$$\mathcal{T} = \big\{B \subset V_p(K) \mid \mu(E) = \mu(E \cap B) + \mu(E \cap (V_p(K) \setminus B)) \text{ pour tout } E \subset V_p(K)\big\}.$$

Cette tribu contient la tribu engendrée par le clan des compacts-ouverts, à savoir la tribu borélienne. On vérifie immédiatement que l'on a pour $B \in \mathcal{T}$:

(1) $\mu(B) = \inf\{\mu(U) \mid B \subset U, U \text{ ouvert}\}$;

(2) $\mu(B) = \sup\{\mu(C) \mid C \subset B, C \text{ compact}\}$;

(3) il existe des boréliens X, Y tels que $X \subset B \subset Y$ et $\mu(Y \setminus X) = 0$.

Pour montrer (1), on utilise que $\mathcal{E}$ est dénombrable, car K l'est, donc

$$\big\{V_v(K) \mid v \in V_p(L), L \in \mathcal{E}\big\}$$

l'est aussi et donc tout ouvert est de la forme $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ comme dans la définition de μ ; (2) et (3) s'ensuivent. Pour tout ceci, voir par exemple [4, 12].

La tribu est complète.

On étend ensuite la mesure à l'union dénombrable disjointe $V(K)$ des $V_p(K)$.

L'intérêt de cette mesure apparaîtra clairement lors de nos définitions de hauteurs (voir définitions 2.16 et 3.3) mais nous pouvons déjà en donner ici un avant-goût dans l'esprit de [1]. La définition classique de la hauteur de Weil d'un nombre algébrique $x \in K$ s'écrit

$$h(x) = \sum_{v \in V(L)} \frac{[L_v : \mathbb{Q}_v]}{[L : \mathbb{Q}]} \log \max(1, |x|_v)$$

où L est un corps de nombres ($L \in \mathcal{E}$) arbitraire contenant x. Cette somme finie est exactement l'intégrale sur $V(L)$ pour μ de la fonction à support compact $v \mapsto \log\max(1, |x|_v)$ mais l'introduction de la mesure limite permet même de s'affranchir du choix de L et d'écrire intrinsèquement sur K

$$h(x) = \int_{V(K)} \log\max(1, |x|_v)\, \mathrm{d}\mu(v).$$

La fonction $v \mapsto \log\max(1, |x|_v)$ est effectivement intégrable sur $V(K)$ car elle est à support compact et localement constante : elle est constante sur les ouverts de la forme $V_{v_0}(K)$ avec $v_0 \in V(L)$ et $x \in L \in \mathcal{E}$ et à support dans $\bigcup_{|x|_{v_0} \neq 1} V_{v_0}(K)$.

2.3. Cas galoisien. Le lecteur attentif aura noté que nombre des propriétés de la topologie et de la mesure de $V(K)$ sont partagées par les groupes profinis munis de leur topologie profinie et de leur mesure de Haar. En fait, si K est une extension galoisienne d'un corps de nombres K_0 (c'est la situation étudiée dans [1]), l'espace mesuré $V(K)$ est lié au groupe profini $\mathrm{Gal}(K/K_0)$. Nous avons une action de groupe

$$\mathrm{Gal}(K/K_0) \times V(K) \to V(K), \quad (\sigma, v) \mapsto \sigma v$$

où σv est la place définie par $|x|_{\sigma v} = |\sigma^{-1}(x)|_v$ pour $x \in K$ (le σ^{-1} est mis pour avoir une action à gauche). Si $v_0 \in V(K_0)$, alors la partie $V_{v_0}(K)$ est stable par l'action de $\mathrm{Gal}(K/K_0)$.

Lemme 2.3. *L'action induite* $\mathrm{Gal}(K/K_0) \times V_{v_0}(K) \to V_{v_0}(K)$ *est transitive.*

Démonstration. Considérons une suite de corps $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sorte que K_n est une extension galoisienne finie de K_0, $K_n \subset K_{n+1}$ et $K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ (et K_0 est bien le corps ainsi noté ci-dessus). Si maintenant $v, v' \in V_{v_0}(K)$, pour montrer qu'il existe $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/K_0)$ avec $\sigma v = v'$, il nous suffit de trouver une suite de $\sigma_n \in \mathrm{Gal}(K_n/K_0)$ avec $\sigma_n(v_{|K_n}) = v'_{|K_n}$ et $\sigma_{n+1|K_n} = \sigma_n$. Comme $\sigma_0 = \mathrm{id}$ convient, supposons σ_n construit pour $n \geq 0$. Choisissons $\tau \in \mathrm{Gal}(K_{n+1}/K_0)$ tel que $\tau_{|K_n} = \sigma_n$. Les places $\tau(v_{|K_{n+1}})$ et $v'_{|K_{n+1}}$ coïncident sur K_n donc il existe $\varphi \in \mathrm{Gal}(K_{n+1}/K_n)$ tel que $\varphi(\tau(v_{|K_{n+1}})) = v'_{|K_{n+1}}$ (on utilise le résultat du lemme pour deux corps de nombres – cas classique). Alors $\sigma_{n+1} = \varphi \circ \tau$ convient. □

Lemme 2.4. *Cette action est continue.*

Démonstration. Il suffit de montrer que l'image réciproque X de $V_v(K)$ pour $v \in V_{v_0}(L)$ et L une extension galoisienne finie de K_0 contenue dans K est ouverte. Or $\sigma w \in V_v(K)$, pour $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/K_0)$ et $w \in V_{v_0}(K)$, s'écrit $(\sigma_{|L})(w_{|L}) = v$ donc X est l'image réciproque d'un ensemble à travers $\mathrm{Gal}(K/K_0) \times V_{v_0}(K) \to \mathrm{Gal}(L/K_0) \times V_{v_0}(L)$. On en déduit que X est ouvert car, par définition des topologies, cette application est continue lorsque son but (fini) est muni de la topologie discrète. □

Nota bene : dans cette démonstration, nous avons utilisé le fait que les $V_v(K)$ pour $v \in V_{v_0}(L)$ et L une extension galoisienne finie de K_0 contenue dans K formaient une base de la topologie de $V_{v_0}(K)$: ceci résulte du fait que, si $L' \in \mathcal{E}$, on peut considérer sa clôture galoisienne $L \subset K$ et, pour $v' \in V_{v_0}(L')$, l'ensemble ouvert fondamental $V_{v'}(K)$ est égal à l'union (finie) des $V_v(K)$ pour $v \in V_{v'}(L) \subset V_{v_0}(L)$.

Examinons à présent l'effet de cette action sur la mesure.

Fixons arbitrairement une place $v_1 \in V_{v_0}(K)$ et considérons l'application continue

$$\rho\colon \mathrm{Gal}(K/K_0) \to V_{v_0}(K), \quad \sigma \mapsto \sigma v_1.$$

Proposition 2.5. *La mesure sur $V_{v_0}(K)$ est donnée par*

$$\mu = \frac{[(K_0)_{v_0} : \mathbb{Q}_{v_0}]}{[K_0 : \mathbb{Q}]}\mu_\rho$$

où μ_ρ est la mesure image par l'application ρ de la mesure de Haar sur $\mathrm{Gal}(K/K_0)$ *(de masse totale 1).*

Démonstration. Puisque μ est l'unique mesure étendant la mesure sur le clan des compacts-ouverts, il suffit de vérifier la formule pour un compact ouvert ou même pour un ensemble $V_v(K)$ où $v \in V_{v_0}(L)$ et L une extension galoisienne finie de K_0 contenue dans K (voir remarque ci-dessus). Autrement dit, il suffit de montrer que

$$\mu_{\mathrm{Haar}}(\rho^{-1}(V_v(K))) = \frac{[L_v : (K_0)_{v_0}]}{[L : K_0]}.$$

Maintenant,

$$\begin{aligned}\rho^{-1}(V_v(K)) &= \{\sigma \mid (\sigma_{|L})(v_{1|L}) = v\}\\ &= \mathrm{res}^{-1}\{\tau \in \mathrm{Gal}(L/K_0) \mid \tau v_{1|L} = v\}.\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{res}^{-1}\,\mathrm{Gal}(L/K_0) = \mathrm{Gal}(K/K_0)$ est de mesure 1 et $\mathrm{Gal}(L/K_0)$ de cardinal $[L : K_0]$, notre formule se réduit à montrer que $\{\tau \in \mathrm{Gal}(L/K_0) \mid \tau v_{1|L} = v\}$ a pour cardinal le degré local $[L_v : (K_0)_{v_0}]$. Par transitivité de l'action, il suffit de le voir pour l'ensemble $\{\tau \in \mathrm{Gal}(L/K_0) \mid \tau v = v\}$. Ceci est alors classique : $\tau \in \mathrm{Gal}(L/K_0)$ stabilise la place v si et seulement s'il s'étend en un automorphisme isométrique du complété L_v fixant $(K_0)_{v_0}$; par unicité de l'extension de la valeur absolue dans les extensions algébriques de corps complets, le caractère isométrique est automatique et donc notre ensemble est en bijection avec $\mathrm{Gal}(L_v/(K_0)_{v_0})$. □

Ainsi (toujours dans ce cas galoisien) nous aurions pu définir la mesure sur $V(K)$ comme mesure image de la mesure de Haar de $\mathrm{Gal}(K/K_0)$. Cette approche ressemble à celle d'Allcock et Vaaler qui partent effectivement de cette mesure de Haar mais utilisent ensuite le théorème de représentation de Riesz plutôt que de parler de mesure image.

Corollaire 2.6. *La mesure sur $V(K)$ est invariante par l'action de* $\mathrm{Gal}(K/K_0)$.

Démonstration. Il suffit de le voir pour μ_ρ sur $V_{v_0}(K)$. Si $X \subset V_{v_0}(K)$ est mesurable et $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/K_0)$, alors $\rho^{-1}(\sigma X) = \sigma\rho^{-1}(X)$ donc σX est mesurable et

$$\mu_\rho(\sigma X) = \mu_{\mathrm{Haar}}(\rho^{-1}(\sigma X)) = \mu_{\mathrm{Haar}}(\sigma\rho^{-1}(X)) = \mu_{\mathrm{Haar}}(\rho^{-1}(X)) = \mu_\rho(X),$$

puisque, par définition, la mesure de Haar est invariante par translation. □

Ceci permet par exemple de retrouver sur l'expression de la hauteur comme intégrale donnée plus haut le fait classique de son invariance par l'action de Galois.

2.4. Changement de corps. Revenons maintenant au cas général (sans hypothèse galoisienne). Si nous avons deux corps K et K' tels que $K \subset K' \subset \overline{\mathbb{Q}}$, alors nous avons construit indépendamment topologie et mesure sur $V(K)$ et $V(K')$. Celles-ci sont liées de la façon suivante.

Proposition 2.7. *L'application de restriction* $\mathrm{res}\colon V(K') \to V(K)$ *est continue, ouverte et surjective ; la mesure image de la mesure sur* $V(K')$ *est la mesure sur* $V(K)$.

Démonstration. Pour la surjectivité, on utilise par exemple que si $v \in V(K)$, alors on peut prolonger la valeur absolue $|\cdot|_v$ de K à K_v puis à la clôture algébrique $\overline{K_v}$. Comme K' est une extension algébrique de K, il se plonge dans $\overline{K_v}$ et donc reçoit ainsi une valeur absolue étendant v. Montrons maintenant que l'application est ouverte car les autres propriétés résultent simplement de $\mathrm{res}^{-1}(V_v(K)) = V_v(K')$ lorsque $v \in V(L)$ avec $L \subset K \subset K'$ et $L/\mathbb{Q}$ finie. Puisque $\mathrm{res}(\bigcup_i U_i) = \bigcup_i \mathrm{res}(U_i)$ pour tous $U_i \subset V(K')$, il suffit de montrer que $\mathrm{res}(V_{v_0}(K'))$ est ouvert avec $v_0 \in V(L)$ et $L \in \mathcal{E}_{K'}$. Nous écrivons $L = \mathbb{Q}(x)$ et $P \in K[X]$ le polynôme minimal de x sur K. Soit ensuite $K_0 \in \mathcal{E}_K$ le corps engendré par les coefficients de P. Nous allons montrer que $\mathrm{res}(V_{v_0}(K'))$ est l'image réciproque par $V(K) \to V(K_0)$ d'une partie de $V(K_0)$, ce qui établira bien qu'il est ouvert. Pour cela, notons que $\mathrm{res}(V_{v_0}(K'))$ est l'ensemble des places $v \in V(K)$ pour lesquelles il existe une extension commune de v et v_0 en un élément de $V(K')$ et montrons que cette dernière condition équivaut à l'existence d'une extension commune de $v_{|K_0}$ et de v_0 à K'. Une implication étant évidente, supposons que $v_{|K_0}$ et v_0 aient une telle extension. Ceci nous fournit en particulier un plongement $K_0(x) \hookrightarrow \mathbb{C}_p$ tel que les morphismes restreints $\sigma\colon \mathbb{Q}(x) \hookrightarrow \mathbb{C}_p$ et $\tau\colon K_0 \hookrightarrow \mathbb{C}_p$ induisent respectivement v_0 et $v_{|K_0}$. Par suite, nous avons $\tau(P)(\sigma(x)) = 0$. Maintenant nous pouvons supposer que τ est la restriction de $\tau'\colon K \hookrightarrow \mathbb{C}_p$ induisant v puis définir $\varphi\colon K[X] \to \mathbb{C}_p$ par $\varphi(Q(X)) = \tau'(Q)(\sigma(x))$ de sorte que $P \in \mathrm{Ker}\,\varphi$. Notre morphisme se factorise donc en $K(x) \hookrightarrow \mathbb{C}_p$ qui induit une place de $V(K(x))$ étendant v et v_0. On conclut alors par surjectivité de $V(K') \to V(K(x))$. □

Notons que ceci permet *a posteriori* d'écrire (l'espace topologique mesuré) $V(K)$ comme limite projective

$$\varprojlim_{L \in \mathcal{F}} V(L)$$

pour n'importe quelle famille $\mathcal{F}$ de sous-corps de K avec $\bigcup_{L \in \mathcal{F}} L = K$ (sans hypothèse de finitude).

Dans le cas d'une extension finie, nous disposons encore de la propriété suivante liant les mesures.

Lemme 2.8. *Soit K'/K une extension finie de sous-corps de $\overline{\mathbb{Q}}$. Soient $f\colon V(K') \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et $g\colon V(K) \to \mathbb{R}$ décrite par*

$$v \mapsto \sum_{w \in V_v(K')} \frac{[K'_w : K_v]}{[K' : K]} f(w).$$

Alors g est intégrable et les intégrales de f et g coïncident.

Démonstration. Notons K'' la clôture galoisienne de K'/K. Par la propriété de mesure image de la proposition précédente, il suffit de démontrer l'assertion pour $f', g' \colon V(K'') \to \mathbb{R}$ obtenues en composant f et g avec la restriction $V(K'') \to V(K')$ ou $V(K'') \to V(K)$. Pour une place $x \in V(K'')$, nous avons

$$\begin{aligned} g'(x) = g(x_{|K}) &= \sum_{w \in V_{x_{|K}}(K')} \frac{[K'_w : K_{x_{|K}}]}{[K' : K]} f(w) \\ &= \sum_{w \in V_{x_{|K}}(K')} \Bigg(\sum_{x' \in V_w(K'')} \frac{[K''_{x'} : K'_w]}{[K'' : K']} \Bigg) \frac{[K'_w : K_{x_{|K}}]}{[K' : K]} f(w) \\ &= \sum_{x' \in V_{x_{|K}}(K'')} \frac{[K''_{x'} : K_{x_{|K}}]}{[K'' : K]} f(x'_{|K'}) \\ &= \sum_{x' \in V_{x_{|K}}(K'')} \frac{[K''_{x'} : K_{x_{|K}}]}{[K'' : K]} f'(x') \\ &= \frac{1}{[K'' : K]} \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(K''/K)} f'(\sigma x) \end{aligned}$$

puisque $\mathrm{Gal}(K''/K)$ agit transitivement sur $V_{x_{|K}}(K'')$, le stabilisateur de x' étant de cardinal $[K''_{x'} : K_{x_{|K}}] = \mathrm{Card}(\mathrm{Gal}(K''_{x'}/K_{x_{|K}}))$. Pour conclure, il nous suffit de montrer que si $\sigma \in \mathrm{Gal}(K''/K)$, alors la fonction $f' \circ \sigma \colon V(K'') \to \mathbb{R}$ est intégrable, de même intégrale que f'. Par l'argument de mesure image, nous pouvons composer avec la restriction $V(\overline{\mathbb{Q}}) \to V(K'')$. Nous avons donc une fonction $f'' \colon V(\overline{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}$ intégrable (déduite de f) tandis que la fonction obtenue à partir de $f' \circ \sigma$ s'écrit $f'' \circ \tau$ pour tout $\tau \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K)$ étendant σ. Le résultat découle alors du paragraphe précédent utilisé pour l'extension galoisienne $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$: l'élément τ vu dans $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ agit continûment sur $V(\overline{\mathbb{Q}})$ donc $f'' \circ \tau$ est intégrable et il préserve la mesure, donc les intégrales de f'' et $f'' \circ \tau$ coïncident. □

2.5. Cardinal, type topologique. Nous souhaitons maintenant donner quelques compléments sur la structure de $V(K)$ ainsi que divers exemples.

Comme première remarque, notons que le cardinal de $V(K)$ est toujours au plus celui de $\mathbb{R}$: par exemple, une valeur absolue est un élément de $\mathbb{R}^K$ et, puisque K est dénombrable, $|\mathbb{R}^K| = |\mathbb{R}|$.

Nous utilisons ensuite le théorème suivant.

Théorème 2.9. *Soient L un corps de nombres et p un nombre premier. Pour tout ensemble fini X muni d'une application surjective $f \colon X \to V_p(L)$, il existe un corps de nombres L' contenant L et une bijection $g \colon V_p(L') \to X$ telle que* $\mathrm{res} = f \circ g$.

Ceci s'obtient comme conséquence d'un résultat plus précis (la définition du degré résiduel et de l'indice de ramification est rappelée au paragraphe suivant).

Proposition 2.10. *Soient L un corps de nombres, $0 \leq s \leq t$ des entiers, $v_1, \ldots, v_s$ des places ultramétriques de L, $v_{s+1}, \ldots, v_t$ des places réelles de L puis $g_1, \ldots, g_t$ des entiers non nuls et enfin e_{ij}, f_{ij} des entiers non nuls pour $1 \leq i \leq t$ et $1 \leq j \leq g_i$. On suppose que l'entier $\sum_{j=1}^{g_i} e_{ij} f_{ij}$ est indépendant de i et $e_{ij} f_{ij} \leq 2$ si $i \geq s+1$. Alors il existe une extension finie L' de L telle que pour $1 \leq i \leq t$ la place v_i a g_i extensions $w_{i,1}, \ldots, w_{i,g_i}$ à L', l'extension $L'_{w_{i,j}}/L_{v_i}$ a pour degré $e_{ij} f_{ij}$ et, si $i \leq s$, pour degré résiduel f_{ij} et pour indice de ramification e_{ij}.*

Démonstration. Le théorème 6.4 de [21] (en utilisant que tout corps fini a des extensions de tout degré) donne le résultat si $s = t$. Il montre en fait l'existence d'un ouvert de la somme $\bigoplus_{i=0}^{s} L_{v_i}[X]_{\leq n}$ (où n est la valeur commune des $\sum_{j=1}^{g_i} e_{ij} f_{ij}$ et v_0 une place ultramétrique de L distincte de $v_1, \ldots, v_s$) tel que si P est un polynôme unitaire de $L[X]$ appartenant à cet ouvert, alors il est irréductible et $L' = L[X]/P$ convient. Ici nous utilisons en plus que $L[X]_{\leq n}$ est dense dans $\bigoplus_{i=0}^{t} L_{v_i}[X]_{\leq n}$ puis que l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ ayant exactement d racines réelles contient un ouvert non vide pour tout $d \leq n$, $d \equiv n \pmod 2$. Ceci permet d'assurer que le nombre de racines réelles de l'image de P dans $L_{v_i}[X]_{\leq n}$ $(s+1 \leq i \leq t)$ vaut $\mathrm{Card}\{j \mid e_{ij} f_{ij} = 1\}$ et ce nombre n'est autre que le nombre de places réelles de L' au-dessus de v_i, ce qu'il fallait démontrer. □

Démonstration du théorème 2.9. On note $V_p(L) = \{v_1, \ldots, v_s\}$ et g_i le cardinal de $f^{-1}(v_i)$. On pose ensuite $t = s$, $e_{ij} = 1$ et $f_{ij} = \prod_{k \neq i} g_k$. On applique alors la proposition. □

Le théorème nous permet de donner une caractérisation des espaces topologiques $V_p(K)$.

Corollaire 2.11. *Soient p un nombre premier et Y un espace topologique compact non vide. Il y a équivalence entre :*

(1) *Il existe une extension algébrique K de $\mathbb{Q}$ et un homéomorphisme $Y \simeq V_p(K)$.*

(2) *Il existe un système projectif d'ensembles finis discrets $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et d'applications surjectives $X_{n+1} \to X_n$ et un homéomorphisme*

$$Y \simeq \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} X_n.$$

(3) *Il existe une distance ultramétrique sur Y.*

(4) *L'espace Y est métrisable et totalement discontinu.*

Démonstration. (2) $\Rightarrow$ (1) : Par application répétée du théorème, on construit des corps de nombres L_n avec $X_n = V_p(L_n)$ de sorte que $X_{n+1} \to X_n$ soit la restriction. Il suffit alors de poser $K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$.

(1) $\Rightarrow$ (2) : Réciproquement, on choisit une suite croissante de corps de nombres tels que $K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$ et l'on pose $X_n = V_p(L_n)$.

(2) $\Rightarrow$ (3) : L'espace

$$\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} X_n$$

est métrisé par

$$d(x,y) = \big(\sup\{1\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid p_n(x) = p_n(y)\}\big)^{-1}$$

où p_n est la projection sur X_n.

(3) $\Rightarrow$ (2) : On définit X_n comme l'ensemble des boules de Y de rayon $1/(n+1)$. Cet ensemble est fini par compacité, les boules étant deux à deux disjointes. L'application $f_n\colon X_{n+1} \to X_n$ est caractérisée par $b \subset f_n(b)$ si $b \in X_{n+1}$. On définit alors $Y \to X_n$ en associant à $y \in Y$ l'unique boule de X_n qui contient y. Ceci fournit une application

$$Y \to \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} X_n.$$

Elle est injective (si $y \neq y'$, choisir n tel que $d(y,y') > 1/(n+1)$) et surjective (car une intersection décroissante de boules non vides est non vide par compacité, les boules étant fermées). Enfin, c'est un homéomorphisme car elle met en bijection une boule $b \in X_n$ et $p_n^{-1}(b)$.

(3) $\Rightarrow$ (4) : Évident.

(4) $\Rightarrow$ (3) : Si d est la distance sur Y, on pose

$$d'(x,y) = \inf\big\{\delta \geq 0 \mid \text{il existe } x = a_0, a_1, \dots, a_n = y \text{ avec } d(a_i, a_{i+1}) \leq \delta\big\}.$$

On a clairement $d'(x,y) = d'(y,x)$ et $d'(x,y) \leq \max(d'(x,z), d'(z,y))$. Si $x \neq y$, on choisit une partie ouverte et fermée A telle que $x \in A$, $y \notin A$. Comme A et $Y \setminus A$ sont compacts, le réel $\delta = d(A, Y \setminus A)$ est non nul. Dans la définition de $d'(x,y)$, il existe i avec $a_i \in A$ et $a_{i+1} \notin A$ donc $d'(x,y) \geq \delta > 0$. □

Ce résultat montre que les ensembles $V_p(K)$ peuvent être très variés : $V_p(K)$ peut être un singleton, un ensemble fini de n'importe quel cardinal, un ensemble infini dénombrable (par exemple avec la topologie de la partie compacte $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \geq 1\}$ de $\mathbb{R}$) ou un ensemble équipotent à $\mathbb{R}$ (par exemple homéomorphe à $\mathbb{Z}_2$).

En particulier on a toujours $|V_p(\overline{\mathbb{Q}})| = |\mathbb{R}|$ puisqu'il existe K avec cette propriété et une surjection $V_p(\overline{\mathbb{Q}}) \to V_p(K)$.

Notons aussi que, dès que $[K : \mathbb{Q}] = \infty$, on a $|V_\infty(K)| = |\mathbb{R}|$. En effet, on peut choisir une suite de corps L_n avec $L_n \subset L_{n+1}$ et $K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$ de sorte que $[L_{n+1} : L_n] \geq 3$. Ceci entraîne que les fibres de $V_\infty(L_{n+1}) \to V_\infty(L_n)$ ont toutes au moins deux éléments. Par suite, on peut choisir $X_n \subset V_\infty(L_n)$ avec $|X_n| = 2^n$, $\mathrm{res}(X_{n+1}) \subset X_n$ et de sorte que toutes les fibres de l'application induite soient de cardinal 2. Alors $V_\infty(K)$ contient l'ensemble

$$\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} X_n$$

qui est homéomorphe à $\mathbb{Z}_2$ et donc équipotent à $\mathbb{R}$.

Remarquons que la proposition dit plus encore que ces considérations de cardinal et de topologie. Par exemple, on pourrait, dans le théorème, munir X d'une mesure à valeurs rationnelles (non nulle sur les points) avec $\mu(f^{-1}(v)) = \mu(\{v\})$ pour tout $v \in V_p(L)$ et demander que g préserve la mesure (si l'on procède comme ci-dessus, il suffit de choisir n tel que les $f_{ij} = n\mu(\{w_{ij}\})$ soient entiers et de poser encore $e_{ij} = 1$). Elle permet aussi de construire des complétés très variés.

2.6. Degré local, degré résiduel, indice de ramification. Soient K une extension algébrique de $\mathbb{Q}$ et p un nombre premier. Pour chaque place $v \in V_p(K)$, on note G_v son groupe de valuation c'est-à-dire l'image de la valuation, associée à v :

$$K^\times \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto -\log_p |x|_v.$$

Puisque, par notre choix de normalisation, p est de valuation 1, nous obtenons un sous-groupe de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{Z}$. De plus, le fait que K soit algébrique sur $\mathbb{Q}$ nous montre $G_v \subset \mathbb{Q}$ (rappel : on utilise que, si $\sum a_i x^i = 0$, alors deux monômes distincts non nuls ont la même valeur absolue donc $|x|_v$ est de la forme $|a_i a_j^{-1}|_p^{1/(j-i)}$ pour $i \neq j$ et $a_i a_j \neq 0$).

Si K' est un sous-corps de K et $v' = v_{|K'}$ on appelle indice de ramification de v audessus de v' l'élément de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ donné par

$$e(v|v') = \mathrm{Card}(G_v / G_{v'}).$$

Dans la même situation, on appelle degré résiduel de v/v' l'élément de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ donné par

$$f(v|v') = [k_v : k_{v'}]$$

où k_v et $k_{v'}$ sont les corps résiduels de v et v' (c'est-à-dire k_v est le quotient de l'anneau $\{x \in K \mid |x|_v \leq 1\}$ par l'idéal maximal $\{x \in K \mid |x|_v < 1\}$).

Dans le cas particulier où $K' = \mathbb{Q}$, on note souvent $e_v = e(v|p)$ et $f_v = f(v|p)$.

On notera que l'on peut aussi définir les indices e et f en utilisant les complétés K_v et $K'_{v'}$ car l'opération de complétion ne modifie ni le groupe de valuation ni le corps résiduel (il s'agit d'une extension immédiate ; on pourrait donc même passer à la clôture sphérique, voir [20, p. 4 et 11]). On prendra garde toutefois que la plupart des formules usuelles pour les corps de nombres utilisant des complétés posent problème dans le cas général. Par exemple, si l'extension $K_v/\mathbb{Q}_p$ est finie, on a

$$[K_v : \mathbb{Q}_p] = e_v f_v$$

mais cette formule n'a pas d'équivalent si $[K_v : \mathbb{Q}_p]$ est infini (par exemple même si $e_v = 1$, on a $[K_v : \mathbb{Q}_p] \neq [k_v : \mathbb{F}_p]$ car le second membre est dénombrable alors que K_v comme $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel normé complet ne peut être de dimension dénombrable par le théorème de Baire). En fait, pour un certain nombre de considérations, il faudrait introduire le corps K_v^0 défini comme le compositum de K et de $\mathbb{Q}_p$ dans K_v. Puisque $K \subset K_v^0 \subset K_v$, c'est une extension immédiate de K mais elle a l'avantage d'être de dimension dénombrable sur $\mathbb{Q}_p$. En revanche, elle n'est bien sûr pas complète en général. Alternativement, on a

$$K_v^0 = \bigcup_{L \in \mathcal{E}} L_{v_{|L}}.$$

De la même manière, nous n'avons pas d'analogue à l'isomorphisme

$$K \otimes \mathbb{Q}_p \simeq \prod_{v \in V_p(K)} K_v$$

valable lorsque K est un corps de nombres. Même en remplaçant K_v par K_v^0 cette formule est fausse en général (par exemple si $V_p(K)$ n'est pas dénombrable). Ceci vaut y compris lorsque $p = \infty$. On peut construire naturellement des injections

$$K \otimes \mathbb{Q}_p \hookrightarrow \prod_{v \in V_p(K)} K_v^0 \hookrightarrow \prod_{v \in V_p(K)} K_v$$

mais ce ne sont pas des isomorphismes en général.

