J. Inst. Math. Jussieu (2025), **24**(3), 705–761
doi:10.1017/S1474748024000549

NOMBRE DE PETITS POINTS SUR UNE VARIÉTÉ ABÉLIENNE

ÉRIC GAUDRON[1] et GAËL RÉMOND[2]

[1] *CNRS, LMBP, Université Clermont Auvergne, F-63000 Clermont-Ferrand, France*
(Eric.Gaudron@uca.fr)

[2] *Institut Fourier, UMR 5582 CS 40700, 38058 Grenoble Cedex 9, France*
(Gael.Remond@univ-grenoble-alpes.fr)

(Reçu le 7 décembre 2022; révisé le 4 novembre 2024; accepté le 4 novembre 2024; first published online 18 mars 2025)

Abstract Given a polarised abelian variety over a number field, we provide totally explicit upper bounds for the cardinality of the rational points whose Néron-Tate height is less than a small threshold. These imply new estimates for the number of torsion points as well as the minimal height of a non-torsion point. Our bounds involve the Faltings height and dimension of the abelian variety together with the degrees of the polarisation and the number field but we also get a stronger statement where we use certain successive minima associated to the period lattice at a fixed archimedean place, in the spirit of a result of David for elliptic curves.

Table des matières

1 Introduction 705
2 Géométrie des nombres 710
3 Inégalités de Cauchy sphériques 715
4 Lemmes d'interpolation 718
5 Modèles de Néron absolus 724
6 Inégalité fondamentale 729
7 Premières conséquences 736
8 Courbes elliptiques 741
9 Dimension supérieure 746
Références 760

1. Introduction

Soient K un corps de nombres de degré D et $(A,\mathcal{L})$ une variété abélienne polarisée de dimension g sur K. Nous notons $h_{\mathcal{L}}\colon A(K)\to\mathbb{R}$ la hauteur de Néron-Tate associée et

2020 Mathematics subject classification: Primary 11G10
Secondary 11G50; 11J95

© The Author(s), 2025. Published by Cambridge University Press.

$h_F(A)$ la hauteur de Faltings stable de A. Nous donnons tout d'abord une forme simplifiée de notre résultat principal.

Théorème 1.1. *Nous avons*

$$\begin{aligned}\operatorname{Card}\left\{P \in A(K) \mid h_{\mathcal{L}}(P) \leq \frac{1}{256gD}\right\}\\ \leq (200g)^{2g^2} D^g \max\left(1, h_F(A), \log h^0(A,\mathcal{L}), \log D\right)^g.\end{aligned}$$

Si $g = 1$, la constante 200^2 peut être remplacée par 9880.

Cet énoncé entraîne immédiatement une majoration du cardinal du groupe de torsion $A(K)_{\mathrm{tors}} = \{P \in A(K) \mid h_{\mathcal{L}}(P) = 0\}$ dans laquelle nous pouvons même faire disparaître $\mathcal{L}$ en le choisissant de sorte que $h^0(A,\mathcal{L})$ soit minimal. En faisant un calcul plus direct, principalement car il est possible de se ramener au cas où A est simple, nous obtenons une constante plus petite.

Théorème 1.2. *Nous avons*

$$\operatorname{Card} A(K)_{\mathrm{tors}} \leq (6g)^{8g} D^g \max(1, h_F(A), \log D)^g.$$

Si $g = 1$, la constante 6^8 peut être remplacée par 8575.

Si nous considérons maintenant un point $P \in A(K)$ qui n'est pas de torsion, le théorème 1.1 permet de compter ses petits multiples et conduit à une minoration de $h_{\mathcal{L}}(P)$. Nous pouvons à nouveau faire disparaître $\log h^0(A,\mathcal{L})$ et diminuer la constante.

Théorème 1.3. *Si $P \in A(K) \setminus A(K)_{\mathrm{tors}}$ alors*

$$h_{\mathcal{L}}(P)^{-1} \leq D\left((6g)^8 D \max(1, h_F(A), \log D)\right)^{2g}.$$

Si $g = 1$, la constante 6^8 peut être remplacée par 59827.

Nous établissons en fait un énoncé plus fort que le théorème 1.1 en introduisant certains minima associés à une place archimédienne. Fixons donc un plongement $\sigma\colon K \hookrightarrow \mathbb{C}$ et rappelons que la forme de Riemann de la polarisation $\mathcal{L}_\sigma$ sur la variété abélienne complexe A_σ munit le réseau des périodes de celle-ci, noté Ω_{A_σ}, d'une structure euclidienne et donc de minima successifs $\lambda_1(\Omega_{A_\sigma}) \leq \cdots \leq \lambda_{2g}(\Omega_{A_\sigma})$ au sens de Minkowski. Ceci vaut également pour toute sous-variété abélienne B de A, munie de la polarisation $\mathcal{L}_{|B}$. Nous définissons alors des minima modifiés pour $1 \leq i \leq 2g$ par

$$\widetilde{\lambda}_i = \min_{i \leq 2\dim B} \lambda_{2\dim B}(\Omega_{B_\sigma})$$

où B parcourt les sous-variétés abéliennes de A vérifiant la condition de dimension. Lorsque A est simple, tous les $\widetilde{\lambda}_i$ sont égaux à $\lambda_{2g}(\Omega_{A_\sigma})$. Notre résultat principal prend maintenant la forme suivante.

!

Théorème 1.4. *Avec les notations ci-dessus, nous avons*

$$\operatorname{Card}\left\{P\in A(K)\mid h_{\mathcal{L}}(P)\le\frac{\widetilde{\lambda}_1^2}{(4^7g)^{2g}D}\right\}$$
$$\le(1366g)^{3g^2}\frac{h^0(A,\mathcal{L})}{\widetilde{\lambda}_1\cdots\widetilde{\lambda}_{2g}}D^g\max\left(1,h_F(A),\log h^0(A,\mathcal{L}),\log\frac{D}{\widetilde{\lambda}_1^2}\right)^g.$$

On montre facilement $\widetilde{\lambda}_1\ge 1$ et $\widetilde{\lambda}_1\cdots\widetilde{\lambda}_{2g}\ge h^0(A,\mathcal{L})$ de sorte que cette majoration entraîne bien celle du théorème 1.1 aux constantes près. Elle présente une meilleure homogénéité : les quantités

$$\frac{h_{\mathcal{L}}(P)}{\widetilde{\lambda}_1^2}\quad\text{et}\quad\frac{h^0(A,\mathcal{L})}{\widetilde{\lambda}_1\cdots\widetilde{\lambda}_{2g}}$$

sont inchangées lorsque $\mathcal{L}$ est remplacé par une puissance $\mathcal{L}^{\otimes n}$ (seuls les termes logarithmiques empêchent la formule d'être totalement invariante par cette transformation).

Si nous minorons simplement le cardinal par 1, le théorème 1.4 fournit une majoration du produit $\widetilde{\lambda}_1\cdots\widetilde{\lambda}_{2g}$. Nous pouvons obtenir mieux et même faire intervenir une moyenne sur toutes les places archimédiennes.

Théorème 1.5. *Nous avons*

$$\min_B\left(\frac{h^0(B,\mathcal{L})}{h^0(A,\mathcal{L})}\right)^{1/(g-\dim B)}\cdot\frac{1}{D}\sum_{\sigma\colon K\hookrightarrow\mathbb{C}}\lambda_{2g}(\Omega_{A_\sigma})^2\le\left(4^6g\right)^{2g}\max\left(1,h_F(A),\log h^0(A,\mathcal{L})\right)$$

où le minimum porte sur les sous-variétés abéliennes strictes de A.

Il s'agit d'une inégalité complémentaire et en quelque sorte duale au théorème des périodes [16, théorème 1.2] qui, tout du moins dans le cas où A est simple, majore la moyenne des $h^0(A,\mathcal{L})^{1/g}\lambda_1(\Omega_{A_\sigma})^{-2}$ par une expression analogue.

Avant de situer nos théorèmes par rapport aux résultats antérieurs, observons que du théorème 1.2 découlent à la fois des minorations du degré du corps de rationalité d'un point de n-torsion de A et de celui de l'ensemble de ces points. Commençons par le corps de définition $K(A[n])$ des points de n-torsion $A[n]$ de $A(\overline{K})$.

Corollaire 1.6. *Pour tout entier $n\ge 1$, on a*

$$[K(A[n]):\mathbb{Q}]\ge\frac{n^2}{(6g)^8\max\left(1,h_F(A),\log\frac{n^2}{(6g)^8}\right)}.$$

En effet, $A[n]$ est un sous-groupe de $A(K(A[n]))_{\mathrm{tors}}$ d'ordre n^{2g}. Du théorème 1.2 vient $n^2\le(6g)^8D_n\max(1,h_F(A),\log D_n)$ avec $D_n=[K(A[n]):\mathbb{Q}]$. La conclusion est immédiate si $\log D_n\le\max(1,h_F(A))$. Dans le cas contraire on utilise le fait que $D_n\ge e$ et $D_n\log D_n\ge x>0$ impliquent $D_n\ge x/\max(1,\log x)$. Bien sûr le même argument appliqué au groupe engendré par un point $P\in A(\overline{K})_{\mathrm{tors}}$ fournit une minoration similaire du degré du corps de définition $K(P)$ de P.

!

Corollaire 1.7. *Pour tout point de torsion P d'ordre n, on a*

$$[K(P):\mathbb{Q}] \geq \frac{n^{1/g}}{(6g)^8 \max\left(1, h_F(A), \log \frac{n^{1/g}}{(6g)^8}\right)}.$$

La dépendance du minorant en le paramètre n peut ici être améliorée (voir [34, théorème 4]) mais la nouveauté est que la borne est entièrement explicite. L'existence d'une borne de ce type (en n^{ε}) était un résultat clef de la méthode Pila et Zannier dans leur démonstration de la conjecture de Manin-Mumford.

Évoquons maintenant quelques repères historiques. L'étude de ces questions par des méthodes de transcendance a été amorcée par Lang [20] et Masser [21] à travers des minorations de $[K(A[n]):\mathbb{Q}]$ dans le cas elliptique. Elle s'est dirigée par la suite vers les minorations de hauteur et les estimations du cardinal de la torsion avec les travaux d'Anderson et Masser [1] ($g=1$) et de Masser [22, 23, 24] (cas général). Le premier théorème de comptage comparable au théorème 1.1 a été établi par Masser dans une lettre adressée à Bertrand [25]. Bien que non publié, il demeurait à ce jour le résultat de référence pour une variété abélienne quelconque. Notons que dans ces travaux seule la dépendance (polynomiale) en l'*un* des paramètres D ou $h_F(A)$ était explicitée. Cet inconvénient disparaît dans le cas elliptique avec l'article [26] de Masser, dans lequel se trouvent des énoncés analogues aux théorèmes 1.1, 1.2 et 1.3 et au corollaire 1.6. Toutefois, le théorème de comptage de Masser comporte un facteur $\max(1,h_F(A))^{1/2}$ supplémentaire, qui se transmet dans les autres énoncés, et la constante numérique n'est pas calculée. En dimension supérieure, pour les variétés abéliennes principalement polarisées, les travaux de David [10, 11] orientés vers le cardinal de l'orbite galoisienne des points de torsion et les minorations de hauteur ont permis de renforcer le caractère effectif des bornes obtenues, grâce aux propriétés modulaires des fonctions thêta. L'intégration de ces techniques dans le formalisme de la géométrie d'Arakelov a débouché sur les premières estimations entièrement explicites (voir [5, proposition 4.4] pour la hauteur et [32, proposition 1.2] pour la torsion), néanmoins dénuées de finesse comparées à celle des théorèmes ci-dessus. Quant à l'idée d'introduire des minima dans le théorème 1.4, elle nous a été suggérée par un texte de David [12] qui améliore [26] dans le cas elliptique. En résumé, les théorèmes et corollaires présentés au début de ce texte suppriment toutes les limitations des énoncés connus auparavant, en offrant à la fois une précision au moins égale et souvent meilleure en les paramètres D et $h_F(A)$ et un aspect explicite. Parmi les travaux cités précédemment, seul le théorème principal de [12] qui comporte également une partie non archimédienne n'est pas contenu dans le théorème 1.4.

Nous pouvons même aller au-delà et remarquer que, dans le second membre du théorème 1.4, la dépendance en la hauteur de Faltings est optimale et celle en le degré quasi-optimale. Pour $h_F(A)$, il suffit de considérer la famille de variétés abéliennes principalement polarisées définie par Masser [27] pour laquelle tous les $\widetilde{\lambda}_i$ sont égaux (simplicité) et au moins linéaires en la hauteur. Le même argument entraîne également l'optimalité du théorème 1.5 en la hauteur. D'un autre côté, l'exemple des puissances de courbes elliptiques CM [8] montre qu'un majorant (uniforme) de $\operatorname{Card} A(K)_{\mathrm{tors}}$ doit être au moins de l'ordre de $(D\log\log 3D)^g$ d'où la quasi-optimalité en D du théorème 1.2 et,

a fortiori, dans le second membre des théorèmes 1.1 et 1.4. Le même exemple assure que la dépendance en n du corollaire 1.6 est quasi-optimale [21].

En revanche, la hauteur de Faltings pourrait conjecturalement disparaître des théorèmes 1.1 à 1.3 : ce serait en effet une conséquence de la conjecture uniforme de torsion et de la conjecture de Lang-Silverman (voir [32]). Rappelons que la première est connue lorsque $g=1$ [28] ou si A est CM [35] ; dans les deux cas des bornes explicites existent (voir [31] et [18]) mais la dépendance en D y est moins bonne que dans le théorème 1.2, excepté dans le cas déjà cité des courbes elliptiques CM. Quant à la dépendance en D du théorème 1.3, elle est la meilleure connue dans cette généralité mais le problème de Lehmer suggère qu'elle pourrait être nettement améliorée (pour des résultats dans ce sens dans le cas CM voir par exemple [7]). Enfin, signalons que le terme secondaire $\log h^0(A,\mathcal{L})$ du théorème 1.1 peut être supprimé, au prix d'une forte perte sur les autres paramètres, par l'astuce de Zarhin (voir le lemme 4.6 de [32]).

Venons-en aux ingrédients de nos démonstrations. Comme dans [16] et [5], elles s'articulent autour d'une preuve dite de transcendance : un lemme de Siegel permet de construire une section de petite hauteur et petite en un certain ensemble $\mathcal{S}$ de points (avec des multiplicités) ; une étape d'extrapolation analytique montre ensuite que cette section est encore petite, ainsi que ses dérivées jusqu'à un certain ordre, en un autre ensemble de points Σ ; un lemme de multiplicités assure que l'une de ces dérivées est non nulle et un avatar de la formule du produit pour la valeur de cette dérivée entraîne l'inégalité qui contient l'information souhaitée (partie 6).

La principale innovation technique de ce texte consiste en un nouveau lemme d'interpolation multidimensionnel (théorème 4.4) qui permet d'utiliser un ensemble $\mathcal{S}$ de points d'interpolation assez général alors que dans [16] et [5] ces points devaient être alignés. Dans sa lettre [25], Masser employait un lemme multidimensionnel simple (le lemme 4.3 ci-après) qui imposait que $\mathcal{S}$ soit un singleton. Pour que contribuent tous les points de $\mathcal{S}$, l'idée centrale est de choisir une projection ℓ sur une droite et de montrer que l'on peut utiliser un lemme d'interpolation unidimensionnel basé sur les points de $\ell(\mathcal{S})$. La qualité de l'estimation obtenue dépend alors crucialement de la répartition de $\ell(\mathcal{S})$: il convient d'une part de ne pas perdre de points, donc que ℓ soit injectif sur $\mathcal{S}$, et d'autre part que les points soient les plus espacés possible. La production d'un couple $(\mathcal{S},\ell)$ convenable nécessite donc des arguments de géométrie des nombres adaptés. En effet, pour notre construction, les meilleurs points d'interpolation sont ceux du réseau Ω_{A_σ} pris dans une boule de rayon r. Toutefois choisir $\mathcal{S}=\{\omega\in\Omega_{A_\sigma} \mid \|\omega\|_{\mathcal{L},\sigma}\leq r\}$ ne convient pas en général. Nous expliquerons comment trouver une partie $\mathcal{S}$ idoine dans l'intersection d'un réseau euclidien et d'une boule afin qu'il existe une projection ℓ pour laquelle $\ell(\mathcal{S})$ est bien espacé (proposition 2.5). En particulier le cardinal de $\mathcal{S}$ doit être minoré par une expression (en fonction des minima du réseau) qui sera *in fine* combinée avec un entier N donné par un autre argument de géométrie des nombres (proposition 2.1) pour partitionner notre ensemble initial de points rationnels en N parties formées de points dont les logarithmes sont proches.

Pour finir disons que nous ne pouvons pas nous ramener au cas simple comme le faisait Masser car l'usage d'un théorème d'isogénie augmenterait les exposants de D et $h_F(A)$ dans nos bornes. C'est ainsi qu'à l'instar de [16] et [5] nous incluons dans la démonstration

!

une quantité y obtenue par minimum sur les sous-variétés abéliennes B de A et cela nous oblige à une récurrence finale sur la dimension qui explique la taille des constantes dans les théorèmes 1.1 et 1.4 (voir partie 9). Avant cela, nous traitons en partie 8 le cas des courbes elliptiques dont les spécificités (simplicité, présence d'une polarisation principale, interpolation unidimensionnelle, utilisation du lemme matriciel) permettent de simplifier les arguments généraux et d'obtenir des résultats plus fins.

2. Géométrie des nombres

La démonstration de notre premier énoncé fait intervenir un empilement de sphères. Rappelons que cette terminologie désigne, dans un espace euclidien, la réunion disjointe de boules (ici ouvertes) toutes de même rayon ρ. La *densité centrale* d'un tel empilement est, lorsqu'elle existe, la limite $\lim_{R\to+\infty} N_R/\operatorname{vol}(B(0,R/\rho))$, où N_R est le nombre de centres des boules de l'empilement se trouvant dans la boule $B(0,R)$ (voir [9]). Par exemple, si les centres des boules forment un réseau Λ de rang n, la densité centrale vaut $\rho^n \operatorname{vol}(\Lambda)^{-1}$.

Notons d_n la densité maximale d'un empilement de sphères dans $\mathbb{R}^n$. Rappelons que la valeur exacte de d_n n'est connue que si $1 \leq n \leq 3$ ($d_2 = 1/2\sqrt{3}$). Pour $n = 4$, nous avons $d_4 \leq 0{,}1313$ et, pour $n \geq 6$, nous exploiterons la borne

$$d_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n/2} \frac{(n/2)!}{\pi^{n/2}}$$

qui découle des encadrements de la table page 711 de [9] pour $n = 6{,}7$ et de la borne de Blichfeldt [4] pour $n \geq 8$.

Puisque, pour un réseau Λ de premier minimum λ_1, les boules de rayon $\lambda_1/2$ centrées aux points de Λ sont disjointes, nous avons $(\lambda_1/2)^n \operatorname{vol}(\Lambda)^{-1} \leq d_n$ et ceci entraîne (classiquement) une majoration de la constante d'Hermite : $c_{\mathrm{I}}(n,\mathbb{Q}) = c_{\mathrm{II}}^{\Lambda}(n,\mathbb{Q}) \leq 2^n d_n$ avec les notations de [15, p. 59].