On rappelle qu'une fonction φ d'un espace topologique X dans un ensemble totalement ordonné Y est dite semi-continue inférieurement si, pour tout élément $y \in Y$, l'ensemble $\{x \in X \mid \varphi(x) \leq y\}$ est fermé. On obtient bien entendu la définition de semi-continue supérieurement en remplaçant $\leq$ par $\geq$. Lorsque $Y = \mathbb{R}$ chacune des deux notions implique que φ est borélienne et donc (si X est muni d'une mesure borélienne) mesurable.

Proposition 2.12. *Si K est une extension algébrique de $\mathbb{Q}$ et $p \in V(\mathbb{Q})$, alors l'application de degré local*

$$d\colon V_p(K) \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \quad v \mapsto [K_v : \mathbb{Q}_p]$$

est semi-continue inférieurement. Si $p \neq \infty$, il en va de même des applications e et f.

Démonstration. Nous allons montrer l'équivalence, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$d(v) \leq n \iff d(v_{|L}) \leq n \text{ pour tout } L \in \mathcal{E}.$$

Elle entraîne le résultat puisqu'elle permet d'écrire $\{v \in V_p(K) \mid d(v) \leq n\}$ comme une intersection de fermés : $\{v \in V_p(K) \mid d(v_{|L}) \leq n\}$ est fermé car il s'écrit $\mathrm{res}^{-1}(X)$ pour un certain ensemble $X \subset V_p(L)$. Maintenant le sens direct $\Rightarrow$ est clair par inclusion. Réciproquement, on peut choisir $L \in \mathcal{E}$ tel que $d(v_{|L})$ est maximal. De cette façon, pour $L' \in \mathcal{E}$, en considérant le compositum LL', on voit $d(v_{|LL'}) = d(v_{|L})$ et donc $L'_{v_{|L'}} \subset L_{v_{|L}}$. Par suite, on a $K_v^0 = L_{v_{|L}}$; comme ceci est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie il est complet et donc $K_v = K_v^0$ puis $d(v) = d(v_{|L}) \leq n$. Lorsque $p \neq \infty$, la même démonstration vaut pour e et f en remplaçant complété par groupe de valuation ou corps résiduel. $\square$

Lorsque $p = \infty$, nous écrivons de manière plus parlante $V_\infty(K) = V_{\mathbb{R}}(K) \cup V_{\mathbb{C}}(K)$ où $V_{\mathbb{R}}(K) = d^{-1}(1)$ et $V_{\mathbb{C}}(K) = d^{-1}(2)$. En particulier $V_{\mathbb{R}}(K)$ est fermé.

Ici encore nous pouvons mentionner que cet ensemble peut être très varié. Par exemple, si $K = \mathbb{R} \cap \overline{\mathbb{Q}}$, alors $V_{\mathbb{R}}(K)$ est un singleton. En effet, rappelons que la seule injection de K dans $\mathbb{R}$ est l'inclusion : si $f\colon K \to \mathbb{R}$ est un morphisme de corps et $a, b \in K$, on a

$$\begin{aligned} b \geq a &\iff \text{il existe } c \in K \text{ avec } b - a = c^2 \\ &\implies \text{il existe } c \in K \text{ avec } f(b) - f(a) = f(c)^2 \\ &\implies f(b) \geq f(a)\,; \end{aligned}$$

ainsi f est croissante et, comme $f_{|\mathbb{Q}}$ est l'inclusion $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, on conclut immédiatement que f est l'inclusion $K \hookrightarrow \mathbb{R}$.

Tout à l'opposé, si K est le corps des éléments totalement réels, on a $V_{\mathbb{R}}(K) = V_\infty(K)$ (non dénombrable). En fait on peut montrer (à l'aide de la proposition d'extension) que, pour tout $\rho \in [0, 1]$, il existe K avec $\mu(V_{\mathbb{R}}(K)) = \rho$.

2.7. Purification. Lorsque $a \in \mathbb{R}$ et $v \in V_p(K)$, on pose

$$\mathrm{pur}(a, v) = \inf\bigl\{|x|_v \mid x \in K \text{ et } a \leq |x|_v\bigr\}.$$

On note aussi parfois $\mathrm{pur}_v(a) = \mathrm{pur}(a, v)$.

Lemme 2.13. *L'application* pur: $\mathbb{R} \times V_p(K) \to \mathbb{R}$ *est borélienne. Pour tout* $a \in \mathbb{R}$, *l'application* $\mathrm{pur}(a,\cdot)\colon V_p(K) \to \mathbb{R}$ *est semi-continue supérieurement.*

Démonstration. Soit $b \in \mathbb{R}$. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $v \in V_p(K)$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{pur}(a,v) \geq b &\iff (|x|_v \geq a \Rightarrow |x|_v \geq b) \text{ pour tout } x \in K \\ &\iff (|x|_v \geq a \Rightarrow |x|_v \geq b) \text{ pour tous } L \in \mathcal{E},\ x \in L \\ &\iff \mathrm{pur}(a, v_{|L}) \geq b \text{ pour tout } L \in \mathcal{E}. \end{aligned}$$

Ceci montre que $\{v \in V_p(K) \mid \mathrm{pur}(a,v) \geq b\}$ est fermé par continuité de la restriction $V_p(K) \to V_p(L)$ et donc que $\mathrm{pur}(a,\cdot)$ est semi-continue supérieurement. Par ailleurs, nous pouvons aussi écrire :

$$\begin{aligned} &\mathrm{pur}(a,v) \geq b \\ &\quad \iff (v_{|L} \neq w \text{ ou } |x|_w < a \text{ ou } |x|_w \geq b) \text{ pour tous } L \in \mathcal{E},\ x \in L,\ w \in V_p(L). \end{aligned}$$

Ceci montre que $\{(a,v) \in \mathbb{R} \times V_p(K) \mid \mathrm{pur}(a,v) \geq b\}$ est borélien comme intersection des ouverts $(]|x|_w, +\infty[\times V_p(K)) \cup (\mathbb{R} \times (V_p(K) \setminus V_w(K)))$ pour tous les triplets (L,x,w) tels que $|x|_w < b$. □

Bien entendu, si $a < 0$, alors $\mathrm{pur}(a,v) = 0$; si $a \geq 0$ et si $p = \infty$ ou si $p \neq \infty$ et $e_v = \infty$, alors $\mathrm{pur}(a,v) = a$; dans les autres cas on peut écrire

$$\mathrm{pur}(a,v) = p^{e_v^{-1} \lceil e_v \log_p a \rceil}.$$

2.8. Adèles. On rappelle en premier lieu que $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$, l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$, est la sous-$\mathbb{Q}$-algèbre de $\prod_{p \in V(\mathbb{Q})} \mathbb{Q}_p$ formée des éléments $(x_p)_{p \in V(\mathbb{Q})}$ pour lesquels l'ensemble $\{p \in V(\mathbb{Q}) \mid |x_p|_p > 1\}$ est fini.

Définition 2.14. Si K est une extension algébrique de $\mathbb{Q}$, on pose $\mathbb{A}_K = \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} K$.

Lemme 2.15. *Si* $K \subset K'$ *sont deux telles extensions, nous avons des injections naturelles compatibles :*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}_K \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}_{K'} \arrow[d] \\ \prod_{v \in V(K)} K_v \arrow[r] & \prod_{v' \in V(K')} K'_{v'}. \end{tikzcd}$$

Démonstration. La flèche du haut découle de la définition comme produit tensoriel. Celle du bas s'obtient comme produit des injections $K_v \hookrightarrow K'_{v'}$ chaque fois que $v = v'_{|K}$. Pour définir les flèches verticales (disons celle de gauche), on compose

$$\mathbb{A}_K = \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} K \to \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}} K \to K_v$$

(où $v \in V_p(K)$) en utilisant la projection naturelle $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}_p$ et le fait que K_v est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel puis on fait le produit. Avec ces définitions, le diagramme commute et il reste à voir que les flèches verticales sont bien injectives. Faisons-le pour K'. Si $x \in \mathbb{A}_{K'}$ est d'image nulle, nous écrivons $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes a_i$ où $x_i \in \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ et $a_i \in K'$. Considérons alors notre diagramme pour $K = \mathbb{Q}(a_1, \dots, a_n)$, un corps de nombres. De cette façon, x provient d'un élément x' de $\mathbb{A}_K$. Par le diagramme, nous voyons que x' est d'image nulle dans $\prod_{v \in V(K)} K_v$; mais nous savons, dans le cas d'un corps de nombres (comme conséquence de la formule $K \otimes \mathbb{Q}_p \simeq \prod_{v \in V_p(K)} K_v$), que $\mathbb{A}_K$ s'identifie aux éléments de $\prod_{v \in V(K)} K_v$ de valeur absolue presque partout ≤ 1 (comme dans le cas de $\mathbb{Q}$). Ainsi notre flèche de droite est injective, donc $x' = 0$ puis $x = 0$. □

Nous considérons en général les injections du lemme comme des inclusions. En particulier, on le voit dans la démonstration ci-dessus,

$$\mathbb{A}_K = \bigcup_{L \in \mathcal{E}} \mathbb{A}_L.$$

On prendra garde au fait que la description des adèles comme produit restreint pour $\mathbb{Q}$ ou un corps de nombres ne s'étend pas au cas général. En effet, d'une part les projections $\mathbb{A}_K \to K_v$ ($v \in V(K)$) ne sont pas toujours surjectives puisque leurs images sont les corps K_v^0 décrits plus haut ; d'autre part l'ensemble $\{v \in V(K) \mid |a_v|_v > 1\}$ pour $(a_v)_v \in \mathbb{A}_K$ est en général infini. Le mieux que l'on puisse dire est que $\mathbb{A}_K$ s'injecte dans l'ensemble des $(a_v)_v \in \prod_{v \in V(K)} K_v^0$ tels que $\{v \in V(K) \mid |a_v|_v > 1\}$ est compact mais même comme cela il n'y a pas égalité en général.

On appelle idèles de K les éléments inversibles de $\mathbb{A}_K$. On note leur groupe $\mathbb{A}_K^\times$ et on remarque que, si $(a_v)_v \in \mathbb{A}_K^\times$, alors $\{v \in V(K) \mid |a_v|_v \neq 1\}$ est un compact. Souvent, un idèle n'interviendra que par les valeurs absolues de ses composantes. Ceci justifie d'introduire les notions suivantes.

Définition 2.16. On note $|\mathbb{A}_K|$ l'image de $\mathbb{A}_K$ dans $\mathbb{R}^{V(K)}$ par le produit des valeurs absolues

$$|\mathbb{A}_K| = \left\{(|a_v|_v)_{v \in V(K)} \mid (a_v)_{v \in V(K)} \in \mathbb{A}_K\right\}.$$

On note $|\mathbb{A}_K^\times|$ l'image de $\mathbb{A}_K^\times$ dans $|\mathbb{A}_K|$. On introduit ensuite $\lceil \mathbb{A}_K^\times \rceil$ comme l'ensemble des fonctions intégrables $f \colon V(K) \to \mathbb{R}_{>0}$ telles que $\{v \in V(K) \mid f(v) \neq 1\}$ est contenu dans un compact et f est bornée : il existe $a, b > 0$ tels que $f(V(K)) \subset [a, b]$. On définit le module d'un élément $f \in \lceil \mathbb{A}_K^\times \rceil$ par

$$|f| = \exp\left(\int_{V(K)} \log(f(v))\, \mathrm{d}\mu(v) \right) \in \mathbb{R}_{>0}.$$

On a les inclusions

$$\begin{array}{ccc} |\mathbb{A}_K^\times| & \subset & |\mathbb{A}_K| \\ \cap & & \cap \\ \lceil \mathbb{A}_K^\times \rceil & \subset & \mathbb{R}^{V(K)}. \end{array}$$

Le module d'un élément de $\mathbb{A}_K^\times$ ou de $|\mathbb{A}_K^\times|$ est alors celui de son image dans $\lceil \mathbb{A}_K^\times \rceil$. Enfin, on note respectivement $\lceil \mathbb{A}_K^1 \rceil$, $|\mathbb{A}_K^1|$ et $\mathbb{A}_K^1$ l'ensemble des éléments de module 1 de $\lceil \mathbb{A}_K^\times \rceil$, $|\mathbb{A}_K^\times|$ et $\mathbb{A}_K^\times$.

L'inclusion $|\mathbb{A}_K^\times| \subset \lceil \mathbb{A}_K^\times \rceil$ s'obtient en remarquant qu'une fonction localement constante est intégrable et bornée. Par ailleurs, la formule du produit s'écrit $K^\times \subset \mathbb{A}_K^1$.

Dans la partie suivante, nous nous référerons à une norme standard $|\cdot|_v$ sur les puissances de K_v : si $v \in V(K)$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in K_v^n$, on pose

$$|y|_v = \begin{cases} \big(|y_1|_v^2 + \cdots + |y_n|_v^2\big)^{1/2} & \text{si } v \in V_\infty(K), \\ \max\big(|y_1|_v, \dots, |y_n|_v\big) & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Espaces adéliques rigides

3.1. Hauteurs. Soient K une extension algébrique de $\mathbb{Q}$ et E un espace vectoriel de dimension finie sur K. Une structure adélique sur E est la donnée de normes $\|\cdot\|_v$ sur chaque $E_v = E \otimes K_v$ pour $v \in V(K)$. On note souvent simplement E le couple $(E, (\|\cdot\|_v)_v)$ et l'on parle d'espace adélique. Lorsqu'il y a ambiguïté, on note $\|\cdot\|_{E,v}$ au lieu de $\|\cdot\|_v$.

Définition 3.1. Un espace adélique E de dimension n est dit rigide s'il existe un isomorphisme $\varphi\colon E \to K^n$ et une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K)$ tels que, pour tout $v \in V(K)$ et tout $x \in E_v$, on ait

$$\|x\|_v = |A_v \varphi_v(x)|_v.$$

Dans cette dernière écriture, $\varphi_v = \varphi \otimes \mathrm{id}_{K_v}$ désigne l'extension naturelle $E_v \to K_v^n$ de φ et $|\cdot|_v$ la norme standard définie à la fin de la partie précédente. Pour $x \in E$ non nul, la collection des nombres réels $(\|x\|_v)_v$ que nous notons $\|x\|$ est un élément de $\lceil \mathbb{A}_K^\times \rceil$: elle est localement constante car on peut trouver un corps de nombres $K_0 \subset K$ avec $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{K_0})$ et $\varphi(x) \in K_0^n$; en dehors d'un compact bien choisi, on a $|\varphi(x)|_v = 1$ et A_v est une isométrie (pour $v \notin V_\infty(K)$, ceci signifie que tous les coefficients de A_v et A_v^{-1} sont de valeur absolue au plus 1) donc $\|x\|_v = 1$.

Lemme 3.2. *Soient E un espace adélique rigide, (φ, A) et (ψ, B) deux couples satisfaisant la définition et P la matrice de $\varphi \circ \psi^{-1}$. Alors la matrice adélique APB^{-1} est une isométrie et en particulier $|\det A| = |\det B|$.*

Démonstration. Si $x \in E_v$ et si l'on écrit $Y = \psi_v(x) \in K_v^n$, alors on a

$$|B_v Y|_v = \|x\|_v = |A_v \varphi_v(x)|_v = |A_v P Y|_v.$$

Pour tout $Y \in K_v^n$, les vecteurs $B_v Y$ et $(AP)_v Y$ ont ainsi la même norme. Ceci signifie bien que $(APB^{-1})_v$ est une isométrie pour tout v. Maintenant une isométrie a pour déterminant un élément de K_v de valeur absolue égale à 1 ce qui donne $|\det A||\det P||\det B|^{-1} = 1$. Comme $P \in \mathrm{GL}_n(K)$, on a $\det P \in K^\times \subset \mathbb{A}_K^1$ donc $|\det P| = 1$. □

Définition 3.3. On appelle hauteur d'un espace adélique rigide E le nombre réel $H(E) = |\det A|$ où A est comme dans la définition 3.1.

Dans le cas où dim $E = 0$, nous avons $H(E) = 1$ puisque le déterminant d'une matrice de taille nulle vaut 1.

Ce formalisme est essentiellement celui des hauteurs tordues de Roy–Thunder [22], sans fixer de base privilégiée. Lorsque K est un corps de nombres, la donnée d'un espace adélique rigide coïncide avec ce que l'on appelle en termes arakéloviens un fibré vectoriel hermitien sur le spectre de l'anneau des entiers de K.

Définition 3.4. Soit E un espace adélique rigide. Pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, on appelle hauteur de x et on note $H_E(x)$ le module de l'élément $\|x\| \in \lceil \mathbb{A}_K^\times \rceil$. On écrit aussi conventionnellement $H_E(0) = 0$.

Bien entendu, on a $H_E(ax) = H_E(x)$ pour $a \in K \setminus \{0\}$ et $x \in E$ toujours d'après $K^\times \subset \mathbb{A}_K^1$.

3.2. Extension des scalaires et bases orthonormées. De manière un peu différente, nous pouvons voir un espace adélique rigide comme l'extension d'un espace adélique sur un corps de nombres dont les normes vérifient certaines conditions en termes de bases orthonormées.

Pour cela, commençons par introduire la notion d'extension des scalaires pour les espaces rigides. Soient $K \subset L$ deux extensions algébriques de $\mathbb{Q}$. Si E est un espace adélique rigide sur K, nous définissons un espace adélique rigide $E \otimes L$ sur L : il suffit pour cela de considérer un couple (φ, A) avec $\varphi\colon E \to K^n$ et $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K)$ comme dans la définition 3.1 et de munir $E \otimes_K L$ de la structure adélique donnée par le couple $(\varphi \otimes \mathrm{id}_L, A)$ où $\varphi \otimes \mathrm{id}_L\colon E \otimes L \to L^n$ et A est vue dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ *via* l'inclusion $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$. Cette définition ne dépend pas du couple (φ, A) choisi par le lemme 3.2 et le fait que si $U \in \mathrm{GL}_n(K_v)$ est une isométrie de K_v^n pour $v \in V(K)$ alors son image dans $\mathrm{GL}_n(L_w)$ est une isométrie de L_w^n pour tout $w \in V_v(L)$.

Maintenant tout espace adélique rigide E sur K est l'extension des scalaires d'un espace adélique rigide sur un corps de nombres K_0 (dépendant de E) : si (φ, A) définit la structure adélique de E, il existe un tel K_0 tel que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{K_0})$ et l'on pose $E_0 = \varphi^{-1}(K_0^n)$ avec la structure donnée par $(\varphi_{|E_0}, A)$; alors E s'identifie à l'extension $E_0 \otimes K$. Nous dirons à l'occasion que E est défini sur K_0.

Une base $e_1, \dots, e_n$ de E_v est dite orthonormée si

$$\|x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n\|_v = |(x_1, \dots, x_n)|_v$$

pour tous $x_1, \dots, x_n \in K_v$. Il est clair sur la définition 3.1 que dans une structure adélique rigide tous les E_v admettent une base orthonormée, mais cette condition ne suffit pas à assurer la rigidité. Lorsque K est un corps de nombres, une condition nécessaire et suffisante est la suivante : $(E, \|\cdot\|_v)$ est rigide si et seulement si

(1) tout E_v admet une base orthonormée,

(2) il existe une base de E qui est une base orthonormée de E_v pour tout $v \in V(K)$ en dehors d'un compact.

Pour K quelconque, ces conditions ne sont pas encore suffisantes : l'existence d'une matrice adélique donne des contraintes supplémentaires de rigidité sur les normes au-dessus du compact restant.

Mentionnons encore que lorsque $v \in V_\infty(K)$ l'existence d'une base orthonormée de E_v équivaut au caractère hermitien de la norme ; pour $v \notin V_\infty(K)$, elle implique la pureté de la norme (c'est-à-dire $\|E_v\|_v = |K_v|_v$) mais il n'y a équivalence que si K_v est sphériquement complet (c'est le cas si K est un corps de nombres puisqu'alors K_v est localement compact).

Cette présentation des espaces adéliques rigides permet de démontrer facilement le lemme utile suivant.

Lemme 3.5. *Soient K une extension algébrique de $\mathbb{Q}$, E un espace adélique rigide sur K de dimension n et $\varphi\colon E \to K^n$ un isomorphisme. Alors il existe une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K)$ triangulaire supérieure telle que (φ, A) définit la structure adélique de E.*

Démonstration. Par ce qui précède, nous pouvons supposer que K est un corps de nombres. En dehors d'un compact de $V(K)$, nous pouvons poser $A_v = \mathrm{Id}$. Pour les autres places, il s'agit, en termes de normes, de trouver une base orthonormée respectant un drapeau complet de sous-espaces de E_v. L'argument est totalement classique pour une norme hermitienne tandis que l'on utilise [31, Proposition 3, p. 26] pour le cas ultramétrique. □

Citons encore une dernière propriété : si E est un espace adélique rigide sur K et $v \in V(K) \setminus V_\infty(K)$, alors E_v admet une base orthonormée formée d'éléments de E. En effet, si $f_1, \ldots, f_n$ est une base orthonormée de E_v et $e_1, \ldots, e_n$ des éléments de E avec $\|e_i - f_i\|_v \leq \frac{1}{2}$, alors ces éléments forment une base orthonormée comme on le voit en écrivant

$$\max_{1\leq i\leq n} |x_i|_v = \|x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n\|_v \leq \max\Big(\|x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n\|_v, \frac{1}{2}\max_{1\leq i\leq n}|x_i|_v\Big)$$

pour $x_1, \ldots, x_n \in K_v$.

3.3. Opérations. Soient E un espace adélique sur K et F un sous-espace vectoriel de E. Les espaces F, E/F et le dual $E^\vee$ de E héritent naturellement d'une structure adélique : on munit respectivement $F_v = F \otimes K_v$, $(E/F)_v = E_v/F_v$ et $E_v^\vee = (E_v)^\vee$ des normes induite, quotient et duale. Concrètement, on pose pour $x \in F_v$, $y \in E_v/F_v$ et $\ell \in (E_v)^\vee$:

$$\|x\|_{F,v} = \|x\|_{E,v}, \quad \|y\|_{E/F,v} = \inf\big\{\|z\|_{E,v} \mid \pi(z) = y,\ z \in E_v\big\}$$

et

$$\|\ell\|_{E^\vee,v} = \sup\big\{|\ell(z)|_v \|z\|_{E,v}^{-1} \mid z \in E_v \setminus \{0\}\big\}$$

où l'on note $\pi\colon E_v \to E_v/F_v$ le quotient.

Proposition 3.6. *Si E est un espace adélique rigide, alors il en va de même des espaces F, E/F et $E^\vee$. Leurs hauteurs sont liées par $H(E) = H(F)H(E/F)$ et $H(E^\vee) = H(E)^{-1}$. En outre, les isomorphismes canoniques $E^{\vee\vee} \simeq E$ et $E/F \simeq (F^\perp)^\vee$ sont isométriques.*

Démonstration. Choisissons un isomorphisme $\varphi\colon E \to K^n$ tel que $\varphi(F)$ soit engendré par les $m = \dim F$ premiers vecteurs de la base canonique. Ainsi φ induit des isomorphismes $\psi\colon F \to K^m$ et $\chi\colon E/F \to K^{n-m}$ (par projection sur les dernières coordonnées).

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K)$ une matrice adélique définissant avec φ les normes de E et choisie triangulaire supérieure (lemme 3.5). Elle s'écrit par blocs

$$A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

où $B \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_K)$, $C \in \mathrm{GL}_{n-m}(\mathbb{A}_K)$ et $D \in \mathrm{Mat}_{m,n-m}(\mathbb{A}_K)$. Nous avons pour $x \in F_v$

$$\|x\|_{F,v} = \|x\|_{E,v} = |A_v\varphi_v(x)|_v = \left|\begin{pmatrix} B_v & D_v \\ 0 & C_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_v(x) \\ 0 \end{pmatrix}\right|_v = |B_v\psi_v(x)|_v.$$

Ceci assure que F est rigide, de hauteur $H(F) = |\det B|$. D'autre part, si $y \in E_v$, on a

$$\|\pi(y)\|_{E/F,v} = \inf_{x\in F_v} \|y+x\|_{E,v} = \inf_{x\in F_v}\left|\begin{pmatrix} B_v & D_v \\ 0 & C_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_v(x) \\ \chi_v(\pi(y)) \end{pmatrix}\right|_v = |C_v\chi_v(\pi(y))|_v$$

où la dernière égalité résulte de la minoration

$$\left|\begin{pmatrix} B_v & D_v \\ 0 & C_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right|_v = |(B_vX + D_vY, C_vY)|_v \geq |C_vY|_v$$

pour $X \in K_v^m$ et $Y \in K_v^{n-m}$ avec égalité si $X = -B_v^{-1}D_vY$. Ainsi le couple (χ, C) établit la rigidité de E/F avec $H(E/F) = |\det C|$. De plus

$$H(E) = |\det A| = |\det B||\det C| = H(F)H(E/F).$$

Pour le dual, notons d'abord que notre choix de normes standards sur K_v^n est auto-dual :

$$|L|_v = \sup\{|{}^tLX|_v|X|_v^{-1} \mid X \in K_v^n \setminus \{0\}\}$$

pour tout $L \in K_v^n$ (L et X sont vus comme vecteurs colonnes). En effet, l'inégalité

$$|{}^tLX|_v \leq |L|_v|X|_v$$

résulte soit de l'inégalité ultramétrique soit de Cauchy–Schwarz et il y a égalité dans le premier cas pour X un vecteur de la base canonique et dans le second pour $X = \overline{L}$. Montrons à présent que la structure adélique de $E^\vee$ est décrite par l'isomorphisme ${}^t\varphi^{-1}\colon E^\vee \to K^n$ et la matrice ${}^tA^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K)$. Pour $\ell \in E^\vee$, écrivons $L = {}^t\varphi^{-1}(\ell)$. Alors si $v \in V(K)$, on a

$$\begin{aligned} |{}^tA_v^{-1}L|_v &= \sup\{|{}^tLA_v^{-1}X|_v|X|_v^{-1} \mid X \in K_v^n \setminus \{0\}\} \\ &= \sup\{|{}^tLX|_v|A_vX|_v^{-1} \mid X \in K_v^n \setminus \{0\}\} \\ &= \sup\{|\ell(x)|_v\|x\|_{E,v}^{-1} \mid x \in E_v \setminus \{0\}\} \\ &= \|\ell\|_{E^\vee,v}. \end{aligned}$$

Ceci montre que $E^\vee$ est rigide et $H(E^\vee) = |\det{}^tA^{-1}| = |\det A|^{-1} = H(E)^{-1}$. Nous constatons aussi que E s'identifie isométriquement à son bidual. Ensuite, pour $\ell \in F_v^\perp$ (c'est-à-dire

$\ell \in E_v^\vee$ et $\ell_{|F_v} = 0$), nous avons une factorisation $\ell = \lambda \circ \pi$ avec $\lambda \in (E_v/F_v)^\vee$ et

$$\begin{aligned}\|\lambda\|_{(E/F)^\vee,v} &= \sup_{y \in E_v/F_v \setminus \{0\}} |\lambda(y)|_v \|y\|_{E/F,v}^{-1} \\ &= \sup_{y \in E_v/F_v \setminus \{0\}} \sup_{z \in \pi^{-1}(y)} |\lambda(y)|_v \|z\|_{E,v}^{-1} \\ &= \sup_{z \in E_v \setminus \{0\}} |\ell(z)|_v \|z\|_{E,v}^{-1} = \|\ell\|_{E^\vee,v} = \|\ell\|_{F^\perp,v}.\end{aligned}$$

Ceci établit (indépendamment de l'hypothèse de rigidité) que l'isomorphisme canonique $F^\perp \simeq (E/F)^\vee$ est isométrique. Par bidualité il en va de même de $E/F \simeq (F^\perp)^\vee$. □

La hauteur d'un élément non nul x d'un espace adélique rigide E coïncide avec la hauteur du sous-espace qu'il engendre : $H_E(x) = H(Kx)$. D'autre part la formule

$$H(E) = H(F)H(E/F)$$

de la proposition se généralise immédiatement au cas d'un drapeau quelconque : si

$$\{0\} = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_m = E$$

est une suite strictement croissante de sous-espaces vectoriels d'un espace adélique rigide E, alors

$$H(E) = \prod_{i=1}^{m} H(E_i/E_{i-1}).$$

Ces deux faits nous conduisent à la version suivante du théorème d'Hadamard [22, Lemma 4.7].

Lemme 3.7. *Soit E un espace adélique rigide. Pour toute base $x_1, \dots, x_n$ de E, on a $H(E) \le H_E(x_1) \cdots H_E(x_n)$.*

Démonstration. Pour $1 \le i \le n$, notons $E_i = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_i)$ et $\pi_i \colon E_i \to E_i/E_{i-1}$ la projection. Par définition de la structure quotient, π_i fait décroître les normes donc

$$H(E) = \prod_{i=1}^{n} H(E_i/E_{i-1}) = \prod_{i=1}^{n} H_{E_i/E_{i-1}}(\pi_i(x_i)) \le \prod_{i=1}^{n} H_{E_i}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} H_E(x_i). \quad \square$$

Lorsque E et F sont deux espaces adéliques rigides sur K, nous définissons leur somme directe et leur produit tensoriel de la manière suivante. Soient (φ, A) et (ψ, B) deux couples donnant la structure adélique sur E et F. On munit $E \oplus F$ et $E \otimes F$ des structures données par les couples $(\varphi \oplus \psi, A \oplus B)$ et $(\varphi \otimes \psi, A \otimes B)$. Concrètement, en écrivant $n = \dim E$ et $m = \dim F$, les isomorphismes $\varphi \colon E \to K^n$ et $\psi \colon F \to K^m$ donnent bien des isomorphismes $\varphi \oplus \psi \colon E \oplus F \to K^{n+m}$ et $\varphi \otimes \psi \colon E \otimes F \to K^{nm}$; de plus, les matrices $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K)$ et $B \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_K)$ fournissent

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{n+m}(\mathbb{A}_K) \quad \text{et} \quad A \otimes B \in \mathrm{GL}_{nm}(\mathbb{A}_K)$$

par le produit de Kronecker (sur les coefficients $(A \otimes B)_{\sigma(i,i'),\sigma(j,j')} = A_{i,j} B_{i',j'}$ pour une bijection $\sigma\colon \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,m\} \to \{1,\dots,nm\}$). On vérifie sans peine que les normes obtenues ne dépendent pas des choix effectués.

Nous déduisons immédiatement de ces définitions que $H(E \oplus F) = H(E)H(F)$ et $H(E \otimes F) = H(E)^{\dim F} H(F)^{\dim E}$.

4. Minima

4.1. Définitions. Pour définir des minima successifs de E, nous avons besoin de contrôler la hauteur d'une famille S de vecteurs de E. Plusieurs choix se présentent à nous. Le plus simple est de prendre [1)]

$$H_E^{\Lambda}(S) = \sup_{x \in S} H_E(x).$$

Ceci revient à considérer le supremum des modules des familles $(\|x\|_v)_v$ pour $x \in S$. Nous obtenons une première variante en intervertissant module et supremum :

$$H_E^{\lambda}(S) = \big|(\sup_{x \in S} \|x\|_v)_v\big|.$$

Ici nous n'avons pas de raison d'avoir $(\sup_{x\in S} \|x\|_v)_v \in \lceil \mathbb{A}_K^{\times} \rceil$ en général ; si ce n'est pas le cas, nous prenons $H_E^{\lambda}(S) = \infty$ par convention. La troisième formule que nous utiliserons dépend d'un sous-corps L de K

$$H_E^{L}(S) = \big|\big(\mathrm{pur}_w (\sup_{x \in S} \sup_{v \in V_w(K)} \|x\|_v)\big)_{w \in V(L)}\big|$$

avec la même convention si nous n'obtenons pas un élément de $\lceil \mathbb{A}_L^{\times} \rceil$. Ensuite, toujours si $S \subset E$, nous notons $\mathrm{Vect}(S)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par S et $\mathrm{Zar}(S)$ l'adhérence de $KS = \{ax \mid a \in K,\ x \in S\}$ pour la topologie de Zariski sur E. Pour $* = \Lambda, \lambda, L$ et $1 \le i \le \dim E$, posons

$$\lambda_i^*(E) = \inf\big\{H_E^*(S) \mid S \subset E,\ \dim \mathrm{Vect}(S) \ge i\big\},$$
$$\zeta_i^*(E) = \inf\big\{H_E^*(S) \mid S \subset E,\ \dim \mathrm{Zar}(S) \ge i\big\}.$$

Ceci définit six séries de minima (les deux dernières dépendant de L) qui sont *a priori* dans $[0, +\infty]$. Les définitions avec Vect sont classiques, celles avec Zar s'inspirent des minima de Zhang. Dans ce second cas, la dimension utilisée est celle du schéma sur $\mathrm{Spec}\, K$ défini par l'ensemble algébrique $\mathrm{Zar}(S)$. Nous employons les simplifications d'écriture suivantes : $\lambda^{\Lambda} \to \Lambda$, $\lambda^{\lambda} \to \lambda$, $\lambda^{\mathbb{Q}} \to \lambda^{\mathrm{BV}}$, $\zeta^{\Lambda} \to Z$, $\zeta^{\lambda} \to \zeta$, $\zeta^{\mathbb{Q}} \to \zeta^{\mathrm{BV}}$; à l'inverse, pour unifier les notations sous la forme λ^*, nous notons aussi $\lambda^Z = Z$, $\lambda^{\zeta} = \zeta$ et $\lambda^{\mathrm{BVZ}} = \zeta^{\mathrm{BV}}$.

Ainsi, pour tout espace adélique rigide E de dimension n et pour $1 \le i \le n$, on a

$$\begin{aligned}
\lambda_i^{\Lambda}(E) &= \Lambda_i(E), & \zeta_i^{\Lambda}(E) &= Z_i(E) = \lambda_i^{Z}(E),\\
\lambda_i^{\lambda}(E) &= \lambda_i(E), & \zeta_i^{\lambda}(E) &= \zeta_i(E) = \lambda_i^{\zeta}(E),\\
\lambda_i^{\mathbb{Q}}(E) &= \lambda_i^{\mathrm{BV}}(E), & \zeta_i^{\mathbb{Q}}(E) &= \zeta_i^{\mathrm{BV}}(E) = \lambda_i^{\mathrm{BVZ}}(E).
\end{aligned}$$

[1)] Les notations étranges qui suivent s'expliquent par la volonté de retomber *in fine* sur celles de [10].

Remarquons encore que l'on a $H_E^\lambda = H_E^K$ et de même pour les minima.

Mentionnons d'ores et déjà les propriétés de projectivité (restreinte) de nos hauteurs. Si $S \subset E$, alors $H_E^\Lambda(aS) = H_E^\Lambda(S)$ pour tout $a \in K^\times$ et $H_E^L(aS) = H_E^L(S)$ pour tout $a \in L^\times$.

Pour caractériser le comportement du corps K vis-à-vis des minima, nous introduisons encore des nombres mesurant l'écart maximal entre minima et hauteur. Si $n \geq 1$, on écrit

$$c_{\mathrm{I}}^*(n,K) = \sup_{\dim E = n} \frac{\lambda_1^*(E)}{H(E)^{1/n}} \quad \text{et} \quad c_{\mathrm{II}}^*(n,K) = \sup_{\dim E = n} \Big(\frac{\lambda_1^*(E)\cdots\lambda_n^*(E)}{H(E)}\Big)^{1/n}$$

où $* \in \{\Lambda, \lambda, \mathrm{BV}, Z, \zeta, \mathrm{BVZ}\}$. Ces quantités peuvent être vues comme diverses généralisations de la classique constante d'Hermite (voir le paragraphe 5.1).

Un corps K, tel que $c_{\mathrm{II}}^*(n,K)$ est fini pour tout $n \geq 1$, est dit de Siegel si $* = \Lambda$, de Bombieri–Vaaler si $* = \mathrm{BV}$, de Zhang si $* = Z$.

4.2. Premières propriétés. Un certain nombre de relations entre les minima sont évidentes sur les définitions. Par exemple nous avons :

(P1) Pour tout $*$, on a $\lambda_1^*(E) \leq \lambda_2^*(E) \leq \cdots \leq \lambda_n^*(E)$. Ceci entraîne $c_{\mathrm{I}}^*(n,K) \leq c_{\mathrm{II}}^*(n,K)$.

(P2) Pour tout $*$ on a $\lambda_1^*(E) = \zeta_1^*(E)$ et $\lambda_i^*(E) \leq \zeta_i^*(E)$. La seconde relation découle de $\mathrm{Zar}(S) \subset \mathrm{Vect}(S)$ (pour S non vide), la première du fait que

$$\dim \mathrm{Vect}(S) \geq 1 \iff S \not\subset \{0\} \iff \dim \mathrm{Zar}(S) \geq 1.$$

D'autres relations proviennent des propriétés des différentes hauteurs de S utilisées.

Lemme 4.1. *Soient $L' \subset L$ des sous-corps de K et $S \subset S' \subset E$. Nous avons $H_E^\Lambda(S) \leq H_E^L(S) \leq H_E^{L'}(S)$ et $H_E^*(S) \leq H_E^*(S')$ pour $* = \Lambda, L$.*

Démonstration. Si $S \subset \{0\}$, on a (par convention) $H_E^*(S) = 0$ pour tout $*$. Sinon pour $y \in S$ et $v \in V(K)$, on a

$$\|y\|_v \leq \mathrm{pur}_{v_{|L}}\big(\sup_{x\in S}\sup_{v'\in V_{v_{|L}}(K)} \|x\|_{v'}\big) \leq \mathrm{pur}_{v_{|L'}}\big(\sup_{x\in S}\sup_{v'\in V_{v_{|L'}}(K)} \|x\|_{v'}\big)$$

car $V_{v_{|L}}(K) \subset V_{v_{|L'}}(K)$ et $s \leq \mathrm{pur}_{v_{|L}}(s) \leq \mathrm{pur}_{v_{|L'}}(s)$ pour $s \in \mathbb{R}$. Si nous écrivons ceci $\|y\|_v \leq a_v \leq b_v$, nous disposons d'éléments $a, b \in [0,+\infty]^{V(K)}$ qui vérifient $H_E^L(S) = |a|$ et $H_E^{L'}(S) = |b|$ avec la convention $|a| = +\infty$ lorsque $a \notin \lceil \mathbb{A}_K^\times \rceil$ et de même pour b. Pour pouvoir conclure par simple intégration $H_E(y) \leq |a| \leq |b|$, qui nous donnera la première inégalité de l'énoncé, il suffit de vérifier que $b \in \lceil \mathbb{A}_K^\times \rceil$ entraîne $a \in \lceil \mathbb{A}_K^\times \rceil$. Or, dans ce cas, a est bornée car b l'est et, de même, $\{v \in V(K) \mid a_v \neq 1\}$ est contenu dans un compact car la même propriété est vraie pour b et pour $\|y\|$ ($y \in S \setminus \{0\}$) qui minore a. Enfin, a est nécessairement intégrable car l'application

$$v \mapsto \sup_{v'\in V_{v_{|L}}(K)} \|x\|_{v'}$$

est localement constante (en utilisant que $V(K) \to V(L)$ est ouverte, proposition 2.7), le supremum d'une famille de fonctions continues est semi-continu inférieurement tandis que la fonction pur est borélienne. De manière entièrement analogue,

$$a_v = \mathrm{pur}_{v_{|L}}\big(\sup_{x\in S}\sup_{v'\in V_{v_{|L}}(K)} \|x\|_{v'}\big) \leq \mathrm{pur}_{v_{|L}}\big(\sup_{x\in S'}\sup_{v'\in V_{v_{|L}}(K)} \|x\|_{v'}\big)$$

fournit $H_E^L(S) \leq H_E^L(S')$ tandis que $H_E^\Lambda(S) \leq H_E^\Lambda(S')$ est clair. □

La première inégalité du lemme nous permet d'ordonner nos minima (rappelons que $\lambda_i(E) = \lambda_i^K(E)$).

(P3) Pour $L' \subset L \subset K$, nous avons

$$\Lambda_i(E) \le \lambda_i(E) \le \lambda_i^L(E) \le \lambda_i^{L'}(E) \le \lambda_i^{\mathrm{BV}}(E)$$

et de même pour les minima ζ. En particulier, avec (P1) et (P2), nous voyons que $\Lambda_1(E)$ est le plus petit et $\zeta_n^{\mathrm{BV}}(E)$ le plus grand de tous nos minima.

Puisque de toute famille S avec $\dim \mathrm{Vect}(S) \ge i$ on peut extraire une famille libre de i vecteurs, la seconde relation du lemme montre

$$\lambda_i^*(E) = \inf\bigl\{H_E^*(\{x_1,\dots,x_i\}) \mid x_1,\dots,x_i \in E \text{ libres}\bigr\}$$

pour tous i et $* = \Lambda, L$. Il n'y a pas d'équivalent de cette simplification pour la série ζ. Nous tirons de ceci deux conséquences importantes.

(P4) On a $\lambda_1(E) = \Lambda_1(E)$ car H_E^Λ et H_E^λ coïncident sur les singletons S. Avec (P2), il vient aussi $\Lambda_1(E) = \lambda_1(E) = Z_1(E) = \zeta_1(E)$ et donc $c_{\mathrm{I}}^*(n,K)$ prend une seule et même valeur pour $* \in \{\Lambda, \lambda, Z, \zeta\}$.

(P5) On a $\lambda_n^{\mathrm{BV}}(E) < \infty$ car si S est fini $H_E^*(S) < \infty$ (on trouve toujours un élément de $\lceil \mathbb{A}_K^\times \rceil$, qui est même localement constant). Par suite, la série des minima λ ne prend jamais la valeur $+\infty$.

Lemme 4.2. *Si E et F sont deux espaces adéliques rigides de dimension n sur K, il existe un réel $c > 0$ tel que $c^{-1}\lambda_i^*(E) \le \lambda_i^*(F) \le c\lambda_i^*(E)$ pour tous $1 \le i \le n$ et $* \in \{\Lambda, \lambda, \mathrm{BV}, Z, \zeta, \mathrm{BVZ}\}$.*

Démonstration. En réalité, si $\varphi\colon E \to F$ est un isomorphisme quelconque, il existe $a \in |\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\times|$ tel que $a_v^{-1}\|x\|_v \le \|\varphi(x)\|_v \le a_v\|x\|_v$ pour tout $x \in E$. Avec $c = |a|$ on a alors $c^{-1}H_E^*(S) \le H_F^*(\varphi(S)) \le cH_E^*(S)$ pour tout $*$, ce qui donne immédiatement le lemme. □

Pour l'espace rigide standard K^n (c'est-à-dire muni des normes standards sur K_v^n introduites plus haut), nous avons facilement $H_{K^n}(x) \ge 1$ pour tout $x \in K^n \setminus \{0\}$. Par suite, $\Lambda_1(K^n) \ge 1$. Par ailleurs, si $e_1,\dots,e_n$ est la base canonique de K^n, on constate immédiatement $H_{K^n}^{\mathbb{Q}}(\{e_1,\dots,e_n\}) = 1$ donc $\lambda_n^{\mathrm{BV}}(K^n) \le 1$. Nous pouvons conclure $\lambda_i^*(K^n) = 1$ pour $1 \le i \le n$ et $* \in \{\Lambda, \lambda, \mathrm{BV}\}$.

(P6) Pour tout E, on a $\Lambda_1(E) > 0$. En effet, le lemme avec $F = K^n$ donne un réel $c > 0$ tel que $\Lambda_1(E) \ge c^{-1}$. Par conséquent, aucun de nos minima n'est nul.

L'exemple de K^n (avec $H(K^n) = 1$) nous donne aussi $1 \le c_{\mathrm{I}}^*(n,K) \le c_{\mathrm{II}}^*(n,K)$ pour tout $n \ge 1$ et tout $*$.

La définition que nous avons adoptée pour λ^{BV} et ζ^{BV} présente l'avantage de s'écrire exactement de la même façon que celle des autres minima, en termes de hauteur. Il peut aussi s'avérer utile de disposer de la variante suivante, plus proche de la définition originale de Bombieri–Vaaler (pour les corps de nombres).

Lemme 4.3. *Soit E un espace adélique rigide sur K de dimension n. Pour $r > 0$, notons E_r l'ensemble des $x \in E$ tels que $\|x\|_v \leq 1$ si $v \in V(K) \setminus V_\infty(K)$ et $\|x\|_v \leq r$ si $v \in V_\infty(K)$. Alors, pour $1 \leq i \leq n$, nous avons*

$$\lambda_i^{\mathrm{BV}}(E) = \inf\{r \mid \dim \mathrm{Vect}(E_r) \geq i\} \quad et \quad \zeta_i^{\mathrm{BV}}(E) = \inf\{r \mid \dim \mathrm{Zar}(E_r) \geq i\}.$$

Démonstration. Il s'agit de voir que, dans la définition initiale, l'on peut se limiter aux ensembles S de la forme E_r, sachant que $H_E^{\mathbb{Q}}(E_r) \leq r$. Voyons donc que, si S vérifie $H_E^{\mathbb{Q}}(S) \leq r$, alors $S \subset KE_r$, ce qui donne la conclusion. Pour $x \in S \setminus \{0\}$ il existe $a \in \mathbb{Q}^\times$ tel que $|a|_p = \mathrm{pur}_p(\sup_{v \in V_p(K)} \|x\|_v)$ pour tout $p \in V(\mathbb{Q}) \setminus \{\infty\}$. Alors $x/a \in E_r$: en effet, $\|x\|_v \leq |a|_p$ pour tous $v \in V_p(K)$, $p \in V(\mathbb{Q}) \setminus \{\infty\}$ et, par la formule du produit,

$$\sup_{v \in V_\infty(K)} \|x\|_v = H_E^{\mathbb{Q}}(x)|a|_\infty \leq r|a|_\infty. \qquad \square$$

Mentionnons encore que les deux inégalités $\Lambda_i(E) \leq \lambda_i(E) \leq \lambda_i^{\mathrm{BV}}(E)$ peuvent être simultanément strictes lorsque $i \geq 2$: voir, sur un corps de nombres, [10, exemple 2.15].

4.3. Propriétés de Northcott. Contrairement aux λ, il arrive que la série des ζ prenne des valeurs infinies. Commençons par classifier les configurations dans lesquelles cela arrive.

On rappelle que la maison $\lceil x \rceil$ de $x \in K$ est le supremum des $|x|_v$ pour $v \in V_\infty(K)$ et que $\mathcal{O}_K = \{x \in K \mid |x|_v \leq 1 \text{ pour tout } v \in V(K) \setminus V_\infty(K)\}$.

Proposition 4.4. *Tout corps $K \subset \overline{\mathbb{Q}}$ vérifie l'une des propriétés suivantes.*

(1) *Pour tout espace adélique rigide E sur K, tout entier i avec $1 \leq i \leq \dim E$ et tout $*$, on a $\zeta_i^*(E) < \infty$.*

(2) *Pour tout espace adélique rigide E sur K et tout entier i avec $2 \leq i \leq \dim E$, on a $Z_i(E) < \infty = \zeta_i(E) = \zeta_i^{\mathrm{BV}}(E)$.*

(3) *Pour tout espace adélique rigide E sur K, tout entier i avec $2 \leq i \leq \dim E$ et tout $*$, on a $\zeta_i^*(E) = \infty$.*

De manière plus précise, nous avons équivalence entre :

(A) *Pour tout espace adélique rigide E sur K et tout entier i avec $2 \leq i \leq \dim E$, on a $Z_i(E) < \infty$.*

(B) *Il existe un espace adélique rigide E sur K et un entier i avec $2 \leq i \leq \dim E$ et $Z_i(E) < \infty$.*

(C) $Z_2(K^2) < \infty$.

(D) *Il existe une partie infinie $S \subset K$ et $B \in \mathbb{R}$ tels que $H_{K^2}(1, x) \leq B$ pour tout $x \in S$.*

Ainsi qu'entre :

(a) *Pour tout espace adélique rigide E sur K et tout entier i avec $2 \leq i \leq \dim E$, on a $\zeta_i^{\mathrm{BV}}(E) < \infty$.*

(b) *Il existe un espace adélique rigide E sur K et un entier i avec $2 \leq i \leq \dim E$ et $\zeta_i(E) < \infty$.*

(c) $\zeta_2(K^2) < \infty$.

(c′) $\zeta_2^{\mathrm{BV}}(K^2) < \infty$.

(d) *Il existe une partie infinie $S \subset \mathcal{O}_K$ et $B \in \mathbb{R}$ tels que $\lceil x \rceil \leq B$ pour tout $x \in S$.*

Démonstration. Il suffit de démontrer les équivalences puisqu'ensuite on a nécessairement : (1) $\Leftrightarrow$ (C) et (c), (2) $\Leftrightarrow$ (C) et non (c), (3) $\Leftrightarrow$ non (C) et non (c) (il n'y a pas de quatrième cas car (c) $\Rightarrow$ (C)). Maintenant (A) $\Rightarrow$ (B) est trivial.

(B) $\Rightarrow$ (C) : Par le lemme 4.2, on peut supposer $E = K^n$; par croissance de $i \mapsto Z_i(K^n)$ on peut supposer $i = 2$. La condition $Z_2(K^n) < \infty$ donne une partie T de K^n telle que $\dim \mathrm{Zar}(T) \geq 2$ et $H_E^{\Lambda}(T) < \infty$. En d'autres termes : KT contient une infinité de droites et il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que $H_E(x) \leq B$ pour tout $x \in T$. Il existe alors une projection standard $K^n \to K^2$ (c'est-à-dire donnée par oubli de coordonnées) dans laquelle l'image de KT contient une infinité de droites. De plus, la hauteur décroît par une telle projection (quotient), ce qui permet de supposer $n = 2$.

(C) $\Rightarrow$ (D) : On peut, sans changer la situation, d'une part supposer $(0,1) \notin T$ et d'autre part multiplier chaque élément de T par un scalaire de $K^\times$ de façon à obtenir $T = \{1\} \times S$ où $S \subset K$ est infinie.

(D) $\Rightarrow$ (A) : Par le lemme 4.2, il suffit de montrer $Z_n(K^n) < \infty$ pour tout $n \geq 2$. Pour cela, il suffit de noter $\mathrm{Zar}(\{1\} \times S^{n-1}) = K^n$ et $H_{K^n}(x) \leq B^{n-1}$ si $x \in \{1\} \times S^{n-1}$, ce qui résulte de $H_{K^n}(1, x_2, \ldots, x_n) \leq \prod_{i=2}^n H_{K^2}(1, x_i)$ pour tous $x_i \in K$. Ensuite les implications (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) se traitent comme ci-dessus.

(c) $\Rightarrow$ (c′) : Nous avons $B' \in \mathbb{R}$ et $T \subset K^2$ avec $\mathrm{Zar}(T) = K^2$ et $H_{K^2}^K(T) \leq B'$. En particulier la fonction

$$v \mapsto \sup_{x \in T} \|x\|_v$$

est bornée et égale à 1 en dehors d'un compact. Par suite, il en est de même de la fonction

$$p \mapsto \mathrm{pur}_p\big(\sup_{x \in T} \sup_{v \in V_p(K)} \|x\|_v\big)$$

sur $V(\mathbb{Q})$. Ainsi $H_{K^2}^{\mathbb{Q}}(T) \leq B''$ pour un réel B''.

(c′) $\Rightarrow$ (d) : Par le lemme 4.3, il existe $T \subset K^2$ avec $\mathrm{Zar}(T) = K^2$ et, pour $x \in T$, $\|x\|_v \leq 1$ si $v \in V(K) \setminus V_\infty(K)$, $\|x\|_v \leq B''$ si $v \in V_\infty(K)$. En d'autres termes, si $x = (x_1, x_2) \in T$, nous avons $x_1, x_2 \in \mathcal{O}_K$ et

$$\sup\big(\lceil x_1 \rceil, \lceil x_2 \rceil\big) \leq \sup_{v \in V_\infty(K)} \big(|x_1|_v^2 + |x_2|_v^2\big)^{1/2} \leq B''.$$

Ceci entraîne visiblement l'assertion (d).

(d) $\Rightarrow$ (a) : Comme ci-dessus, il nous suffit de vérifier que $H_{K^n}^{\mathbb{Q}}(\{1\} \times S^{n-1})$ est fini. Or pour $x \in \{1\} \times S^{n-1}$, nous avons $\sup_{v \in V_p(K)} \|x\|_v = 1$ si $p \neq \infty$ et

$$\sup_{v \in V_\infty(K)} \|x\|_v \leq \big(1 + \lceil x_2 \rceil^2 + \cdots + \lceil x_n \rceil^2\big)^{1/2} \leq \sqrt{n} B. \qquad \square$$

La propriété non (D) s'appelle la propriété de Northcott [6, 32] : on la formule usuellement avec la hauteur de Weil et non avec des normes hermitiennes à l'infini comme ici, mais cela est bien sûr équivalent. Par analogie, nous donnons un nom à la propriété non (d).

Définition 4.5. Un corps K tel que

$$\text{pour tout } B \in \mathbb{R} \text{ l'ensemble } \big\{x \in K \mid H_{K^2}(1,x) \leq B\big\} \text{ est fini}$$

est dit de Northcott. Un corps K tel que

$$\text{pour tout } B \in \mathbb{R} \text{ l'ensemble } \big\{x \in \mathcal{O}_K \mid \lceil x \rceil \leq B\big\} \text{ est fini}$$

est dit de BV-Northcott.

L'assertion (3) de la proposition décrit donc les corps de Northcott, l'assertion (2) ceux de BV-Northcott qui ne sont pas de Northcott et l'assertion (1) les corps qui ne sont ni de Northcott ni de BV-Northcott. Il est facile de donner des exemples de corps vérifiant (1) ($\overline{\mathbb{Q}}$) ou (3) ($\mathbb{Q}$ et tous les corps de nombres) mais un peu moins évident de voir que (2) peut arriver.

Exemple 4.6. Soient $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ trois suites de nombres premiers vérifiant $p_i < q_i < 2p_i$, $d_i < \log p_i < 2d_i$ et $q_i < d_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Alors le sous-corps K de $\mathbb{R}$ engendré par les réels $\alpha_i = (p_i/q_i)^{1/d_i}$ est un corps de BV-Northcott mais non un corps de Northcott.

Démonstration. Commençons par remarquer que la relation $d_i < \log p_i$ entraîne $d_i < p_i$ et donc $d_i < p_i < q_i < d_{i+1}$. En particulier tous les nombres premiers considérés sont distincts et $\lim_{i\to+\infty} p_i = +\infty$. On en déduit que la partie $S = \{\alpha_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ est infinie. D'autre part

$$H_{K^2}(1,\alpha_i) = H_{\overline{\mathbb{Q}}^2}(q_i^{1/d_i}, p_i^{1/d_i}) = \sqrt{q_i^{2/d_i} + p_i^{2/d_i}} \leq 2p_i^{1/d_i} < 2e^2.$$

Ceci montre que K vérifie (D) (K n'est pas de Northcott). Montrons maintenant qu'il ne vérifie pas (d), c'est-à-dire que pour tout $B \in \mathbb{R}$ l'ensemble des $x \in \mathcal{O}_K$ avec $\lceil x \rceil \leq B$ est fini. Soit donc un tel $x \in \mathcal{O}_K$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in \mathbb{Q}(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$. Nous le choisissons minimal et nous allons montrer $n \leq B$. Ceci nous suffira puisque dans le corps de nombres $\mathbb{Q}(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ il n'y a qu'un nombre fini d'entiers de maison au plus B.

Écrivons

$$x = \sum_{j\in J} a_j \prod_{i=0}^{n} \alpha_i^{j_i}$$

où $a_j \in \mathbb{Q}$ et $j = (j_0, \dots, j_n)$ parcourt l'ensemble $J = \prod_{i=0}^{n}\{0, \dots, d_i - 1\}$. Par minimalité de n, il existe $j' \in J$ avec $j'_n \neq 0$ et $a_{j'} \neq 0$. Maintenant le corps $\mathbb{Q}(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ est de degré $d_0 \cdots d_n$ (p_i n'est pas ramifié dans $\mathbb{Q}(\alpha_0, \dots, \alpha_{i-1})$ donc $X^{d_i} - p_i/q_i$ est irréductible sur ce corps par le critère d'Eisenstein) et, si nous fixons pour chaque i une racine primitive d_i-ième de l'unité ξ_i, les plongements de ce corps dans $\overline{\mathbb{Q}}$ sont en bijection avec J par la relation $\sigma_u(\alpha_i) = \xi_i^{u_i}\alpha_i$ pour $u \in J$. En particulier, si $u \in J$,

$$\sigma_u(x) = \sum_{j\in J} a_j \prod_{i=0}^{n} \xi_i^{j_i u_i} \alpha_i^{j_i} \in \mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}.$$

Ensuite nous considérons (pour l'indice j' donné plus haut tel que $j'_n a_{j'} \neq 0$)

$$y = \sum_{u \in J} \sigma_u(x) \prod_{i=0}^{n} \xi_i^{-j'_i u_i}.$$

Il s'agit encore d'un entier algébrique et nous pouvons calculer

$$\begin{aligned} y &= \sum_{j \in J} a_j \Big(\prod_{i=0}^{n} \alpha_i^{j_i} \Big) \sum_{u \in J} \prod_{i=0}^{n} \xi_i^{(j_i - j'_i) u_i} \\ &= \sum_{j \in J} a_j \Big(\prod_{i=0}^{n} \alpha_i^{j_i} \Big) \prod_{i=0}^{n} \sum_{u_i=0}^{d_i - 1} \Big[\xi_i^{(j_i - j'_i)} \Big]^{u_i} \\ &= d_0 \cdots d_n a_{j'} \prod_{i=0}^{n} \alpha_i^{j'_i}. \end{aligned}$$

Le fait que cet élément soit entier entraîne pour le rationnel $a_{j'}$:

- $v_\ell(a_{j'}) \geq 0$ si ℓ premier ne divise pas $\prod_{i=0}^{n} d_i p_i q_i$,
- $v_{d_i}(a_{j'}) \geq -1$ pour $0 \leq i \leq n$,
- $v_{p_i}(a_{j'}) \geq -j'_i / d_i$ donc $v_{p_i}(a_{j'}) \geq 0$ pour $0 \leq i \leq n$,
- $v_{q_i}(a_{j'}) \geq j'_i / d_i \geq 0$ pour $0 \leq i \leq n-1$ et
- $v_{q_n}(a_{j'}) \geq j'_n / d_n > 0$ donc $v_{q_n}(a_{j'}) \geq 1$.