La démonstration ci-dessous nous a été communiquée par Pascal Autissier.

Proposition 2.1. *Soient Λ un réseau euclidien, $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ ses minima successifs, $\rho > 0$ un réel et X une partie de $\Lambda \otimes \mathbb{R}/\Lambda$. Alors il existe $X_0 \subset X$ tel que tout point de X est à distance au plus ρ d'un point de X_0 (pour la distance induite) et*

$$\operatorname{Card} X_0 \leq d_n \left(\frac{2}{\rho}\right)^n \operatorname{vol}(\Lambda) \prod_{i=1}^{n} \max\left(1, \frac{\rho}{\lambda_i}\right).$$

Démonstration. Traitons d'abord le cas où $\lambda_1 \geq \rho$. Nous construisons X_0 par itération en commençant par $X_0 = \emptyset$. À chaque étape, nous ajoutons s'il en existe un point de X qui est à distance au moins ρ de tous les points de X_0. Après N étapes, X_0 est formé de N points deux à deux à distance au moins ρ. Choisissons un ensemble Y_0 (de cardinal N) de représentants de X_0 dans $\Lambda \otimes \mathbb{R}$. Considérons ensuite l'union des boules de rayon $\rho/2$ centrées aux points de $Y_0 + \Lambda$. Elles sont disjointes car, si deux centres viennent de translatés par deux points différents de Y_0, ils sont à distance au moins ρ puisque c'est le cas de leurs images (dans X_0) tandis que, s'ils viennent du même point de Y_0, ils diffèrent par un élément non nul de Λ de norme au moins $\lambda_1 \geq \rho$. Nous obtenons

!

donc un empilement de sphères, de densité centrale $N(\rho/2)^n \operatorname{vol}(\Lambda)^{-1}$. Cette quantité est ainsi majorée par d_n, ce qui montre à la fois que le procédé itératif s'arrête et que l'ensemble final X_0 vérifie bien les propriétés de l'énoncé. Traitons maintenant le cas général. Nous notons $|\cdot|$ la norme euclidienne donnée, $f_1,\dots,f_n$ une famille libre de Λ avec $|f_i| = \lambda_i$ pour $1 \leq i \leq n$ puis $e_1,\dots,e_n$ une base orthonormée de $(\Lambda \otimes \mathbb{R}, |\cdot|)$ telle que $\operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}(e_1,\dots,e_i) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}(f_1,\dots,f_i)$ pour $1 \leq i \leq n$. Introduisons une seconde norme euclidienne sur $\Lambda \otimes \mathbb{R}$ par la formule (pour $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$)

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \max\left(1, \frac{\rho}{\lambda_i}\right)^2.$$

Si $x \in \Lambda \setminus \{0\}$ il existe $1 \leq i \leq n$ tel que $x \in \operatorname{Vect}_{\mathbb{Q}}(f_1,\dots,f_i) \setminus \operatorname{Vect}_{\mathbb{Q}}(f_1,\dots,f_{i-1})$. Par définition des minima successifs, ceci entraîne $|x| \geq \lambda_i$ donc $\|x\| \geq |x|\rho/\lambda_i \geq \rho$. Ainsi le premier cas s'applique au réseau euclidien $(\Lambda, \|\cdot\|)$. Nous aboutissons au résultat souhaité puisque d'une part

$$\operatorname{vol}(\Lambda, \|\cdot\|) = \operatorname{vol}(\Lambda, |\cdot|) \prod_{i=1}^{n} \max\left(1, \frac{\rho}{\lambda_i}\right)$$

et d'autre part la distance induite par $\|\cdot\|$ est supérieure à celle induite par $|\cdot|$ (car $\|x\| \geq |x|$ pour tout $x \in \Lambda \otimes \mathbb{R}$).

Dans la suite de cette partie, nous cherchons, en vue d'appliquer notre théorème d'interpolation 4.4, à projeter l'intersection d'un réseau et d'une boule sur une droite de la façon la plus efficace possible. Ceci nécessite en fait de limiter la projection à une partie bien choisie de l'intersection.

Théorème 2.2. *Soient Λ un réseau euclidien, $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ ses minima successifs et $r > 0$ un réel. Soient $N_1,\dots,N_m$ avec $1 \leq m \leq n$ des entiers naturels non nuls tels que*

$$\sum_{i=1}^{m} N_i^2 \lambda_i^2 \leq 4r^2 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i^2 + N_{i+1}^2 \lambda_{i+1}^2 \leq 4r^2.$$

Alors il existe un ensemble $\mathcal{S} \subset \{x \in \Lambda \mid |x| \leq r\}$ contenant 0 et symétrique par rapport à l'origine, un réel $\delta > 0$ et un élément unitaire $\ell \in (\Lambda \otimes \mathbb{R})^\vee$ tels que $\ell(\mathcal{S}) \subset \mathbb{Z}\delta$, $\operatorname{Card} \ell(\mathcal{S}) = \operatorname{Card} \mathcal{S} \geq N_1 \cdots N_m$ et

$$\operatorname{Card} \mathcal{S}.\delta \geq \left(1 - \frac{1}{2\lfloor r/\lambda_1 \rfloor N_2 \cdots N_m + 2}\right) \sqrt{4r^2 - \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i^2 + N_{i+1}^2 \lambda_{i+1}^2}.$$

Démonstration. Nous choisissons une famille libre $e_1,\dots,e_m$ de Λ avec $|e_i| = \lambda_i$ $(1 \leq i \leq m)$ et $\langle e_i, e_{i+1} \rangle \geq 0$ $(1 \leq i < m)$. Notons $V = \operatorname{Vect}(e_1,\dots,e_m) \subset \Lambda \otimes \mathbb{R}$ et définissons ℓ par les conditions $\ell(V^\perp) = \{0\}$ et $\ell(e_i) = N_{i+1} \cdots N_m \delta$ $(1 \leq i \leq m)$ où δ est uniquement déterminé de sorte que ℓ soit unitaire. Posons

$$\mathcal{S}_0 = \{x \in \mathbb{Z}\delta \mid \exists y \in \Lambda,\ |y| \leq r,\ \ell(y) = x\}.$$

Nous avons $0 \in \mathcal{S}_0$ et $-\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}_0$. Il est donc possible de choisir pour chaque élément de $\mathcal{S}_0$ un antécédent par ℓ dans $\{y \in \Lambda \mid |y| \leq r\}$ de sorte que leur ensemble $\mathcal{S}$ vérifie aussi $0 \in \mathcal{S}$ et $-\mathcal{S} = \mathcal{S}$. De cette façon, toutes les conditions de l'énoncé sont remplies sauf peut-être les deux minorations.

Remarquons que $\Lambda \cap \operatorname{Ker}\ell \cap V$ est un réseau de $\operatorname{Ker}\ell \cap V$ dont une famille libre (maximale) est formée par les éléments $e_i - N_{i+1}e_{i+1}$ $(1 \leq i \leq m-1)$. Par suite, le rayon de recouvrement ρ de ce réseau vérifie (voir le lemme 1 de [3])

$$\begin{aligned} 4\rho^2 \leq \sum_{i=1}^{m-1} |e_i - N_{i+1}e_{i+1}|^2 &= \sum_{i=1}^{m-1} |e_i|^2 + N_{i+1}^2|e_{i+1}|^2 - 2N_{i+1}\langle e_i, e_{i+1}\rangle \\ &\leq \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i^2 + N_{i+1}^2\lambda_{i+1}^2 \end{aligned}$$

et en particulier $\rho \leq r$ par hypothèse. Tout ceci vaut même dans le cas dégénéré $m = 1$ où $\rho = 0$ est le rayon de recouvrement du réseau trivial.

Considérons maintenant $x \in \mathbb{Z}\delta$ et écrivons $(x/\delta)e_m = \mu + \xi$ où $\mu \in \operatorname{Ker}\ell \cap V$ et $\xi \in (\operatorname{Ker}\ell)^\perp$. Puisque $\ell(e_m) = \delta$, il vient $\ell(\xi) = x$ et, ℓ étant unitaire, $|\xi| = |x|$. Par définition de ρ, il existe $\lambda \in \Lambda \cap \operatorname{Ker}\ell \cap V$ avec $|\mu - \lambda| \leq \rho$. Posons ensuite $y = (x/\delta)e_m - \lambda \in \Lambda$. Nous avons $\ell(y) = x$ et $|y|^2 = |\mu - \lambda|^2 + |\xi|^2 \leq \rho^2 + |x|^2$. Ceci permet de conclure

$$\{x \in \mathbb{Z}\delta \mid |x|^2 \leq r^2 - \rho^2\} \subset \mathcal{S}_0.$$

L'ensemble de gauche est de cardinal $2\lfloor\sqrt{r^2-\rho^2}/\delta\rfloor + 1$. Nous distinguons alors deux cas. Si l'inclusion ci-dessus est stricte alors $\operatorname{Card}\mathcal{S}_0.\delta \geq 2\sqrt{r^2-\rho^2}$. Si en revanche c'est une égalité, nous pouvons seulement écrire $\operatorname{Card}\mathcal{S}_0 + 1 \geq 2\sqrt{r^2-\rho^2}/\delta$ donc

$$\operatorname{Card}\mathcal{S}_0.\delta \geq \left(1 - \frac{1}{\operatorname{Card}\mathcal{S}_0 + 1}\right) 2\sqrt{r^2-\rho^2}$$

mais l'égalité et $\lfloor r/\lambda_1\rfloor N_2 \cdots N_m \delta \in \mathcal{S}_0$ (utiliser $y = \lfloor r/\lambda_1\rfloor e_1$) donnent $\operatorname{Card}\mathcal{S}_0 \geq 2\lfloor r/\lambda_1\rfloor N_2 \cdots N_m + 1$. Ainsi dans les deux cas nous trouvons

$$\operatorname{Card}\mathcal{S}_0.\delta \geq \left(1 - \frac{1}{2\lfloor r/\lambda_1\rfloor N_2 \cdots N_m + 2}\right) \sqrt{4r^2 - 4\rho^2}$$

puis, grâce à la borne obtenue pour $4\rho^2$, la minoration souhaitée de $\operatorname{Card}\mathcal{S}.\delta = \operatorname{Card}\mathcal{S}_0.\delta$.

Pour finir, montrons $\operatorname{Card}\mathcal{S} = \operatorname{Card}\mathcal{S}_0 \geq N_1 \cdots N_m$. Notons pour cela $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m$ une base orthonormée de $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$ telle que $\epsilon_i(e_j) = 0$ si $1 \leq i < j \leq m$ puis

$$\mathcal{S}_1 = \Big\{ x \in \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Z}e_i \mid -\frac{N_i}{2}|\epsilon_i(e_i)| \leq \epsilon_i(x) < \frac{N_i}{2}|\epsilon_i(e_i)| \Big\}.$$

Puisque $|\epsilon_i(e_i)| \leq |e_i| = \lambda_i$, la condition $\sum_{i=1}^m N_i^2\lambda_i^2 \leq 4r^2$ montre $\mathcal{S}_1 \subset \{x \in \Lambda \mid |x| \leq r\}$ d'où $\operatorname{Card}\mathcal{S}_0 \geq \operatorname{Card}\ell(\mathcal{S}_1)$. Soient x et y deux éléments distincts de $\mathcal{S}_1$ que nous écrivons $x = \sum_{i=1}^m x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^m y_i e_i$. Notons encore j le plus grand entier tel que $x_j \neq y_j$. Nous

!

avons $\epsilon_j(x-y) = (x_j - y_j)\epsilon_j(e_j)$ d'où $|x_j - y_j| < N_j$ puis $x_j - y_j \in \mathbb{Z} \setminus N_j\mathbb{Z}$. Par suite

$$\ell(x-y) = \left(x_j - y_j + \sum_{i=1}^{j-1} (x_i - y_i) N_{i+1} \cdots N_j \right) N_{j+1} \cdots N_m \delta \notin N_j \cdots N_m \delta \mathbb{Z}$$

est non nul. Cet argument entraîne $\operatorname{Card} \ell(\mathcal{S}_1) = \operatorname{Card} \mathcal{S}_1$. Finalement, le même calcul montre aussi $\operatorname{Card} \mathcal{S}_1 = N_1 \cdots N_m$ car, si $x_{j+1}, \ldots, x_m$ sont fixés, il y a exactement N_j choix de x_j compatibles avec la condition $\sum_{i=1}^m x_i e_i \in \mathcal{S}_1$.

Ce théorème nous suffira dans la plupart des cas mais nous devons le compléter en rang 2 par des calculs plus explicites. Nous commençons par un lemme technique auxiliaire.

Lemme 2.3. *Pour tout $\tau \in \mathbb{C}$ vérifiant $|\tau| \geq 1$ et $0 \leq \operatorname{Re} \tau \leq 1/2$, on a*

$$\frac{|\operatorname{Im} \tau|}{|2\tau - 1|} \geq \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \frac{|\operatorname{Im} \tau|}{|2\tau - 1| \min(3, |2\tau + 2|)} \geq \frac{\sqrt{5}}{6\sqrt{6}}$$

et, lorsque $|\tau + 2| \geq \sqrt{6}|\tau|$,

$$\frac{|\operatorname{Im} \tau|}{|2\tau - 1||\tau + 2|} \geq \frac{\sqrt{5}}{12}.$$

Démonstration. Posons $a = |\tau|^2$ et $b = \operatorname{Re} \tau$. En élevant au carré chaque inégalité et en développant, nous devons montrer (pour $a \geq 1$ et $0 \leq b \leq 1/2$) : $4a - 4b + 1 \leq 5(a - b^2)$, $5(4a - 4b + 1) \min(9, 4a + 8b + 4) \leq 216(a - b^2)$ et, si $6a \leq a + 4b + 4$, alors $5(4a - 4b + 1)(a + 4b + 4) \leq 144(a - b^2)$. En séparant selon la valeur du minimum, nous obtenons quatre inégalités polynomiales (de degré 2) assez faciles à vérifier. Par exemple, dans le cas où $4a + 8b + 4 \leq 9$, nous devons voir que $P = 80a^2 + 80ab - 116a + 56b^2 - 40b + 20$ est négatif; cette expression est croissante en b donc avec $b \leq (5 - 4a)/8$ il vient $P \leq 54a^2 - 81a + 135/8 = 54(a - 1/4)(a - 5/4) \leq 0$ puisqu'ici $1 \leq a \leq 5/4$. De manière analogue, dans le cas où $5a \leq 4b + 4$, nous utilisons successivement la croissance en b, $b \leq 1/2$ puis $1 \leq a \leq 6/5$ pour avoir $20a^2 + 60ab - 59a + 64b^2 - 60b + 20 \leq 20a^2 - 29a + 6 = 20(a - 1/4)(a - 6/5) \leq 0$. Les deux cas restants sont encore plus simples (car linéaires en a) et donc omis.

Ceci nous permet d'obtenir le cas très particulier suivant du résultat de projection.

Lemme 2.4. *Soient Λ un réseau euclidien de rang 2, $\lambda_1 \leq \lambda_2$ ses minima successifs et $r > 0$ un réel avec $\sqrt{6} \leq r/\lambda_2 \leq r/\lambda_1 \leq 3$. Alors il existe un ensemble $\mathcal{S} \subset \{x \in \Lambda \mid |x| \leq r\}$ contenant 0 et symétrique par rapport à l'origine, un réel $\delta > 0$ et un élément unitaire $\ell \in (\Lambda \otimes \mathbb{R})^\vee$ tels que $\ell(\mathcal{S}) \subset \mathbb{Z}\delta$, $\operatorname{Card} \mathcal{S} . \delta \geq 5r/3$ et $\operatorname{Card} \ell(\mathcal{S}) = \operatorname{Card} \mathcal{S} \geq 9$.*

Démonstration. Par homogénéité, nous pouvons supposer $\lambda_1 = 1$ et même identifier Λ au réseau $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ de $\mathbb{C}$ où τ est comme dans le lemme précédent (donc $\lambda_2 = |\tau|$). Posons alors $\delta = |\operatorname{Im} \tau|/|2\tau - 1|$ et définissons ℓ par $\ell(1) = 2\delta$ et $\ell(\tau) = \delta$. La valeur de δ assure que ℓ est unitaire. D'autre part, les 13 points 0, ± 1, $\pm\tau$, $\pm(1 + \tau)$, ± 2, $\pm(2 + \tau)$, $\pm(2 + 2\tau)$ ont des images distinctes par ℓ. Nous définissons $\mathcal{S}$ comme l'ensemble des éléments de norme $\leq r$ parmi ces treize points. L'hypothèse $\sqrt{6} \leq r/|\tau| \leq r \leq 3$ montre $|\tau| \leq r/\sqrt{6}$ et $1 \leq r/\sqrt{6}$ donc les neuf premiers points sont toujours de norme $\leq r$. Ceci entraîne

!

$\operatorname{Card}\ell(\mathcal{S}) = \operatorname{Card}\mathcal{S} \geq 9$. Pour minorer $\operatorname{Card}\mathcal{S}.\delta/r$ distinguons trois cas. Si $r < |2+\tau| < |2+2\tau|$ alors $\operatorname{Card}\mathcal{S} = 9$ et, puisque $|\tau|\sqrt{6} \leq r < |2+\tau|$, le lemme précédent donne

$$\frac{\operatorname{Card}\mathcal{S}.\delta}{r} \geq \frac{9\delta}{|2+\tau|} \geq \frac{9\sqrt{5}}{12}.$$

Si $|2+\tau| \leq r < |2+2\tau|$ alors $\operatorname{Card}\mathcal{S} = 11$ et (avec $r \leq 3$)

$$\frac{\operatorname{Card}\mathcal{S}.\delta}{r} \geq \frac{11\delta}{\min(3,|2+2\tau|)} \geq \frac{11\sqrt{5}}{6\sqrt{6}}$$

par le lemme. Enfin, si $r \geq |2+2\tau| > |2+\tau|$ alors $\operatorname{Card}\mathcal{S} = 13$ et

$$\frac{\operatorname{Card}\mathcal{S}.\delta}{r} \geq \frac{13\delta}{3} \geq \frac{13}{3\sqrt{5}}.$$

Il reste à constater $13/3\sqrt{5} \geq 3\sqrt{5}/4 \geq 11\sqrt{5}/6\sqrt{6} \geq 5/3$.

Voici à présent l'énoncé que nous retiendrons pour la suite.