Par conséquent nous avons $d_0 \cdots d_n a_{j'} \in q_n \mathbb{Z}$. Vu l'expression précédente de y, celui-ci est donc un multiple entier non nul ($a_{j'} \neq 0$) de

$$q_n \prod_{i=0}^{n} \alpha_i^{j'_i}.$$

Nous en déduisons que, pour toute place infinie v de $\overline{\mathbb{Q}}$, nous avons $|y|_v \geq q_n 2^{-n-1}$ (car $|\alpha_i^{j'_i}|_v \geq |\alpha_i^{d_i}|_v \geq \frac{1}{2}$). Par ailleurs, la définition de y montre aussi

$$|y|_v \leq \sum_{u \in J} |\sigma_u(x)|_v \leq d_0 \cdots d_n \lceil x \rceil \leq d_0 \cdots d_n B.$$

Le lecteur vérifiera alors que $d_0 \cdots d_n 2^{n+1} n \leq q_n$ pour tout n (on utilise seulement $d_0 \geq 2$ et $d_{i+1} \geq q_i \geq d_i^e$ d'où $2^{n+1} n \leq 2^{e^n} \leq d_n$ et $d_0 \cdots d_n \leq d_n^{1+1/e+\cdots+1/e^n} \leq d_n^{e-1}$). On en déduit $n \leq B$. □

4.4. L'invariant $c_1(K)$. Penchons-nous à présent sur le cas de la dimension 1. En vertu des propriétés (P2) et (P4) données plus haut, tous les minima d'un espace E de dimension 1 sont égaux soit à $\Lambda_1(E)$ soit à $\lambda_1^{\mathrm{BV}}(E)$. De plus, on a immédiatement $\Lambda_1(E) = H(E)$, ce qui montre $c_{\mathrm{I}}^*(1, K) = c_{\mathrm{II}}^*(1, K) = 1$ pour $* \in \{\Lambda, \lambda, Z, \zeta\}$. En revanche le nombre $c_{\mathrm{I}}^{\mathrm{BV}}(1, K) \in [1, +\infty]$ n'est pas toujours égal à 1 ; c'est un invariant important du corps K que nous notons en abrégé $c_1(K)$. Nous pouvons le décrire de la manière suivante (nous rappelons que l'infimum de l'ensemble vide est $+\infty$).

Lemme 4.7. *Le nombre $c_1(K)$ est l'infimum des réels $R > 0$ pour lesquels on a : pour tout $a \in |\mathbb{A}_K^\times|$ avec $|a| = R$, il existe $x \in K^\times$ tel que $|x|_v \leq a_v$ pour tout $v \in V(K)$.*

Démonstration. Notons $(\mathcal{P}_R)$ la propriété de l'énoncé pour $R > 0$. Nous allons montrer

$$(\mathcal{P}_R) \implies c_1(K) \leq R \implies (\mathcal{P}_{R+\varepsilon}) \text{ pour tout } \varepsilon > 0.$$

Ceci montrera bien $c_1(K) = \inf\{R > 0 \mid (\mathcal{P}_R)\}$. Nous associons à $a \in |\mathbb{A}_K^\times|$ un espace adélique $E_a = (K, \|\cdot\|_v)$ où $\|x\|_v = |x|_v/a_v$ pour $v \in V(K)$. Il est clair par définition que tout espace adélique de dimension 1 est isométrique à l'un de ces E_a. On a aussi $H(E_a) = |a|^{-1}$. De plus, si $a, b \in |\mathbb{A}_K^\times|$ avec $a_v = b_v$ pour $v \in V(K) \setminus V_\infty(K)$ et $a_v = \rho b_v$ sinon avec $\rho > 0$, alors $H(E_b) = \rho H(E_a)$ et $H_{E_b}^{\mathbb{Q}}(S) = \rho H_{E_a}^{\mathbb{Q}}(S)$ pour $S \subset K$, ce qui nous donne

$$\lambda_1^{\mathrm{BV}}(E_a)H(E_a)^{-1} = \lambda_1^{\mathrm{BV}}(E_b)H(E_b)^{-1}.$$

Par suite, si $R > 0$ est donné, on peut limiter le supremum de la définition de $c_1^{\mathrm{BV}}(1, K)$ aux espaces E_a avec $|a| = R$. Supposons à présent que $(\mathcal{P}_R)$ soit vraie. Pour $a \in |\mathbb{A}_K^\times|$ avec $|a| = R$, nous avons donc $x \in E_a \setminus \{0\}$ tel que $\|x\|_v \leq 1$ pour $v \in V(K)$. En particulier $\lambda_1^{\mathrm{BV}}(E_a) \leq 1$ donc $\lambda_1^{\mathrm{BV}}(E_a)H(E_a)^{-1} \leq R$ et, en prenant le supremum, $c_1(K) \leq R$. Réciproquement, supposons $c_1(K) \leq R$ et fixons $\varepsilon > 0$. Choisissons aussi $a \in |\mathbb{A}_K^\times|$ avec $|a| = R+\varepsilon$. Puisque $\lambda_1^{\mathrm{BV}}(E_a)H(E_a)^{-1} \leq R$, nous avons $\lambda_1^{\mathrm{BV}}(E_a) \leq R(R+\varepsilon)^{-1} < 1$ donc (lemme 4.3) il existe $x \in K^\times$ avec $\|x\|_v \leq 1$ pour tout $v \in V(K)$. □

Le premier intérêt de $c_1(K)$ est de fournir une comparaison entre minima.

Proposition 4.8. *Pour tout E et tout entier i, nous avons $\lambda_i^{\mathrm{BV}}(E) \leq c_1(K)\Lambda_i(E)$ et $\zeta_i^{\mathrm{BV}}(E) \leq c_1(K)Z_i(E)$.*

Démonstration. Soient $\varepsilon > 0$ et $S \subset E$ une partie telle que $H_E^{\Lambda}(S) \leq \Lambda_i(E) + \varepsilon$ et $\dim \mathrm{Vect}(S) \geq i$. Choisissons arbitrairement $b \in |\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\times|$ avec $|b| = (\Lambda_i(E) + \varepsilon)(c_1(K) + \varepsilon)$ (si cette quantité est infinie, il n'y a rien à démontrer). Pour $x \in S \setminus \{0\}$, nous définissons $a \in |\mathbb{A}_K^\times|$ par $a_v = b_v\|x\|_v^{-1}$ pour $v \in V(K)$. Par hypothèse, nous avons

$$|a| = |b|H_E(x)^{-1} \geq c_1(K) + \varepsilon.$$

Par le lemme, il existe $y \in K^\times$ avec $|y|_v \leq a_v$ pour $v \in V(K)$. Nous fixons un tel y pour chaque x. Posons maintenant $\tilde{x} = yx$, $\tilde{0} = 0$ et $\tilde{S} = \{\tilde{x} \mid x \in S\}$. Puisque $K\tilde{S} = KS$, nous avons encore $\dim \mathrm{Vect}(\tilde{S}) \geq i$. Par ailleurs, si $x \in \tilde{S}$, il vient $\|x\|_v \leq b_v$ pour tout $v \in V(K)$ donc $H_E^{\mathbb{Q}}(\tilde{S}) \leq |b|$. Par suite, $\lambda_i^{\mathrm{BV}}(E) \leq (\Lambda_i(E) + \varepsilon)(c_1(K) + \varepsilon)$ et ceci nous donne la première relation. La seconde se démontre exactement de la même manière en remplaçant Λ_i par Z_i, λ_i^{BV} par ζ_i^{BV} et $\mathrm{Vect}(\cdot)$ par $\mathrm{Zar}(\cdot)$. □

Remarque : si E est de dimension 1 et si $F = E^{\oplus n}$, alors $\Lambda_i(F) = H(F)^{1/n}$ et $\lambda_i^{\mathrm{BV}}(F) = H(F)^{1/n}\lambda_1^{\mathrm{BV}}(E)H(E)^{-1}$.

En effet, nous avons $H(F) = H(E)^n$ et $\Lambda_1(E) = H(E)$ donc il suffit de montrer $\lambda_i^*(F) = \lambda_1^*(E)$ pour tous i et $* \in \{\Lambda, \mathrm{BV}\}$. On a $\lambda_i^*(F) \leq \lambda_1^*(E)$ en considérant des vecteurs ayant une seule composante non nulle. Réciproquement, on a $\lambda_1^*(F) \geq \lambda_1^*(E)$ en minorant la hauteur H^* d'un vecteur par la même hauteur de l'une de ses composantes.

Maintenant, en prenant E dans cette remarque tel que $\lambda_1^{\mathrm{BV}}(E)H(E)^{-1}$ se rapproche de $c_1(K)$, nous voyons d'une part que la majoration $\lambda_i^{\mathrm{BV}}(F) \leq c_1(K)\Lambda_i(F)$ de la proposition est optimale à i et $n = \dim F$ fixés. D'autre part, nous en déduisons aussi $c_{\mathrm{I}}^{\mathrm{BV}}(n,K) \geq c_1(K)$ pour $n \geq 1$. Avec la proposition et la relation (P3), il vient pour tout $n \geq 1$

$$\max\big(c_1(K), c_{\mathrm{I}}^{\Lambda}(n,K)\big) \leq c_{\mathrm{I}}^{\mathrm{BV}}(n,K) \leq c_1(K)c_{\mathrm{I}}^{\Lambda}(n,K)$$

et par suite $c_{\mathrm{I}}^{\mathrm{BV}}(n,K)$ est fini si et seulement si $c_1(K)$ et $c_{\mathrm{I}}^{\Lambda}(n,K)$ le sont. La même chose est vraie en remplaçant c_{I} par c_{II} et pour la série des minima ζ.

Pour notre prochain résultat, nous aurons besoin de la variante suivante du lemme 4.7. Nous y notons μ_K le groupe des racines de l'unité de K (qui agit sur K par multiplication).

Lemme 4.9. *Soit K un sous-corps de $\overline{\mathbb{Q}}$ qui n'est pas un corps de nombres. Alors le nombre $c_1(K)$ est l'infimum des réels $R > 0$ pour lesquels on a : pour tout $a \in |\mathbb{A}_K^{\times}|$ avec $|a| = R$, l'ensemble des $x \in K$ vérifiant $|x|_v \leq a_v$ pour tout $v \in V(K)$ contient une infinité de classes modulo μ_K.*

Démonstration. Il suffit de voir que tout $R > c_1(K)$ vérifie la propriété annoncée. Raisonnons par l'absurde en supposant avoir $a \in |\mathbb{A}_K^{\times}|$ tel que $|a| > c_1(K)$ et

$$\big\{x \in K \mid |x|_v \leq a_v \text{ pour tout } v \in V(K)\big\}/\mu_K$$

fini. Notons S un système de représentants de ce quotient puis K_0 un corps de nombres tel que $S \subset K_0$ et $a \in |\mathbb{A}_{K_0}^{\times}|$. Fixons une place archimédienne v_0 de K_0 et notons

$$\alpha = \min_{x \in S\setminus\{0\}} |x|_{v_0}.$$

Pour tout corps de nombres K_1 avec $K_0 \subset K_1 \subset K$, sélectionnons une place $v_1 \in V_{v_0}(K_1)$ et définissons $a' \in |\mathbb{A}_{K_1}^{\times}|$ par $a'_{v_1} = \frac{\alpha}{2}$ et $a'_v = a_v$ si $v \neq v_1$. Alors

$$\big\{x \in K^{\times} \mid |x|_v \leq a'_v \text{ pour tout } v \in V(K)\big\}$$

est vide donc $c_1(K) \geq |a'|$. En outre,

$$|a'| = |a|\Big(\frac{\alpha}{2a_{v_0}}\Big)^{\mu(v_1)} \geq |a|\Big(\frac{\alpha}{2a_{v_0}}\Big)^{2/[K_1:\mathbb{Q}]}$$

donc $|a| > c_1(K)$ montre $|a'| > c_1(K)$ pour $[K_1 : \mathbb{Q}]$ assez grand, ce qui est la contradiction cherchée. □

Faisons maintenant le lien entre $c_1(K)$ et les propriétés de Northcott.

Proposition 4.10. *Supposons $[K : \mathbb{Q}] = \infty$. Nous avons $\zeta_i(E) \leq i c_1(K)\lambda_i(E)$ et $\zeta_i^{\mathrm{BV}}(E) \leq i c_1(K)\lambda_i^{\mathrm{BV}}(E)$ pour tout E et tout $1 \leq i \leq \dim E$. Dans le cas de $E = K^n$, nous avons $\sqrt{i} \leq Z_i(K^n) \leq \zeta_i^{\mathrm{BV}}(K^n) \leq \sqrt{i}c_1(K)$ pour tout $1 \leq i \leq n$. En particulier, si K est de BV-Northcott alors $c_1(K) = \infty$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Par le lemme précédent, l'ensemble T des $x \in K$ vérifiant $|x|_v \le 1$ si $v \in V(K) \setminus V_\infty(K)$ et $|x|_v \le c_1(K)(1+\varepsilon)$ si $v \in V_\infty(K)$ est infini.

Soient maintenant E et i comme dans l'énoncé. Nous choisissons $e_1, \dots, e_i \in E$ libres avec $H_E^\lambda(\{e_1, \dots, e_i\}) \le \lambda_i(E) + \varepsilon$. Nous posons

$$S = \{x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_i e_i \mid x_1, \dots, x_i \in T\}.$$

Comme T est infini, nous avons $\mathrm{Zar}(S) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i)$ donc $\dim \mathrm{Zar}(S) = i$. Évaluons $H_E^\lambda(S)$. Si $x \in S$ et $v \in V(K)$, alors

$$\|x\|_v \le i^{\epsilon_v} \max_{1 \le j \le i} \|e_j\|_v \max(|x_1|_v, \dots, |x_i|_v)$$

où $v \mapsto \epsilon_v$ est la fonction caractéristique de $V_\infty(K)$. En intégrant, il vient

$$H_E^\lambda(S) \le i(\lambda_i(E) + \varepsilon) c_1(K)(1+\varepsilon)$$

d'où la première formule pour E quelconque. La seconde s'obtient de même en remplaçant H_E^λ par $H_E^\mathbb{Q}$. Si $E = K^n$, on choisit les e_i dans la base canonique de façon à avoir

$$\|x\|_v \le \sqrt{i}^{\epsilon_v} \max(|x_1|_v, \dots, |x_i|_v) \le \left(\sqrt{i}\, c_1(K)(1+\varepsilon)\right)^{\epsilon_v}$$

ci-dessus, ce qui donne bien ensuite $H_E^\mathbb{Q}(S) \le \sqrt{i}\, c_1(K)(1+\varepsilon)$ puis $\zeta_i^{\mathrm{BV}}(K^n) \le \sqrt{i}\, c_1(K)$. La minoration $Z_i(K^n) \ge \sqrt{i}$ découle de [11, lemme 2.2] (comme au paragraphe 3.1 de ce texte).

Pour la dernière assertion, le cas $i = n = 2$ donne $\zeta_2^{\mathrm{BV}}(K^2) \le \sqrt{2} c_1(K)$ ce qui entraîne bien que, si K est de BV-Northcott (c'est-à-dire $\zeta_2^{\mathrm{BV}}(K^2) = \infty$), alors $c_1(K) = \infty$. □

Lorsque μ_K est infini, nous pouvons l'utiliser en lieu et place de l'ensemble T de cette démonstration et donc obtenir ces estimations sans $c_1(K)$: $\zeta_i(E) \le i\lambda_i(E)$, $\zeta_i^{\mathrm{BV}}(E) \le i\lambda_i^{\mathrm{BV}}(E)$ et $Z_i(K^n) = \zeta_i^{\mathrm{BV}}(K^n) = \sqrt{i}$.

Par ailleurs, en combinant les deux dernières propositions, il vient, sur un corps K de degré $[K : \mathbb{Q}] = \infty$, pour tout E et tout i

$$\Lambda_i(E) \le \zeta_i^{\mathrm{BV}}(E) \le i c_1(K) \lambda_i^{\mathrm{BV}}(E) \le i c_1(K)^2 \Lambda_i(E).$$

Ainsi, lorsque $c_1(K)$ est fini, tous les minima d'indice i sont comparables. Notamment, si $c_{\mathrm{II}}^\Lambda(n, K)$ est fini, alors $c_{\mathrm{II}}^*(n, K)$ est fini pour tout $*$. D'un autre côté, bien sûr, si $c_1(K) = \infty$, alors $c_{\mathrm{II}}^{\mathrm{BV}}(n, K) = c_{\mathrm{II}}^{\mathrm{BVZ}}(n, K) = \infty$ pour tout $n \ge 1$ (voir plus haut). En d'autres termes, si $c_1(K)$ est fini et $[K : \mathbb{Q}]$ infini, alors les propriétés de Siegel, de Bombieri–Vaaler et de Zhang sont équivalentes.

4.5. Variation de la dimension. Examinons maintenant la variation de $c_{\mathrm{I}}^\Lambda(n, K)$ en fonction de n. L'argument ci-dessous provient de [22, p. 18] et remonte en fait à Hermite si $K = \mathbb{Q}$ (la formule est alors connue sous le nom d'inégalités de Mordell).

Lemme 4.11. *Pour tout $n \ge 2$, on a $c_{\mathrm{I}}^\Lambda(n+1, K) \le c_{\mathrm{I}}^\Lambda(n, K)^{n/(n-1)}$ et par suite $c_{\mathrm{I}}^\Lambda(n, K) \le c_{\mathrm{I}}^\Lambda(2, K)^{n-1}$.*

Démonstration. Soit E un espace adélique rigide de dimension $n+1$. Choisissons $x \in E \setminus \{0\}$ avec $H_E(x) \leq \Lambda_1(E) + \varepsilon$. Définissons $F = \{x\}^\perp \subset E^\vee$. Comme $\dim F = n$, nous avons

$$\Lambda_1(E^\vee) \leq \Lambda_1(F) \leq c_{\mathrm{I}}^\Lambda(n, K) H(F)^{1/n}.$$

Par la proposition 3.6, $H(F) = H(F^\vee)^{-1} = H_E(x) H(E)^{-1}$. En combinant et en faisant tendre ε vers 0, nous arrivons à

$$\Lambda_1(E^\vee) \leq c_{\mathrm{I}}^\Lambda(n, K) H(E)^{-1/n} \Lambda_1(E)^{1/n}.$$

Cette formule vaut aussi en remplaçant E par $E^\vee$ donc, avec $H(E^\vee) = H(E)^{-1}$,

$$\Lambda_1(E) \leq c_{\mathrm{I}}^\Lambda(n, K) H(E)^{1/n} \Lambda_1(E^\vee)^{1/n} \leq c_{\mathrm{I}}^\Lambda(n, K)^{1+1/n} H(E)^{1/n - 1/n^2} \Lambda_1(E)^{1/n^2}.$$

Par suite, puisque

$$\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{1}{n^2}\Big)^{-1} = \frac{n}{n-1} \quad \text{et} \quad \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\Big)\Big(1 - \frac{1}{n^2}\Big)^{-1} = \frac{1}{n+1},$$

nous voyons

$$\Lambda_1(E) \leq c_{\mathrm{I}}^\Lambda(n, K)^{n/(n-1)} H(E)^{1/(n+1)},$$

ce qui donne le résultat en prenant le supremum sur les E de dimension $n+1$. □

En particulier

$$c_{\mathrm{I}}^\Lambda(2, K) \text{ fini} \iff c_{\mathrm{I}}^\Lambda(n, K) \text{ fini pour tout } n \geq 1.$$

Note : dans l'autre sens, on peut montrer $c_{\mathrm{I}}^\Lambda(n, K)^n c_{\mathrm{I}}^\Lambda(m, K)^m \leq c_{\mathrm{I}}^\Lambda(m+n, K)^{m+n}$ à l'aide d'une somme directe ainsi que

$$\Big(\frac{2}{(m+1)^{1/m}}\Big)^{1/2} c_{\mathrm{I}}^\Lambda(n, K) \leq c_{\mathrm{I}}^\Lambda(mn, K).$$

En effet, d'après [11, propositions 4.1, 7.2], le sous-espace adélique rigide A_m de l'espace standard K^{m+1} défini par l'hyperplan $\{x_1 + \cdots + x_{m+1} = 0\}$ vérifie $\Lambda_1(A_m \otimes E) = \sqrt{2}\Lambda_1(E)$ et $H(A_m \otimes E)^{1/mn} = (m+1)^{1/2m} H(E)^{1/n}$. En reportant ces estimations dans

$$\Lambda_1(A_m \otimes E) \leq c_{\mathrm{I}}^\Lambda(mn, K) H(A_m \otimes E)^{1/mn}$$

puis en faisant varier E, on obtient l'inégalité voulue. Le choix $m = 2$ et une récurrence immédiate donnent $c_{\mathrm{I}}^\Lambda(2^\ell, K) \geq (2/\sqrt{3})^{\ell/2}$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$. La propriété précédente sur la somme entraîne $c_{\mathrm{I}}^\Lambda(n, K) \geq c_{\mathrm{I}}^\Lambda(2^\ell, K)^{1/2}$ avec $\ell = \lfloor \log n / \log 2 \rfloor$ et donc

$$c_{\mathrm{I}}^\Lambda(n, K) \geq (2/\sqrt{3})^{\ell/4} \geq 0{,}9 n^{1/20}.$$

En particulier $c_{\mathrm{I}}^\Lambda(n, K)$ tend vers l'infini avec n. Nous retrouverons plus loin cette propriété à travers des minorations de $c_{\mathrm{I}}^\Lambda(n, K)$ de meilleure qualité en n mais nettement moins élémentaires (voir la proposition 5.2 pour les corps de nombres et le lemme 4.21 pour les autres corps).

Il nous reste à donner un lien entre les c_{I} et les c_{II}. L'argument qui suit remonte à Minkowski [18, §51] pour $K = \mathbb{Q}$; il apparaît ensuite dans l'article de Roy et Thunder [22] dans le cas de $\overline{\mathbb{Q}}$; il fait aussi l'objet de l'article postérieur de Vaaler [29] dans le cas d'un corps de nombres (dans tous les cas pour Λ).

Théorème 4.12. *Pour tout $n \geq 1$, nous avons*

$$c_{\mathrm{I}}^{\Lambda}(n, K) = c_{\mathrm{II}}^{\Lambda}(n, K) \quad \textit{et} \quad c_{\mathrm{I}}^{\mathrm{BV}}(n, K) = c_{\mathrm{II}}^{\mathrm{BV}}(n, K).$$

La démonstration utilise un lemme facile de perturbation des normes dans un drapeau (voir [22, Lemma 3.3] et [29, Lemma 2]).

Lemme 4.13. *Soient E un espace vectoriel réel (resp. complexe) muni d'une norme euclidienne (resp. hermitienne) $\|\cdot\|$ puis $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n > 0$ des réels et*

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_{n-1} \subset E_n = E$$

un drapeau complet de sous-espaces de E (donc $\dim E_i = i$*). Alors il existe une norme euclidienne (resp. hermitienne) $\|\cdot\|'$ sur E telle que*

(1) *si $1 \leq i \leq n$ et $x \in E_i$, on a $\|x\|' \geq \alpha_i \|x\|$ et*

(2) *pour toute mesure de Haar* vol *sur E, on a*

$$\mathrm{vol}\big(\{x \in E \mid \|x\|' \leq 1\}\big) = \Big(\prod_{i=1}^{n} \alpha_i\Big)^{-1} \mathrm{vol}\big(\{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}\big).$$

Démonstration. Pour $1 \leq i \leq n$, on choisit $y_i \in E_i \cap E_{i-1}^{\perp}$ avec $\|y_i\| = 1$ puis l'on pose

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i y_i\Big\|' = \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 |a_i|^2\Big)^{1/2}. \qquad \square$$

Démonstration du théorème 4.12. Soit E un espace adélique rigide de dimension n. Fixons $\varepsilon > 0$ tel que si $\Lambda_{i-1}(E) < \Lambda_i(E)$, alors $(1+\varepsilon)\Lambda_{i-1}(E) < \Lambda_i(E)$ pour tout i avec $2 \leq i \leq n$. Choisissons ensuite une base $x_1, \ldots, x_n$ de E telle que $H_E(x_i) \leq (1+\varepsilon)\Lambda_i(E)$ pour tout i, $1 \leq i \leq n$. Posons $E_i = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_i)$. Remarquons que si $x \in E_i \setminus E_{i-1}$, alors $H_E(x) \geq \Lambda_i(E)$: en effet, en notant j le plus grand indice tel que $\Lambda_j(E) < \Lambda_i(E)$, nos choix impliquent $H_E(x_k) < \Lambda_i(E) = \Lambda_{j+1}(E)$ pour $1 \leq k \leq j$; ainsi, si x vérifiait $H_E(x) < \Lambda_i(E)$, la famille $\{x_1, \ldots, x_j, x\}$ contredirait la définition de $\Lambda_{j+1}(E)$. Définissons maintenant $\alpha_i = \Lambda_i(E)^{-1}$ pour $1 \leq i \leq n$ et appliquons le lemme avec ces valeurs au drapeau $0 \subset (E_1)_v \subset \cdots \subset (E_{n-1})_v \subset E_v$ pour tout $v \in V_\infty(K)$. Nous trouvons une collection de normes $\|\cdot\|'_v$ modifiant celles de E qui nous donnent un espace adélique E' en posant $\|\cdot\|'_v = \|\cdot\|_v$ si $v \in V(K) \setminus V_\infty(K)$. Les deux conclusions du lemme donnent ici :

(1) si $1 \leq i \leq n$ et $x \in E_i$, alors $H_E(x) \leq \Lambda_i(E) H_{E'}(x)$;

(2) $H(E) = \Lambda_1(E) \cdots \Lambda_n(E) H(E')$.

Maintenant, pour $x \in E \setminus \{0\}$, il existe $i \geq 1$ avec $x \in E_i \setminus E_{i-1}$; par la remarque faite plus haut et par (1), il vient $\Lambda_i(E) \leq H_E(x) \leq \Lambda_i(E) H_{E'}(x)$ d'où $H_{E'}(x) \geq 1$ puis $\Lambda_1(E') \geq 1$. Ainsi

$$1 \leq \Lambda_1(E') \leq c_{\mathrm{I}}^{\Lambda}(n, K) H(E')^{1/n} = c_{\mathrm{I}}^{\Lambda}(n, K) \Big(\frac{H(E)}{\Lambda_1(E) \cdots \Lambda_n(E)}\Big)^{1/n}$$

d'où

$$\Big(\frac{\Lambda_1(E)\cdots\Lambda_n(E)}{H(E)}\Big)^{1/n}\le c_{\mathrm{I}}^{\Lambda}(n,K).$$

Comme ceci est vrai pour tout E, on trouve bien $c_{\mathrm{II}}^{\Lambda}(n,K)\le c_{\mathrm{I}}^{\Lambda}(n,K)$ d'où l'égalité.

La preuve pour λ^{BV} suit exactement le même plan. Nous fixons E et $\varepsilon>0$ tels que $\lambda_{i-1}^{\mathrm{BV}}(E)<\lambda_i^{\mathrm{BV}}(E)$ entraîne $(1+\varepsilon)\lambda_{i-1}^{\mathrm{BV}}(E)<\lambda_i^{\mathrm{BV}}(E)$. Nous choisissons ensuite une base $x_1,\dots,x_n$ avec

$$\sup_{v\in V_\infty(K)}\|x_i\|_v=H_E^{\mathbb{Q}}(x_i)\le(1+\varepsilon)\lambda_i^{\mathrm{BV}}(E)$$

pour tout i : ceci est possible quitte à modifier les éléments fournis par la définition de $\lambda_i^{\mathrm{BV}}(E)$ par des éléments de $\mathbb{Q}^\times$ (comme dans le lemme 4.3) et en remarquant qu'alors

$$H_E^{\mathbb{Q}}(\{x_1,\dots,x_i\})=\max\big\{H_E^{\mathbb{Q}}(x_1),\dots,H_E^{\mathbb{Q}}(x_n)\big\}.$$

Nous avons ensuite de même si $x\in E_i\setminus E_{i-1}$ la minoration $H_E^{\mathbb{Q}}(x)\ge\lambda_i^{\mathrm{BV}}(E)$ (sinon, pour un $j<i$ et un $a\in\mathbb{Q}^\times$, la famille $x_1,\dots,x_j,ax$ contredirait la définition de $\lambda_{j+1}^{\mathrm{BV}}(E)$). La fin de la démonstration est identique en remplaçant partout Λ_i, H_E, $H_{E'}$, c^Λ par λ_i^{BV}, $H_E^{\mathbb{Q}}$, $H_{E'}^{\mathbb{Q}}$, c^{BV}. □

En revanche nous ne savons pas si $c_{\mathrm{I}}^{\lambda}(n,K)=c_{\mathrm{II}}^{\lambda}(n,K)$ en général.