Proposition 2.5. *Soient Λ un réseau euclidien de rang $n \geq 3$, $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ ses minima successifs et $r > 0$ un réel. Alors il existe un ensemble $\mathcal{S} \subset \{x \in \Lambda \mid |x| \leq r\}$ contenant 0 et symétrique par rapport à l'origine, un réel $\delta > 0$ et un élément unitaire $\ell \in (\Lambda \otimes \mathbb{R})^\vee$ tels que $\ell(\mathcal{S}) \subset \mathbb{Z}\delta$, $\operatorname{Card}\mathcal{S}.\delta \geq 5r/3$ et*

$$\operatorname{Card}\ell(\mathcal{S}) = \operatorname{Card}\mathcal{S} \geq \prod_{i=1}^{n} \left\lceil \frac{r}{\lambda_i\sqrt{6(n-2)}} \right\rceil.$$

Démonstration. Posons $M_i = \lceil r/\lambda_i\sqrt{6(n-2)} \rceil$ pour $1 \leq i \leq n$. Nous avons $1 \leq M_n \leq \cdots \leq M_2 \leq M_1$. Lorsque $M_1 = 1$, les choix $\mathcal{S} = \{0\}$ et $\delta = 5r/3$ conviennent (pour tout ℓ). Sinon notons ν $(1 \leq \nu \leq n)$ le plus grand entier tel que $M_\nu \geq 2$. Par définition de la partie entière supérieure, nous avons pour $1 \leq i \leq \nu$

$$M_i\lambda_i \leq \frac{M_i}{M_i - 1}\frac{r}{\sqrt{6(n-2)}} \leq \frac{2r}{\sqrt{6(n-2)}}.$$

Dans le cas particulier où $\nu \in \{2,3\}$ et $r \leq 3\lambda_1$, il vient $M_1 = M_2 = M_\nu = 2$ et $\sqrt{6} \leq r/\lambda_2 \leq r/\lambda_1 \leq 3$; ainsi le lemme 2.4 s'applique à un sous-réseau de rang 2 de Λ de minima λ_1 et λ_2 et donne donc le résultat (en étendant ℓ par 0 sur l'orthogonal de ce sous-réseau) puisque $M_1 \cdots M_n = 2^\nu \leq 9$. Dans tous les autres cas, nous employons le théorème 2.2 avec les choix $N_1 = 2M_1$ et $N_i = M_i$ pour $2 \leq i \leq m$ où l'entier m est défini par : $m = \nu - 1$ si $\nu \geq 3$ et $M_\nu = 2$; $m = \nu$ sinon. Ceci assure $\operatorname{Card}\mathcal{S} \geq N_1 \cdots N_m \geq M_1 \cdots M_\nu = M_1 \cdots M_n$ tandis que la première hypothèse du théorème est satisfaite puisque (avec $n \geq 3$)

$$\sum_{i=1}^{m} N_i^2\lambda_i^2 = 3M_1^2\lambda_1^2 + \sum_{i=1}^{m} M_i^2\lambda_i^2 \leq (m+3)\frac{4r^2}{6(n-2)} \leq \frac{n+3}{6(n-2)}4r^2 \leq 4r^2.$$

Il nous reste simplement à minorer $N = 2\lfloor r/\lambda_1 \rfloor N_2 \cdots N_m$ et à majorer $\alpha = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i^2 + N_{i+1}^2\lambda_{i+1}^2$. Nous avons toujours $r \geq \lambda_1\sqrt{6}$ donc $N \geq 2^{m+1}$. Si $m = 1$, nous utilisons $N \geq 4$

!

et $\alpha = 0$. Si $m = 2$, nous avons $\nu \in \{2,3\}$ donc, puisque le cas $r \leq 3\lambda_1$ a déjà été traité, nous supposons $r \geq 3\lambda_1$ ce qui donne $N \geq 12$ et

$$\alpha = \lambda_1^2 + M_2^2\lambda_2^2 \leq \frac{r^2}{9} + \frac{4r^2}{6(n-2)} \leq \frac{7}{9}r^2.$$

Lorsque $m \geq 3$, nous retenons $N \geq 16$ et écrivons

$$\alpha \leq \sum_{i=2}^{m}(1+M_i^2)\lambda_i^2 \leq \frac{r^2}{6(n-2)}\sum_{i=2}^{m}\frac{M_i^2+1}{(M_i-1)^2} \leq \frac{r^2}{6(n-2)}(m-1)\frac{M_m^2+1}{(M_m-1)^2}.$$

Par définition de m, ou bien $m \leq n-1$ et $M_m \geq 2$ ou bien $m = n$ et $M_m \geq 3$. Dans les deux situations, le majorant précédent entraîne $\alpha \leq 5r^2/6$. Ainsi la condition $\alpha \leq 4r^2$ est toujours remplie et, grâce à

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{16+2}\right)\sqrt{4-\frac{5}{6}} = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{5491}{5400}} &> \left(1-\frac{1}{12+2}\right)\sqrt{4-\frac{7}{9}} = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{4901}{4900}} \\ &> \left(1-\frac{1}{4+2}\right)\sqrt{4} = \frac{5}{3},\end{aligned}$$

le théorème implique bien $\mathrm{Card}\,\mathcal{S}.\delta \geq (1-1/(N+2))\sqrt{4r^2-\alpha} \geq 5r/3$ dans tous les cas.

3. Inégalités de Cauchy sphériques

Soient $g \geq 1$ un entier et $R > 0$ un nombre réel. Nous munissons $\mathbb{C}^g$ de sa norme hermitienne standard $|z| = (\sum_{i=1}^{g}|z_i|^2)^{1/2}$. L'inégalité de Cauchy la plus usuelle pour une fonction holomorphe f sur un domaine de $\mathbb{C}^g$ majore le module d'une dérivée de f à l'aide du maximum de $|f(z)|$ sur un polydisque de la forme $\max_i |z_i| \leq R$. Dans cette partie nous remplaçons ce maximum par celui sur la boule hermitienne

$$|f|_R = \sup\{|f(z)| \mid z \in \mathbb{C}^g,\ |z| \leq R\}.$$

Par le principe du maximum ce nombre est aussi le maximum sur la sphère de rayon R. Pour $\tau = (\tau_1,\ldots,\tau_g) \in \mathbb{N}^g$, nous notons τ^τ le produit $\prod_{i=1}^{g}\tau_i^{\tau_i}$ (avec la convention $0^0 = 1$), $|\tau|$ la somme des τ_i et $\tau! = \tau_1!\cdots\tau_g!$ le produit des factorielles. Définissons également

$$\zeta_\tau = \sup\left\{|a_1^{\tau_1}\cdots a_g^{\tau_g}| \mid a \in \mathbb{C}^g,\ |a| = 1\right\} = \left(\frac{\tau^\tau}{|\tau|^{|\tau|}}\right)^{1/2}$$

(un calcul d'extrema liés montre que le supremum est atteint pour $a_i = (\tau_i/|\tau|)^{1/2}$ si $|\tau| \neq 0$). Notons encore $\widehat{\tau} = (\tau_2,\ldots,\tau_g) \in \mathbb{N}^{g-1}$ et remarquons $\zeta_\tau \leq \zeta_{\widehat{\tau}} \leq \zeta_\tau\sqrt{2}^{|\tau|}$ (utiliser respectivement $|a_1| \leq 1$ et $a_1 = 1/\sqrt{2}$).

Pour une fonction f comme ci-dessus, la notation $D^\tau f$ désigne la dérivée partielle $(\partial/\partial z_1)^{\tau_1}\cdots(\partial/\partial z_g)^{\tau_g}f$ d'ordre τ et, plus généralement, si f est définie sur un domaine d'un espace vectoriel complexe de base $\mathsf{e} = (e_1,\ldots,e_g)$, on note $D_{\mathsf{e}}^\tau f$ la dérivée d'ordre τ de l'application $z \mapsto f(z_1e_1+\cdots+z_ge_g)$.

!

Proposition 3.1. *Soient f une fonction holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C}^g \mid |z| \leq R\}$, $\tau \in \mathbb{N}^g$ et $w \in \mathbb{C}^g$ avec $|w| < R$. On a alors*

$$\zeta_\tau \left| \frac{1}{\tau!} D^\tau f(w) \right| \leq \frac{|f|_R}{(R-|w|)^{|\tau|}}.$$

De plus, si $D^{\tau'} f(w) = 0$ pour tout $\tau' \in \mathbb{N}^g$ avec $|\tau'| < |\tau|$ alors

$$\zeta_\tau \left| \frac{1}{\tau!} D^\tau f(w) \right| \leq \left(\frac{R}{R^2-|w|^2} \right)^{|\tau|} |f|_R.$$

Démonstration. Nous supposons $|\tau| \neq 0$ (sinon les deux formules se réduisent à l'inégalité tautologique $|f(w)| \leq |f|_R$). Posons $\rho_i = (\tau_i/|\tau|)^{1/2}(R-|w|)$ puis notons $\mathcal{D}$ le polydisque défini par $|z_i| \leq \rho_i$ pour tout i. L'inégalité de Cauchy dans $\mathcal{D}$ donne la majoration

$$\left| \frac{1}{\tau!} D^\tau f(w) \right| \leq \frac{1}{\rho_1^{\tau_1} \cdots \rho_g^{\tau_g}} \sup \{ |f(w+z)| \mid z \in \mathcal{D} \}$$

qui entraîne immédiatement la première estimation de l'énoncé puisque $|w+z| \leq R$ si $z \in \mathcal{D}$. Pour la seconde, supposons dans un premier temps $g = 1$ et définissons $v \colon \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\} \to \mathbb{C}$ par

$$v(z) = f(z) \left(\frac{R^2 - z\overline{w}}{R(z-w)} \right)^\tau.$$

L'hypothèse d'annulation de f en w montre que v est holomorphe et

$$v(w) = \frac{1}{\tau!} f^{(\tau)}(w) \left(\frac{R^2-|w|^2}{R} \right)^\tau.$$

En outre, $|v|$ coïncide avec $|f|$ sur le cercle $|z| = R$ donc le principe du maximum donne $|v(w)| \leq |v|_R = |f|_R$, qui est le résultat recherché. En dimension g quelconque, notons P le polynôme de Taylor de f d'ordre $|\tau|$ en w

$$P(t) = \sum_{|\tau'|=|\tau|} \frac{1}{\tau'!} D^{\tau'} f(w) t_1^{\tau_1'} \cdots t_g^{\tau_g'}$$

pour $t \in \mathbb{C}^g$. En vertu de la première assertion (dans la boule unité), nous avons

$$\left| \frac{\zeta_\tau}{\tau!} D^\tau f(w) \right| = \left| \frac{\zeta_\tau}{\tau!} D^\tau P(0) \right| \leq |P|_1.$$

Il nous suffit donc de majorer $|P(t)|$ pour $|t| = 1$. Or, par la formule de Leibniz, $P(t)$ est la dérivée divisée à l'ordre $|\tau|$ en 0 de la fonction d'une variable $z \mapsto f(w+zt)$. Son domaine $\{z \in \mathbb{C} \mid |w+zt| \leq R\}$ est un disque contenant 0 dont nous notons $a \in \mathbb{C}$ le centre et R_1 le rayon. Le cas $g = 1$ donne donc

$$|P(t)| \leq \left(\frac{R_1}{R_1^2 - |a|^2} \right)^{|\tau|} |f|_R.$$

Il reste simplement à constater $R_1 \leq R$ et $R_1^2 - |a|^2 = R^2 - |w|^2$ (qui découle par exemple de $|w+(a+R_1)t| = |w+(a-R_1)t| = R$).

Les inégalités de la proposition sont optimales au sens où, une fois $g \geq 1$, $w \in \mathbb{C}^g$ et $R > |w|$ fixés, nous avons

$$\sup_\tau \sup_f \left(\frac{\zeta_\tau}{\tau!} \frac{|D^\tau f(w)|}{|f|_R} \right)^{1/|\tau|} = \frac{1}{R-|w|} \quad \text{ou} \quad \frac{R}{R^2-|w|^2}$$

selon le cas : ici, τ parcourt les éléments non nuls de $\mathbb{N}^g$ et f les fonctions holomorphes sur $\{z \in \mathbb{C}^g \mid |z| \leq R\}$ sans puis avec la condition d'annulation à l'ordre $|\tau|$ en w.

Établissons ces assertions (qui ne seront pas utilisées dans la suite du texte). Lorsque $w = 0$, la fonction $f(z) = z_1^{\tau_1} \cdots z_g^{\tau_g}$ convient facilement pour tout τ. Si $w \neq 0$, il suffit par homothétie de traiter le cas où $|w| = 1$. Nous allons associer à un nombre réel $\alpha \geq g$ un couple (τ, f) et vérifier que $(\zeta_\tau |D^\tau f(w)|/(\tau! |f|_R))^{1/|\tau|}$ tend vers la quantité souhaitée lorsque α tend vers l'infini, ce qui donnera bien la valeur du double supremum. Nous définissons τ par $\tau_i = \lfloor \alpha |w_i|^2 \rfloor$ ($\alpha \geq g$ assure $|\tau| \geq 1$) alors que le choix de f dépend du cas envisagé. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit hermitien (linéaire à gauche) associé à $|\cdot|$. En l'absence de condition d'annulation, nous posons $f(z) = \langle z, w \rangle^n$ où $n = \lfloor \alpha R/(R-1) \rfloor$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz assure $|f|_R = R^n$ tandis que

$$\frac{|D^\tau f(w)|}{\tau!} = \frac{n!}{\tau!(n-|\tau|)!} |w_1|^{\tau_1} \cdots |w_g|^{\tau_g}.$$

La formule de Stirling entraîne

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \left(\frac{n! \zeta_\tau}{\tau!(n-|\tau|)!} \right)^{1/|\tau|} = \frac{R^{R/(R-1)}}{R-1} \prod_{i=1}^g |w_i|^{-|w_i|^2}$$

si bien que

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \left(\frac{\zeta_\tau}{\tau!} \frac{|D^\tau f(w)|}{|f|_R} \right)^{1/|\tau|} = \frac{1}{R-1}.$$

Dans le cas où f doit s'annuler à l'ordre $|\tau|$ en w, nous posons

$$f(z) = \left(\frac{R \langle z-w, w \rangle}{R^2 - \langle z, w \rangle} \right)^{|\tau|}.$$

Nous avons

$$\left(\frac{\zeta_\tau}{\tau!} |D^\tau f(w)| \right)^{1/|\tau|} = \left(\frac{\zeta_\tau |\tau|!}{\tau!} |w_1|^{\tau_1} \cdots |w_g|^{\tau_g} \right)^{1/|\tau|} \frac{R}{R^2-1} \longrightarrow \frac{R}{R^2-1}$$

tandis que $|f|_R = 1$ (par le principe du maximum en une variable, on se limite à $|\langle z, w \rangle| = R$ qui donne $|f(z)| = 1$) d'où le résultat.

!

4. Lemmes d'interpolation

Les théorèmes de cet article reposent de façon cruciale sur de nouveaux lemmes d'interpolation analytique. Ce type de lemmes a pour objectif de fournir une estimation précise d'une fonction analytique sur une boule de $\mathbb{C}^g$ (où g est un entier ≥ 1), qui dépend des valeurs prises par certaines dérivées de cette fonction en un nombre fini de points fixés au préalable. La caractéristique principale du lemme d'interpolation que nous proposons ci-après (théorème 4.4) consiste à fixer une direction privilégiée sur laquelle nous projetons et la qualité de la majoration dépend de l'image de notre nuage de points sous cette projection (l'ordre de dérivation doit aussi être adapté dans cette direction). Nous obtiendrons ce résultat dans $\mathbb{C}^g$ en combinant un lemme en une variable déduit de la formule d'interpolation d'Hermite et un lemme en plusieurs variables provenant de la formule de Taylor en 0.

Commençons par un énoncé préparatoire.

Lemme 4.1. *Soit $S \geq 3$ un entier.*

(1) *Si S est impair alors*

$$\left(\frac{2e}{S}\right)^S \prod_{n=1}^{\frac{S-1}{2}} \left(n^2 - \frac{1}{4}\right) \geq 4.$$

(2) *Si a,b,r et δ sont des nombres réels strictement positifs tels que $b = a+\delta$, $a \leq r - \delta/2$ et $\delta \leq 2r/(S-1)$ alors*

$$\frac{\delta^2}{4} b^2 (b+r)^2 (b^2+r^2)^{S-3} \leq 4r^6 (a^2+r^2)^{S-3}.$$

Démonstration. (1) Le membre de gauche décroît avec S (impair). En effet, si on le note α_S, on a $\log(\alpha_S/\alpha_{S+2}) = (S+1)\log(1+2/S) - 2 = (S+1)f(S)$ où $f(x) = \log(1+2/x) - 2/(x+1)$ vérifie $f'(x) = -2/x(x+1)^2(x+2) < 0$ pour $x > 0$. La fonction f est donc décroissante sur $]0,+\infty[$. Ainsi $f(S) \geq \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ puis $\alpha_S \geq \alpha_{S+2}$. L'égalité

$$\prod_{n=1}^{\frac{S-1}{2}} \left(n^2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{S!(S-1)!}{4^{S-1}(\frac{S-1}{2})!^2}$$

et la formule de Stirling montrent alors $\lim_{S\to+\infty} \alpha_S = 4$, ce qui permet de conclure.

(2) La fonction $a \mapsto \frac{(a+\delta)^2+r^2}{a^2+r^2}$ est croissante sur $[0, r-\delta/2]$ donc

$$\frac{b^2+r^2}{a^2+r^2} \leq \frac{(r+\delta/2)^2+r^2}{(r-\delta/2)^2+r^2}$$

et l'expression à majorer est plus petite que

$$\left(\frac{\delta}{2r}\right)^2 \left(1+\frac{\delta}{2r}\right)^2 \left(2+\frac{\delta}{2r}\right)^2 \left(\frac{1+\left(1+\frac{\delta}{2r}\right)^2}{1+\left(1-\frac{\delta}{2r}\right)^2}\right)^{S-3} r^6 (a^2+r^2)^{S-3}.$$

Cette borne est une fonction croissante de $\delta/2r$, que nous pouvons donc remplacer par $1/(S-1)$. Elle est ainsi inférieure à

$$\frac{S^2(2S-1)^2}{(S-1)^6}\left(\frac{S^2+(S-1)^2}{(S-1)^2+(S-2)^2}\right)^{S-3} r^6(a^2+r^2)^{S-3}.$$

On conclut par un calcul direct si $S\in\{3,4\}$ tandis que les estimations $S^2(2S-1)^2\leq (S-1)^6/2$ et

$$\begin{aligned}\left(\frac{S^2+(S-1)^2}{(S-1)^2+(S-2)^2}\right)^{S-3} &= \left(1+\frac{4(S-1)}{(S-1)^2+(S-2)^2}\right)^{S-3}\\ &\leq \exp\left(\frac{4(S-1)(S-3)}{(S-1)^2+(S-2)^2}\right)\leq e^2\end{aligned}$$

donnent le résultat pour $S\geq 5$.

Le premier lemme d'interpolation dont nous aurons besoin est unidimensionnel (avec projection sur l'axe réel).

Lemme 4.2. *Soient R,a,r,δ des nombres réels positifs avec $R>\max(a,r+\delta/2)$. Soit $\mathcal{S}\subset\mathbb{C}$ un sous-ensemble fini de cardinal impair $S\geq 3$ tel que si $x\in\mathcal{S}$ alors $|x|\leq r$, $-x\in\mathcal{S}$ et $\mathrm{Re}(x)\in\mathbb{Z}\delta$. On suppose de plus $\mathrm{Card}\,\mathrm{Re}(\mathcal{S})=S$. Alors, pour toute fonction holomorphe $f\colon\{z\in\mathbb{C}\mid |z|\leq R\}\to\mathbb{C}$ et tout entier $T\geq 0$, on a*

$$\begin{aligned}|f|_a\leq (a^2+r^2)^{ST/2}\Bigg(&\frac{R}{R-\max(a,r+\delta/2)}\cdot\frac{2^T|f|_R}{(R^2-r^2)^{ST/2}}\\ &+4T\left(\frac{2e}{\delta S}\right)^{ST}\sum_{x\in\mathcal{S}}\sum_{\ell=0}^{T-1}\frac{|f^{(\ell)}(x)|}{\ell!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{\ell}\Bigg).\end{aligned}$$

De plus, dans le cas où $a=r$, on a

$$\begin{aligned}|f|_r\leq (2r^2)^{ST/2}\Bigg(&\frac{R}{R-r-\delta/2}\cdot\frac{|f|_R}{(R^2-r^2)^{ST/2}}\\ &+4T\left(\frac{2e}{\delta(S+1)}\right)^{ST}\sum_{x\in\mathcal{S}}\sum_{\ell=0}^{T-1}\frac{|f^{(\ell)}(x)|}{\ell!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{\ell}\Bigg).\end{aligned}$$

Démonstration. Le cas $T=0$ découle de $|f|_a\leq|f|_R$. On suppose maintenant $T\geq 1$ et on pose $\varepsilon=\delta/4T$. Quitte à remplacer R par $R-\eta$ on suppose que f est holomorphe sur un voisinage de $\{z\in\mathbb{C}\mid|z|\leq R\}$. On note D la réunion du disque $D_a\subset\mathbb{C}$ de centre 0 et de rayon a et de l'ensemble des disques de centre dans $\mathcal{S}$ et de rayon $\delta/2$ qui rencontrent D_a. Par le principe du maximum, on a $|f|_a\leq\sup\{|f(z)|\mid z\in\partial D\}$. Considérons donc $z\in\partial D$. Par construction $|z-x|\geq\delta/2$ pour tout $x\in\mathcal{S}$. De plus ou bien $|z|=a$ ou bien il existe $y\in\mathcal{S}$ avec $|z-y|=\delta/2$ (ce second cas n'arrive que si $a\leq r+\delta/2$). Enfin $|z|\leq b$ où $b=a$ si $a\geq r+\delta/2$, $b=r+\delta/2$ si $r-\delta/2\leq a\leq r+\delta/2$ et $b=a+\delta$ si $0\leq a\leq r-\delta/2$. Appliquons la formule d'Hermite (voir par exemple [5, p. 250]) au point z, aux chemins $\Gamma=\{\xi\in\mathbb{C}\mid|\xi|=R\}$ et $\Gamma_x=\{\xi\in\mathbb{C}\mid|\xi-x|=\delta/2-\varepsilon\}$ ainsi qu'au poids $\omega(\xi)=\prod_{x\in\mathcal{S}}(\xi-x)^T$. Notons que par symétrie on a $|\omega(\xi)|=\prod_{x\in\mathcal{S}}|\xi^2-x^2|^{T/2}$. Nous devons minorer $|\omega|$ sur Γ et Γ_y

$(y \in \mathcal{S})$ et majorer $|\omega(z)|$. Si $\xi \in \Gamma$ on a simplement $|\omega(\xi)| \geq (R^2 - r^2)^{ST/2}$. Pour $\xi \in \Gamma_y$, on minore

$$|\omega(\xi)| \geq |\xi - y|^T \prod_{x \in \mathcal{S} \setminus \{y\}} |\operatorname{Re}(\xi - x)|^T = \left(\frac{\delta}{2} - \varepsilon\right)^T \prod_{x \in \mathcal{S} \setminus \{y\}} |\operatorname{Re}(\xi) - \operatorname{Re}(x)|^T.$$

L'ensemble E de cardinal $S-1$ inclus dans $\mathbb{Z}\delta \setminus \{\operatorname{Re}(y)\}$ qui minimise le produit $\prod_{u \in E} |\operatorname{Re}(\xi) - u|$ est $\{\operatorname{Re}(y) \pm n\delta \mid 1 \leq n \leq (S-1)/2\}$. Ainsi

$$\prod_{x \in \mathcal{S} \setminus \{y\}} |\operatorname{Re}(\xi) - \operatorname{Re}(x)| \geq \prod_{n=1}^{(S-1)/2} (\delta^2 n^2 - \lambda^2) \quad \text{où } \lambda = \operatorname{Re}(\xi) - \operatorname{Re}(y) \in \Big[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\Big].$$

En particulier $\lambda^2 \leq \delta^2/4$ et, par l'assertion (1) du lemme préliminaire, nous trouvons

$$|\omega(\xi)| \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4T}\right)^T 4^T \left(\frac{\delta S}{2e}\right)^{ST} \geq 2^{T-1} \left(\frac{\delta S}{2e}\right)^{ST}.$$

Montrons maintenant que $|\omega(z)| \leq 2^T (a^2 + r^2)^{ST/2}$. Si $|z| = a$ on a directement $|\omega(z)| \leq (a^2 + r^2)^{ST/2}$ donc nous pouvons supposer qu'il existe $y \in \mathcal{S}$ avec $|z - y| = \delta/2$. Lorsque $y \neq 0$, nous majorons $|z^2 - x^2|$ par $b^2 + r^2$ si $x \notin \{-y, 0, y\}$, par b^2 si $x = 0$ et par $\delta(b+r)/2$ si $x \in \{-y, y\}$ de sorte que $|\omega(z)|^{2/T} \leq (\delta^2/4) b^2 (b+r)^2 (b^2 + r^2)^{S-3}$. Par l'assertion (2) du lemme, cette borne est plus petite que $4(a^2 + r^2)^S$ si $0 \leq a \leq r - \delta/2$. On notera que l'hypothèse $\delta \leq 2r/(S-1)$ de ce lemme est satisfaite car $\operatorname{Re}(\mathcal{S})$ est composé de S multiples entiers de δ, tous inclus dans l'intervalle $[-r, r]$. Lorsque $r - \delta/2 \leq a \leq r + \delta/2$ et donc $b = r + \delta/2$, le cas $a = r - \delta/2$ de cette même assertion donne $|\omega(z)|^{2/T} \leq 4r^6((r - \delta/2)^2 + r^2)^{S-3} \leq 4(a^2 + r^2)^S$. Lorsque $y = 0$ (donc $|z| = \delta/2$) nous majorons $|\omega(z)|^{2/T} \leq (\delta^2/4)\left(\delta^2/4 + r^2\right)^{S-1}$ puis, avec $\delta \leq 2r/(S-1)$, on a

$$|\omega(z)|^{2/T} \leq \frac{r^{2S}}{(S-1)^2} \left(1 + \frac{1}{(S-1)^2}\right)^{S-1} \leq \frac{r^{2S}}{4} e^{1/(S-1)} \leq r^{2S} \leq (a^2 + r^2)^S.$$

On reporte ces trois estimations pour ω dans la formule d'Hermite et l'on conclut avec $|\xi - z| \geq R - b \geq R - \max(a, r + \delta/2)$ pour $\xi \in \Gamma$ et $|\xi - z| \geq \varepsilon$ si $\xi \in \Gamma_x$ ce qui donne $\frac{1}{2\pi} |\int_{\Gamma_x} \mathrm{d}\xi/(\xi - x)| \leq \delta/2\varepsilon = 2T$. Dans le cas où $a = r$, nous montrons $|\omega(z)| \leq 2^{-T/2} (2r^2)^{ST/2}$. Si $|z| = r$ cela découle de $|\omega(z)| \leq r^T (a^2 + r^2)^{(S-1)T/2}$ (on met à part le facteur correspondant à $x = 0$ dans la définition de $\omega(z)$). S'il existe $y \in \mathcal{S}$ avec $|z - y| = \delta/2$, cela suit des calculs ci-dessus puisque $|\omega(z)|^{2/T} \leq 4r^6 (a^2 + r^2)^{S-3} = (2r^2)^S/2$ (aussi bien si $y \neq 0$ que si $y = 0$). Par conséquent, nous gagnons un facteur $8^{-T/2}$ par rapport au cas général. Dans le premier terme, nous utilisons $2^{-T/2} \leq 1$ tandis que dans le second terme nous employons $8^{-1/2} \leq e^{-1} \leq (S/(S+1))^S$.

Le cas où il n'y a qu'un seul point d'interpolation est beaucoup plus simple que le cas général (aucune projection n'est nécessaire) et servira d'ailleurs à l'établir. Il fait l'objet du résultat suivant (les notations sont celles de la partie précédente).

!

Lemme 4.3. *Soient $T \geq 0$ et $g \geq 1$ des entiers naturels, $w \in \mathbb{C}^g$ et R,r des réels tels que $R \geq r \geq 0$ et $R > |w|$. Soit $F\colon \{z \in \mathbb{C}^g \mid |z| \leq R\} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On a*

$$|F|_r \leq \left(\frac{r+|w|}{R-|w|}\right)^T |F|_R + 2 \sum_{\tau \in \mathbb{N}^g, |\tau|<T} \zeta_\tau \left|\frac{D^\tau F(w)}{\tau!}\right| (r+|w|)^{|\tau|}.$$

Démonstration. Si $R \leq 2|w|+r$ alors le terme devant $|F|_R$ est plus grand que 1 et le résultat découle de $|F|_r \leq |F|_R$. Supposons maintenant $R > 2|w|+r$. Soit $x = (x_1,\dots,x_g) \in \mathbb{C}^g$ tel que $|x| = 1$. Considérons la fonction holomorphe en la variable $z \in \mathbb{C}$ de module $\leq R-|w|$

$$u_x(z) = z^{-T}\left(F(w+zx) - \sum_{|\tau|<T} \frac{D^\tau F(w)}{\tau!} x_1^{\tau_1}\cdots x_g^{\tau_g} z^{|\tau|}\right)$$

à laquelle on applique $|u_x|_{r+|w|} \leq |u_x|_{R-|w|}$. On choisit alors z (de module $\leq r+|w|$) et x de sorte que $|F(w+zx)| = |F|_r$ puis l'on majore $|x_1^{\tau_1}\cdots x_g^{\tau_g}|$ par ζ_τ.

Nous disposons maintenant de tous les outils pour démontrer le nouveau lemme d'interpolation annoncé. Notons $p_1\colon \mathbb{C}^g \to \mathbb{C}$ la projection sur la première coordonnée.

Théorème 4.4. *Soient $g \geq 2$, $T \geq 0$ et $S \geq 3$ des entiers avec S impair et R,r,a,δ,c des nombres réels strictement positifs vérifiant $R^2 \geq c^2(a^2+9r^2/4)$ et $c > 1$. Soit $\mathcal{S}$ une partie de $\{z \in \mathbb{C}^g \mid |z| \leq r\}$ de cardinal S, symétrique par rapport à l'origine et telle que $\mathrm{Re}(p_1(\mathcal{S}))$ soit contenu dans $\mathbb{Z}\delta$ et de cardinal S. Posons $\kappa = \sup_{0\leq t\leq a}(r^2+a^2-t^2)(r+t)^2$. Alors, pour toute fonction holomorphe $f\colon \{z \in \mathbb{C}^g \mid |z| \leq R\} \to \mathbb{C}$ on a*

$$|f|_a \leq (r^2+a^2)^{ST/2}\left(\frac{c}{c-1}\cdot\frac{2^T|f|_R}{(R^2-r^2)^{ST/2}} + 4T\left(\frac{2e}{\delta S}\right)^{ST}(\Delta_1+\Delta_2)\right)$$

avec

$$\Delta_1 = ST\left(\frac{\kappa}{(r^2+a^2)(R-r/2)(R-3r/2)}\right)^{ST/2}|f|_R$$

et

$$\Delta_2 = 2\sum_{x\in\mathcal{S}}\sum_{\tau}\zeta_{\widehat{\tau}}\left|\frac{D^\tau f(x)}{\tau!}\right|(a+r)^{|\tau|}$$

où la dernière somme porte sur les g-uplets $\tau = (\tau_1,\widehat{\tau}) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^{g-1}$ tels que $\tau_1 < T$ et $|\widehat{\tau}| < ST$.

Démonstration. Comme dans la démonstration du lemme 4.2, les hypothèses entraînent $\delta \leq 2r/(S-1) \leq r$. Soit $z \in \mathbb{C}^{g-1}$ avec $|z| \leq a$. Appliquons le lemme 4.2 avec les paramètres $(\widetilde{R},\widetilde{a},r,\delta)$ où $\widetilde{R} = \sqrt{R^2-|z|^2}$ et $\widetilde{a} = \sqrt{a^2-|z|^2}$ à l'ensemble $p_1(\mathcal{S})$ de cardinal S et à la fonction holomorphe d'une variable $f_z\colon u \mapsto f(u,z)$. Remarquons

$$\frac{\widetilde{a}^2+r^2}{\widetilde{R}^2-r^2} = \frac{a^2+r^2-|z|^2}{R^2-r^2-|z|^2} \leq \frac{a^2+r^2}{R^2-r^2}$$

(car $R^2 \geq a^2+2r^2$) et de même $\widetilde{a}/\widetilde{R} \leq a/R$. Puisque cette dernière quantité est majorée par $1/c$ tout comme $(r+\delta/2)/\widetilde{R} \leq 3r/2\sqrt{R^2-a^2}$, nous avons

$$\widetilde{R} - \max\left(\widetilde{a}, r+\frac{\delta}{2}\right) \geq \left(1-\frac{1}{c}\right)\widetilde{R} > 0.$$

Nos paramètres satisfont donc les hypothèses du lemme qui, avec les inégalités ci-dessus ainsi que $|f_z|_{\widetilde{R}} \leq |f|_R$, fournit

$$|f_z|_{\widetilde{a}} \leq \frac{c}{c-1}\left(\frac{a^2+r^2}{R^2-r^2}\right)^{ST/2} 2^T |f|_R + 4T\left(\frac{2e}{\delta S}\right)^{ST} (\widetilde{a}^2+r^2)^{ST/2} \sum_{x_1 \in p_1(\mathcal{S})} \sum_{\tau_1=0}^{T-1} \frac{|f_z^{(\tau_1)}(x_1)|}{\tau_1!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{\tau_1}.$$

Comme $|f|_a = \sup\{|f_z|_{\widetilde{a}} \mid z \in \mathbb{C}^{g-1},\ |z| \leq a\}$, il reste à évaluer $f_z^{(\tau_1)}(x_1)$ pour faire apparaître $\Delta_1+\Delta_2$. Fixons donc τ_1 et x_1 (en plus de z) et notons x l'unique élément de $\mathcal{S}$ tel que $x_1 = p_1(x)$ puis $w \in \mathbb{C}^{g-1}$ vérifiant $x = (x_1, w)$. Posons encore $R_1 = \sqrt{R^2-(|x_1|+\delta/2)^2}$ et définissons une fonction holomorphe $F\colon \{y \in \mathbb{C}^{g-1} \mid |y| \leq R_1\} \to \mathbb{C}$ par $F(y) = f_y^{(\tau_1)}(x_1) = D^{(\tau_1,0)}f(x_1,y)$. Nous lui appliquons le lemme 4.3 où l'on remplace (T,R,r) par $(ST,R_1,|z|)$, l'hypothèse sur R assurant $R_1 > \max(|z|,|w|)$. Puisque $|F(z)| \leq |F|_{|z|}$, il vient

$$|f_z^{(\tau_1)}(x_1)| \leq \left(\frac{|z|+|w|}{R_1-|w|}\right)^{ST} |F|_{R_1} + 2 \sum_{\substack{\widehat{\tau} \in \mathbb{N}^{g-1} \\ |\widehat{\tau}|<ST}} \zeta_{\widehat{\tau}} \left|\frac{D^{\widehat{\tau}}F(w)}{\widehat{\tau}!}\right| (|z|+|w|)^{|\widehat{\tau}|}.$$

Lorsque nous injectons ceci dans la formule précédente, la somme sur $\widehat{\tau}$ donne naissance à Δ_2 car $D^{\widehat{\tau}}F(w) = D^{\tau}f(x)$ si $\tau = (\tau_1,\widehat{\tau})$ tandis que $|z|+|w|$ et $\delta/2$ sont tous deux majorés par $a+r$ (et $\widetilde{a}^2+r^2$ par a^2+r^2). Dans le terme restant, pour évaluer $|F|_{R_1}$, fixons $y \in \mathbb{C}^{g-1}$ tel que $|y| = R_1$ et $|F(y)| = |F|_{R_1}$. L'inégalité de Cauchy (en une variable) conduit à

$$|F|_{R_1} = \left|f_y^{(\tau_1)}(x_1)\right| \leq \tau_1! \left(\frac{2}{\delta}\right)^{\tau_1} |f_y|_{|x_1|+\delta/2} \leq \tau_1! \left(\frac{2}{\delta}\right)^{\tau_1} |f|_R$$

puisque $(|x_1|+\delta/2)^2+|y|^2 = R^2$. Nous utilisons ensuite $|z|+|w| \leq |z|+r$ et $(|z|+r)^2(\widetilde{a}^2+r^2) \leq \kappa$. Pour reconnaître Δ_1, il reste simplement à vérifier $\sqrt{(R-r/2)(R-3r/2)}+|w| \leq R_1$. Or le premier membre s'écrit

$$\begin{aligned}&\sqrt{(R-r/2)(R-3r/2)} + \sqrt{(|x|+|x_1|)(|x|-|x_1|)} \\ &\quad \leq \sqrt{(R-r/2+|x|+|x_1|)(R-3r/2+|x|-|x_1|)}\end{aligned}$$

que l'on majore en effet par R_1 en employant successivement $|x| \leq r$ et $\delta \leq r$.

Nous écrirons la quantité κ de cet énoncé sous la forme $\kappa = r^4\kappa'(a/r)$ où la fonction κ' est définie par $\kappa'(x) = \sup_{0\leq t\leq x}(1+x^2-t^2)(1+t)^2$ pour $x \geq 0$. Le supremum est atteint

!

pour $t_0 = x$ si $x \le (\sqrt{5}-1)/2$ et pour $t_0 = ((9+8x^2)^{1/2}-1)/4$ sinon. De cette observation découlent les formules explicites

$$\kappa'(x) = \begin{cases} (1+x)^2 & \text{si } x \le \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \\ \dfrac{1}{32}\left(27+36x^2+8x^4+(9+8x^2)^{3/2}\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons aussi $\kappa'(x) \ge 1+x^2$ dans tous les cas en prenant $t=0$.

Nous combinons maintenant ce théorème avec notre résultat de projection (proposition 2.5) afin d'aboutir à la forme que nous utiliserons plus loin. Pour la formuler et pour inclure simultanément des majorations plus précises dans le cas unidimensionnel, nous introduisons les notations suivantes, auxquelles nous nous référerons constamment dans le reste du texte.