Ce résultat et le précédent montrent que K est de Siegel si et seulement si $c_{\mathrm{I}}^{\Lambda}(2,K)$ est fini. De même, K de Bombieri–Vaaler équivaut à $c_{\mathrm{I}}^{\mathrm{BV}}(2,K)$ fini ou encore à $c_{\mathrm{I}}^{\Lambda}(2,K)$ et $c_1(K)$ finis. Nous pouvons à présent donner un analogue du lemme 4.11 pour c_{II}^{Z} (ce qui montre en particulier que les corps de Zhang sont caractérisés par la finitude de $c_{\mathrm{II}}^{Z}(2,K)$).

Proposition 4.14. *Si $n\ge 2$, on a $c_{\mathrm{II}}^{Z}(n,K)\le c_{\mathrm{II}}^{Z}(2,K)^{2^n}$.*

Démonstration. Nous notons pour alléger $u_n=c_{\mathrm{II}}^{Z}(n,K)^n$. Soient $n\ge 3$ et E un espace adélique rigide de dimension n. Fixons $\varepsilon>0$ tel que, si $\Lambda_{i-1}(E)<\Lambda_i(E)$, alors $(1+\varepsilon)\Lambda_{i-1}(E)<\Lambda_i(E)$ pour $2\le i\le n$. Choisissons ensuite une base $e_1,\dots,e_n$ de E telle que $H_E(e_i)\le(1+\varepsilon)\Lambda_i(E)$ pour $1\le i\le n$. Considérons enfin deux entiers $d,m\ge 2$ avec $d+m=n+1$ et posons $F=\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_m)$. Par définition, nous avons $Z_1(F)\cdots Z_m(F)\le u_mH(F)$. Par le théorème d'Hadamard (lemme 3.7), nous avons

$$H(F)\le H_E(e_1)\cdots H_E(e_m)\le(1+\varepsilon)^m\Lambda_1(E)\cdots\Lambda_m(E).$$

D'autre part $F\subset E$ donne $\Lambda_i(E)\le\Lambda_i(F)\le Z_i(F)$ pour $1\le i\le m$. Nous pouvons donc écrire

$$\Lambda_1(E)\cdots\Lambda_{m-1}(E)Z_m(F)\le u_m(1+\varepsilon)^m\Lambda_1(E)\cdots\Lambda_m(E)$$

et donc $Z_m(F)\le u_m(1+\varepsilon)^m\Lambda_m(E)$. Par suite, il existe une partie $S\subset F$, dense dans F, telle que

$$H_E^{\Lambda}(S)\le u_m(1+\varepsilon)^{m+1}\Lambda_m(E).$$

De plus, nous pouvons supposer $S\cap\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{m-1})=\emptyset$ sans restriction. Définissons alors pour $x\in S$ un espace $F_x=\mathrm{Vect}(x,e_{m+1},\dots,e_n)$ de dimension d. Nous prétendons que pour $1\le i\le d$ nous avons $\Lambda_{m-1+i}(E)\le\Lambda_i(F_x)$: en effet, si ceci était faux, nous pourrions trouver une famille libre $y_1, \dots, y_i$ de F_x avec $H_E(y_k) < \Lambda_{m-1+i}(E)$ pour $1 \le k \le i$; notons ensuite j le plus grand indice tel que $\Lambda_j(E) < \Lambda_{m-1+i}(E)$, alors

$$H_E^{\Lambda}\big(\{e_1, \dots, e_j, y_1, \dots, y_i\}\big) < \Lambda_{m-1+i}(E) = \Lambda_{j+1}(E)$$

donc

$$\dim \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_j, y_1, \dots, y_i) = j$$

donc $\mathrm{Vect}(y_1, \dots, y_i) \subset F_x \cap \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_j)$; par construction, cette intersection est dans $\mathrm{Vect}(x, e_{m+1}, \dots, e_j)$ de dimension $\max(0, j - m + 1)$ et donc $i \le j - m + 1$; enfin ceci s'écrit $j \ge m - 1 + i$ et contredit $\Lambda_j(E) < \Lambda_{m-1+i}(E)$. Ainsi nous avons

$$\Lambda_{m-1+i}(E) \le \Lambda_i(F_x) \le Z_i(F_x)$$

et donc

$$\Lambda_m(E) \cdots \Lambda_{n-1}(E) Z_d(F_x) \le Z_1(F_x) \cdots Z_d(F_x) \le u_d H(F_x)$$

d'autre part, par Hadamard et la définition de S, il vient

$$H(F_x) \le H_E(x) H_E(e_{m+1}) \cdots H_E(e_n) \le u_m (1+\varepsilon)^{n+1} \Lambda_m(E) \cdots \Lambda_n(E).$$

En combinant, nous trouvons : $Z_d(F_x) \le u_d u_m (1+\varepsilon)^{n+1} \Lambda_n(E)$. Il existe donc une partie dense S_x de F_x telle que

$$H_E^{\Lambda}(S_x) \le u_d u_m (1+\varepsilon)^{n+2} \Lambda_n(E).$$

Par suite, $\tilde{S} = \bigcup_{x \in S} S_x$ est dense dans $\bigcup_{x \in S} F_x$ et vérifie $H_E^{\Lambda}(\tilde{S}) \le u_d u_m (1+\varepsilon)^{n+2} \Lambda_n(E)$. De plus, $\bigcup_{x \in S} F_x$ est dense dans E car S est dense dans F donc

$$Z_n(E) \le u_d u_m (1+\varepsilon)^{n+2} \Lambda_n(E).$$

Le calcul fait plus haut pour F donne, en remplaçant m par $n-1$,

$$Z_1(E) \cdots Z_{n-1}(E) \le u_{n-1} (1+\varepsilon)^{n-1} \Lambda_1(E) \cdots \Lambda_{n-1}(E)$$

(car $Z_i(E) \le Z_i(\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}))$ pour $1 \le i \le n-1$). En multipliant et faisant tendre ε vers 0, nous avons

$$Z_1(E) \cdots Z_n(E) \le u_d u_m u_{n-1} \Lambda_1(E) \cdots \Lambda_n(E)$$

puis

$$\frac{Z_1(E) \cdots Z_n(E)}{H(E)} \le u_d u_m u_{n-1} c_{\mathrm{II}}^{\Lambda}(n, K)^n.$$

Or

$$c_{\mathrm{II}}^{\Lambda}(n, K) = c_{\mathrm{I}}^{\Lambda}(n, K) \le c_{\mathrm{I}}^{\Lambda}(2, K)^{n-1} \le c_{\mathrm{II}}^{Z}(2, K)^{n-1} = u_2^{(n-1)/2}.$$

Finalement en prenant le supremum sur E rigide, nous trouvons

$$u_n \le u_d u_m u_{n-1} u_2^{n(n-1)/2}.$$

En choisissant $\{d, m\} = \{2, n-1\}$, nous pouvons écrire

$$u_n \le u_{n-1}^2 u_2^{\binom{n}{2}+1}.$$

Montrons par récurrence avec cette relation $u_n \leq u_2^{n2^{n-1}}$: il s'agit simplement de vérifier

$$2(n-1)2^{n-2} + \binom{n}{2} + 1 \leq n2^{n-1}$$

ou encore $n^2 - n + 2 \leq 2^n$, qui est vrai de manière élémentaire pour $n \geq 1$. Par suite, nous avons montré $u_n^{1/n} \leq (u_2^{1/2})^{2^n}$ qui est la majoration de l'énoncé. Remarquons que l'on peut faire un peu mieux que ceci : en choisissant $|d - m| \leq 1$, on obtient une relation de récurrence qui permet de majorer

$$\frac{\log c_{\mathrm{II}}^{Z}(n, K)}{\log c_{\mathrm{II}}^{Z}(2, K)}$$

non par 2^n mais par $2n^{\log n}$. □

Bien entendu, on rappelle que, lorsque $c_1(K)$ est fini, on peut obtenir une meilleure dépendance en n : de même que $\lambda_i^{\mathrm{BV}}(E) \leq c_1(K)\Lambda_i(E)$ donne

$$c_{\mathrm{II}}^{\mathrm{BV}}(n, K) \leq c_1(K) c_{\mathrm{II}}^{\Lambda}(n, K) \leq c_1(K) c_{\mathrm{I}}^{\Lambda}(2, K)^{n-1} \leq c_{\mathrm{I}}^{\mathrm{BV}}(2, K)^n,$$

la majoration $Z_i(E) \leq \zeta_i^{\mathrm{BV}}(E) \leq n c_1(K)^2 \Lambda_i(E)$ fournit, lorsque $[K : \mathbb{Q}] = \infty$,

$$c_{\mathrm{II}}^{Z}(n, K) \leq c_{\mathrm{II}}^{\mathrm{BVZ}}(n, K) \leq n c_1(K)^2 c_{\mathrm{I}}^{\Lambda}(2, K)^{n-1} \leq n c_{\mathrm{I}}^{\mathrm{BV}}(2, K)^{n+1}.$$

On consultera aussi le corollaire 4.20 ci-dessous pour une autre majoration de $c_{\mathrm{II}}^{Z}(n, K)$.

4.6. Corps de Siegel et corps de Zhang. Dans ce paragraphe, nous montrons qu'en dehors des corps de nombres, tout corps de Siegel est un corps de Zhang. Pour effectuer la construction qui nous mènera à ce résultat, nous avons besoin de la définition suivante. Pour une place v, nous notons p_v sa restriction à $\mathbb{Q}$, vue comme un nombre premier ou ∞. Nous écrivons aussi pour alléger $\mu(v) = \mu(\{v\})$ la mesure du singleton $\{v\}$ (voir paragraphe 2.2).

Définition 4.15. Soit K une extension algébrique de $\mathbb{Q}$. Nous appelons indice d'impureté de K et notons $u(K)$ l'élément de $[1, +\infty]$ donné par

$$\sup_{N \geq 1} \inf\bigl\{p_v^{\mu(v)/e_v} \mid v \in V(K) \setminus V_\infty(K),\ p_v^{f_v} \geq N\bigr\}.$$

Dans cette écriture, $p_v^{\mu(v)/e_v}$ doit être compris comme 1 si $e_v = \infty$ (ou $\mu(v) = 0$) tandis que $p_v^{f_v} \geq N$ est vrai si $f_v = \infty$.

Lemme 4.16. *Nous avons $u(K) = +\infty$ si et seulement si K est un corps de nombres.*

Démonstration. Si K est un corps de nombres de degré D, alors $\mu(v)/e_v = f_v/D$ donc pour $N \geq 1$ il vient $\inf\{p_v^{\mu(v)/e_v} \mid p_v^{f_v} \geq N\} \geq N^{1/D}$ d'où $u(K) = +\infty$. Supposons que K ne soit pas un corps de nombres. S'il existe $v \in V(K) \setminus V_\infty(K)$ telle que $f_v = \infty$, alors $u(K) \leq p_v^{\mu(v)/e_v} \leq p_v < +\infty$. Si, au contraire, $f_v < \infty$ pour tout $v \in V(K) \setminus V_\infty(K)$, alors $u(K) = 1$ car $f_v < \infty$ entraîne $\mu(v)/e_v = 0$ (en effet, pour tout corps de nombres $K_0 \subset K$ de degré D_0, on a $\mu(v) \leq \mu(v_{|K_0}) = e_{v_{|K_0}} f_{v_{|K_0}} D_0^{-1} \leq e_v f_v / D_0$ donc $\mu(v)/e_v \leq f_v/D_0$ et l'on peut choisir D_0 arbitrairement grand puisque K n'est pas un corps de nombres). □

Nous voyons aussi dans cette démonstration que $u(K) = 1$ s'il existe une place avec $e_v = f_v = \infty$ (par exemple $u(\overline{\mathbb{Q}}) = 1$) ou s'il existe une suite de places v avec $f_v < \infty$ mais $p_v^{f_v}$ non borné. Le cas $u(K) > 1$ se produit également.

Lemme 4.17. *Pour tout réel B, il existe un corps K avec $B < u(K) < +\infty$.*

Démonstration. Soit $(p_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement croissante de nombres premiers avec $p_0 = 2$ et $p_n > B^{2^n}$ si $n \geq 1$. Considérons une suite de corps de nombres $(K_n)_{n\geq 0}$ avec $K_0 = \mathbb{Q}$ et $[K_n : K_{n-1}] = 2$ si $n \geq 1$. Nous imposons de plus, grâce à la proposition 2.10, que, pour toute place w de K_{n-1} avec $p_w < p_n$, il existe une unique place w' de K_n au-dessus de w de sorte que $e(w|w') = 2$ si $p_w < p_1$ et $f(w|w') = 2$ si $p_1 \leq p_w < p_n$. Montrons que $K = \bigcup_{n\geq 0} K_n$ convient. Si v est une place finie de K, il existe $n \geq 0$ tel que $p_n \leq p_v < p_{n+1}$. Par construction, v est l'unique extension à K de la place $w = v_{|K_n}$. Si $n = 0$, alors $f_v = 1$ donc $p_v^{f_v} < p_1$ et v n'a pas d'influence sur la valeur de $u(K)$. Si $n \geq 1$, alors $f_v = \infty$ et

$$p_v^{\mu(v)/e_v} = p_v^{\mu(w)/e_w} = p_v^{f_w/[K_n:\mathbb{Q}]} = p_v^{f_w/2^n} \geq p_n^{2^{-n}} > B. \qquad \square$$

Nous en venons maintenant à l'argument central de la construction. Nous allons procéder par perturbation de normes, un peu à la manière dont le lemme 4.13 conduit au théorème 4.12. La difficulté réside dans le fait qu'au lieu d'un drapeau de sous-espaces, nous devons tenir compte d'une suite de fermés algébriques. Nous résolvons ce problème de la façon suivante, avec une norme ultramétrique ayant un corps résiduel assez gros.

Proposition 4.18. *Soient k'/k une extension de corps, $|\cdot|$ une valeur absolue ultramétrique sur k de corps résiduel k_0 et E un k-espace vectoriel normé de dimension n admettant une base orthonormée. Soient $Y_1 \subset \cdots \subset Y_n \subset E \otimes k'$ des fermés de Zariski définis sur k tels que $k'Y_i = Y_i$, $\dim Y_i \leq i$ et $\deg Y_i < \operatorname{Card} k_0$ pour $1 \leq i \leq n-1$. Alors il existe une base orthonormée $e_1, \ldots, e_n$ de E de sorte que, pour toute extension de $|\cdot|$ à k', tout $1 \leq i \leq n$ et tous $x_1, \ldots, x_n \in k'$, on ait :*

$$\sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in Y_i \implies \max\big(|x_1|, \ldots, |x_i|\big) = \max\big(|x_1|, \ldots, |x_n|\big).$$

Démonstration. Nous notons $\mathcal{O}$ la boule unité de k et procédons par récurrence sur n. L'énoncé se réduisant à une tautologie si $n = 1$, nous supposons $n \geq 2$ et choisissons une base orthonormée $f_1, \ldots, f_n$ de E. Il existe un polynôme non nul $P \in k'[X_1, \ldots, X_n]$ de degré $\deg Y_{n-1}$ tel que $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$ si $x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n \in Y_{n-1}$. Nous pouvons le supposer homogène (car $k'Y_{n-1} = Y_{n-1}$) et à coefficients dans k (car Y_{n-1} est défini sur k). Nous pouvons même demander que $P \in \mathcal{O}[X_1, \ldots, X_n]$ et l'un des coefficients appartienne à $\mathcal{O}^\times$. Dans ces conditions, il existe $a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathcal{O}$ tels que $P(a_1, \ldots, a_{n-1}, 1) \in \mathcal{O}^\times$: ceci résulte de $\operatorname{Card} k_0 > \deg P$ (la réduction de $P(X_1, \ldots, X_{n-1}, 1)$ ne peut pas être identiquement nulle sur k_0^{n-1}). Posons $e_n = a_1 f_1 + \cdots + a_{n-1} f_{n-1} + f_n$. La famille $f_1, \ldots, f_{n-1}, e_n$ forme une base orthonormée de E. Considérons à présent $p\colon E \to F = kf_1 \oplus \cdots \oplus kf_{n-1}$ la projection de noyau ke_n puis $Y_i' = (p \otimes \mathrm{id})(Y_i)$ pour $1 \leq i \leq n-1$. Ici les Y_i' sont des fermés de Zariski emboîtés de $F \otimes k'$ avec $k'Y_i' = Y_i'$, $\dim Y_i' \leq \dim Y_i \leq i$ et $\deg Y_i' \leq \deg Y_i < \operatorname{Card} k_0$.

L'hypothèse de récurrence s'applique donc et produit une base orthonormée $e_1, \ldots, e_{n-1}$ de F. Vérifions à présent la propriété de l'énoncé. Choisissons pour cela une extension de $|\cdot|$ à k' puis $1 \leq i \leq n-1$ et $x_1, \ldots, x_n \in k'$ tels que $\sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in Y_i$. Alors $f = \sum_{j=1}^{n-1} x_j e_j \in Y_i'$ donc

$$\max\bigl(|x_1|, \ldots, |x_i|\bigr) = \max\bigl(|x_1|, \ldots, |x_{n-1}|\bigr) = \max\bigl(|y_1|, \ldots, |y_{n-1}|\bigr)$$

si nous écrivons

$$f = \sum_{j=1}^{n-1} y_j f_j.$$

Il reste à voir $|x_n| \leq \max(|y_1|, \ldots, |y_{n-1}|)$. Comme $f + x_n e_n \in Y_i \subset Y_{n-1}$, il vient

$$0 = P(y_1 + a_1 x_n, \ldots, y_{n-1} + a_{n-1} x_n, x_n) = x_n^{\deg P} P(a_1, \ldots, a_{n-1}, 1) + \gamma$$

où, en développant,

$$|\gamma| \leq \max\bigl(|y_1|, \ldots, |y_{n-1}|\bigr) \max\bigl(|y_1|, \ldots, |y_{n-1}|, |x_n|\bigr)^{\deg P - 1}.$$

On en déduit la majoration de $|x_n|$ grâce à $|P(a_1, \ldots, a_{n-1}, 1)| = 1$. □

Voici la construction annoncée.

Théorème 4.19. *Soient K une extension algébrique de $\mathbb{Q}$ et E un espace adélique rigide sur K de dimension n. Pour $1 \leq i \leq n$, soit α_i un nombre réel tel que $0 < \alpha_i < Z_i(E)$. Il existe un espace adélique E' rigide sur K de dimension n tel que*

$$\frac{(u(K) Z_1(E'))^n}{H(E')} \geq \frac{\alpha_1 \cdots \alpha_n}{H(E)}.$$

Démonstration. Choisissons des réels $\beta_1 \leq \cdots \leq \beta_n$ tels que $\alpha_i < \beta_i < Z_i(E)$ pour $1 \leq i \leq n$. Par définition de $Z_i(E)$, l'adhérence de $\{x \in E \mid H_E(x) \leq \beta_i\}$ pour la topologie de Zariski est un fermé de E de dimension au plus $i-1$ que nous notons Y_{i-1}. Nous avons $\{0\} = Y_0 \subset Y_1 \subset \cdots \subset Y_{n-1}$ et posons en outre $Y_n = E$. Remarquons $K Y_i = Y_i$ pour tout i et écrivons $N = 1 + \max_{0 \leq i \leq n} \deg Y_i$. Fixons un corps de nombres $K_0 \subset K$ tel que l'espace adélique E d'une part et les fermés Y_i d'autre part soient définis sur K_0. Cela signifie qu'il existe un espace adélique rigide E_0 sur K_0 tel que E soit l'extension des scalaires $E_0 \otimes K$ tandis que, pour $1 \leq i \leq n$, l'idéal de l'algèbre symétrique $S(E^\vee)$ définissant Y_i est engendré par des éléments de $S(E_0^\vee)$. Considérons encore une place ultramétrique v_0 de K_0 telle que

$$p_{v_0}^{f_{v_0}} \geq N.$$

Nous pouvons alors appliquer la proposition précédente avec $k = K_0, k' = K, |\cdot| = |\cdot|_{v_0}$ et le k-espace normé $(E_0, \|\cdot\|_{E_0, v_0})$ (voir la propriété citée à la fin du paragraphe 3.2). Nous obtenons une base $e_1, \ldots, e_n$ de E_0 orthonormée pour $\|\cdot\|_{E_0, v_0}$ qui nous permet de définir l'espace adélique E' sur K (défini sur K_0) qui partage avec E l'espace vectoriel sous-jacent et toutes les normes sauf celles associées aux places $v \in V_{v_0}(K)$ pour lesquelles nous posons

$$\Bigl\| \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \Bigr\|_{E', v} = \max_{1 \leq j \leq n} \bigl(\mathrm{pur}_{v_0}(\beta_j^{-1/\mu(v_0)}) |x_j|_v \bigr)$$

si $x_1, \ldots, x_n \in K_v$.

Soit à présent $x \in E'$ non nul. Il existe $1 \leq i \leq n$ avec $x \in Y_i \setminus Y_{i-1}$. L'hypothèse $x \notin Y_{i-1}$ fournit $H_E(x) \geq \beta_i$ tandis que $x \in Y_i$ donne, grâce à la proposition, $\|x\|_{E,v} = \max_{1\leq j\leq i}|x_j|_v$ si $v \in V_{v_0}(K)$ et $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$. Alors

$$\|x\|_{E',v} \geq \max_{1\leq j\leq i} \beta_j^{-1/\mu(v_0)}|x_j|_v \geq \beta_i^{-1/\mu(v_0)} \max_{1\leq j\leq i}|x_j|_v = \beta_i^{-1/\mu(v_0)}\|x\|_{E,v}$$

en utilisant $\mathrm{pur}_{v_0}(a) \geq a$ pour un réel a et la croissance des β_i. En intégrant sur $V(K)$, il vient $H_{E'}(x) \geq \beta_i^{-1}H_E(x) \geq 1$, ce qui nous permet de conclure $Z_1(E') \geq 1$. Par ailleurs, nous avons

$$H(E') = H(E)\prod_{j=1}^n \mathrm{pur}_{v_0}(\beta_j^{-1/\mu(v_0)})^{\mu(v_0)} \leq \frac{H(E)}{\beta_1\cdots\beta_n} p_{v_0}^{n\mu(v_0)/e_{v_0}}$$

en employant cette fois $\mathrm{pur}_{v_0}(a) \leq a p_{v_0}^{1/e_{v_0}}$ pour $a \geq 0$. Définissons maintenant $\varepsilon > 0$ par $(\beta_1\cdots\beta_n)/(\alpha_1\cdots\alpha_n) = (1+\varepsilon)^{2n}$. Nos calculs montrent

$$\frac{\big(p_{v_0}^{\mu(v_0)/e_{v_0}}(1+\varepsilon)^{-2}Z_1(E')\big)^n}{H(E')} \geq \frac{\alpha_1\cdots\alpha_n}{H(E)}$$

donc il reste à voir que l'on peut choisir le couple (K_0, v_0) avec $p_{v_0}^{\mu(v_0)/e_{v_0}} \leq u(K)(1+\varepsilon)^2$. Or, par définition, il existe $v \in V(K)$ avec $p_v^{f_v} \geq N$ et $p_v^{\mu(v)/e_v} \leq u(K)(1+\varepsilon)$. Nous imposons $v_0 = v_{|K_0}$ et choisissons K_0 assez gros pour avoir simultanément les trois conditions :

$$E \text{ et les } Y_i \text{ sont définis sur } K_0\,; \quad p_{v_0}^{f_{v_0}} \geq N\,; \quad p_{v_0}^{\mu(v_0)/e_{v_0}} \leq p_v^{\mu(v)/e_v}(1+\varepsilon).$$

Ceci est possible car si γ (à valeurs dans $[1,\infty]$) est l'une des trois fonctions e, f ou $1/\mu$, nous avons

$$\gamma(v) = \sup\big\{\gamma(v_{|K_1}) \mid K_1 \subset K,\ [K_1 : \mathbb{Q}] < \infty\big\}$$

et $\gamma(v_{|K_1}) \leq \gamma(v_{|K_2})$ si $K_1 \subset K_2 \subset K$. Finalement ce choix de (K_0, v_0) fournit bien un espace E' qui répond au problème. $\square$

Le résultat principal de ce paragraphe découle facilement de cet énoncé.

Corollaire 4.20. *Soient K une extension algébrique de $\mathbb{Q}$ et $n \geq 1$. Nous avons $c_{\mathrm{II}}^{Z}(n,K) \leq u(K)c_{\mathrm{I}}^{\Lambda}(n,K)$. En particulier, si K est un corps de Siegel sans être un corps de nombres, alors c'est un corps de Zhang.*

Démonstration. Dans le théorème, nous majorons $Z_1(E') \leq c_{\mathrm{I}}^{\Lambda}(n,K)H(E')^{1/n}$ puis faisons tendre chaque α_i vers $Z_i(E)$. Par suite, tout espace adélique rigide E sur K de dimension n vérifie

$$\frac{Z_1(E)\cdots Z_n(E)}{H(E)} \leq \big(u(K)c_{\mathrm{I}}^{\Lambda}(n,K)\big)^n.$$

Nous en déduisons immédiatement l'inégalité souhaitée en faisant varier E et la dernière assertion s'ensuit grâce au lemme 4.16. $\square$

Un corps de Northcott ne pouvant pas être de Zhang, nous en déduisons aussi que les seuls corps à la fois de Siegel et de Northcott sont les corps de nombres (les arguments donnés ci-dessus restent entièrement valables lorsque les $Z_i(E)$ sont infinis pour $i \geq 2$).

Comme nous avons toujours $c_{\mathrm{I}}^{\Lambda}(n,K) = c_{\mathrm{I}}^{Z}(n,K) \leq c_{\mathrm{II}}^{Z}(n,K)$, nous remarquons qu'il y a égalité lorsque $u(K) = 1$. Nous trouvons donc, dans ce cas seulement, un analogue du théorème 4.12 pour c^Z. Sous cette hypothèse, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un espace adélique rigide E sur K tel que $Z_n(E) \leq Z_1(E)(1+\varepsilon)$.

Nous terminons par deux minorations de $c_{\mathrm{I}}^{\Lambda}(n,K)$ qui améliorent (au moins asymptotiquement) l'estimation mentionnée après le lemme 4.11.

Lemme 4.21. *Soient K une extension algébrique de $\mathbb{Q}$ et $n \geq 1$. Nous avons*

$$c_{\mathrm{I}}^{\Lambda}(n,K) \geq \max\left(\frac{n!^{1/2n}}{u(K)}, \frac{\exp((H_n-1)/2)}{u(K)^n}\right)$$

où $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

Démonstration. Considérons d'abord l'espace adélique standard K^n. Pour $1 \leq i \leq n$, nous avons $Z_i(K^n) \geq \sqrt{i}$ (voir proposition 4.10). Cet exemple montre $c_{\mathrm{II}}^{Z}(n,K) \geq n!^{1/2n}$ et nous obtenons la première minoration grâce au corollaire. Pour la seconde, fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons un espace adélique E sur K de dimension n tel que

$$Z_1(E) \geq (1+\varepsilon)^{-1} c_{\mathrm{I}}^{\Lambda}(n,K) H(E)^{1/n}.$$

Comme par ailleurs nous avons

$$Z_1(E)^{n-1} Z_n(E) \leq Z_1(E) \cdots Z_n(E) \leq c_{\mathrm{II}}^{Z}(n,K)^n H(E) \leq u(K)^n c_{\mathrm{I}}^{\Lambda}(n,K)^n H(E),$$

nous arrivons à

$$Z_n(E) \leq (1+\varepsilon)^{n-1} u(K)^n c_{\mathrm{I}}^{\Lambda}(n,K) H(E)^{1/n}.$$

Or un théorème de Zhang [11, théorème 3.1] entraîne

$$Z_n(E) \geq Z_n(E \otimes \overline{\mathbb{Q}}) \geq \exp((H_n-1)/2) H(E)^{1/n}$$

pour tout E. Le résultat en découle en faisant tendre ε vers 0. □

4.7. Variation du corps. Dans ce paragraphe, nous considérons deux extensions $K \subset L$ algébriques de $\mathbb{Q}$ et cherchons à relier les invariants de K et L. Nous constatons tout d'abord que, si L est un corps de Northcott, respectivement de BV-Northcott, alors il en va de même de K. C'est évident dans toutes les formulations ; en termes de minima, nous avons par exemple $Z_2(L^2) \leq Z_2(K^2)$ et $\zeta_2(L^2) \leq \zeta_2(K^2)$.

Ces majorations résultent aussi de l'énoncé ci-dessous avec $E = K^2$.