Définition 4.5. Lorsqu'un entier $g \ge 1$, un réseau euclidien Λ de rang $2g$ de minima successifs $\lambda_1 \le \cdots \le \lambda_{2g}$ et des nombres réels $E > 3/2$, $r > 0$ et $x \ge 0$ sont donnés, nous disons qu'un quintuplet $(\beta,\gamma,E',Q,S') \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{N}$ est associé à (Λ,E,r,x) si l'une des conditions suivantes est remplie :

(P0) $g=1$, $E'=E$ et $\beta=\gamma=Q=S'=1$;

(P1) $g=1$, $\beta=1/2$, $\gamma=3/2$, $E'=\sqrt{(E^2-1)/2}$, $Q=e\sqrt{2}$ et $S'=1+2\lfloor r/\lambda_1 \rfloor$;

(P2) $g \ge 2$, $\beta = 1+x$, $\gamma = 1+\sqrt{2}(1+x)$,

$$E' = \frac{5}{6e}\sqrt{\frac{(E-1/2)(E-3/2)}{\kappa'(x)}}, \qquad Q = \frac{6e}{5}\sqrt{1+x^2}$$

$$\text{et} \qquad S' = \prod_{i=1}^{2g-1} \left\lceil \frac{r}{\lambda_i \sqrt{6(2g-3)}} \right\rceil.$$

Le paramètre γ n'apparaît pas encore dans l'énoncé ci-dessous.

Théorème 4.6. *Soient $(V,|\cdot|)$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel hermitien de dimension $g \ge 1$, $\Lambda \subset V$ un réseau, $\lambda_1 \le \cdots \le \lambda_{2g}$ ses minima successifs et r, E, x des nombres réels positifs avec $E^2 > x^2 + 9/4$ et $r > 0$. On impose $x = 1$ si $g = 1$. Soit (β,γ,E',Q,S') un quintuplet associé à (Λ,E,r,x) comme dans la définition précédente.*

Alors il existe un ensemble $\mathcal{S} \subset \{z \in \Lambda \mid |z| \le r\}$, un nombre réel $c_0 > 0$ et une base orthonormée e de V tels que, en notant $S = \operatorname{Card}\mathcal{S}$, on ait $S \ge S'$, $\mathcal{S} = \{0\}$ si $S' = 1$ et, pour toute fonction holomorphe $f\colon \{z \in V \mid |z| \le Er\} \to \mathbb{C}$ et tout entier $T \ge 2$,

$$|f|_{xr} \le T^{c_0}\left(\frac{|f|_{Er}}{(E')^{ST}} + Q^{ST}\max_{z\in\mathcal{S},\,\tau} \zeta_{\widehat{\tau}} \left|\frac{D_{\mathsf{e}}^{\tau} f(z)}{\tau!}\right| (\beta r)^{|\tau|}\right)$$

où τ parcourt les éléments de $\mathbb{N}^g$ tels que $\tau_1 < T$ et $\tau_2 + \cdots + \tau_g < ST$.

Démonstration. Nous supposons dans un premier temps $S' \ge 2$. Ceci exclut le cas (P0). Dans le cas (P1), nous considérons $\omega \in \Lambda$ avec $|\omega| = \lambda_1$. Nous choisissons $\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{Z}\omega \mid |z| \le r\}$ de cardinal impair $S = S' \ge 3$ et $e_1 = \omega/\lambda_1$. Nous appliquons alors la deuxième

!

partie du lemme 4.2 avec $R = Er$, $a = r$, $\delta = \lambda_1$ à la fonction $z \mapsto f(ze_1)$. La définition de S' entraîne $(S+1)\delta > 2r$ d'où la formule voulue (avec $\zeta_{\widehat{\tau}} = 1$ et $4ST^2 \leq T^{c_0}$). Dans le cas (P2), nous commençons par appliquer la proposition 2.5 à un sous-réseau Λ' de Λ de rang $n = 2g-1 \geq 3$ dont les minima successifs sont $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_{2g-1}$. Ceci nous fournit un ensemble $\mathcal{S}$ de cardinal $S \geq S'$. Nous étendons $\ell \in (\Lambda' \otimes \mathbb{R})^\vee$ en un élément unitaire $\ell' \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$ puis nous choisissons une base orthonormée $\mathsf{e} = (e_1, \ldots, e_g)$ de V de sorte que $\ell'(z_1 e_1 + \cdots + z_g e_g) = \mathrm{Re}(z_1)$ pour tout $(z_1, \ldots, z_g) \in \mathbb{C}^g$. Puisque $S' \geq 2$ entraîne $S \geq 3$, nous pouvons alors appliquer le théorème 4.4 avec $R = Er$, $a = xr$, $c = E/\sqrt{x^2 + 9/4}$ à la fonction $(z_1, \ldots, z_g) \mapsto f(z_1 e_1 + \cdots + z_g e_g)$. Les hypothèses sur δ sont satisfaites par la proposition 2.5 et nous avons $\delta S \geq 5r/3$. Pour voir apparaître la majoration cherchée, il faut rassembler les deux termes multiples de $|f|_{Er}$ grâce à

$$2^T \left(\frac{1+x^2}{E^2-1}\right)^{ST/2} \leq \left(\frac{6e}{5}\right)^{ST} \left(\frac{\kappa'(x)}{(E-1/2)(E-3/2)}\right)^{ST/2} = (E')^{-ST}$$

(par $2 \leq 6e/5$, $(E-1/2)(E-3/2) \leq E^2 - 1$ et $1 + x^2 \leq \kappa'(x)$). On conclut en majorant $c/(c-1) + 4ST^2$ et $8S^g T^{g+1}$ par T^{c_0}. Il reste seulement à traiter le cas $S' = 1$. Nous choisissons $\mathcal{S} = \{0\}$ (et donc $S = 1$) et une base orthonormée e quelconque. Nous utilisons ici le lemme 4.3 avec $w = 0$. Il vient

$$|f|_{xr} \leq T^{c_0} \left(\frac{|f|_{Er}}{(E/x)^{ST}} + \max_{z \in \mathcal{S},\ \tau} \zeta_\tau \left| \frac{D^\tau_{\mathsf{e}} f(z)}{\tau!} \right| (xr)^{|\tau|} \right)$$

où τ parcourt les éléments de $\mathbb{N}^g$ tels que $|\tau| < T$. Nous pouvons bien sûr ajouter les éléments τ tels que $|\tau| \geq T$, $\tau_1 < T$ et $\tau_2 + \cdots + \tau_g < T = ST$ et nous retrouvons donc la formule de l'énoncé avec $\beta \geq x$, $Q \geq 1$, $E/x \geq E'$ et $\zeta_\tau \leq \zeta_{\widehat{\tau}}$ dans les cas (P0) et (P2). Pour (P1), nous constatons $1 \leq (Q/2)^T \leq Q^T \beta^{|\tau|}$.

5. Modèles de Néron absolus

Notons $\overline{\mathbb{Z}}$ l'anneau des entiers algébriques, clôture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}$. Dans cette partie, nous passons en revue comment une variété abélienne polarisée $(A, \mathcal{L})$ sur $\overline{\mathbb{Q}}$ admet un modèle canonique $(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ sur $\mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{Z}}$ en demandant que $\mathcal{A}$ vérifie la propriété de Néron et que $\mathcal{M}$ soit un faisceau inversible cubiste [29, I.2.4.5]. Ce modèle permet de définir des métriques canoniques sur $\mathcal{L}$ puis confère à $H^0(A, \mathcal{L})$ et à l'espace tangent t_A des structures d'espaces adéliques sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

Ces faits découlent des travaux de Moret-Bailly [29] mais sont en général énoncés au niveau des corps de nombres, en particulier par Bost [6, §4.3] qui formalise pour cela la notion de MB-modèle et calcule la pente de $H^0(A, \mathcal{L})$. L'inconvénient est qu'il faut alors choisir un peu arbitrairement un corps de nombres et un ouvert du modèle de Néron (qui dépendent de $\mathcal{L}$). Notre présentation évite ces choix en nous plaçant directement sur $\overline{\mathbb{Z}}$ et en considérant essentiellement l'union des extensions à $\overline{\mathbb{Z}}$ de tous les MB-modèles (un peu à la façon de [29, VI.2.6] dans le cas local complet).

Théorème 5.1. *Soient A une variété abélienne sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur A muni d'une rigidification à l'origine.*

(1) *Il existe un schéma en groupes lisse* $\mathcal{A} \to \operatorname{Spec}\overline{\mathbb{Z}}$ *et un isomorphisme* $f\colon \mathcal{A}_{\overline{\mathbb{Q}}} \to A$ *tels que, pour tout schéma lisse* $\mathcal{X} \to \operatorname{Spec}\overline{\mathbb{Z}}$*, tout* $\overline{\mathbb{Q}}$*-morphisme* $\mathcal{X}_{\overline{\mathbb{Q}}} \to A$ *s'étend de façon unique en un morphisme* $\mathcal{X} \to \mathcal{A}$*. Le couple* $(\mathcal{A}, f)$ *est unique à unique isomorphisme près et* $\mathcal{A}(\overline{\mathbb{Z}})$ *s'identifie à* $A(\overline{\mathbb{Q}})$*.*

(2) *Il existe un faisceau inversible cubiste* $\mathcal{M}$ *sur* $\mathcal{A}$ *et un isomorphisme* $\mathcal{M}_{\overline{\mathbb{Q}}} \simeq f^*\mathcal{L}$ *de faisceaux rigidifiés. Ce couple est unique à unique isomorphisme près.*

(3) *Si* $\mathcal{L}$ *est ample et symétrique alors* $H^0(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ *est un* $\overline{\mathbb{Z}}$*-module libre de rang* $h^0(A, \mathcal{L})$*.*

Démonstration. (1) Fixons un corps de nombres K et une variété abélienne semi-stable B sur K de sorte qu'il existe un isomorphisme $B_{\overline{\mathbb{Q}}} \simeq A$. Pour toute extension finie L de K, nous notons $\operatorname{Nér}(B_L) \to \operatorname{Spec}\mathcal{O}_L$ le modèle de Néron de B_L puis $U(L)$ l'extension $\operatorname{Nér}(B_L) \times \operatorname{Spec}\overline{\mathbb{Z}}$, dont la fibre générique s'identifie à A. Si $L \subset L'$ sont deux extensions finies de K, nous désignons par $U(L, L')$ le schéma $\operatorname{Nér}(B_L) \times \operatorname{Spec}\mathcal{O}_{L'}$. Par semi-stabilité, il s'identifie canoniquement à un ouvert de $\operatorname{Nér}(B_{L'})$. Nous voyons donc $U(L)$ comme un ouvert de $U(L')$ et, si $L \subset L' \subset L''$, le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
U(L) & \subset & U(L') & \subset & U(L'') & \longrightarrow & \operatorname{Spec}\overline{\mathbb{Z}} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
U(L,L'') & \subset & U(L',L'') & \subset & \operatorname{Nér}(B_{L''}) & \longrightarrow & \operatorname{Spec}\mathcal{O}_{L''} \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
U(L,L') & \subset & \operatorname{Nér}(B_{L'}) & & & \longrightarrow & \operatorname{Spec}\mathcal{O}_{L'} \\
\downarrow & & & & & & \downarrow \\
\operatorname{Nér}(B_L) & & & & & & \longrightarrow \operatorname{Spec}\mathcal{O}_L
\end{array}$$

montre que les inclusions associées $U(L) \subset U(L') \subset U(L'')$ et $U(L) \subset U(L'')$ coïncident. Nous pouvons donc recoller la collection de tous les $U(L)$ suivant ces inclusions pour obtenir un schéma $\mathcal{A} \to \operatorname{Spec}\overline{\mathbb{Z}}$ qui est lisse puisque les $\operatorname{Nér}(B_L)$ le sont.

Vérifions maintenant la propriété de Néron en commençant par le cas où $\mathcal{X}$ est de présentation finie sur $\operatorname{Spec}\overline{\mathbb{Z}}$. Ceci entraîne l'existence d'un corps de nombres L_0 contenant K, d'un schéma lisse $\mathcal{Y} \to \operatorname{Spec}\mathcal{O}_{L_0}$ avec $\mathcal{Y} \times \operatorname{Spec}\overline{\mathbb{Z}} \simeq \mathcal{X}$ et d'un morphisme $\psi\colon \mathcal{Y}_{L_0} \to B_{L_0}$ dont l'extension est le morphisme initial $\mathcal{X}_{\overline{\mathbb{Q}}} \to A$. La propriété de Néron sur L_0 montre que ψ s'étend en $\mathcal{Y} \to \operatorname{Nér}(B_{L_0})$ sur $\mathcal{O}_{L_0}$ donc en $\mathcal{X} \to U(L_0) \subset \mathcal{A}$ dont la fibre générique est toujours $\psi_{\overline{\mathbb{Q}}}$. Si nous avions un autre morphisme $\varsigma\colon \mathcal{X} \to \mathcal{A}$ avec la même propriété, l'image quasi-compacte $\varsigma(\mathcal{X})$ serait contenue dans une union finie de $U(L_i)$ donc dans $U(L)$ où L est le compositum des L_i. Quitte à augmenter L, ς proviendrait alors d'un morphisme $\mathcal{Y} \times \operatorname{Spec}\mathcal{O}_L \to \operatorname{Nér}(B_L)$ de fibre générique ψ_L. L'unicité de l'extension à $\mathcal{O}_L$ (propriété de Néron sur L) permet de conclure que ς coïncide avec le morphisme précédemment obtenu. Nous avons donc établi le résultat si $\mathcal{X}$ est de présentation finie.

Dans le cas général, $\mathcal{X}$ est lisse donc localement de présentation finie. Nous le recouvrons donc par une famille d'ouverts $\mathcal{X}_i$ de présentation finie. Le cas précédent permet d'étendre

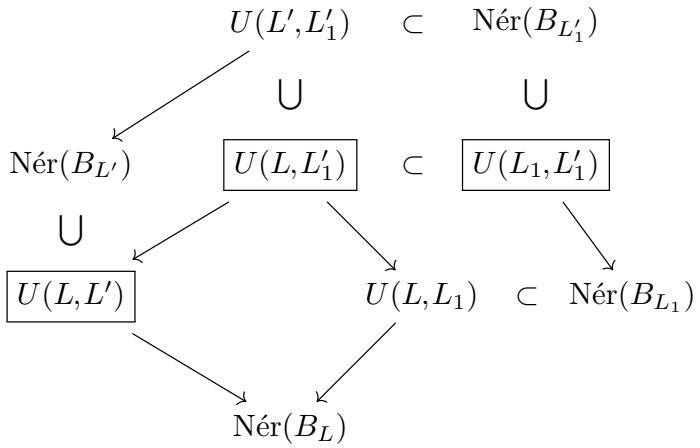
!

notre morphisme en $\mathcal{X}_i \to \mathcal{A}$ et l'unicité de l'extension $\mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_j \to \mathcal{A}$ montre que tous ces morphismes se recollent en $\mathcal{X} \to \mathcal{A}$, également unique.

L'unicité du couple $(\mathcal{A}, f)$ découle très usuellement de la propriété universelle que nous venons d'établir : si un autre couple $(\mathcal{A}', f')$ la vérifie, elle permet d'étendre f et f' en $\mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ et $\mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ et l'unicité montre que les composées de ces deux morphismes sont $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ et $\mathrm{id}_{\mathcal{A}'}$. De son côté, l'égalité $\mathcal{A}(\overline{\mathbb{Z}}) = A(\overline{\mathbb{Q}})$ correspond simplement au cas $\mathcal{X} = \operatorname{Spec} \overline{\mathbb{Z}}$.

(2) Nous pouvons supposer que le couple (K, B) ci-dessus est choisi de sorte qu'il existe un faisceau inversible rigidifié $\mathcal{N}$ sur B tel que $\mathcal{N}_{\overline{\mathbb{Q}}} \simeq \mathcal{L}$. Rappelons qu'une structure cubiste sur un faisceau inversible le munit d'une rigidification [29, I.2.5.3] et que dans le cas d'un schéma abélien comme $B \to \operatorname{Spec} K$ les deux données sont équivalentes [29, I.2.6. (i)]. Nous voyons donc $\mathcal{N}$ comme un faisceau inversible cubiste et cherchons à l'étendre à un modèle entier de B, quitte à faire un changement de base.

Nous sommes ainsi dans le cadre du chapitre II de [29]. Considérons une extension finie L de K. Le faisceau cubiste $\mathcal{N}_L$ s'étend au plus grand sous-groupe ouvert de $\mathrm{Nér}(B_L)$ à fibres connexes puisqu'il suffit ici de l'étendre comme faisceau rigidifié [29, I.2.6.(ii)]. Il reste donc à le prolonger aux fibres non connexes correspondant aux places de mauvaises réduction. La situation est alors décrite par [29, II.1.1] : le prolongement n'est pas possible en général mais est unique s'il existe. Heureusement l'obstruction disparaît après un changement de base suffisamment ramifié [29, II.1.2.2]. Ceci entraîne que l'on peut trouver un corps de nombres L' contenant L et un (unique) prolongement cubiste de $\mathcal{N}_{L'}$ à $\mathrm{Nér}(B_L) \times \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{L'}$. Par suite, nous avons prolongé $\mathcal{L}$ à $U(L)$. Si $L \subset L_1 \subset L_1'$ sont des extensions finies telles que $\mathcal{N}_{L_1'}$ s'étend à $\mathrm{Nér}(B_{L_1}) \times \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{L_1'}$, les deux prolongements ainsi définis de $\mathcal{L}$ à $U(L)$ et $U(L_1)$ coïncident sur $U(L) \subset U(L_1)$: en effet, nous pouvons librement supposer $L' \subset L_1'$ puis, dans le diagramme



où nous avons encadré les schémas sur lesquels existe un prolongement, invoquer l'unicité de celui-ci sur $U(L, L_1')$. Le faisceau cubiste $\mathcal{L}$ s'étend donc de manière compatible à tous les $U(L)$, ce qui définit bien un prolongement cubiste $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{A}$. Pour montrer son unicité, il suffit de travailler sur un $U(L)$ fixé. Or, si nous avions deux prolongements sur ce schéma de présentation finie, ils descendraient à $\mathrm{Nér}(B_L) \times \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{L_2}$ (pour une extension finie L_2/L) où l'unicité est acquise.

!

(3) Il n'y a pas de restriction à supposer que les données précédentes $(K,B,\mathcal{N})$ sont choisies de sorte que tous les points fermés du groupe de Mumford $\mathrm{K}(\mathcal{N}^{\otimes 2})$ (noyau de la polarisation associée à $\mathcal{N}^{\otimes 2}$ [29, I.4.2]) sont rationnels sur K. Notons que $\mathcal{N}$ est ample et symétrique puisque $\mathcal{N}_{\overline{\mathbb{Q}}} \simeq \mathcal{L}$ l'est et donc $\mathrm{K}(\mathcal{N}^{\otimes 2})$ est fini. Fixons deux corps de nombres $L \subset L'$ contenant K puis une extension finie L'' de L' telle que $\mathcal{N}_{L''}$ admet un prolongement cubiste, noté $\mathcal{P}$, au modèle $U(L',L'') = \mathrm{Nér}(B_{L'}) \times \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{L''}$. Puisque $[-1]^*\mathcal{P}$ étend $[-1]^*\mathcal{N}_{L''} \simeq \mathcal{N}_{L''}$, l'unicité du prolongement fournit un isomorphisme cubiste $\mathcal{P} \simeq [-1]^*\mathcal{P}$ qui rend $\mathcal{P}$ symétrique [29, II.1.2.4].