Lemme 4.22. *Pour tout espace adélique rigide E sur K, nous avons $H(E \otimes L) = H(E)$ ainsi que $\lambda_i^*(E \otimes L) \leq \lambda_i^*(E)$ pour $1 \leq i \leq \dim E$ et $* \in \{\Lambda, \lambda, \mathrm{BV}, Z, \zeta, \mathrm{BVZ}\}$.*

Démonstration. La première assertion découle immédiatement de la définition matricielle de l'extension des scalaires. En outre, pour $S \subset E$, nous avons $H_E^*(S) = H_{E\otimes L}^*(S\otimes 1)$ pour $*$ comme dans l'énoncé. La comparaison des minima résulte maintenant des égalités $\dim \mathrm{Vect}_K(S) = \dim \mathrm{Vect}_L(S \otimes 1)$ et $\dim \mathrm{Zar}_K(S) = \dim \mathrm{Zar}_L(S \otimes 1)$, cette dernière traduisant le fait que le schéma sur $\mathrm{Spec}\, L$ défini par $\mathrm{Zar}_L(S \otimes 1)$ coïncide avec l'extension des scalaires du schéma défini par $\mathrm{Zar}_K(S)$. □

Pour aller plus avant, supposons désormais que L est une extension finie de K. Dans ce cas, nous disposons de la réciproque des propriétés précédentes : L est un corps de Northcott (respectivement de BV-Northcott) si et seulement si K en est un. Cette observation est connue (voir [32, Theorem 2]) pour la propriété de Northcott et la même démonstration vaut pour la propriété de BV-Northcott : l'argument consiste à associer à un élément x de L (resp. $\mathcal{O}_L$) son polynôme minimal sur K puis à majorer la hauteur (resp. la maison) des coefficients en fonction de celle de x ; si K vérifie la propriété requise, il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour ces coefficients, donc pour x.

Nous avons ensuite les estimations suivantes en sens inverse du lemme.

Proposition 4.23. *Si L est une extension finie de K, il existe un réel $\kappa \geq 1$ tel que, pour tout espace adélique rigide E sur K et tout entier i avec $1 \leq i \leq \dim E$, on ait $\lambda_i^{\mathrm{BV}}(E) \leq \kappa\lambda_i^{\mathrm{BV}}(E \otimes L)$ et $\zeta_i^{\mathrm{BV}}(E) \leq \kappa i \zeta_i^{\mathrm{BV}}(E \otimes L)$.*

Démonstration. En vertu du lemme 4.22, nous pouvons remplacer L par une extension fixée de L. Ceci permet de supposer pour la preuve que L/K est galoisienne. Nous fixons une base $e_1, \dots, e_D$ de L sur K formée d'éléments de $\mathcal{O}_L$ et notons $B = \max_{1\leq j\leq D} \lceil e_j \rceil$. Pour E et i comme dans l'énoncé et $\varepsilon > 0$, choisissons $x_1, \dots, x_i \in E \otimes L$ libres sur L tels que $\|x_k\|_w \leq 1$ si $w \in V(L) \setminus V_\infty(L)$ et $\|x_k\|_w \leq \lambda_i^{\mathrm{BV}}(E \otimes L) + \varepsilon$ si $w \in V_\infty(L)$ pour tout $1 \leq k \leq i$. Notons

$$S = \left\{\mathrm{Tr}_{L/K}(e_j x_k) \mid 1 \leq j \leq D,\, 1 \leq k \leq i\right\} \subset E.$$

Ici la trace d'un élément de $E \otimes L$ est la somme de ses conjugués pour l'action naturelle de $\mathrm{Gal}(L/K)$ sur $E \otimes L$. Un calcul direct fournit $\|y\|_v \leq 1$ si $v \in V(K) \setminus V_\infty(K)$ et $\|y\|_v \leq DB(\lambda_i^{\mathrm{BV}}(E \otimes L) + \varepsilon)$ si $v \in V_\infty(K)$ pour tout $y \in S$. Nous aurons donc établi la première inégalité avec $\kappa = DB$ si nous montrons que S contient i vecteurs indépendants de E. Par non-dégénérescence de la forme trace, nous pouvons inverser la matrice $(\mathrm{Tr}_{L/K}(e_j e_\ell))_{1\leq j,\ell\leq D}$ et donc écrire x_k comme combinaison linéaire sur L des $\mathrm{Tr}_{L/K}(e_j x_k)$ avec $1 \leq j \leq D$. Par suite, $x_k \in \mathrm{Vect}_L(S \otimes 1) = \mathrm{Vect}_K(S) \otimes L$ d'où l'on tire bien $\dim \mathrm{Vect}_K(S) \geq i$. La seconde partie de l'énoncé se ramène à la première si $i = 1$ et est vide si $\zeta_i^{\mathrm{BV}}(E \otimes L) = \infty$. Nous supposons donc $i \geq 2$ et $\zeta_i^{\mathrm{BV}}(E \otimes L) < \infty$. Par la proposition 4.4, ceci entraîne que L n'est pas de BV-Northcott. Il en est alors de même de K donc il existe $B' \in \mathbb{R}$ et une partie infinie $T \subset \mathcal{O}_K$ avec $\lceil f \rceil \leq B'$ pour tout $f \in T$. De la sorte $S' = \{\sum_{y\in S} f_y y \mid f_y \in T\} \subset E$ vérifie $\dim \mathrm{Zar}(S') \geq i$ (puisque $\mathrm{Vect}(S) \subset \mathrm{Zar}(S')$). De plus, si $z \in S'$, alors $\|z\|_v \leq 1$ pour $v \in V(K) \setminus V_\infty(K)$ et $\|z\|_v \leq iD^2BB'(\lambda_i^{\mathrm{BV}}(E \otimes L) + \varepsilon)$ si $v \in V_\infty(K)$. Nous en déduisons donc $\zeta_i^{\mathrm{BV}}(E) \leq iD^2BB'\lambda_i^{\mathrm{BV}}(E \otimes L)$ puis l'énoncé en changeant la valeur de κ (sachant que l'on a toujours $\lambda_i^{\mathrm{BV}}(E \otimes L) \leq \zeta_i^{\mathrm{BV}}(E \otimes L)$). □

Comme conséquence directe de cet énoncé, nous avons $c_{\mathrm{I}}^{\mathrm{BV}}(n,K) \leq \kappa c_{\mathrm{I}}^{\mathrm{BV}}(n,L)$ et $c_{\mathrm{II}}^{\mathrm{BVZ}}(n,K) \leq \kappa n c_{\mathrm{II}}^{\mathrm{BVZ}}(n,L)$. En particulier, si L est un corps de Bombieri–Vaaler, alors il en va de même de K. De plus, le cas $n = 1$ donne $c_1(K) \leq \kappa c_1(L)$ donc si $c_1(L)$ est fini alors $c_1(K)$ aussi.

Tandis que les résultats précédents étaient basés sur la notion d'extension des scalaires d'un espace adélique rigide, nous voulons maintenant faire intervenir la restriction des scalaires. Cela pose un problème de définition. Si F est un L-espace vectoriel de dimension finie, nous notons pour clarifier $\mathrm{Res}_{L/K} F$ l'espace F vu comme K-espace vectoriel. Si F porte une structure d'espace adélique sur L, la question est donc de munir $\mathrm{Res}_{L/K} F$ d'une structure d'espace adélique induite. Lorsque K et L sont des corps de nombres, nous disposons de l'énoncé suivant qui fournit une réponse naturelle.

Lemme 4.24. *Soit F un espace adélique rigide sur L. Définissons une structure adélique sur $E = \mathrm{Res}_{L/K} F$ par, si $v \in V(K)$ et $x \in F \otimes_K K_v$,*

$$\|x\|_{E,v} = \begin{cases} \Bigl(\sum_{w \in V_v(L)} [L_w : K_v] \|x\|_{F,w}^2 \Bigr)^{1/2} & \text{si } v \in V_\infty(K), \\ \mathrm{pur}_v\bigl(\max_{w \in V_v(L)} \|x\|_{F,w} \bigr) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $[K:\mathbb{Q}] < \infty$, alors cette structure définit un espace adélique rigide sur K.

Démonstration. Justifions en premier lieu que les expressions données définissent des normes sur $E_v = E \otimes_K K_v$ sans hypothèse sur K. Par produit tensoriel avec le L-espace F, l'isomorphisme d'anneaux

$$L \otimes_K K_v \simeq \prod_{w \in V_v(L)} L_w$$

donne un isomorphisme de K_v-espaces vectoriels

$$E_v \simeq F \otimes_K K_v \simeq \prod_{w \in V_v(L)} F_w.$$

Ainsi, pour chaque $w \in V_v(L)$, à travers la projection sur le facteur F_w, la norme $\|\cdot\|_{F,w}$ sur F_w fournit une application $E_v \to \mathbb{R}$ encore notée $\|\cdot\|_{F,v}$ (bien qu'elle ne soit pas en général une norme sur E_v) qui coïncide sur $F \simeq E \subset E_v$ avec la restriction de $\|\cdot\|_{F,w}$ à $F \subset F_w$. Cette décomposition de E_v en produit montre directement que $\|\cdot\|_{E,v}$ est une norme sur ce K_v-espace.

Nous supposons dorénavant que K est un corps de nombres et montrons que la structure adélique est rigide. Commençons par vérifier que la norme est donnée par une matrice place par place. Fixons un L-isomorphisme $\varphi\colon F \to L^n$ et un K-isomorphisme $\chi\colon L \to K^D$ de sorte que $\psi = \chi^n \circ \varphi\colon E \to K^{nD}$ est un K-isomorphisme. Si $v \in V_\infty(K)$, alors la formule définit clairement une norme hermitienne donc il existe une matrice $A_v \in \mathrm{GL}_{nD}(K_v)$ telle que $\|x\|_{E,v} = |A_v \psi_v(x)|_v$ pour $x \in F \otimes K_v$. Si $v \notin V_\infty(K)$, le fait d'avoir une valuation discrète assure $\mathrm{pur}_v(\mathbb{R}) = |K_v|_v$ donc la norme définie est pure. Comme K_v est localement compact (sphériquement complet suffirait), il existe une base orthonormée pour $\|\cdot\|_{E,v}$ donc une matrice $A_v \in \mathrm{GL}_{nD}(K_v)$ avec $\|x\|_{E,v} = |A_v \psi_v(x)|_v$ si $x \in F \otimes K_v$.

Il reste simplement à voir que nous pouvons choisir ces matrices A_v de sorte que leur collection forme un élément de $\mathrm{GL}_{nD}(\mathbb{A}_K)$. Puisque K est un corps de nombres, cela signifie seulement que l'on peut choisir $A_v = \mathrm{Id}$ pour tout v sauf un nombre fini. Or l'hypothèse sur F entraîne qu'en dehors d'une partie finie de $V(L)$, nous avons $\|x\|_{F,w} = |\varphi_w(x)|_w$ pour $x \in F_w$. En outre, en dehors d'une partie finie de $V(K) \setminus V_\infty(K)$ convenablement choisie, l'image réciproque par χ_v de la base canonique de K_v^D forme une base de $\prod_{w \in V_v(L)} \mathcal{O}_{L_w}$ dans $L \otimes K_v \simeq \prod_{w \in V_v(L)} L_w$ donc $|\chi(y)|_v = |y|_v = \max_{w \in V_v(L)} |y|_w$ pour $y \in L \otimes K_v$. Ceci s'étend aux vecteurs de $L^n \otimes K_v$ et, en combinant, nous pouvons écrire pour $x \in F \otimes K_v$

$$\begin{aligned}\|x\|_{E,v} &= \mathrm{pur}_v\big(\max_{w \in V_v(L)} \|x\|_{F,w}\big)\\ &= \mathrm{pur}_v\big(\max_{w \in V_v(L)} |\varphi_w(x)|_w\big)\\ &= \mathrm{pur}_v|(\chi^n \circ \varphi)_v(x)|_v = |\psi_v(x)|_v\end{aligned}$$

toujours en dehors d'un ensemble fini de v. Ceci signifie bien que nous pouvons choisir ici $A_v = \mathrm{Id}$. □

Malheureusement ce lemme ne vaut pas pour K quelconque. Pour donner un contre-exemple, notons $K \subset \mathbb{R}$ l'extension de $\mathbb{Q}$ engendrée par les $2^{1/2^n}$ pour $n \geq 1$ et $L = K(2^{1/3})$. Les ensembles $V_2(K)$ et $V_2(L)$ sont des singletons, notés $\{v\}$ et $\{w\}$. Pour $F = L$ et $x = 2^{-1/3}$, la définition du lemme donne

$$\|x\|_{E,v} = \mathrm{pur}_v(|x|_w) = \mathrm{pur}_v(2^{1/3}) = 2^{1/3} \notin |K_v^\times|_v = 2^{\mathbb{Z}[1/2]}$$

donc il n'existe pas d'écriture de $\|\cdot\|_{E,v}$ *via* une matrice de $\mathrm{GL}_3(K_v)$.

Il semble donc ne pas y avoir de définition naturelle pour la restriction des scalaires des espaces adéliques rigides. Cela suggère peut-être de travailler avec une définition d'espace adélique plus souple, autorisant notamment des normes impures (voir les remarques faites à ce sujet dans l'introduction) mais ici nous allons nous ramener au cas des corps de nombres. Pour cela, nous choisissons deux corps de nombres $K_0 \subset K$ et $L_0 \subset L$ tels que $K_0 \subset L_0$, $L \simeq L_0 \otimes_{K_0} K$ et de façon qu'il existe un espace adélique rigide F_0 sur L_0 avec $F \simeq F_0 \otimes_{L_0} L$ (existence : si $L = K[\alpha]$, on demande à K_0 de contenir les coefficients du polynôme minimal de α, alors $L_0 = K_0[\alpha]$ vérifie la première condition puis l'on grossit K_0 pour que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{L_0})$ contienne une matrice définissant la structure adélique de F). Nous posons alors $E_0 = \mathrm{Res}_{L_0/K_0}(F_0)$ (muni de la structure donnée par le lemme) puis $E = E_0 \otimes_{K_0} K$. L'espace adélique rigide E sur K (qui dépend des choix de L_0 et F_0) joue le rôle d'une approximation de la restriction des scalaires cherchée puisque, comme K-espace, $E \simeq F_0 \otimes_{L_0} L_0 \otimes_{K_0} K \simeq F$.

Proposition 4.25. *Avec ces notations, si $v \in V(K)$ et $x \in E \otimes_K K_v \simeq F \otimes_K K_v$, nous avons*

$$\|x\|_{E,v} = \Big(\sum_{w \in V_v(L)} [L_w : K_v] \|x\|_{F,w}^2\Big)^{1/2} \geq \max_{w \in V_v(L)} \|x\|_{F,w} \quad \textit{si } v \in V_\infty(K)$$

et

$$\|x\|_{E,v} \geq \mathrm{pur}_v\big(\max_{w \in V_v(L)} \|x\|_{F,w}\big) \geq \max_{w \in V_v(L)} \|x\|_{F,w} \quad \textit{sinon.}$$

Démonstration. Commençons par le cas d'une place finie v et notons v_0 sa restriction à K_0. Considérons sur l'espace $E_0 \otimes (K_0)_{v_0} \simeq F_0 \otimes (K_0)_{v_0}$ la norme (impure) donnée par

$$\|x\| = \max_{w_0 \in V_{v_0}(L_0)} \|x\|_{F_0,w_0} = \max_{w \in V_v(L)} \|x\|_{F,w}.$$

Nous choisissons une base orthogonale $e_1, \ldots, e_{nD}$ de $E_0 \otimes (K_0)_{v_0}$ pour cette norme (D est le degré $[L : K]$). Par définition de la structure sur E_0, nous avons $\|x\|_{E_0,v_0} = \mathrm{pur}_{v_0}(\|x\|)$. En particulier, la base $e_1, \ldots, e_{nD}$ est encore orthogonale pour $\|\cdot\|_{E_0,v_0}$. Par extension des scalaires, c'est aussi une base orthogonale de $E \otimes K_v \simeq (E_0 \otimes (K_0)_{v_0}) \otimes K_v$ muni de la norme $\|\cdot\|_{E,v}$. Par conséquent, si $x \in E \otimes K_v$ s'écrit $\sum_{i=1}^{nD} x_i e_i$ pour des $x_i \in K_v$, il vient par inégalité ultramétrique

$$\begin{aligned}\max_{w \in V_v(L)} \|x\|_{F,w} &\le \max_{w \in V_v(L)} \max_{1 \le i \le nD} |x_i|_w \|e_i\|_{F,w} \\ &= \max_{1 \le i \le nD} |x_i|_v \max_{w \in V_v(L)} \|e_i\|_{F,w} = \max_{1 \le i \le nD} |x_i|_v \|e_i\|.\end{aligned}$$

Puisque $\|\cdot\| \le \mathrm{pur}_{v_0}(\|\cdot\|)$, cette quantité est majorée par $\max_{1 \le i \le nD} |x_i|_v \|e_i\|_{E,v} = \|x\|_{E,v}$. Ensuite $\|x\|_{E,v} \in |K_v|_v$ donc nous obtenons l'inégalité cherchée en appliquant la fonction $\mathrm{pur}_v(\cdot)$. Supposons maintenant $v \in V_\infty(K)$ et notons encore v_0 sa restriction. Nous disposons de la norme $\|\cdot\|_{E_0,v_0}$ sur

$$\begin{aligned}E_0 \otimes_{K_0} (K_0)_{v_0} &\simeq F_0 \otimes_{K_0} (K_0)_{v_0} \\ &\simeq F_0 \otimes_{L_0} L_0 \otimes_{K_0} (K_0)_{v_0} \simeq \prod_{w_0 \in V_{v_0}(L_0)} F_0 \otimes_{L_0} (L_0)_{w_0}\end{aligned}$$

et de son extension $\|\cdot\|_{E,v}$ à

$$\begin{aligned}\prod_{w \in V_v(L)} F \otimes_L L_w &\simeq F \otimes_K K_v \\ &\simeq E_0 \otimes_{K_0} K_v \simeq \prod_{w_0 \in V_{v_0}(L_0)} F_0 \otimes_{L_0} (L_0)_{w_0} \otimes_{(K_0)_{v_0}} K_v\end{aligned}$$

que nous cherchons à identifier à la formule de l'énoncé. Dans les deux cas, le carré de la norme s'écrit comme la somme des carrés de normes sur chaque facteur correspondant à w_0, donc il suffit de montrer que pour un tel $w_0 \in V_{v_0}(L_0)$ les deux normes sur

$$F_0 \otimes_{L_0} (L_0)_{w_0} \otimes_{(K_0)_{v_0}} K_v \simeq \prod_{w \in V_{w_0}(L) \cap V_v(L)} F \otimes_L L_w$$

coïncident. Ces deux normes sont construites à partir de celle qui est donnée sur $F_0 \otimes_{L_0} (L_0)_{w_0}$ dont nous choisissons une base orthonormée $e_1, \ldots, e_n$ (qui est donc une $(L_0)_{w_0}$-base). Voyons ensuite cet espace comme espace sur $(K_0)_{v_0}$. Si $(L_0)_{w_0} = (K_0)_{v_0}$, nous gardons la même norme et la même base orthonormée ; sinon, nous avons $(K_0)_{v_0} = \mathbb{R}$ et $(L_0)_{w_0} \simeq \mathbb{C}$, la norme est multipliée par $2 = [(L_0)_{w_0} : (K_0)_{v_0}]$ et nous choisissons comme $\mathbb{R}$-base orthonormée $e_1/\sqrt{2}, ie_1/\sqrt{2}, \ldots, e_n/\sqrt{2}, ie_n/\sqrt{2}$ où i désigne l'un des deux éléments de $(L_0)_{w_0}$ de carré -1. Nous obtenons alors la norme sur $F_0 \otimes_{L_0} (L_0)_{w_0} \otimes_{(K_0)_{v_0}} K_v$ en conservant la base orthonormée obtenue, qui devient une K_v-base. De l'autre côté, la base $e_1, \ldots, e_n$ est aussi une L_w-base de $F \otimes_L L_w$ et, lorsque nous voyons ceci comme un K_v-espace, elle le reste si $L_w = K_v$ tandis que, comme ci-dessus, $e_1/\sqrt{2}, \ldots, ie_n/\sqrt{2}$ est une base orthonormée si $L_w \neq K_v$. Vu la description de ces deux normes, il est immédiat qu'elles coïncident si les égalités $(L_0)_{w_0} = (K_0)_{v_0}$ et $L_w = K_v$ sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses (on notera que dans chacune des quatre situations, l'ensemble $V_v(L) \cap V_{w_0}(L)$ est un singleton donc il y a une seule place w impliquée). Le seul cas restant est celui où $(K_0)_{v_0} = \mathbb{R}$, $(L_0)_{w_0} \simeq \mathbb{C}$ et $K_v \simeq \mathbb{C}$. Ici il y a deux places w au-dessus de v et w_0 et nous devons voir que dans l'isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces

$$F_0 \otimes_{L_0} (L_0)_{w_0} \otimes_{(K_0)_{v_0}} K_v \simeq (F_0 \otimes_{L_0} (L_0)_{w_0}) \times (F_0 \otimes_{L_0} (L_0)_{w_0}),$$

la base $e_1/\sqrt{2} \otimes 1, ie_1/\sqrt{2} \otimes 1, \ldots, e_n/\sqrt{2} \otimes 1, ie_n/\sqrt{2} \otimes 1$ à gauche et la base $(e_1, 0)$, $(0, e_1), \ldots, (e_n, 0), (0, e_n)$ à droite définissent la même norme. Il suffit donc de vérifier cela pour l'isomorphisme

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

avec les bases $1 \otimes 1/\sqrt{2}$, $i \otimes 1/\sqrt{2}$ et $(1, 0)$, $(0, 1)$. Pour faire le calcul, nous utilisons $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ donné par $f(z, z') = 1 \otimes (z + z')/2 + i \otimes i(z - z')/2$ (à échange des facteurs de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ près, c'est le seul isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces, la structure de $\mathbb{C}$-espace de $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ étant héritée du deuxième facteur). Alors nos bases fournissent

$$\|f(z, z')\|^2 = \left|\frac{z + z'}{\sqrt{2}}\right|^2 + \left|\frac{z - z'}{\sqrt{2}}\right|^2 = |z|^2 + |z'|^2 = \|(z, z')\|^2$$

d'où la conclusion souhaitée. □

Ces relations entraînent une comparaison entre les hauteurs associées à E et F (que nous identifions comme K-espaces).

Corollaire 4.26. *Pour $* \in \{\Lambda, \lambda, \mathbb{Q}\}$ et toute partie S de F, on a $H_F^*(S) \leq H_E^*(S)$. Dans le cas $* = \Lambda$, on a même $H_F^{\Lambda}(S) \leq [L : K]^{-1/2} H_E^{\Lambda}(S)$.*

Démonstration. Nous montrons plus généralement $H_F^{L_1}(S) \leq H_E^{K_1}(S)$ pour tout sous-corps L_1 de L avec $K_1 = K \cap L_1$ ce qui donnera le résultat pour $* = \lambda$ ($L_1 = L$) et $* = \mathbb{Q}$ ($L_1 = \mathbb{Q}$). Par définition, $H_F^{L_1}(S)$ s'écrit comme le module de la fonction sur $V(L_1)$

$$w_1 \mapsto \mathrm{pur}_{w_1}\Big(\sup_{x \in S} \sup_{w \in V_{w_1}(L)} \|x\|_{F,w}\Big).$$

En appliquant le lemme 2.8 au logarithme de cette fonction, nous constatons que $H_F^{L_1}(S)$ est aussi le module de la fonction sur $V(K_1)$

$$v_1 \mapsto \prod_{w_1 \in V_{v_1}(L_1)} \Big(\mathrm{pur}_{w_1}\Big(\sup_{x \in S} \sup_{w \in V_{w_1}(L)} \|x\|_{F,w}\Big)\Big)^{[(L_1)_{w_1} : (K_1)_{v_1}]/[L_1 : K_1]}$$

que nous majorons par la fonction

$$v_1 \mapsto \max_{w_1 \in V_{v_1}(L_1)} \mathrm{pur}_{w_1}\Big(\sup_{x \in S} \sup_{w \in V_{w_1}(L)} \|x\|_{F,w}\Big).$$

Ici et dans la suite, le fait que certaines de ces fonctions puissent ne pas appartenir à $\lceil \mathbb{A}_{L_1}^{\times} \rceil$ (pour la première) ou à $\lceil \mathbb{A}_{K_1}^{\times} \rceil$ (pour les autres) n'empêche pas de déduire une inégalité entre modules (avec un majorant infini) en raisonnant comme dans la démonstration du lemme 4.1.

Ceci dit, nous pouvons majorer la dernière fonction en utilisant $\mathrm{pur}_{w_1} \leq \mathrm{pur}_{v_1}$. Il est alors possible d'intervertir pur_{v_1} et le maximum (sur un ensemble fini) puis, en réarrangeant les différents suprema, nous trouvons que $H_F^{L_1}(S)$ est majoré par le module de

$$v_1 \mapsto \mathrm{pur}_{v_1}\big(\sup_{x \in S} \sup_{v \in V_{v_1}(K)} \max_{w \in V_v(L)} \|x\|_{F,w}\big).$$

La proposition précédente montre que le maximum qui apparaît ici minore $\|x\|_{E,v}$ et ceci nous donne bien $H_F^{L_1}(S) \leq H_E^{K_1}(S)$. Pour traiter le cas $* = \Lambda$, nous pouvons supposer $S = \{x\}$ avec $x \neq 0$. Alors $H_F(x)$ est le module de $w \mapsto \|x\|_{F,w}$ (élément de $\lceil \mathbb{A}_L^{\times} \rceil$) qui s'écrit aussi *via* le lemme 2.8 comme le module de l'élément

$$v \mapsto \prod_{w \in V_v(L)} \|x\|_{F,w}^{[L_w:K_v]/[L:K]}$$

de $\lceil \mathbb{A}_K^{\times} \rceil$. Nous employons alors la proposition 4.25 pour majorer le produit directement par $\max_{w \in V_v(L)} \|x\|_{F,w} \leq \|x\|_{E,v}$ si $v \notin V_\infty(K)$ et par $[L:K]^{-1/2}\|x\|_{E,v}$ sinon à l'aide de l'inégalité arithmético-géométrique (et $[L:K] = \sum_{w \in V_v(L)} [L_w : K_v]$). Le résultat voulu en découle. □

Pour passer aux minima, nous aurons encore besoin des comparaisons de dimensions suivantes.

Lemme 4.27. *Soit S une partie d'un L-espace vectoriel F. On a*

$$\dim \mathrm{Vect}_K(S) \leq [L:K] \dim \mathrm{Vect}_L(S) \quad \textit{et} \quad \dim \mathrm{Zar}_K(S) \leq [L:K] \dim \mathrm{Zar}_L(S)$$

où l'on calcule la dimension à droite dans le L-espace F et à gauche dans le K-espace $\mathrm{Res}_{L/K} F$.

Démonstration. Notons $D = [L:K]$. La première inégalité cache un simple exercice d'algèbre linéaire : $\mathrm{Vect}_L(S)$ est un K-espace vectoriel de dimension D fois sa dimension comme L-espace et il contient $\mathrm{Vect}_K(S)$. La même chose vaut dans le second cas : $\mathrm{Zar}_K(S) \subset \mathrm{Zar}_L(S)$ et la dimension de ce dernier fermé de F est multipliée par D lorsque l'on voit F comme K-espace. En effet, cette opération n'est autre que la restriction de Weil du schéma (affine) sous-jacent : à un fermé X de F correspond dans $\mathrm{Res}_{L/K} F$ un fermé isomorphe à $\mathrm{Res}_{L/K} X$ et l'on a $\dim \mathrm{Res}_{L/K} X = D \dim X$ (voir [30, Section 1.3, p. 4]). □

Nous en déduisons alors facilement les inégalités suivantes.

Corollaire 4.28. *Pour $* \in \{\Lambda, \lambda, \mathrm{BV}, Z, \zeta, \mathrm{BVZ}\}$ et $1 \leq i \leq \dim F$, nous avons*

$$\lambda_i^*(F) \leq \lambda_{[L:K](i-1)+1}^*(E).$$

Lorsque $* \in \{\Lambda, Z\}$, nous pouvons diviser le membre de droite par $[L:K]^{1/2}$.

Démonstration. Ceci suit assez formellement du corollaire 4.26 et du lemme 4.27 : pour $* \in \{\Lambda, \lambda, \mathrm{BV}\}$

$$\begin{aligned}\lambda_i^*(F) &= \inf\bigl\{H_F^*(S) \mid S \subset F,\ \dim \mathrm{Vect}_L(S) > i-1\bigr\}\\ &\le \inf\bigl\{H_E^*(S) \mid S \subset E,\ \dim \mathrm{Vect}_K(S) > D(i-1)\bigr\} = \lambda_{D(i-1)+1}^*(E)\end{aligned}$$

en notant $D = [L:K]$. Si $* \in \{Z, \zeta, \mathrm{BVZ}\}$, la même chose vaut en remplaçant Vect par Zar. Enfin, pour $* \in \{\Lambda, Z\}$, nous utilisons simplement l'inégalité plus précise

$$H_F^*(S) \le [L:K]^{-1/2} H_E^*(S). \qquad \square$$

Afin d'obtenir un résultat pour les quantités $c_{\mathrm{I}}^*(n,K)$ et $c_{\mathrm{II}}^*(n,K)$, il nous reste à comparer la hauteur de E à celle de F.

Lemme 4.29. *Nous avons*

$$H(E) = H(F)^{[L:K]} N_{K_0/\mathbb{Q}}(\Delta_{L_0/K_0})^{\dim F/2[K_0:\mathbb{Q}]}.$$

Démonstration. Comme $H(E) = H(E_0)$ et $H(F) = H(F_0)$ par extension des scalaires (et $[L:K] = [L_0:K_0]$, $\dim F = \dim F_0$), il s'agit purement d'un énoncé sur l'extension L_0/K_0 de corps de nombres. Il est classique ; on consultera par exemple [19, p. 248 et 251] où un langage un peu différent est employé : si F_0 correspond à un module métrisé M, l'espace E_0 est noté i_*M et Neukirch donne les formules

$$\det i_*M = N_{L_0/K_0}(\det M)(\det i_*\mathcal{O})^{\operatorname{rang} M} \quad \text{et} \quad (\det i_*\mathcal{O})^2 = \Delta_{L_0/K_0}.$$

Par ailleurs, en comparant les définitions, nous constatons que la hauteur $H(F_0)$ s'écrit alors $N_{L_0/\mathbb{Q}}(\det M)^{1/[L_0:\mathbb{Q}]}$ et de même $H(E_0) = N_{K_0/\mathbb{Q}}(\det i_*M)^{1/[K_0:\mathbb{Q}]}$. L'égalité de l'énoncé découle donc d'un calcul de norme. $\square$

Ici, le terme provenant du discriminant de L_0/K_0 dépend bien sûr en général du choix de cette extension de corps de nombres. Nous souhaitons écrire *in fine* un résultat qui n'en dépende pas. Commençons par remarquer que, si L_0/K_0 et L_1/K_1 sont deux extensions de corps de nombres avec $K_0 \subset K_1$, $L_0 \subset L_1$ et $L_1 \simeq L_0 \otimes_{K_0} K_1$, alors

$$N_{K_1/\mathbb{Q}}(\Delta_{L_1/K_1}) \le N_{K_0/\mathbb{Q}}(\Delta_{L_0/K_0})^{[K_1:K_0]}.$$

En effet, Δ_{L_1/K_1} est engendré dans $\mathcal{O}_{K_1}$ par les $\det(\mathrm{Tr}_{L_1/K_1}(e_ie_j))$ où $(e_1,\dots,e_d)$ parcourt les bases de L_1 sur K_1 contenues dans $\mathcal{O}_{L_1}$. Il contient donc l'idéal $\Delta_{L_0/K_0}\mathcal{O}_{K_1}$ engendré par les éléments de la même forme limités aux $e_i \in \mathcal{O}_{L_0}$. L'inégalité de normes traduit simplement cette inclusion.

Définition 4.30. Lorsque L/K est une extension finie d'extensions algébriques de $\mathbb{Q}$, nous appelons discriminant radical de L/K et nous notons $\delta_{L/K}$ l'infimum des quantités

$$N_{K_0/\mathbb{Q}}(\Delta_{L_0/K_0})^{1/[L_0:\mathbb{Q}]}$$

où L_0 parcourt les corps de nombres inclus dans L tels que $L \simeq L_0 \otimes_{K_0} K$ avec $K_0 = L_0 \cap K$.

La propriété de décroissance précédente implique directement que, si L et K sont des corps de nombres, alors $\delta_{L/K} = N_{K/\mathbb{Q}}(\Delta_{L/K})^{1/[L:\mathbb{Q}]}$. Elle entraîne aussi la propriété suivante : pour tout $\varepsilon > 0$ et tout sous-corps de nombres L_2 de L, il existe un corps de nombres L_1 avec $L_2 \subset L_1 \subset L$ et $L \simeq L_1 \otimes_{K_1} K$ où $K_1 = L_1 \cap K$ ainsi que $\delta_{L/K} \leq \delta_{L_1/K_1} \leq \delta_{L/K} + \varepsilon$. En effet, il suffit de choisir un couple L_0/K_0 comme dans la définition avec $\delta_{L_0/K_0} \leq \delta_{L/K} + \varepsilon$ puis de poser $L_1 = L_0 L_2$, la propriété de décroissance s'écrivant ici $\delta_{L_1/K_1} \leq \delta_{L_0/K_0}$.

Remarquons encore que, dans une tour d'extensions finies $K \subset L \subset M$, nous avons $\delta_{M/K} = \delta_{M/L}\delta_{L/K}$ (pour les corps de nombres, c'est une conséquence de la formule usuelle pour les discriminants ; on passe au cas général avec la propriété ci-dessus).

Voici la conclusion de notre étude de la restriction des scalaires.

Proposition 4.31. *Soient K une extension algébrique de $\mathbb{Q}$ et L une extension finie de K. Pour tout $n \geq 1$ et tout $* \in \{\Lambda, \lambda, \mathrm{BV}, Z, \zeta, \mathrm{BVZ}\}$, nous avons*

$$c_{\mathrm{I}}^*(n, L) \leq \sqrt{\delta_{L/K}}\, c_{\mathrm{I}}^*(n[L:K], K) \quad \textit{et} \quad c_{\mathrm{II}}^*(n, L) \leq \sqrt{\delta_{L/K}}\, c_{\mathrm{II}}^*(n[L:K], K).$$

Si $* \in \{\Lambda, Z\}$, nous avons même

$$c_{\mathrm{II}}^*(n, L) \leq \sqrt{\frac{\delta_{L/K}}{[L:K]}}\, c_{\mathrm{II}}^*(n[L:K], K).$$

Démonstration. Considérons un L-espace adélique rigide F de dimension n et $\varepsilon > 0$. Par tout ce qui précède, nous pouvons lui associer un K-espace adélique rigide E de dimension $n[L:K]$ avec

$$H(E)^{1/n[L:K]} \leq \sqrt{\delta_{L/K} + \varepsilon}\, H(F)^{1/n}$$

et $\lambda_i^*(F) \leq \lambda_{[L:K](i-1)+1}^*(E)$ pour $1 \leq i \leq n$. En particulier $\lambda_1^*(F) \leq \lambda_1^*(E)$ et

$$\begin{aligned}\big(\lambda_1^*(F) \cdots \lambda_n^*(F)\big)^{1/n} &\leq \big(\lambda_1^*(E)\lambda_{[L:K]+1}^*(E) \cdots \lambda_{[L:K](n-1)+1}^*(E)\big)^{1/n} \\ &\leq \big(\lambda_1^*(E) \cdots \lambda_{n[L:K]}^*(E)\big)^{1/n[L:K]}\end{aligned}$$

par croissance de $i \mapsto \lambda_i^*(E)$. Ainsi

$$\frac{\lambda_1^*(F)}{H(F)^{1/n}} \leq \sqrt{\delta_{L/K} + \varepsilon}\, \frac{\lambda_1^*(E)}{H(E)^{1/n[L:K]}} \leq \sqrt{\delta_{L/K} + \varepsilon}\, c_{\mathrm{I}}^*(n[L:K], K)$$

et la relation cherchée pour c_{I}^* s'obtient en faisant varier F puis tendre ε vers 0. Grâce à l'inégalité entre produits de minima, nous trouvons de même la formule pour c_{II}^* tandis que, lorsque $* \in \{\Lambda, Z\}$, il suffit d'utiliser la précision du corollaire 4.28 (nous avons omis c_{I}^{Λ} et c_{I}^{Z} car ils sont tous deux égaux à $c_{\mathrm{II}}^{\Lambda}$). □

En particulier, si K est un corps de Siegel ou de Bombieri–Vaaler ou de Zhang, alors il en va de même de L.

4.8. Réduction aux hyperplans de l'espace standard. Nous montrons à présent que, pour étudier les espaces adéliques rigides sur K de dimension n, il suffit de considérer ceux que l'on obtient comme sous-espaces de codimension 1 de K^{n+1} avec sa structure standard.

L'argument est dû à Thunder [26, Theorem 5] pour les corps de nombres. Nous le reprenons pour l'étendre à K quelconque.

Proposition 4.32. *Soient K une extension algébrique de $\mathbb{Q}$ et E un espace adélique rigide sur K de dimension $n \geq 1$. Il existe un réel $\kappa > 0$ tel que, pour tout réel $\chi > 0$, il existe une application linéaire injective $\iota\colon E \to K^{n+1}$ de sorte que, pour $v \in V(K)$ et $x \in E \otimes K_v$, on ait*

$$|\iota(x)|_v = \|x\|_{E,v} \quad \text{si } v \notin V_\infty(K)$$

et

$$\big||\iota(x)|_v - \chi\|x\|_{E,v}\big| \leq \kappa\|x\|_{E,v} \quad \text{si } v \in V_\infty(K).$$

Démonstration. Commençons par rappeler que, si K_0 est un corps de nombres, il existe un réel $r(K_0) > 0$ tel que $\mathbb{A}_{K_0} = K_0 + B(r(K_0))$ si nous notons $B(r)$ pour un réel r la partie de $\mathbb{A}_{K_0}$ formée des adèles $(a_{v_0})_{v_0 \in V(K_0)}$ vérifiant $|a_{v_0}|_{v_0} \leq 1$ si $v_0 \notin V_\infty(K_0)$ et $|a_{v_0}|_{v_0} \leq r$ si $v_0 \in V_\infty(K_0)$. Ceci découle par exemple des arguments donnés dans [7, p. 65 à 68] (rapidement : on peut assurer la condition aux places finies par approximation forte puis translater par un élément de $\mathcal{O}_{K_0}$ pour se ramener dans un domaine fondamental borné de $K_0 \otimes \mathbb{R}$). Par ailleurs, si $C \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K_v)$ pour $v \in V(K)$, nous notons $\|C\|_{\sup}$ le maximum des valeurs absolues des coefficients de C et $\|C\|_{\mathrm{op}}$ la norme d'opérateur de C comme endomorphisme de K_v^n muni de sa norme standard. Nous avons $\|C\|_{\mathrm{op}} = \|C\|_{\sup}$ si $v \notin V_\infty(K)$ et $\|C\|_{\mathrm{op}} \leq n\|C\|_{\sup}$ sinon.

Nous associons maintenant à l'espace E de l'énoncé un couple (A, φ) comme dans la définition 3.1. Il existe un corps de nombres K_0 tel que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{K_0}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K)$. Nous pouvons supposer que $A_{v_0} = \mathrm{Id}$ pour toute place v_0 de K_0 sauf un nombre fini ; pour les places restantes, nous demandons encore que A_{v_0} soit triangulaire supérieure (voir lemme 3.5). Choisissons ensuite un entier $q \geq 1$ tel que, pour toute place $v \in V(K) \setminus V_\infty(K)$ avec $A_v \neq \mathrm{Id}$ ou $|q|_v \neq 1$, on ait $\|A_v^{-1}\|_{\mathrm{op}} < |q|_v^{-1}$ (il suffit de prendre une puissance assez grande du produit des nombres premiers correspondant aux places v telles que $A_v \neq \mathrm{Id}$). Nous allons démontrer l'assertion cherchée avec

$$\kappa = q(nr+1) \max_{v \in V_\infty(K)} \|A_v^{-1}\|_{\mathrm{op}}$$

où $r = r(K_0)$. Définissons une matrice $A' \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{K_0}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K)$ par $A'_v = q^{-1}A_v$ si $v \in V(K) \setminus V_\infty(K)$ et $A'_v = q^{-1}\chi A_v$ si $v \in V_\infty(K)$. Nous écrivons $A' = A'' + A'''$ où $A'' \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K_0)$, $A''' \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{A}_{K_0})$ sont triangulaires supérieures et les coefficients de A''' appartiennent à $B(r)$. Posons ensuite dans $\mathrm{Mat}_{n+1,n}(K_0)$

$$M = \begin{pmatrix} a''_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a''_{1n} \\ 1 & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & A'' & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & a''_{nn} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & A'' & \\ & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & & \\ & \mathrm{Id} & \\ & & \end{pmatrix}$$

et $\iota(x) = qM\varphi(x)$ pour $x \in E$. L'application $\iota\colon E \to K^{n+1}$ ainsi définie est injective puisque M est de rang n. Vérifions l'assertion sur les normes en distinguant trois cas pour $v \in V(K)$. Si d'abord $v \notin V_\infty(K)$, $|q|_v = 1$ et $A_v = \mathrm{Id}$, alors l'égalité $A'_v = A''_v + A'''_v$ donne $\|A''_v\|_{\sup} \leq 1$. La forme de la matrice M montre alors que, si $y \in K_v^n$, alors $|My|_v = |y|_v$ (si $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $|y_i|_v = |y|_v$ et $|y_j|_v < |y|_v$ pour $j > i$, on considère la ligne $i+1$ de M). Par suite, si $x \in E \otimes K_v$, il vient $|\iota(x)|_v = |M\varphi_v(x)|_v = |\varphi_v(x)|_v = |A_v\varphi_v(x)|_v = \|x\|_{E,v}$ comme prévu. Supposons dans un deuxième temps que v soit finie mais ne vérifie pas la condition précédente. Alors $\|A_v^{-1}\|_{\mathrm{op}} < |q|_v^{-1}$ par hypothèse et nous avons pour $y \in K_v^n$

$$|(A'_v - A''_v)(y)|_v \leq \|A'_v - A''_v\|_{\sup}|y|_v \leq |y|_v \leq \|A_v^{-1}\|_{\mathrm{op}}|A_v y|_v < |q^{-1}A_v y|_v = |A'_v y|_v.$$

Par suite, comme My s'écrit comme somme de trois vecteurs de normes respectives $|A'_v y|_v$, $|(A'_v - A''_v)(y)|_v$ et $|y|_v$, nous avons par inégalité ultramétrique $|My|_v = |A'_v y|_v$ puis, pour $x \in E \otimes K_v$, à nouveau

$$|\iota(x)|_v = |q|_v|M\varphi_v(x)|_v = |q|_v|A'_v\varphi_v(x)|_v = |A_v\varphi_v(x)|_v = \|x\|_{E,v}.$$

Il reste à traiter le cas de $v \in V_\infty(K)$. Nous procédons comme dans le cas précédent : si $y \in K_v^n$

$$|(A'_v - A''_v)(y)|_v \leq \|A'_v - A''_v\|_{\mathrm{op}}|y|_v \leq nr|y|_v \leq nr\|A_v^{-1}\|_{\mathrm{op}}|A_v y|_v,$$

ce qui entraîne que My est la somme d'un vecteur de norme $|A'_v y|_v$ et d'un vecteur de norme inférieure ou égale à $(nr+1)\|A_v^{-1}\|_{\mathrm{op}}|A_v y|_v \leq q^{-1}\kappa|A_v y|_v$ donc

$$\big||My|_v - |A'_v y|_v\big| \leq q^{-1}\kappa|A_v y|_v$$

puis

$$\begin{aligned}\big||\iota(x)|_v - \chi\|x\|_{E,v}\big| &= \big||qM\varphi_v(x)|_v - \chi|A_v\varphi_v(x)|_v\big| \\ &= q\big||M\varphi_v(x)|_v - |A'_v\varphi_v(x)|_v\big| \\ &\leq \kappa|A_v\varphi_v(x)|_v = \kappa\|x\|_{E,v}\end{aligned}$$

pour $x \in E \otimes K_v$. □

Ce résultat d'approximation admet la conséquence suivante.

Corollaire 4.33. *Dans les définitions de $c_{\mathrm{I}}^*(n, K)$ et $c_{\mathrm{II}}^*(n, K)$, nous pouvons nous limiter aux sous-espaces de l'espace standard K^{n+1} (pour $* \in \{\Lambda, \lambda, \mathrm{BV}, Z, \zeta, \mathrm{BVZ}\}$).*

Démonstration. Dans les notations de la proposition, posons $F = \iota(E)$ avec sa structure induite. Pour tout $*$ et tout $S \subset E$, nous avons directement

$$\chi - \kappa \leq H_F^*(\iota(S))H_E^*(S)^{-1} \leq \chi + \kappa$$

donc également

$$\chi - \kappa \leq \lambda_i^*(F)\lambda_i^*(E)^{-1} \leq \chi + \kappa$$

pour $1 \leq i \leq n$. En outre, $(\chi-\kappa)^n \leq H(F)H(E)^{-1} \leq (\chi+\kappa)^n$ lorsque $\chi > \kappa$. En particulier

$$\frac{\lambda_1^*(E)}{H(E)^{1/n}} \leq \frac{\chi+\kappa}{\chi-\kappa}\frac{\lambda_1^*(F)}{H(F)^{1/n}}.$$

Si $\varepsilon > 0$ est fixé, nous pouvons pour tout E choisir χ assez grand pour avoir $\frac{\chi+\kappa}{\chi-\kappa} \leq 1+\varepsilon$. En faisant varier E puis tendre ε vers 0, nous obtenons le résultat pour c_{I}. Le cas de c_{II} est entièrement analogue. □

En particulier, pour décider si un corps K est de Siegel, de Bombieri–Vaaler ou de Zhang, il suffit d'étudier les plans de K^3, ce qui justifie la présentation adoptée dans l'introduction en termes d'équations $ax+by+cz=0$.

5. Exemples

Dans cette partie, nous présentons des corps pour lesquels on sait qu'ils ont ou non certaines propriétés parmi celles de Siegel, Bombieri–Vaaler, Zhang, Northcott, BV-Northcott ou la finitude de $c_1(\cdot)$. Nous passons en revue les faits classiques et donnons de nouveaux résultats. Nous terminons par une liste de questions sur les liens entre les différentes propriétés et l'existence éventuelle de corps en possédant telle ou telle combinaison.

5.1. Le corps des nombres rationnels. Le premier théorème de Minkowski montre $c_{\mathrm{I}}^{\mathrm{BV}}(n,\mathbb{Q}) \leq 2\pi^{-1/2}\Gamma(1+n/2)^{1/n} \leq \sqrt{n}$ pour tout $n \geq 1$. En effet, à un espace adélique rigide E sur $\mathbb{Q}$, nous associons le réseau

$$\Omega = \left\{x \in E \mid \|x\|_p \leq 1 \text{ pour tout } p \in V(\mathbb{Q}) \setminus \{\infty\}\right\}.$$

Alors $\lambda_1^{\mathrm{BV}}(E)$ coïncide avec le minimum de $\|x\|_\infty$ pour $x \in \Omega \setminus \{0\}$, c'est-à-dire avec le premier minimum de Ω relativement au corps convexe $C = \{x \in E \otimes \mathbb{R} \mid \|x\|_\infty \leq 1\}$. Le théorème affirme donc $\lambda_1^{\mathrm{BV}}(E)^n \leq 2^n \operatorname{vol}(E \otimes \mathbb{R}/\Omega)\operatorname{vol}(C)^{-1}$ pour tout choix de mesure de Haar sur $E \otimes \mathbb{R}$. Si nous choisissons la mesure de Lebesgue associée à une base orthonormée pour $\|\cdot\|_\infty$, alors $\operatorname{vol}(E \otimes \mathbb{R}/\Omega) = H(E)$ tandis que $\operatorname{vol}(C)$ est le volume de la boule euclidienne usuelle, soit $\pi^{n/2}\Gamma(1+n/2)^{-1}$. La formule annoncée s'en déduit et la majoration par $\sqrt{n}$ découle par exemple de

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(C) &= \operatorname{vol}\left(\left\{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2+\cdots+x_n^2 \leq 1\right\}\right)\\ &\geq \operatorname{vol}\left(\left\{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \max(|x_1|,\ldots,|x_n|) \leq 1/\sqrt{n}\right\}\right) = 2^n n^{-n/2}.\end{aligned}$$

Dans le cas $n=1$, la borne obtenue fournit aussi $c_1(\mathbb{Q}) = 1$. En particulier pour un espace E sur $\mathbb{Q}$, nous avons $\Lambda_i(E) = \lambda_i(E) = \lambda_i^{\mathrm{BV}}(E)$ pour tout i et donc $c_{\mathrm{I}}^*(n,\mathbb{Q})$ et $c_{\mathrm{II}}^*(n,\mathbb{Q})$ pour $* \in \{\Lambda,\lambda,\mathrm{BV}\}$ sont tous égaux à $c_{\mathrm{I}}^{\mathrm{BV}}(n,\mathbb{Q})$. La majoration de $c_{\mathrm{II}}^{\mathrm{BV}}(n,\mathbb{Q})$ correspond exactement au second théorème de Minkowski pour les ellipsoïdes dont le théorème 4.12 montre donc qu'il est une conséquence facile du premier théorème (ce n'est pas le cas pour un corps convexe quelconque). Mentionnons aussi, même si ce n'est pas crucial ici, que la borne $2\pi^{-1/2}\Gamma(1+n/2)^{1/n}$ peut être améliorée, qu'en sens inverse on dispose de minorations depuis celle de Hlawka $c_{\mathrm{I}}^{\mathrm{BV}}(n,\mathbb{Q}) \geq (2\zeta(n))^{1/n}\pi^{-1/2}\Gamma(1+n/2)^{1/n}$ pour $n \geq 2$ et que l'on connaît la valeur exacte de cet invariant seulement pour $n \leq 8$ et $n = 24$ (dans l'ordre, $c_{\mathrm{I}}^{\mathrm{BV}}(n, \mathbb{Q})^{2n}$ vaut $1, 4/3, 2, 4, 8, 64/3, 2^6, 2^8, 2^{48}$). Tout ceci constitue la théorie classique de la constante d'Hermite définie comme $\gamma_n = c_{\mathrm{I}}^{\mathrm{BV}}(n, \mathbb{Q})^2$.

Les faits rappelés ci-dessus assurent donc que $\mathbb{Q}$ est un corps de Siegel et de Bombieri–Vaaler. Il est par ailleurs clair qu'il s'agit d'un corps de Northcott donc de BV-Northcott et, par voie de conséquence, ce n'est pas un corps de Zhang.

5.2. Le corps des nombres algébriques. Un siècle après Minkowski, Roy–Thunder [22] et Zhang [33] montrent indépendamment que $\overline{\mathbb{Q}}$ est un corps de Siegel. En fait, ils établissent respectivement pour tout $n \geq 1$ les inégalités

$$c_{\mathrm{II}}^{\Lambda}(n, \overline{\mathbb{Q}}) \leq \exp((n-1)/4) \quad \text{et} \quad c_{\mathrm{II}}^{Z}(n, \overline{\mathbb{Q}}) \leq \exp((H_n - 1)/2) \leq \sqrt{n}$$

où H_n est le nombre harmonique $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. Le résultat de Zhang s'avère donc bien plus fort (il montre que $\overline{\mathbb{Q}}$ est un corps de Zhang, fait à l'origine de la terminologie) mais on peut remarquer que les deux articles donnent en fait sensiblement la même démonstration de $c_{\mathrm{II}}^{\Lambda}(2, \overline{\mathbb{Q}}) \leq e^{1/4}$: Roy et Thunder passent ensuite à n quelconque *via* le lemme 4.11 ci-dessus tandis que Zhang donne un argument (plus compliqué) valable directement pour tout n et pour c^{Z}.

Les résultats que nous avons démontrés au paragraphe 4.6 permettent de déterminer la valeur exacte de $c_{\mathrm{I}}^{\Lambda}(n, \overline{\mathbb{Q}})$. En effet, le lemme 4.21 donne $\exp((H_n - 1)/2) \leq c_{\mathrm{I}}^{\Lambda}(n, \overline{\mathbb{Q}})$ (car $u(\overline{\mathbb{Q}}) = 1$) tandis que le théorème de Zhang fournit $c_{\mathrm{I}}^{\Lambda}(n, \overline{\mathbb{Q}}) \leq c_{\mathrm{II}}^{Z}(n, \overline{\mathbb{Q}}) \leq \exp((H_n - 1)/2)$. Il y a donc égalité. Ceci démontre le théorème 1.3 de l'introduction et améliore [11, théorème 3.3] qui affirmait $c_{\mathrm{I}}^{\Lambda}(n, \overline{\mathbb{Q}}) \geq n!^{1/n}$ (la démonstration consistait en fait à appliquer le théorème 4.19 à l'espace standard et conduisait donc à la première minoration du lemme 4.21). L'égalité $c_{\mathrm{I}}^{\Lambda}(n, \overline{\mathbb{Q}}) = c_{\mathrm{II}}^{Z}(n, \overline{\mathbb{Q}})$ montre aussi que, dans notre cadre, la majoration du premier minimum entraîne toute la force du théorème de Zhang (c'est clair sur l'énoncé du théorème 4.19) alors que, pour une variété quelconque, son théorème des minima successifs requiert une démonstration plus compliquée que la seule majoration du premier minimum (qui a par exemple été réécrite de manière plus directe par David et Philippon [8, Appendice]).

Dans le cas $n = 1$, nous verrons ci-dessous $c_1(\overline{\mathbb{Q}}) = 1$ (lemme 5.3). Par suite, pour E sur $\overline{\mathbb{Q}}$, nous avons $\Lambda_i(E) = \lambda_i(E) = \lambda_i^{\mathrm{BV}}(E)$ et $Z_i(E) = \zeta_i(E) = \zeta_i^{\mathrm{BV}}(E)$ pour tout i et donc

$$c_{\mathrm{I}}^{\Lambda}(n, \overline{\mathbb{Q}}) = c_{\mathrm{II}}^{\mathrm{BV}}(n, \overline{\mathbb{Q}}) = c_{\mathrm{II}}^{Z}(n, \overline{\mathbb{Q}}) = c_{\mathrm{II}}^{\mathrm{BVZ}}(n, \overline{\mathbb{Q}})$$

pour tout $n \geq 1$. De tout ceci résulte que $\overline{\mathbb{Q}}$ est un corps de Siegel, de Bombieri–Vaaler et de Zhang. En outre, il n'est évidemment ni de Northcott ni de BV-Northcott.

5.3. Les corps qui s'en déduisent. Soit K un sous-corps de $\overline{\mathbb{Q}}$ tel que $[\overline{\mathbb{Q}} : K]$ soit fini. Les conséquences qui suivent la proposition 4.23 montrent que K hérite de $\overline{\mathbb{Q}}$ la propriété de Bombieri–Vaaler et donc notamment la finitude de $c_1(K)$. Par les relations générales, K est aussi un corps de Siegel et de Zhang mais n'est ni de Northcott ni de BV-Northcott. L'exemple-type de tels corps est $\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$. Il y en a une infinité d'autres mais l'on sait depuis Artin et Schreier qu'ils vérifient tous $[\overline{\mathbb{Q}} : K] = 2$ (voir [14, Theorem 11.14, p. 674]) et en fait ils sont tous isomorphes à $\mathbb{R} \cap \overline{\mathbb{Q}}$ (donc, si l'on veut, *via* un élément de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$) par unicité de la clôture réelle de $\mathbb{Q}$ (voir [14, p. 637]).

De manière plus fondamentale, les corps de nombres héritent par extension finie des propriétés de $\mathbb{Q}$. Ils sont de Siegel, de Bombieri–Vaaler, de Northcott, de BV-Northcott mais non de Zhang et ont un $c_1(K)$ fini (comme tout corps de Bombieri–Vaaler). Ces faits découlent de la proposition 4.31 qui nous donne $c_{\mathrm{II}}^{\mathrm{BV}}(n,K) \leq (n[K:\mathbb{Q}]\delta_{K/\mathbb{Q}})^{1/2}$ et $c_{\mathrm{II}}^{\Lambda}(n,K) \leq (n\delta_{K/\mathbb{Q}})^{1/2}$ pour $n \geq 1$ et un corps de nombres K. Il importe toutefois de remarquer ici que l'on peut améliorer significativement la première majoration et montrer en fait $c_{\mathrm{II}}^{\mathrm{BV}}(n,K) \leq (n\delta_{K/\mathbb{Q}})^{1/2}$. Pour ce faire, il convient d'utiliser la pleine force du théorème de Minkowski pour un corps convexe qui n'est pas forcément un ellipsoïde : dans la définition de la restriction des scalaires, cela revient à prendre non une somme quadratique comme dans le lemme 4.24 mais à choisir aussi le maximum à la place infinie ; nous sortons donc du cadre des espaces adéliques rigides (le caractère hermitien est perdu) mais la norme non euclidienne obtenue définit toujours un corps convexe auquel on applique le théorème de Minkowski comme ci-dessus. Cet argument se rapproche de la démarche de Thunder dans [27] mais, comme il ne s'en déduit pas formellement, nous donnons quelques détails dans l'énoncé suivant. Retenons aussi $c_1(K) \leq \delta_{K/\mathbb{Q}}^{1/2}$.