L'hypothèse de rationalité montre que l'adhérence schématique de $\mathrm{K}(\mathcal{N}_{L''}^{\otimes 2})$ dans $U(L',L'')$ est finie sur $\mathcal{O}_{L''}$ (il suffit d'étendre chacun de ses points par la propriété de Néron sur L'). Cette adhérence coïncide avec le groupe $\mathrm{K}(\mathcal{P}^{\otimes 2})$ [29, IV.2.4]. Parce que nous pouvons aussi utiliser la propriété de Néron sur L, la même chose vaut sur l'ouvert $U(L,L'')$ de $U(L',L'')$. En d'autres termes $\mathrm{K}(\mathcal{P}^{\otimes 2}) = \mathrm{K}(\mathcal{P}^{\otimes 2}_{|U(L,L'')})$ est contenu dans $U(L,L'')$. Par suite, le théorème [29, VI.3.4. (i)] s'applique sur $U(L,L'')$ et $U(L',L'')$ et entraîne que le morphisme de restriction $H^0(U(L',L''),\mathcal{P}) \to H^0(U(L,L''),\mathcal{P})$ est un isomorphisme. Nous savons de plus que $H^0(U(L,L''),\mathcal{P})$ est un $\mathcal{O}_{L''}$-module localement libre [29, VI.3.5].

Étendons maintenant ceci à $\overline{\mathbb{Z}}$. Nous obtenons que la restriction

$$H^0(U(L'),\mathcal{M}) \longrightarrow H^0(U(L),\mathcal{M})$$

est un isomorphisme ($\overline{\mathbb{Z}}$ est plat sur $\mathcal{O}_{L''}$) et que ces deux modules sont libres sur $\overline{\mathbb{Z}}$ (les idéaux de $\mathcal{O}_{L''}$ capitulent dans $\overline{\mathbb{Z}}$). Comme ceci vaut pour tous $K \subset L \subset L'$, nous voyons que $H^0(\mathcal{A},\mathcal{M}) \to H^0(U(L),\mathcal{M})$ est un isomorphisme pour tout L. Le $\overline{\mathbb{Z}}$-module $H^0(\mathcal{A},\mathcal{M})$ est donc bien libre et le calcul de son rang suit de $H^0(A,\mathcal{L}) = H^0(\mathcal{A},\mathcal{M}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ ($\overline{\mathbb{Q}}$ est plat sur $\overline{\mathbb{Z}}$).

Le modèle de Néron $\mathcal{A}$ sur $\overline{\mathbb{Z}}$ obtenu est localement de présentation finie (car lisse) mais n'est pas en général de type fini; en fait, on peut montrer qu'au-dessus d'un point fermé v de $\mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{Z}}$ le groupe des composantes $\mathcal{A}_v/\mathcal{A}_v^\circ$ de la fibre $\mathcal{A}_v$ est isomorphe à $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{t_v}$ où t_v est la dimension de la partie torique de la variété semi-abélienne $\mathcal{A}_v^\circ$.

Dans l'assertion (2) ci-dessus le faisceau cubiste $\mathcal{M}$ est même indépendant du choix de la rigidification sur $\mathcal{L}$: en effet un autre choix de celle-ci équivaut simplement à changer l'isomorphisme $\mathcal{M}_{\overline{\mathbb{Q}}} \simeq f^*\mathcal{L}$.

Décrivons maintenant les espaces adéliques rigides sur $\overline{\mathbb{Q}}$ que nous utiliserons dans la suite de ce texte. Fixons pour cela comme dans le théorème un couple formé d'une variété abélienne A sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et d'un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur A ample, symétrique et rigidifié à l'origine puis le modèle canonique $(\mathcal{A},\mathcal{M})$ sur $\overline{\mathbb{Z}}$ de ce couple. Rappelons [29, II.2.1] que, pour tout plongement $\sigma\colon \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$, le faisceau $\mathcal{L}_\sigma$ sur la variété complexe A_σ porte une métrique cubiste (uniquement déterminée par la rigidification) $\|\cdot\|_{\mathrm{cub},\sigma}$. Nous en déduisons d'abord une structure d'espace adélique sur $H = H^0(A,\mathcal{L})$ en posant

$$\|s\|_{H,\sigma} = \left(\int_{A_\sigma(\mathbb{C})} \|s(x)\|^2_{\mathrm{cub},\sigma}\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

pour un plongement σ et $s \in H \otimes_\sigma \mathbb{C}$ tandis que pour une place ultramétrique v de $\overline{\mathbb{Q}}$ (un point fermé de $\operatorname{Spec}\overline{\mathbb{Z}}$) $\|\cdot\|_{H,v}$ est l'unique norme sur $H \otimes \overline{\mathbb{Q}}_v$ dont la boule unité est $H^0(\mathcal{A},\mathcal{M}) \otimes \overline{\mathbb{Z}}_v$ (où $\overline{\mathbb{Q}}_v$ et $\overline{\mathbb{Z}}_v$ sont les complétés en v). De façon analogue, pour $P \in A(\overline{\mathbb{Q}})$, nous munissons (l'espace vectoriel de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{Q}}$) $P^*\mathcal{L}$ d'une structure adélique par image réciproque des normes $\|\cdot\|_{\mathrm{cub},\sigma}$ à l'infini et à l'aide du sous-$\overline{\mathbb{Z}}$-module $P^*\mathcal{M}$ aux places finies (où P est vu dans $\mathcal{A}(\overline{\mathbb{Z}}) = A(\overline{\mathbb{Q}})$). Enfin nous considérons aussi l'espace tangent à l'origine t_A de A. Nous l'équipons de métriques (qui dépendent de $\mathcal{L}$) grâce au sous-$\overline{\mathbb{Z}}$-module $t_{\mathcal{A}}$ et aux normes $\|\cdot\|_{\mathcal{L},\sigma}$ sur t_{A_σ} associées aux formes de Riemann des $\mathcal{L}_\sigma$ [16, §2.4].

Proposition 5.2. *Les trois structures d'espaces adéliques décrites ci-dessus sont rigides. Pour les pentes associées, nous avons avec $g = \dim A$*

$$\mu(H) = -\frac{1}{2} h_F(A) + \frac{1}{4} \log \frac{h^0(A,\mathcal{L})}{(2\pi^2)^g}, \qquad \mu(P^*\mathcal{L}) = h_{\mathcal{L}}(P)$$

et

$$\mu(t_A) = -\frac{1}{g}\left(h_F(A) + \frac{1}{2}\log h^0(A,\mathcal{L})\right).$$

Démonstration. Fixons une base du $\overline{\mathbb{Z}}$-module libre $H^0(\mathcal{A},\mathcal{M})$. Dans celle-ci, toutes les normes ultramétriques de H sont définies par la matrice identité tandis qu'à l'infini les normes sont hermitiennes donc données par des matrices complexes. Ceci montre que la structure adélique sur H est définie par une matrice adélique sur $\overline{\mathbb{Q}}$ au sens de [15, §2.2] donc est rigide. Le même argument vaut dans les deux autres cas car la structure entière est également donnée par un $\overline{\mathbb{Z}}$-module libre : $P^*\mathcal{M}$ et $t_{\mathcal{A}}$ proviennent de modules localement libres sur l'anneau des entiers d'un corps de nombres (il suffit de choisir ce corps pour que A y ait un modèle semi-stable de sorte que $\mathcal{M}$ et P proviennent de ce modèle). En d'autres termes, ces structures coïncident avec les extensions à $\overline{\mathbb{Q}}$ de celles induites sur un corps de nombres par un MB-modèle et le calcul des pentes découle alors du théorème 4.10 de [6], assertions (ii) et (v), et du lemme 3.7 de [16], à ceci près que nous utilisons la normalisation de Faltings de $h_F(A)$ (voir [16, §2.3]).

Comme l'illustre cette démonstration, bien que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{M}$ ne proviennent pas d'un unique corps de nombres (sauf s'il y a bonne réduction partout), c'est le cas pour les structures que nous en déduisons et nous pourrons donc librement employer dans la suite les résultats obtenus en termes de MB-modèles comme dans [16] ou [14]. Simplement, travailler sur $\overline{\mathbb{Q}}$ permet de ne pas préciser de corps de définition qui, dans la preuve de la partie suivante, devrait dépendre des paramètres.

Dans le cadre ci-dessus, nous emploierons le minimum essentiel (logarithmique) de l'espace adélique t_A, c'est-à-dire le seuil de hauteur (logarithmique) à partir duquel les petits points de t_A deviennent denses dans t_A pour la topologie de Zariski. En d'autres termes, il s'agit du dernier minimum de Zhang de t_A au sens de [15, §3.1]. Nous le noterons $\mathsf{m}_{\mathrm{ess}}(t_A)$ et écrivons en abrégé $\mathsf{m}_A^+ = \max(0, \mathsf{m}_{\mathrm{ess}}(t_A))$ (ce nombre dépend de $\mathcal{L}$).

Terminons par une remarque sur les polarisations. Lorsque nous considérons (comme dans l'introduction) une variété abélienne polarisée $(A,\mathcal{L})$ sur un corps de nombres K,

!

cela signifie formellement que A est munie d'une isogénie $A \to A^\vee$ dont l'extension à $\overline{K}$ s'écrit $x \mapsto \tau_x^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{\otimes -1}$ pour un élément $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(A_{\overline{K}})$ ample et symétrique. Le faisceau $\mathcal{L}$ ne provient pas en général d'un élément de $\mathrm{Pic}(A)$ (mais c'est le cas de $\mathcal{L}^{\otimes 2}$). Par abus de notation nous notons $h^0(A,\mathcal{L})$ au lieu de $h^0(A_{\overline{K}},\mathcal{L})$ (nous ne perdrions pas beaucoup en généralité en supposant que $\mathcal{L}$ provient de $\mathrm{Pic}(A)$). Nous fixons implicitement une rigidification de $\mathcal{L}$ en l'origine de $A_{\overline{K}}$ pour appliquer les constructions ci-dessus et travailler avec les espaces adéliques rigides sur $\overline{K}$ associés. Ceux-ci dépendent de la rigidification mais un changement de celle-ci les remplace par des espaces isomorphes; la seule chose qui importe est bien sûr de choisir la même rigidification pour définir toutes les structures de sorte à assurer leur compatibilité.

6. Inégalité fondamentale

Dans cette partie nous démontrons l'inégalité qui est à la base de tous les énoncés de l'introduction. Elle repose sur une démonstration de transcendance, analogue à celle du théorème des périodes de [16].

Soit $(A,\mathcal{L})$ une variété abélienne polarisée sur un corps de nombres K, de dimension g. Soit Σ un ensemble fini non vide de points de $A(K)$. Étant donné une sous-variété abélienne stricte B de $A_{\overline{K}}$, nous posons

$$y(B) = \left(\mathrm{Card}\left(\frac{\Sigma + B}{B}\right) \times \frac{h^0(B,\mathcal{L})}{h^0(A,\mathcal{L})}\right)^{1/t} \quad \text{avec } t = \dim A - \dim B$$

puis $y = \min_B y(B)$ où le minimum porte sur les sous-variétés abéliennes strictes B de A. L'énoncé ci-dessous généralise la proposition 15.1 de [19] (qui est le cas $\Sigma = \{0\}$).

Lemme 6.1. *On a $y = \min_B y(B)$ où le minimum porte sur les sous-variétés abéliennes strictes B de $A_{\overline{K}}$.*

Démonstration. Notons $y_{\overline{K}} \leq y$ le minimum de l'énoncé. Choisissons une sous-variété abélienne stricte B_0 de $A_{\overline{K}}$ telle que $y_{\overline{K}} = y(B_0)$ et de dimension minimale pour cette propriété. Si B_0 s'écrit $B_{\overline{K}}$ pour une sous-variété abélienne B de A, nous avons terminé. Sinon il existe $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ tel que $\sigma(B_0) \neq B_0$. Notons $G = B_0 \cap \sigma(B_0)$, $B_1 = G^0$ sa composante neutre et $B_2 = B_0 + \sigma(B_0)$. D'après la proposition 3.1 de [32], nous avons

$$[G : B_1] h^0(B_1,\mathcal{L}) h^0(B_2,\mathcal{L}) \leq h^0(B_0,\mathcal{L}) h^0(\sigma(B_0),\mathcal{L}) = h^0(B_0,\mathcal{L})^2$$

tandis que

$$[G : B_1]^{-1} \mathrm{Card}\left(\frac{\Sigma + B_1}{B_1}\right) \leq \mathrm{Card}\left(\frac{\Sigma + G}{G}\right) = \mathrm{Card}\left(\frac{\Sigma + B_0}{B_0}\right)$$

(parce que $P \in B_0$ équivaut à $P \in G$ pour $P \in A(K)$) et

$$\mathrm{Card}\left(\frac{\Sigma + B_2}{B_2}\right) \leq \mathrm{Card}\left(\frac{\Sigma + B_0}{B_0}\right)$$

(car $B_0 \subset B_2$). En combinant, nous trouvons

$$y(B_1)^{g-\dim B_1} y(B_2)^{g-\dim B_2} \leq y(B_0)^{2(g-\dim B_0)}$$

où, pour couvrir le cas $B_2 = A$, nous posons $y(A) = y_{\overline{K}}$. En utilisant $y(B_0) = y_{\overline{K}} \leq y(B_2)$, $\dim B_1 + \dim B_2 = 2\dim B_0$ et $g - \dim B_1 > 0$, il vient $y(B_1) \leq y_{\overline{K}}$ donc $y(B_1) = y_{\overline{K}}$. Mais $\dim B_1 < \dim B_0$ contredit le choix de B_0 : cette absurdité donne le lemme.

Soit $\mathcal{V}$ un ensemble de plongements de K dans $\mathbb{C}$. Pour chaque $\sigma \in \mathcal{V}$, nous considérons des nombres réels positifs E_σ, r_σ, x_σ, z_σ, ε_σ, η_σ, ψ_σ soumis aux conditions $E_\sigma^2 > x_\sigma^2 + 9/4$, $r_\sigma > 0$, $x_\sigma > z_\sigma$, $\varepsilon_\sigma > 0$ et $x_\sigma = 1$ si $g = 1$. Nous demandons que $\mathcal{V}$ soit stable par conjugaison complexe ainsi que tous les paramètres attachés ($E_{\overline{\sigma}} = E_\sigma$ etc.). Nous considérons encore pour chaque $\sigma \in \mathcal{V}$ un quintuplet $(\beta_\sigma, \gamma_\sigma, E'_\sigma, Q_\sigma, S'_\sigma)$ associé à $(\Omega_{A_\sigma}, E_\sigma, r_\sigma, x_\sigma)$ par l'une des règles (P0), (P1) et (P2) de la définition 4.5. Nous supposons que les paramètres sont choisis de telle sorte que $E'_\sigma > 1$ pour tout $\sigma \in \mathcal{V}$. Nous définissons encore

$$C_\sigma = \frac{1}{\varepsilon_\sigma (g-1)!} \left(\frac{(1+\eta_\sigma)\pi E_\sigma^2}{2\log E'_\sigma} \right)^g$$

et

$$\eta'_\sigma = \eta_\sigma - \varepsilon_\sigma \left(\eta_\sigma + (1+\eta_\sigma) \frac{\log Q_\sigma}{\log E'_\sigma} + \left(\frac{\gamma_\sigma}{E_\sigma} \right)^2 \right) - \psi_\sigma.$$

Notons finalement $\log^+(\cdot) = \log\max(1,\cdot)$. Avec ces notations le résultat principal de cette partie est le suivant (où $D = [K : \mathbb{Q}]$).

Théorème 6.2. *Si, pour tout $\sigma \in \mathcal{V}$ et tout $P \in \Sigma$, nous avons*

(C1) $C_\sigma r_\sigma^{2g} \leq S'_\sigma h^0(A, \mathcal{L})$,

(C2) $h_{\mathcal{L}}(P) \leq \dfrac{\pi}{2g^2 D} \displaystyle\sum_{\sigma' \in \mathcal{V}} \psi_{\sigma'} E_{\sigma'}^2 r_{\sigma'}^2$,

(C3) *il existe $u_\sigma \in t_{A_\sigma}$ avec $\exp_{A_\sigma}(u_\sigma) = P$ et $\|u_\sigma\|_{\mathcal{L},\sigma} \leq z_\sigma r_\sigma / g$,*

alors

$$\frac{\pi y}{2gD} \sum_{\sigma \in \mathcal{V}} \eta'_\sigma E_\sigma^2 r_\sigma^2 \leq g\, \mathsf{m}_A^+ + \frac{g}{D} \sum_{\sigma \in \mathcal{V}} \log^+ \frac{x_\sigma / r_\sigma}{x_\sigma^2 - z_\sigma^2} + \frac{g}{2D} \sum_{\sigma \notin \mathcal{V}} \left(1 + \log^+ \frac{\pi y}{g^2} \right).$$

Le reste de cette partie est consacré à établir cet énoncé. Nous allons travailler entièrement sur $\overline{K}$. Pour cela, notons $\mathcal{V}_{\overline{K}}$ l'ensemble des plongements de $\overline{K}$ dans $\mathbb{C}$ dont la restriction à K se trouve dans $\mathcal{V}$. Nous étendons en conséquence les notations des paramètres : si $\sigma \in \mathcal{V}_{\overline{K}}$, E_σ désigne $E_{\sigma_{|K}}$ et ainsi de suite. D'autre part, nous utilisons un entier naturel T destiné à tendre vers l'infini en fin de démonstration. La notation $\mathrm{o}(\cdot)$ se réfère à cette limite avec l'importante convention d'uniformité suivante par rapport aux plongements : lorsque dans une formule figure $\sigma\colon \overline{K} \hookrightarrow \mathbb{C}$ alors le symbole $\mathrm{o}(\cdot)$ désigne une fonction *indépendante de σ*, négligeable devant son argument lorsque $T \to +\infty$. En

!

dehors de cette convention, cette fonction peut dépendre de toutes les données fixées pour énoncer le théorème 6.2. Enfin nous posons

$$n = \left\lfloor \frac{Ty}{g} \right\rfloor - 1$$

et supposons T assez grand pour avoir $n \geq 1$.

Application linéaire auxiliaire

Pour $\sigma\colon \overline{K} \hookrightarrow \mathbb{C}$, rappelons que $H^0(A_\sigma, \mathcal{L}_\sigma^{\otimes n})$ s'identifie à l'ensemble des fonctions holomorphes $\vartheta\colon t_{A_\sigma} \to \mathbb{C}$ vérifiant $\vartheta(z+\omega) = a_{\mathcal{L}_\sigma}(\omega, z)^n \vartheta(z)$ pour tout $z \in t_{A_\sigma}$ et toute période ω de A_σ, où $a_{\mathcal{L}_\sigma}(\cdot,\cdot)$ est le facteur d'automorphie canonique de $\mathcal{L}_\sigma$ [16, §2.5]. Pour $s \in H^0(A_\sigma, \mathcal{L}_\sigma^{\otimes n})$ de fonction ϑ associée et pour $x \in A_\sigma(\mathbb{C})$, la norme cubiste de $s(x)$ relative à $\mathcal{L}_\sigma^{\otimes n}$ est reliée à la forme de Riemann d'un logarithme z quelconque de x et au module de $\vartheta(z)$ par la formule

$$\|s(x)\|_{\mathrm{cub},\sigma} = |\vartheta(z)| \exp\left(-\frac{\pi}{2} n \|z\|_{\mathcal{L},\sigma}^2\right)$$

(voir [14, §2.2]). Nous notons $\|s\|_{\infty,\sigma} = \sup\{\|s(x)\|_{\mathrm{cub},\sigma} \mid x \in A_\sigma(\mathbb{C})\}$ et nous utiliserons la conséquence suivante de la formule : si $R > 0$ alors

$$|\vartheta|_R \leq \|s\|_{\infty,\sigma} \exp\left(\frac{\pi}{2} n R^2\right).$$

Pour $\sigma \in \mathcal{V}_{\overline{K}}$, nous appliquons le théorème 4.6 au réseau des périodes Ω_{A_σ} de A_σ et aux paramètres E_σ, r_σ, x_σ. Cela nous fournit un ensemble $\mathcal{S}_\sigma$ de cardinal S_σ et une base orthonormée e_σ de t_{A_σ}. Nous posons

$$T_\sigma = \left\lfloor \frac{(1+\eta_\sigma)\pi n E_\sigma^2 r_\sigma^2}{2 S_\sigma \log E'_\sigma} \right\rfloor,$$

avec T assez grand pour que $T_\sigma \geq 2$. Excepté au moment de conclure, nous utiliserons surtout que T_σ/T est majoré par une quantité indépendante de σ et de T. Nous définissons également $\varrho_\sigma = 0$ dans le cas (P0) et $\varrho_\sigma = r_\sigma$ dans les autres cas (ainsi, pour tout $\omega \in \mathcal{S}_\sigma$, on a $\|\omega\|_{\mathcal{L},\sigma} \leq \varrho_\sigma$) puis

$$\alpha_\sigma = (E'_\sigma Q_\sigma)^{S_\sigma T_\sigma} \exp\left(\frac{\pi}{2} n (\varrho_\sigma^2 - E_\sigma^2 r_\sigma^2)\right).$$

Considérons l'application linéaire $\Phi_\sigma\colon H^0(A_\sigma, \mathcal{L}_\sigma^{\otimes n}) \to \bigoplus_{\omega,\tau} \mathbb{C}$ de coordonnées

$$\Phi_\sigma(s)_{\omega,\tau} = \frac{\alpha_\sigma \zeta_{\widehat{\tau}}}{\tau!} D_{\mathsf{e}_\sigma}^\tau \vartheta(\omega) \exp\left(-\frac{\pi}{2} n \|\omega\|_{\mathcal{L},\sigma}^2\right) (\beta_\sigma r_\sigma)^{|\tau|}$$

où $\omega \in \mathcal{S}_\sigma$, $\tau = (\tau_1, \widehat{\tau}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{g-1}$ vérifie $\tau_1 < T_\sigma$ et $|\widehat{\tau}| < S_\sigma T_\sigma$ et où ϑ est la fonction thêta associée à s (les nombres $\zeta_{\widehat{\tau}}$ ont été introduits au début de la partie 3; ils valent 1 si $g = 1$).

Proposition 6.3. *Le rang ρ_σ de Φ_σ est plus petit que* $\dfrac{S_\sigma^{g-1} T_\sigma^g}{(g-1)!} + \mathrm{o}(T^g)$.

Démonstration. Nous appliquons la formule de Leibniz à l'égalité de quasi-périodicité $\vartheta(z+\omega) = a_{\mathcal{L}_\sigma}(\omega,z)^n\vartheta(z)$ des fonctions thêta vis-à-vis du réseau Ω_{A_σ} pour constater que le noyau de Φ_σ coïncide avec celui de l'application définie de manière similaire en ne considérant que $\omega = 0$. Le rang de cette dernière est inférieur à la dimension de son but, soit $\binom{S_\sigma T_\sigma + g - 2}{g-1} T_\sigma$, dont le développement asymptotique en l'infini est celui annoncé.

Nous allons maintenant évaluer la norme de cette application Φ_σ. À cette fin, commençons par la variante suivante du lemme de Cauchy qui, comparée aux énoncés [16, lemme 6.3] et [5, lemme 3.8], a l'avantage de faire disparaître la dimension g du majorant.

Lemme 6.4. *Soient $\sigma\colon \overline{K} \hookrightarrow \mathbb{C}$ un plongement complexe et $\mathtt{e}$ une base orthonormée de $(t_{A_\sigma}, \|\cdot\|_{\mathcal{L},\sigma})$. Alors, pour toute fonction thêta ϑ associée à un élément s de $H^0(A_\sigma, \mathcal{L}_\sigma^{\otimes n})$, pour tout $\tau \in \mathbb{N}^g$, pour tout $z \in t_{A_\sigma}$ et tout nombre réel $r > 0$, on a*

$$\left|\frac{\zeta_\tau}{\tau!} D^\tau_{\mathtt{e}}\vartheta(z)\right| \exp\left(-\frac{\pi}{2} n \|z\|^2_{\mathcal{L},\sigma}\right) \leq \|s\|_{\infty,\sigma} r^{-|\tau|} \exp\left(\frac{\pi}{2} n (r^2 + 2r\|z\|_{\mathcal{L},\sigma})\right).$$

Démonstration. Nous identifions t_{A_σ} à $\mathbb{C}^g$ au moyen de la base $\mathtt{e}$ puis appliquons la proposition 3.1 avec $w = z$ et $R = \|z\|_{\mathcal{L},\sigma} + r$. Il reste à majorer $|\vartheta|_R$ par $\|s\|_{\infty,\sigma} \exp\left(\frac{\pi}{2} n R^2\right)$.

Comme dans la partie 3, nous notons $|\cdot|$ la norme hermitienne usuelle sur les puissances de $\mathbb{C}$.

Proposition 6.5. *Pour tout $\sigma \in \mathcal{V}_{\overline{K}}$ et tout $s \in H^0(A_\sigma, \mathcal{L}_\sigma^{\otimes n})$, on a*

$$|\Phi_\sigma(s)| \leq (E'_\sigma Q_\sigma)^{S_\sigma T_\sigma} \exp\left(\frac{\pi}{2} n (\gamma_\sigma^2 - E_\sigma^2) r_\sigma^2 + \mathrm{o}(T)\right) \|s\|_{\infty,\sigma}.$$

Démonstration. Le nombre de composantes de $\Phi_\sigma(s)$ est au plus $(S_\sigma T_\sigma)^g$ donc $|\Phi_\sigma(s)| \leq \sup_{\omega,\tau} |\Phi_\sigma(s)_{\omega,\tau}| \exp \mathrm{o}(T)$. Notons $r'_\sigma = \beta_\sigma r_\sigma$ si $g = 1$ et $r'_\sigma = \sqrt{2}\beta_\sigma r_\sigma$ si $g \geq 2$. Appliquons alors le lemme précédent avec $z = \omega$ (de norme au plus ϱ_σ) et $r = r'_\sigma$ à la fonction ϑ associée à s. Nous trouvons

$$|\Phi_\sigma(s)_{\omega,\tau}| \leq \frac{\zeta_{\widehat{\tau}}}{\zeta_\tau} \left(\frac{\beta_\sigma r_\sigma}{r'_\sigma}\right)^{|\tau|} \exp\left(\frac{\pi}{2} n ((r'_\sigma)^2 + 2\varrho_\sigma r'_\sigma)\right) \alpha_\sigma \|s\|_{\infty,\sigma}.$$

La quantité qui précède l'exponentielle vaut 1 si $g = 1$ et est majorée par 1 si $g \geq 2$ puisque $\zeta_{\widehat{\tau}} \leq \zeta_\tau \sqrt{2}^{|\tau|}$. L'énoncé s'en déduit grâce au choix de α_σ et à $r'_\sigma + \varrho_\sigma = \gamma_\sigma r_\sigma$.

Section auxiliaire

Nous munissons $H_n = H^0(A_{\overline{K}}, \mathcal{L}^{\otimes n})$ de sa structure canonique d'espace adélique rigide sur $\overline{K}$ (voir partie précédente). Pour $\sigma \in \mathcal{V}_{\overline{K}}$, nous définissons une nouvelle norme hermitienne sur $H_n \otimes_\sigma \mathbb{C}$ en posant pour $s \in H^0(A_\sigma, \mathcal{L}_\sigma^{\otimes n})$

$$\|s\|^2_{H_{n,\Phi},\sigma} = \|s\|^2_{H_n,\sigma} + |\Phi_\sigma(s)|^2.$$

En utilisant ces normes aux places de $\overline{K}$ correspondant à $\mathcal{V}_{\overline{K}}$ et les normes de H_n aux autres places (archimédiennes ou ultramétriques), nous obtenons un nouvel espace adélique rigide $H_{n,\Phi}$ sur $\overline{K}$.

!

Pour exprimer pentes et hauteurs, nous faisons usage de la mesure $\mathrm{d}\varpi$ sur l'ensemble $V(\overline{K})$ des places de $\overline{K}$ (voir [15, partie 2]) et en particulier sur la partie $V_\infty(\overline{K}) \subset V(\overline{K})$ formée des places archimédiennes. Comme l'ensemble des plongements $\overline{K} \hookrightarrow \mathbb{C}$ s'identifie à $V_\infty(\overline{K}) \times \{\pm 1\}$, nous le munissons de la mesure naturelle encore notée $\mathrm{d}\varpi$, produit de celle sur $V_\infty(\overline{K})$ et de la mesure sur $\{\pm 1\}$ où $\{1\}$ et $\{-1\}$ sont de volume $1/2$. Ce choix assure que l'intégrale sur ce produit d'une fonction f vérifiant $f(\overline{\sigma}) = f(\sigma)$ coïncide avec l'intégrale de la fonction induite sur $V_\infty(\overline{K})$.

La première inégalité de [13, §4.2] s'écrit alors sur $\overline{K}$

$$-\mu(H_{n,\Phi}) \leq \int_{\mathcal{V}_{\overline{K}}} \frac{\rho_\sigma}{n^g h^0(A,\mathcal{L})} \log(1 + \|\Phi_\sigma\|_{\mathrm{op}}^2)^{1/2} \,\mathrm{d}\varpi(\sigma) - \mu(H_n)$$

où $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ est la norme d'opérateur (relative à $\|\cdot\|_{H_n,\sigma}$ à la source et à la norme standard $|\cdot|$ au but).

Proposition 6.6. *Il existe $s \in H_n \setminus \{0\}$ telle que*

$$\begin{aligned} h_{H_{n,\Phi}}(s) &= \int_{V(\overline{K})} \log \|s\|_{H_{n,\Phi},v} \,\mathrm{d}\varpi(v) \\ &\leq \int_{\mathcal{V}_{\overline{K}}} \frac{\rho_\sigma}{n^g h^0(A,\mathcal{L})} \max\Big(0, S_\sigma T_\sigma \log(E'_\sigma Q_\sigma) + \frac{\pi}{2} n(\gamma_\sigma^2 - E_\sigma^2) r_\sigma^2\Big) \,\mathrm{d}\varpi(\sigma) + \mathrm{o}(T). \end{aligned}$$

Démonstration. Puisque $\|\cdot\|_{\infty,\sigma} \leq \|\cdot\|_{H_n,\sigma} e^{\mathrm{o}(T)}$ (voir [14, remarque 3.2.4] avec $\ell = 0$), la proposition 6.5 fournit une majoration de $\|\Phi_\sigma\|_{\mathrm{op}}$. De son côté, la proposition 5.2 montre $\mu(H_n) = \mathrm{o}(T)$ donc le lemme de Siegel [13, p. 21] pour $H_{n,\Phi}$ donne la conclusion.

Dans la suite nous travaillons avec la section s fournie par cet énoncé.

Lemme de multiplicités et jet

Notons $\Sigma[g]$ l'ensemble des sommes $P_1 + \cdots + P_g$ avec $P_i \in \Sigma \cup \{0\}$ pour tout $1 \leq i \leq g$. La présence de y dans la définition de n assure que s ne s'annule pas trop.

Proposition 6.7. *Il existe $P \in \Sigma[g]$ tel que s ne s'annule pas à l'ordre gT en P.*

Démonstration. Dans le cas contraire, le lemme de multiplicités de Nakamaye [30] assure l'existence d'une sous-variété abélienne stricte B de $A_{\overline{K}}$ telle que

$$T^{g-\dim B} \operatorname{Card}\Big(\frac{\Sigma + B}{B}\Big) \deg_{\mathcal{L}} B \leq (\deg_{\mathcal{L}} A) n^{g-\dim B}.$$

Par amplitude de $\mathcal{L}$, on a $\deg_{\mathcal{L}} B = h^0(B,\mathcal{L})(\dim B)!$ (et de même pour A) ; l'inégalité se récrit alors sous la forme $(Ty(B)/n)^{g-\dim B} \leq g!/(\dim B)!$. Or le choix des paramètres implique $Ty > gn$ si bien qu'une contradiction advient lorsqu'on minore $y(B)$ par y (lemme 6.1) et majore le quotient des factorielles par $g^{g-\dim B}$.

Nous fixons un tel point P et notons $\ell \in \{0, \ldots, gT\}$ l'ordre d'annulation de s en P c'est-à-dire que $\mathrm{jet}^\ell s(P)$, le jet de s d'ordre ℓ en P, est non nul et ℓ est minimal pour cette propriété. Ce jet est un vecteur de $J = S^\ell(t^\vee_{A_{\overline{K}}}) \otimes_{\overline{K}} P^* \mathcal{L}^{\otimes n}$, où $S^\ell(t^\vee_{A_{\overline{K}}})$ désigne la puissance symétrique d'ordre ℓ du dual de $t_{A_{\overline{K}}}$. L'espace vectoriel J est muni d'une

!

structure d'espace adélique rigide sur $\overline{K}$, héritée de celles de $t_{A_{\overline{K}}}$ et de $P^*\mathcal{L}$ (voir proposition 5.2). Dans la suite nous évaluons les normes de $\mathrm{jet}^\ell s(P)$ relatives à cet espace rigide J en les différentes places de $\overline{K}$.

Estimations générales des normes du jet

En accord avec notre convention sur les plongements, la fonction $\mathrm{o}(T)$ apparaissant dans l'énoncé suivant est indépendante de la place v.

Proposition 6.8. *Pour toute place archimédienne v de $\overline{K}$ on a*

$$\|\mathrm{jet}^\ell s(P)\|_{J,v} \leq \|s\|_{H_n,v} \exp\left(\frac{gT}{2}\left(1+\log^+\frac{\pi n}{gT}\right)+\mathrm{o}(T)\right).$$

Démonstration. On applique la remarque 3.2.4 de [14] qui donne (lorsque $T\to+\infty$) :

$$\|\mathrm{jet}^\ell s(P)\|_{J,v} \leq \left(\frac{e\pi n}{\ell}\right)^{\ell/2} \|s\|_{H_n,v} \times e^{\mathrm{o}(T)}.$$

La fonction $\mathsf{x}\mapsto(e\pi n/\mathsf{x})^{\mathsf{x}}$ est croissante jusqu'à πn puis décroissante. Comme $\ell\leq gT$, on en déduit la majoration $(e\pi n/\ell)^\ell \leq \max(e,e\pi n/gT)^{gT}$ qui permet de conclure.

Le pendant ultramétrique de cette proposition prend une forme plus simple encore.

Proposition 6.9. *Pour toute place ultramétrique v de $\overline{K}$, on a $\|\mathrm{jet}^\ell s(P)\|_{J,v}\leq\|s\|_{H_n,v}$.*

La démonstration est identique à celle du paragraphe 6.7.1 de [16].

Extrapolation analytique

Pour tout $\sigma\in\mathcal{V}_{\overline{K}}$, considérons un logarithme $u_\sigma\in t_{A_\sigma}$ de P de norme plus petite que $z_\sigma r_\sigma$ (utiliser la condition (C3) du théorème 6.2 avec chacun des g points de $\Sigma\cup\{0\}$ dont la somme égale $P\in\Sigma[g]$).

Proposition 6.10. *Pour toute place archimédienne v de $\overline{K}$ correspondant à $\sigma\in\mathcal{V}_{\overline{K}}$, nous avons*

$$\|\mathrm{jet}^\ell s(P)\|_{J,v} \leq \left(\frac{x_\sigma r_\sigma}{x_\sigma^2 r_\sigma^2-\|u_\sigma\|_{\mathcal{L},\sigma}^2}\right)^\ell \frac{\exp\left(\frac{\pi}{2}nE_\sigma^2 r_\sigma^2+\mathrm{o}(T)\right)}{(E'_\sigma)^{S_\sigma T_\sigma}} \times \|s\|_{H_{n,\Phi},v}.$$

Démonstration. Notons ϑ la fonction holomorphe associée à $s\in H^0(A_\sigma,\mathcal{L}_\sigma^{\otimes n})$. D'après [14, §2.2], nous avons

$$\|\mathrm{jet}^\ell s(P)\|_{J,\sigma}^2 = \sum_{\tau\in\mathbb{N}^g,|\tau|=\ell} \frac{\tau!}{\ell!}\left|\frac{1}{\tau!}D_{\mathsf{e}_\sigma}^\tau\vartheta(u_\sigma)\exp\left(-\frac{\pi}{2}n\|u_\sigma\|_{\mathcal{L},\sigma}^2\right)\right|^2.$$

Nous écrivons par la proposition 3.1

$$\zeta_\tau\left|\frac{1}{\tau!}D_{\mathsf{e}_\sigma}^\tau\vartheta(u_\sigma)\right| \leq \left(\frac{x_\sigma r_\sigma}{x_\sigma^2 r_\sigma^2-\|u_\sigma\|_{\mathcal{L},\sigma}^2}\right)^\ell |\vartheta|_{x_\sigma r_\sigma}$$

σ

puisque $\|u_\sigma\|_{\mathcal{L},\sigma} \leq z_\sigma r_\sigma < x_\sigma r_\sigma$. Le supremum de ϑ sur la boule de rayon $x_\sigma r_\sigma$ est majoré au moyen du théorème d'interpolation 4.6 avec les paramètres introduits au début de cette partie. Dans cet énoncé se trouve $|\vartheta|_{E_\sigma r_\sigma}$ qui est plus petit que $\|s\|_{\infty,\sigma} \exp\left(\frac{\pi}{2} n E_\sigma^2 r_\sigma^2\right)$. Quant au maximum dans l'inégalité d'interpolation, par construction de la section auxiliaire, il est majoré par $\alpha_\sigma^{-1} \exp\left(\frac{\pi}{2} n \varrho_\sigma^2\right) \|s\|_{H_{n,\Phi},\sigma}$. Le choix de α_σ et la majoration déjà utilisée $\|s\|_{\infty,\sigma} \leq \|s\|_{H_{n,\Phi},\sigma} \exp(\mathrm{o}(T))$ conduisent à

$$|\vartheta|_{x_\sigma r_\sigma} \leq \frac{\exp\left(\frac{\pi}{2} n E_\sigma^2 r_\sigma^2 + \mathrm{o}(T)\right)}{(E'_\sigma)^{S_\sigma T_\sigma}} \|s\|_{H_{n,\Phi},\sigma}.$$

En reportant cette estimation dans les formules ci-dessus et en notant, grâce à la formule de Stirling,

$$\frac{\tau!}{\ell!} \zeta_\tau^{-2} = \frac{\ell^\ell}{\ell!} \frac{\tau!}{\tau^\tau} = \frac{(\ell/e)^\ell}{\ell!} \prod_{i=1}^{g} \frac{\tau_i!}{(\tau_i/e)^{\tau_i}} = e^{\mathrm{o}(T)}$$

nous en déduisons l'estimation cherchée.