Proposition 5.1. *Pour tout corps de nombres K et tout entier $n \geq 1$, nous avons $c_{\mathrm{II}}^{\mathrm{BV}}(n,K) \leq (n\delta_{K/\mathbb{Q}})^{1/2}$.*

Démonstration. Soit E un espace adélique rigide de dimension n. Notons $D = [K:\mathbb{Q}]$. L'ensemble

$$\Omega = \left\{x \in E \mid \|x\|_v \leq 1 \text{ pour tout } v \in V(K) \setminus V_\infty(K)\right\}$$

est un réseau de $E \otimes \mathbb{R}$, espace vectoriel réel de dimension nD. Dans ce même espace, la partie

$$C = \left\{x \in E \otimes \mathbb{R} \mid \|x\| \leq 1 \text{ pour tout } v \in V_\infty(K)\right\}$$

est un corps convexe (ici $E \otimes \mathbb{R}$ est identifié au produit des $E \otimes_K K_v$ $(v|\infty)$ donc C est le produit des boules unités de ces espaces). D'après le théorème de Minkowski, il existe un élément non nul de $\Omega \cap \rho C$ avec

$$\rho = 2\Big(\frac{\mathrm{vol}(E \otimes \mathbb{R}/\Omega)}{\mathrm{vol}(C)}\Big)^{1/nD}$$

où vol est une mesure de Haar quelconque sur $E \otimes \mathbb{R}$. Ceci signifie exactement que $\lambda_1^{\mathrm{BV}}(E) \leq \rho$ (voir lemme 4.3). Par un calcul classique, nous avons

$$\rho = H(E)^{1/n}\delta_{K/\mathbb{Q}}^{1/2}2^{(r_1+r_2)/D}V(n)^{-r_1/nD}V(2n)^{-r_2/nD}$$

où r_1, r_2 sont les nombres de places réelles et complexes et $V(n) = \pi^{n/2}/\Gamma(n/2+1)$ le volume de la boule unité euclidienne (il suffit de faire l'estimation lorsque E est l'espace standard, on utilise alors par exemple la formule donnée dans [27, p. 255]). On minore $V(n) \geq 2^n n^{-n/2}$ pour trouver $\rho \leq H(E)^{1/n}\delta_{K/\mathbb{Q}}^{1/2}\sqrt{n}$ donc $\lambda_1^{\mathrm{BV}}(E)H(E)^{-1/n} \leq (n\delta_{K/\mathbb{Q}})^{1/2}$. Nous en déduisons bien

$$c_{\mathrm{I}}^{\mathrm{BV}}(n,K) = c_{\mathrm{II}}^{\mathrm{BV}}(n,K) \leq (n\delta_{K/\mathbb{Q}})^{1/2}. \qquad \square$$

Nous donnons maintenant une version du théorème de Minkowski–Hlawka pour les corps de nombres (c'est le résultat de Thunder [26] où nous simplifions les termes secondaires pour ne garder que le discriminant radical).

Proposition 5.2. *Pour tout corps de nombres K et tout entier $n \geq 1$, on a*

$$c_{\mathrm{I}}^{\Lambda}(n,K) \geq \frac{\sqrt{n}}{5}\frac{\delta_{K/\mathbb{Q}}^{(1-1/n)/2}}{\max(1,\log\delta_{K/\mathbb{Q}})^{1/n}}.$$

Démonstration. D'après le corollaire de [26, p. 182], on a

$$c_{\mathrm{I}}^{\Lambda}(n,K)^{nD} \geq \frac{w_K\zeta_K(n)\delta_{K/\mathbb{Q}}^{nD/2}}{2^{nr_2}n^{r_1+r_2-1}V(n)^{r_1}V(2n)^{r_2}h_K R_K}$$

où w_K est le nombre de racines de l'unité dans K, r_1, r_2 le nombre de places réelles et complexes, $D = [K:\mathbb{Q}]$, h_K le nombre de classes, R_K le régulateur, ζ_K la fonction zêta de Dedekind et $V(n) = \pi^{n/2}/\Gamma(n/2+1)$ le volume de la boule unité euclidienne. On majore $V(n)$ au moyen de l'inégalité classique $\Gamma(1+x) \geq \sqrt{2\pi x}(x/e)^x$ valide pour tout $x > 0$, ce qui conduit à

$$2^{nr_2}n^{r_1+r_2-1}V(n)^{r_1}V(2n)^{r_2} \leq (2e\pi/n)^{nD/2}(n^2/\pi)^{D/4}.$$

Le produit $h_K R_K$ est lui contrôlé par un théorème de Louboutin [15] écrit pour $D \neq 1$

$$h_K R_K \leq \frac{w_K}{2}\Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{r_2}\Big(\frac{eD\log\delta_{K/\mathbb{Q}}}{4(D-1)}\Big)^{D-1}\delta_{K/\mathbb{Q}}^{D/2}.$$

On majore $\log\delta_{K/\mathbb{Q}}$ par $\max(1,\log\delta_{K/\mathbb{Q}})$ et le quotient $(eD/(4D-4))^{D-1}$ par $e^{D/6}$ pour garder

$$h_K R_K \leq w_K e^{D/6}\max(1,\log\delta_{K/\mathbb{Q}})^D\delta_{K/\mathbb{Q}}^{D/2}$$

valable également lorsque $D = 1$. On reporte les estimations obtenues dans le minorant de $c_{\mathrm{I}}^{\Lambda}(n,K)$ et, en utilisant $\zeta_K(n) \geq 1$, on a

$$c_{\mathrm{I}}^{\Lambda}(n,K) \geq \sqrt{\frac{n}{2e\pi}}\Big(\frac{\pi^{1/2}}{ne^{1/3}}\Big)^{1/2n}\frac{\delta_{K/\mathbb{Q}}^{(1-1/n)/2}}{\max(1,\log\delta_{K/\mathbb{Q}})^{1/n}}.$$

On conclut au moyen de la minoration $(2x\pi^{1/2}/e^{1/3})^x \geq 0{,}85$ pour tout $x > 0$. □

5.4. Évaluation de $c_1(K)$. Nous donnons maintenant une série de situations où nous pouvons calculer l'invariant $c_1(K)$ ou, à défaut, le minorer.

Lemme 5.3. *Soit K un sous-corps de $\overline{\mathbb{Q}}$ ayant la propriété suivante pour un entier $q > 1$: pour tout $y \in K$, il existe $x \in K$ avec $x^q = y$. Alors $c_1(K) = 1$.*

Démonstration. Soit $a \in |\mathbb{A}_K^{\times}|$ avec $|a| > 1$. Il existe un corps de nombres $K_0 \subset K$ tel que $a \in |\mathbb{A}_{K_0}^{\times}|$. Comme $c_1(K_0)$ est fini, il existe $m \in \mathbb{N}$ avec $|a|^{q^m} > c_1(K_0)$. Par suite (lemme 4.7), il existe $y \in K_0^{\times}$ tel que $|y|_v \leq a_v^{q^m}$ pour tout $v \in V(K)$. Par l'hypothèse (itérée), il existe $x \in K^{\times}$ avec $x^{q^m} = y$. Il vient

$$|x|_v = |y|_v^{1/q^m} \leq a_v$$

pour tout $v \in V(K)$. En faisant varier a, nous avons bien $c_1(K) = 1$. □

Nous en déduisons en particulier $c_1(\overline{\mathbb{Q}}) = 1$ (tout $q \geq 2$ convient) et $c_1(\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}) = 1$ (tout $q \geq 3$ impair convient). Un autre exemple est celui du corps des nombres constructibles ($q = 2$ convient). L'énoncé suivant découle immédiatement du lemme 4.9.

Lemme 5.4. *Soit $K \subset \overline{\mathbb{Q}}$. On suppose que K n'est pas un corps de nombres et que, pour un réel fixé $B > 1$, l'ensemble $\{x \in \mathcal{O}_K \mid \lceil x \rceil \leq B\}$ ne comporte qu'un nombre fini de classes modulo μ_K. Alors $c_1(K) \geq B$.*

Ce résultat s'applique en particulier aux corps jouissant de la propriété de Bogomolov, autrement dit ceux pour lesquels il existe $B > 1$ tel que $H_{\mathrm{Weil}}(x) \notin]1, B[$ pour tout $x \in K$. Par exemple le résultat d'Amoroso et Dvornicich [2] sur l'extension abélienne maximale $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ de $\mathbb{Q}$ montre $c_1(\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}) \geq 5^{1/12}$.

Donnons ensuite une minoration dans le cas des corps de nombres (nous notons $\mathrm{Cl}(\mathcal{O}_K)$ le groupe des classes d'idéaux de l'anneau des entiers d'un corps K).

Proposition 5.5. *Si K est un corps de nombres, nous avons*

$$c_1(K) \geq \max_{c \in \mathrm{Cl}(\mathcal{O}_K)} \min_{I \in c} N(I)^{1/[K:\mathbb{Q}]}$$

où le minimum est pris sur les idéaux I de $\mathcal{O}_K$ dans la classe c. De plus il y a égalité si et seulement si Card $V_\infty(K) = 1$.

Démonstration. Posons $D = [K : \mathbb{Q}]$. Notons c une classe qui réalise le maximum et $I \in c$ un idéal de $\mathcal{O}_K$ de norme minimale dans la classe c. Choisissons aussi un idéal J de $\mathcal{O}_K$ dans la classe inverse c^{-1}. Considérons $a \in |\mathbb{A}_K^\times|$ tel que

$$J = \big\{x \in K \mid |x|_v \leq a_v \text{ pour tout } v \in V(K) \setminus V_\infty(K)\big\}.$$

Nous avons alors $|a| = N(J)^{-1/D} \prod_{v \in V_\infty(K)} a_v^{\mu(v)}$. Supposons qu'il existe $x \in K^\times$ tel que $|x|_v \leq a_v$ pour tout $v \in V(K)$. Dans ce cas, $x \in J$ donc $x\mathcal{O}_K$ s'écrit $I'J$ pour un idéal I' de $\mathcal{O}_K$ dans la classe c. Alors $N(x\mathcal{O}_K) = N(I')N(J) \geq N(I)N(J)$. Par suite, avec la formule du produit pour x, nous avons

$$\begin{aligned} 1 &= N(x\mathcal{O}_K)^{-1/D} \prod_{v \in V_\infty(K)} |x|_v^{\mu(v)} \\ &\leq N(I)^{-1/D} N(J)^{-1/D} \prod_{v \in V_\infty(K)} |x|_v^{\mu(v)} \\ &= \frac{|a|}{N(I)^{1/D}} \prod_{v \in V_\infty(K)} \Big(\frac{|x|_v}{a_v}\Big)^{\mu(v)} \leq \frac{|a|}{N(I)^{1/D}}. \end{aligned}$$

Nous avons donc nécessairement $|a| \geq N(I)^{1/D}$ ce qui entraîne $c_1(K) \geq N(I)^{1/D}$. Montrons maintenant que l'inégalité est stricte si K a au moins deux places infinies. Notons v_0 l'une d'entre elles. Il existe un intervalle $[u, t]$ avec $N(IJ)^{1/D} \leq u < t \leq 2N(IJ)^{1/D}$ ne contenant aucun nombre réel de la forme $|x|_{v_0}$ où $x \in \mathcal{O}_K$ et $\lceil x \rceil \leq 2N(IJ)^{1/D}$ (ceci résulte directement de la finitude de l'ensemble des tels x). Fixons alors $a \in |\mathbb{A}_K^\times|$ comme ci-dessus en précisant les valeurs à l'infini : $a_{v_0} = t$ et

$$a_v = \left(N(IJ)^{1/D} u^{-\mu(v_0)}\right)^{1/(1-\mu(v_0))}$$

si $v \in V_\infty(K) \setminus \{v_0\}$. Nous avons

$$|a| = N(J)^{-1/D} t^{\mu(v_0)} N(IJ)^{1/D} u^{-\mu(v_0)} = N(I)^{1/D} \left(\frac{t}{u}\right)^{\mu(v_0)}$$

donc si $x \in K^\times$ vérifie $|x|_v \le a_v$ pour tout $v \in V(K)$, nous trouvons par le calcul précédent

$$1 \le \left(\frac{t}{u}\right)^{\mu(v_0)} \prod_{v \in V_\infty(K)} \left(\frac{|x|_v}{a_v}\right)^{\mu(v)} \le \left(\frac{t}{u}\right)^{\mu(v_0)} \left(\frac{|x|_{v_0}}{a_{v_0}}\right)^{\mu(v_0)} = \left(\frac{|x|_{v_0}}{u}\right)^{\mu(v_0)}$$

donc $|x|_{v_0} \in [u, t]$. Ceci est absurde car $x \in J \subset \mathcal{O}_K$ et $\lceil x \rceil \le t \le 2N(IJ)^{1/D}$ (en effet $u \ge N(IJ)^{1/D}$ donne $a_v \le N(IJ)^{1/D} \le t$ si $v \ne v_0$). Nous pouvons conclure comme prévu $c_1(K) \ge |a| > N(I)^{1/D}$. Établissons enfin le cas d'égalité si $V_\infty(K)$ est un singleton noté $\{\infty\}$. Choisissons $a_1 \in |\mathbb{A}_K^\times|$ quelconque avec $|a_1| \ge N(I)^{1/D}$. L'ensemble

$$J_1 = \left\{x \mid |x|_v \le (a_1)_v \text{ pour tout } v \in V(K) \setminus \{\infty\}\right\}$$

est un idéal fractionnaire de K. Choisissons-en un élément $x_1 \ne 0$ tel que $N(x_1\mathcal{O}_K)$ est minimal. Nous écrivons $x_1\mathcal{O}_K = I_1 J_1$ et, comme $I_1 \subset \mathcal{O}_K$ est de norme minimale dans sa classe, nous avons $N(I_1) \le N(I) \le |a_1|^D = N(J_1)^{-1}(a_1)_\infty^D$, soit $N(x_1\mathcal{O}_K) \le (a_1)_\infty^D$. La formule du produit s'écrit ici $N(x_1\mathcal{O}_K) = |x_1|_\infty^D$ d'où $|x_1|_\infty \le (a_1)_\infty$. L'existence de x_1 prouve donc $c_1(K) \le |a_1|$ puis, avec l'inégalité déjà obtenue, $c_1(K) = N(I)^{1/D}$. □

La minoration obtenue est semblable à [16, Proposition 1, p. 1059]. Nous pouvons en déduire une minoration en fonction du nombre de classes.

Corollaire 5.6. *Soient K un corps de nombres, $D = [K : \mathbb{Q}]$ et h le cardinal de* $\mathrm{Cl}(\mathcal{O}_K)$. *Nous avons*

$$c_1(K) \ge \frac{h^{1/D}}{1 + \log h}.$$

De plus $c_1(K) = 1 \Leftrightarrow h = 1 = \operatorname{Card} V_\infty(K)$.

Démonstration. Si nous notons ici $i = \max_{c \in \mathrm{Cl}(\mathcal{O}_K)} \min_{I \in c} N(I)$, alors le lemme 1 de [16] montre $h \le i(1 + \log i)^{D-1}$ d'où l'on déduit facilement $i \ge h/(1 + \log h)^{D-1}$. Avec $c_1(K) \ge i^{1/D}$, ceci montre la minoration. Maintenant si $c_1(K) = 1$, nous avons nécessairement égalité dans la proposition donc $i = 1$ et $\operatorname{Card} V_\infty(K) = 1$. De plus, $h = 1$ par la majoration ci-dessus. Réciproquement si $h = 1 = \operatorname{Card} V_\infty(K)$, alors

$$c_1(K) = \max_{c \in \mathrm{Cl}(\mathcal{O}_K)} \min_{I \in c} N(I)^{1/[K:\mathbb{Q}]} = \min_{I \subset \mathcal{O}_K} N(I)^{1/D} = N(\mathcal{O}_K)^{1/D} = 1. \qquad \square$$

Cette caractérisation des corps de nombres K tels que $c_1(K) = 1$ avait déjà été obtenue par Hasse [13, p. 599]. Concrètement, il en existe donc exactement dix : le corps $\mathbb{Q}$ et les neuf corps quadratiques imaginaires avec $h = 1$ ($\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ avec $d \in \{1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67, 163\}$, voir [7, p. 295–296]).

On sait [3] qu'il existe une infinité de corps de nombres K de degré D vérifiant

$$h^{1/D} \geq \delta_{K/\mathbb{Q}}^{1/2-\varepsilon}$$

(pour tout $D \geq 2$ et tout $\varepsilon > 0$) et ceci entraîne donc une minoration semblable pour $c_1(K)$. Rappelons que dans l'autre sens nous avons vu $c_1(K) \leq \sqrt{\delta_{K/\mathbb{Q}}}$.

Nous terminons par un calcul à l'aide de la théorie de la capacité.

Proposition 5.7. *Si $K \subset \overline{\mathbb{Q}}$ est le sous-corps des nombres totalement réels, alors $c_1(K) = 2$.*

Démonstration. D'après le lemme 4.9, il suffit de montrer que pour $a \in |\mathbb{A}_K^\times|$ l'ensemble $S_a = \{x \in K \mid |x|_v \leq a_v \text{ pour tout } v \in V(K)\}$ est fini pour $|a| < 2$ et infini si $|a| > 2$. Choisissons un corps de nombres $K_0 \subset K$ tel que $a \in |\mathbb{A}_{K_0}^\times|$. Alors S_a correspond à un ensemble adélique E sur K_0 au sens de Rumely [23] : E est le produit sur $v \in V(K_0)$ de la boule de rayon a_v dans $\mathbb{C}_v$ si v est finie et de l'intervalle $[-a_v, a_v] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} = \mathbb{C}_v$ lorsque v est infinie (et donc réelle). Alors S_a est l'ensemble des éléments de $\overline{\mathbb{Q}}$ dont tous les conjugués au-dessus de K_0 dans $\mathbb{C}_v$ sont dans E_v pour tout $v \in V(K_0)$ (puisque la condition aux places infinies montre qu'un tel élément est totalement réel donc dans K). La capacité de E s'écrit

$$\gamma(E) = \prod_{v \in V(K_0) \setminus V_\infty(K_0)} a_v^{D\mu(v)} \prod_{v \in V_\infty(K_0)} \frac{a_v}{2} = \left(\frac{|a|}{2}\right)^D$$

avec $D = [K_0 : \mathbb{Q}]$ puisque la capacité d'un segment réel est le quart de sa longueur [23, p. 353] et celle d'une boule ultramétrique est son rayon [23, p. 354] lorsque la valeur absolue est normalisée comme dans cet article, c'est-à-dire égale à $|\cdot|_v^{D\mu(v)}$ avec nos notations. Ceci dit, le théorème 2.2 de [23] montre directement que, si $\gamma(E) > 1$, alors S_a est infini tandis que le théorème de Fekete [23, Theorem 2.6] entraîne que S_a est fini si $\gamma(E) < 1$. □

Ceci n'est bien sûr qu'une illustration de l'utilisation de la théorie de la capacité. Les théorèmes de [23] permettent d'autres calculs. Par exemple, par une démonstration entièrement analogue, le corps K des nombres totalement p-adiques satisfait $c_1(K) = p^{1/(p-1)}$.

5.5. Propriétés de Northcott et de Siegel. Des exemples de corps de Northcott qui ne sont pas des corps de nombres ont été donnés en premier lieu par Bombieri et Zannier [6]. Ils montrent que pour tout entier d le compositum des extensions abéliennes de degré au plus d d'un corps de nombres fixé est de Northcott. On en déduit par exemple que c'est aussi le cas du corps noté en abrégé $\mathbb{Q}(\mathbb{Q}^{1/d})$ engendré par toutes les racines d-ièmes des rationnels [6, Corollary 2]. Ensuite Widmer a établi une condition suffisante en termes de discriminants de sous-extensions pour qu'un corps soit de Northcott [32, Theorem 3]. Cela lui permet de fournir de nouveaux exemples et en particulier d'affirmer que, si $(p_n)_{n\geq 1}$ est une suite de nombres premiers et $(d_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers naturels non nuls, alors le corps engendré par les p_n^{1/d_n} est de Northcott si et seulement si $\lim_{n\to\infty} p_n^{1/d_n} = \infty$ (voir [32, Corollary 2]). Par le corollaire 4.20, tous ces corps constituent des exemples de corps qui ne sont pas de Siegel. Rappelons aussi que nous avons donné plus haut (exemple 4.6) un exemple de corps de BV-Northcott qui n'est pas de Northcott.

Nous pouvons conclure facilement dans le cas d'une tour de corps de discriminant radical borné.

Lemme 5.8. *Soit* $(K_n)_{n\geq 1}$ *une suite de corps de nombres vérifiant* $K_n \subset K_{n+1}$ *et* $\sup_{n\geq 1} \delta_{K_n/\mathbb{Q}} < \infty$*. Alors la réunion* K *des corps* K_n *est un corps de Bombieri–Vaaler.*

Démonstration. Pour simplifier, nous utilisons (ce n'est pas crucial) le corollaire 4.33. Soient donc $a, b, c \in K$. Il existe un entier $n \geq 1$ tel que $a, b, c \in K_n$ puis il existe $x, y, z \in K_n$ avec $ax + by + cz = 0$ et

$$H^{\mathbb{Q}}_{K_n^3}(x, y, z) \leq \big(2\delta_{K_n/\mathbb{Q}} H_{K_n^3}(a, b, c)\big)^{1/2}.$$

Nous avons donc

$$H^{\mathbb{Q}}_{K^3}(x, y, z) \leq \big(2 \sup_{i\geq 1} \delta_{K_i/\mathbb{Q}} H_{K^3}(a, b, c)\big)^{1/2}$$

d'où $c^{\mathrm{BV}}_{\mathrm{I}}(2, K) \leq (2 \sup_{i\geq 1} \delta_{K_i/\mathbb{Q}})^{1/2}$. □

Par les résultats généraux, un tel corps est de Siegel et $c_1(K)$ est fini. Surtout, si ce n'est pas un corps de nombres (suite K_n non stationnaire), alors il est de Zhang et ni de Northcott ni de BV-Northcott. Parmi les corps de cette forme, nous trouvons les tours de corps de classes de Hilbert puisque dans ce cas $\delta_{K_{n+1}/K_n} = 1$ pour tout $n \geq 1$. Ceci n'est intéressant que si la tour est infinie : c'est le cas par exemple si l'on part de $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{-30030})$ (voir [7, p. 231–234]).

5.6. Problèmes ouverts. Résumons dans le tableau suivant nos connaissances sur les liens entre les différentes propriétés des extensions algébriques infinies de $\mathbb{Q}$.

<table>
<tr><td rowspan="3">$[K : \mathbb{Q}]$ infini</td><td colspan="3">$c_1(K)$ infini</td><td>$c_1(K)$ fini</td></tr>
<tr><td colspan="2">K BV-Northcott</td><td colspan="2">K non BV-Northcott</td></tr>
<tr><td>K Northcott</td><td colspan="3">K non Northcott</td></tr>
<tr><td>K non Siegel</td><td>oui</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>K Siegel</td><td>non</td><td></td><td></td><td>oui</td></tr>
</table>

↑
oui

Ici « oui » signifie qu'il existe un corps, « non » qu'il n'en existe pas et une case vide que nous ne savons pas. Nous pouvons également formuler les propriétés en termes de finitude ou non d'invariants numériques du corps K :

<table>
<tr><td rowspan="3">$[K : \mathbb{Q}] = \infty$</td><td colspan="3">$c_1(K) = \infty$</td><td>$c_1(K) < \infty$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\zeta_2(K^2) = \infty$</td><td colspan="2">$\zeta_2(K^2) < \infty$</td></tr>
<tr><td>$Z_2(K^2) = \infty$</td><td colspan="3">$Z_2(K^2) < \infty$</td></tr>
<tr><td>$c^{\Lambda}_{\mathrm{I}}(2, K) = \infty$</td><td>oui</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$c^{\Lambda}_{\mathrm{I}}(2, K) < \infty$</td><td>non</td><td></td><td></td><td>oui</td></tr>
</table>

↑
oui

On utilise par exemple les relations $Z_2(K^2) \leq \zeta_2(K^2) \leq \sqrt{2}c_1(K)$ pour disposer les colonnes et $Z_2(K^2) \leq c_{\mathrm{II}}^{Z}(2,K)^2 \leq u(K)^2 c_{\mathrm{I}}^{\Lambda}(2,K)^2$ pour le non. Le oui en haut à gauche concerne les corps de Northcott dont nous connaissons des exemples explicites (paragraphe 5.5). Le oui en bas à droite correspond aux exemples de $\overline{\mathbb{Q}}$, de $\mathbb{R} \cap \overline{\mathbb{Q}}$ et ses conjugués et des tours de corps du lemme 5.8. Le oui de la seconde colonne provient de l'exemple 4.6.

Ensuite chacune des cinq cases vides constitue un problème ouvert. Par exemple, existe-t-il un corps qui n'est ni de Siegel ni de Northcott ? Alternativement, pour un corps donné, dans quelle case le ranger ? Dans la quatrième colonne, les corps K pour lesquels nous avons $c_1(K) < \infty$ comme ceux des nombres totalement réels, totalement p-adiques ou constructibles sont-ils de Siegel ? Dans la deuxième colonne, le corps de l'exemple 4.6 est-il de Siegel ? Un corps difficile à situer est $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$: nous savons seulement qu'il n'est pas de BV-Northcott à cause des racines de l'unité (la minoration $c_1(\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}) \geq 5^{1/12}$ ne préjuge pas de la finitude de $c_1(\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}})$) ; dans laquelle des quatre cases de la droite du tableau se cache-t-il ?

Références

[1] *D. Allcock* and *J. Vaaler*, A Banach space determined by the Weil height, Acta Arith. **136** (2009), 279–298.

[2] *F. Amoroso* and *R. Dvornicich*, A lower bound for the height in abelian extensions, J. Number Theory **80** (2000), 260–272.

[3] *N. Ankeny*, *R. Brauer* and *S. Chowla*, A note on the class-numbers of algebraic number fields, Amer. J. Math. **78** (1956), 51–61.

[4] *R. Ash*, Probability and measure theory, 2nd ed., Harcourt Academic Press, Burlington 2000.

[5] *E. Bombieri* and *J. Vaaler*, On Siegel's lemma, Invent. Math. **73** (1983), 11–32; Addendum, ibid. **75** (1984), 377.

[6] *E. Bombieri* and *U. Zannier*, A note on heights in certain infinite extensions of $\mathbb{Q}$, Rend. Mat. Acc. Lincei **12** (2001), 5–14.

[7] *J. W. S. Cassels* and *A. Fröhlich*, Algebraic number theory, Academic Press, London 1967.

[8] *S. David* and *P. Philippon*, Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés des tores, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa IV **28** (1999), 489–543; Erratum, ibid. **29** (2000), 729–731.

[9] *É. Gaudron*, Pentes des fibrés vectoriels adéliques sur un corps global, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **119** (2008), 21–95.

[10] *É. Gaudron*, Géométrie des nombres adélique et lemmes de Siegel généralisés, Manuscripta Math. **130** (2009), 159–182.

[11] *É. Gaudron* and *G. Rémond*, Minima, pentes et algèbre tensorielle, Israel J. Math. **195** (2013), 565–591.

[12] *A. Gramain*, Intégration, Collection méthodes, Hermann, Paris 1988.

[13] *H. Hasse*, Number theory, Classics Math., Springer, Berlin 2002.

[14] *N. Jacobson*, Basic algebra II, 2nd ed., Freeman, New York 1989.

[15] *S. Louboutin*, Explicit bounds for residues of Dedekind zeta functions, values of L-functions at $s = 1$, and relative class numbers, J. Number Theory **85** (2000), 263–282.

[16] *D. Masser*, A note on Siegel's lemma, Rocky Mountain J. Math. **26** (1996), 1057–1068.

[17] *R. McFeat*, Geometry of numbers in adele spaces, Dissertationes Math. Rozprawy Mat. **88** (1971).

[18] *H. Minkowski*, Geometrie der Zahlen, Teubner, Leipzig 1910.

[19] *J. Neukirch*, Algebraic number theory, Grundlehren Math. Wiss. **322**, Springer, Heidelberg 1999.

[20] *C. Perez-Garcia* and *W. Schikhof*, Locally convex spaces over non-Archimedean valued fields, Cambridge Stud. Adv. Math. **119**, Cambridge University Press, Cambridge 2010.

[21] *P. Ribenboim*, The theory of classical valuations, Springer Monogr. Math., Springer, New York 1999.

[22] *D. Roy* and *J. Thunder*, An absolute Siegel's lemma, J. reine angew. Math. **476** (1996), 1–26; Addendum and erratum, ibid. **508** (1999), 47–51.

[23] *R. Rumely*, The Fekete-Szegő theorem with splitting conditions. II, Acta Arith. **103** (2002), 347–410.

[24] *A. Thue*, Om en generel i store hele tal uløsbar ligning, Christiania Vidensk. Selsk. Skr. **7** (1908), 1–15.

[25] *A. Thue*, Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen, J. reine angew. Math. **135** (1909), 284–305.

[26] *J. Thunder*, An adelic Minkowski–Hlawka theorem and an application to Siegel's lemma, J. reine angew. Math. **475** (1996), 167–185.

[27] *J. Thunder*, Remarks on adelic geometry of numbers, in: Number theory for the millennium. III, A. K. Peters, Natick (2002), 253–259.
[28] *J. Vaaler*, A geometric inequality with applications to linear forms, Pacific J. Math. **83** (1979), 543–553.
[29] *J. Vaaler*, The best constant in Siegel's lemma, Monatsh. Math. **140** (2003), 71–89.
[30] *A. Weil*, Adèles and algebraic groups, Progr. Math. **23**, Birkhäuser, Boston 1982.
[31] *A. Weil*, Basic number theory, Classics Math., Springer, Berlin 1995.
[32] *M. Widmer*, On certain infinite extensions of the rationals with Northcott property, Monatsh. Math. **162** (2011), 341–353.
[33] *S. Zhang*, Positive line bundles on arithmetic varieties, J. Amer. Math. Soc. **8** (1995), 187–221.

Éric Gaudron, Université Blaise Pascal, UMR 6620,
Campus universitaire des Cézeaux, BP 80026, 63171 Aubière Cedex, France
e-mail: eric.gaudron@univ-bpclermont.fr

Gaël Rémond, Institut de Mathématiques de Bordeaux, UMR 5251, Université Bordeaux 1,
351, cours de la Libération, 33405 Talence Cedex, France
e-mail: gael.remond@math.u-bordeaux1.fr

Eingegangen 2. Dezember 2013, in revidierter Fassung 9. Juli 2014