Synthèse

Puisque $\mathrm{jet}^\ell s(P)$ est non nul par construction, la proposition 22 de [15] montre que sa hauteur est plus grande que l'opposé de la pente maximale de l'espace adélique rigide $J = S^\ell(t^\vee_{A_{\overline{K}}}) \otimes_{\overline{K}} P^* \mathcal{L}^{\otimes n}$, elle-même somme des pentes maximales de $S^\ell(t^\vee_{A_{\overline{K}}})$ et de $P^*\mathcal{L}^{\otimes n}$. Cette dernière vaut $n h_{\mathcal{L}}(P)$ par la proposition 5.2. Quant à la pente maximale de $S^\ell(t^\vee_{A_{\overline{K}}})$, elle est équivalente à $\ell\, \mathsf{m}_{\mathrm{ess}}(t_{A_{\overline{K}}})$ lorsque $\ell \to +\infty$ par [2, théorème 1.6]. Elle est donc plus petite que $gT\, \mathsf{m}_A^+ + \mathrm{o}(T)$. De ces observations découle l'inégalité

$$0 \leq n h_{\mathcal{L}}(P) + gT\, \mathsf{m}_A^+ + h_J(\mathrm{jet}^\ell s(P)) + \mathrm{o}(T).$$

Par définition de la hauteur dans les espaces adéliques rigides J et $H_{n,\Phi}$, nous avons

$$h_J(\mathrm{jet}^\ell s(P)) = h_{H_{n,\Phi}}(s) + \int_{V(\overline{K})} \log \frac{\|\mathrm{jet}^\ell s(P)\|_{J,v}}{\|s\|_{H_{n,\Phi},v}} \,\mathrm{d}\varpi(v).$$

Dans le membre de droite, nous majorons la hauteur de s par la proposition 6.6 et l'intégrale grâce aux propositions 6.8, 6.9 et 6.10 selon la nature de v. Puisqu'ils sont supposés indépendants de v, les termes $\mathrm{o}(T)$ s'intègrent sans difficulté et il vient

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{V}_{\overline{K}}} S_\sigma T_\sigma \log E'_\sigma \,\mathrm{d}\varpi(\sigma) \\
&\quad \leq n h_{\mathcal{L}}(P) + gT\, \mathsf{m}_A^+ + gT \int_{\mathcal{V}_{\overline{K}}} \log^+ \frac{x_\sigma r_\sigma}{x_\sigma^2 r_\sigma^2 - \|u_\sigma\|^2_{\mathcal{L},\sigma}} \,\mathrm{d}\varpi(\sigma) \\
&\qquad + \int_{\mathcal{V}_{\overline{K}}} \frac{\rho_\sigma}{n^g h^0(A,\mathcal{L})} \max\left(0, S_\sigma T_\sigma \log(E'_\sigma Q_\sigma) + \frac{\pi}{2} n(\gamma_\sigma^2 - E_\sigma^2) r_\sigma^2\right) \mathrm{d}\varpi(\sigma) \\
&\qquad + \frac{\pi n}{2} \int_{\mathcal{V}_{\overline{K}}} E_\sigma^2 r_\sigma^2 \,\mathrm{d}\varpi(\sigma) + \frac{gT}{2} \int_{\sigma \notin \mathcal{V}_{\overline{K}}} \left(1 + \log^+ \frac{\pi n}{gT}\right) \mathrm{d}\varpi(\sigma) + \mathrm{o}(T).
\end{aligned}$$

Le théorème 6.2 découle de cette majoration

a) en remplaçant les paramètres n et T_σ par leurs valeurs,

b) en observant que, par la proposition 6.3,

$$\frac{\rho_\sigma}{n^g h^0(A,\mathcal{L})} \leq \frac{C_\sigma r_\sigma^{2g}}{S_\sigma h^0(A,\mathcal{L})} \times \varepsilon_\sigma + \mathrm{o}(1) \leq \varepsilon_\sigma + \mathrm{o}(1)$$

grâce à la condition (C1) et $S_\sigma \geq S'_\sigma$,

c) en majorant

$$\frac{x_\sigma r_\sigma}{x_\sigma^2 r_\sigma^2 - \|u_\sigma\|_{\mathcal{L},\sigma}^2} \leq \frac{x_\sigma}{x_\sigma^2 - z_\sigma^2} \frac{1}{r_\sigma}$$

parce que $\|u_\sigma\|_{\mathcal{L},\sigma} \leq z_\sigma r_\sigma$,

d) en revenant sur K puisque pour tout $\sigma' \colon K \hookrightarrow \mathbb{C}$

$$\int_{\sigma_{|K}=\sigma'} \mathrm{d}\varpi(\sigma) = \frac{1}{D},$$

e) en majorant

$$h_{\mathcal{L}}(P) \leq \frac{\pi}{2D} \sum_{\sigma \in \mathcal{V}} \psi_\sigma E_\sigma^2 r_\sigma^2$$

car P est la somme de g points de hauteur au plus $\frac{\pi}{2g^2 D} \sum_{\sigma \in \mathcal{V}} \psi_\sigma E_\sigma^2 r_\sigma^2$ par la condition (C2)

puis en divisant toute l'inégalité par T, entier que l'on fait tendre alors vers l'infini.

Notre inégalité fondamentale est ainsi établie. Le reste du texte consistera à l'appliquer. Nous pouvons oublier tout ce qui a été fait jusqu'ici à l'exception de la proposition 2.1 et donc du théorème 6.2 avec toutes les notations qui servent à l'énoncer (notamment les formules (P0) à (P2) de la définition 4.5). Observons encore que l'inégalité obtenue n'a pas d'intérêt si son membre de gauche est négatif. Dans la suite, nous supposons toujours que les paramètres sont choisis de sorte que $\eta'_\sigma > 0$ pour tout $\sigma \in \mathcal{V}$. Remarquons que cela entraîne $\varepsilon_\sigma < 1$ et donc (avec $2\log E'_\sigma \leq (E'_\sigma)^2/e \leq E_\sigma^2/e$) $C_\sigma \geq (\pi e)^g/(g-1)!$.

7. Premières conséquences

Dans cette partie, nous établissons celui de nos énoncés principaux qui découle le plus directement de l'inégalité fondamentale, le théorème 1.5. Parce que, dans le cas elliptique, celui-ci est quasiment identique au lemme matriciel et sera donc démontré très simplement à la fin de la partie suivante (voir théorème 8.9), nous supposons dans toute cette partie $g \geq 2$.

Nous commençons par deux résultats auxiliaires qui interviendront également pour obtenir les autres théorèmes de l'introduction. Le premier concerne le choix du paramètre r_σ. Lorsque E_σ, x_σ, ε_σ et η_σ sont fixés et donc C_σ aussi (voir page 28), nous utiliserons

!

toujours le théorème 6.2 (dans le cas $g \geq 2$) en prenant pour r_σ le plus grand nombre réel tel que la condition (C1) soit remplie :

$$C_\sigma r_\sigma^{2g} \leq S'_\sigma h^0(A,\mathcal{L})$$

(rappelons que S'_σ dépend de r_σ et des minima de Ω_{A_σ} à travers les formules (P2)). L'existence et les propriétés de ce nombre sont données par l'énoncé suivant (où d_n désigne la densité centrale maximale en dimension n, introduite avant la proposition 2.1, avec la convention $d_0 = 1$).

Proposition 7.1. *L'ensemble des valeurs de r_σ satisfaisant la condition (C1) est borné et non vide et son supremum vérifie :*

(1) $C_\sigma r_\sigma^{2g} = S'_\sigma h^0(A,\mathcal{L})$;

(2) $S'_\sigma = \prod_{i=1}^{2g} \left\lceil \frac{r_\sigma}{\lambda_i(\Omega_{A_\sigma})\sqrt{6(2g-3)}} \right\rceil$;

(3) $(h^0(A,\mathcal{L})/C_\sigma)^{1/2g} \leq r_\sigma < \lambda_{2g}(\Omega_{A_\sigma})\sqrt{6(2g-3)}$;

(4) $r_\sigma \geq \left(2C_\sigma d_{2g}(48g-72)^{g-1/2}\right)^{-1} \lambda_{2g}(\Omega_{A_\sigma})$;

(5) *pour toute sous-variété abélienne B de A de dimension b, nous avons*

$$\frac{h^0(A,\mathcal{L})}{r_\sigma^{2(g-b)} h^0(B,\mathcal{L})} \leq C_\sigma d_{2b}(48g-72)^b.$$

Démonstration. Puisque nous avons toujours $S'_\sigma \geq 1$, il est clair que la valeur $r_\sigma = (h^0(A,\mathcal{L})/C_\sigma)^{1/2g}$ satisfait l'inégalité (C1). Voyons que ce n'est pas le cas si $r_\sigma \geq \lambda_{2g}(\Omega_{A_\sigma})\sqrt{6(2g-3)}$. En effet, nous avons alors $r_\sigma \geq \lambda_i(\Omega_{A_\sigma})\sqrt{6(2g-3)}$ pour tout $1 \leq i \leq 2g$ donc

$$\left\lceil \frac{r_\sigma}{\lambda_i(\Omega_{A_\sigma})\sqrt{6(2g-3)}} \right\rceil \leq \frac{2r_\sigma}{\lambda_i(\Omega_{A_\sigma})\sqrt{6(2g-3)}}.$$

En utilisant ceci pour $1 \leq i \leq 2g-1$, il vient

$$\begin{aligned} S'_\sigma h^0(A,\mathcal{L}) &\leq \left(\frac{2r_\sigma}{\sqrt{6(2g-3)}}\right)^{2g-1} \frac{h^0(A,\mathcal{L})}{\lambda_1(\Omega_{A_\sigma})\cdots\lambda_{2g-1}(\Omega_{A_\sigma})} \\ &\leq \frac{2^{2g-1}}{6^g(2g-3)^g} \cdot r_\sigma^{2g} \leq g^{-g} r_\sigma^{2g} \end{aligned}$$

où la seconde inégalité provient de celle d'Hadamard et la troisième d'une estimation facile (et très large). Il reste à remarquer $g^{-g} < (g-1)!^{-1} \leq C_\sigma$. Nous avons bien montré que l'ensemble de l'énoncé est borné et non vide et que son supremum vérifie (3). L'égalité (2) en découle immédiatement puisque le facteur correspondant à $i = 2g$ vaut 1. En utilisant simplement que le membre de gauche de (C1) est une fonction continue de r_σ tandis que le membre de droite est une fonction croissante, nous voyons que notre supremum est un maximum et satisfait l'égalité (1). Pour les deux dernières assertions, nous utiliserons le second théorème de Minkowski sous la forme suivante (voir la majoration qui précède la

!

proposition 2.1) : *si* Λ *est un réseau euclidien de minima successifs* $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ *alors* $\lambda_1 \cdots \lambda_n \leq 2^n d_n \operatorname{vol}(\Lambda)$. En particulier, avec (1) nous avons

$$\begin{aligned} C_\sigma r_\sigma^{2g} &\geq \left(\frac{r_\sigma}{\sqrt{6(2g-3)}}\right)^{2g-1} \frac{h^0(A,\mathcal{L})}{\lambda_1(\Omega_{A_\sigma})\cdots\lambda_{2g-1}(\Omega_{A_\sigma})} \\ &\geq \left(\frac{r_\sigma}{\sqrt{6(2g-3)}}\right)^{2g-1} \frac{\lambda_{2g}(\Omega_{A_\sigma})}{4^g d_{2g}} \end{aligned}$$

d'où (4). Dans le cadre de (5), nous utilisons encore (1) pour écrire

$$\begin{aligned} \frac{h^0(A,\mathcal{L})}{r_\sigma^{2(g-b)} h^0(B,\mathcal{L})} &= \frac{C_\sigma r_\sigma^{2b}}{h^0(B,\mathcal{L})} \prod_{i=1}^{2g} \left[\frac{r_\sigma}{\lambda_i(\Omega_{A_\sigma})\sqrt{6(2g-3)}}\right]^{-1} \\ &\leq \frac{C_\sigma r_\sigma^{2b}}{h^0(B,\mathcal{L})} \prod_{i=1}^{2b} \frac{\lambda_i(\Omega_{A_\sigma})\sqrt{6(2g-3)}}{r_\sigma} \end{aligned}$$

et nous concluons par $\lambda_i(\Omega_{A_\sigma}) \leq \lambda_i(\Omega_{B_\sigma})$ et $\lambda_1(\Omega_{B_\sigma})\cdots\lambda_{2b}(\Omega_{B_\sigma}) \leq 4^b d_{2b} h^0(B,\mathcal{L})$.

Pour exploiter l'inégalité fondamentale, nous aurons également besoin de majorer le minimum essentiel m_A^+.

Proposition 7.2. *Nous avons les majorations*

(1) $\mathsf{m}_A^+ \leq g^2 \max(1, h_F(A), \log h^0(A,\mathcal{L})) + 1{,}34 g^3$;
(2) $\mathsf{m}_A^+ \leq \frac{2}{3} g^2 \max(1, h_F(A), \log h^0(A,\mathcal{L})) + g^3$ *si* $g \geq 3$;
(3) $\mathsf{m}_A^+ \leq \frac{1}{2} \log h^0(A,\mathcal{L}) + 5g^2 \max(1, h_F(A)) + 15 g^3$;
(4) $\mathsf{m}_A^+ \leq h^0(A,\mathcal{L})^{1/2g^2} \left(\frac{3}{4} g^2 \max(1, h_F(A)) + 1{,}3 g^3\right)$.

Démonstration. D'après le corollaire 9.3 de [2] (avec $\mu_{\min}(t_A) = -\mu_{\max}(t_A^\vee)$), le nombre m_A^+ est majoré par le maximum entre 0 et $\mu_{\max}(t_A^\vee) + H_{g-1}$ (où H_{g-1} est le nombre harmonique $1 + 1/2 + \cdots + 1/(g-1)$). Comme les majorants souhaités sont positifs, il suffit de majorer cette dernière quantité. Nous utilisons pour cela les estimations de [14]. En premier lieu, la proposition 4.7 de cet article avec $\log \xi \leq \xi - 1$ et $H_{g-1} \leq g/2$ montre que $\mu_{\max}(t_A^\vee) + H_{g-1}$ est au plus

$$\frac{1}{2} \log h^0(A,\mathcal{L}) + (2g^2 + 4g + 1) \max(1, h_F(A)) + 6g^2 \log 98g - 2g^2 + \frac{g}{2}$$

et ceci entraîne l'assertion (3) par décroissance de $g \mapsto (6 \log 98g - 2 + 1/2g)/g$. Pour les autres majorations, nous employons la borne donnée un peu avant la proposition 4.6 de [14] :

$$\begin{aligned} \mu_{\max}(t_A^\vee) \leq \left(\frac{g}{2} + 1\right) &\left(h_F(A) + \frac{1}{2} \log h^0(A,\mathcal{L})\right) \\ &+ \frac{g^2}{4} \log \max\left(1, h_F(A) + \frac{1}{2} \log h^0(A,\mathcal{L})\right) + c(g) \end{aligned}$$

!

où $c(g) = (g^2/2)\log\pi + (3g/4)\log\left(5g^g(10,2)^{g-1}\right)$. Afin d'obtenir les formules (1) et (2), nous observons

$$\max(1, h_F(A) + (1/2)\log h^0(A,\mathcal{L})) \leq \frac{3}{2}\max(1, h_F(A), \log h^0(A,\mathcal{L}))$$

puis

$$\log\max\left(1, h_F(A) + \frac{1}{2}\log h^0(A,\mathcal{L})\right) \leq \log\frac{3}{2e} + \max(1, h_F(A), \log h^0(A,\mathcal{L})).$$

Ainsi $\mu_{\max}(t_A^\vee) + H_{g-1}$ est majoré par

$$\left(\frac{g^2}{4} + \frac{3g}{4} + \frac{3}{2}\right)\max(1, h_F(A), \log h^0(A,\mathcal{L})) + \frac{g}{2} + \frac{g^2}{4}\log\frac{3}{2e} + c(g).$$

Il suffit ensuite de constater que

$$g \longmapsto \frac{1}{g^3}\left(\frac{g}{2} + \frac{g^2}{4}\log\frac{3}{2e} + c(g)\right)$$

est une suite décroissante et d'évaluer l'expression pour $g = 2$ et $g = 3$. Il reste à montrer la borne (4). Pour cela, posons $\alpha = \max(1, h_F(A))$ et $\beta = h^0(A,\mathcal{L})^{1/2g^2}$. On a

$$\mathsf{m}_A^+ \leq \left(\frac{g}{2} + 1\right)\left(\alpha + g^2\log\beta\right) + \frac{g^2}{4}\log(\alpha + g^2\log\beta) + c(g) + \frac{g}{2}.$$

Dans cette formule, nous majorons deux fois $\log\beta$ par $\beta - 1$ puis écrivons

$$\begin{aligned}\log(\alpha + g^2(\beta-1)) &\leq \log\alpha + \log\frac{g}{2} + \log(1 + 2g(\beta-1)) \\ &\leq \alpha + \frac{g}{2} - 2 + 2g(\beta-1).\end{aligned}$$

Par décroissance de $(g/2 + c(g) + g^3/8 - g^2/2)/g^3$, il vient

$$\begin{aligned}\mathsf{m}_A^+ &\leq (g^3+g^2)(\beta-1) + \left(\frac{g^2}{4} + \frac{g}{2} + 1\right)\alpha + 1{,}3g^3 \\ &\leq (g^2+g^3)(\beta-1) + \frac{3}{4}g^2\alpha + 1{,}3g^3 \\ &\leq \left(\frac{3}{4}g^2\alpha + 1{,}3g^3\right)\beta\end{aligned}$$

puisque $g^2 + g^3 \leq (3/4)g^2\alpha + 1{,}3g^3$.

Munis de ces deux propositions, nous pouvons entamer la démonstration du théorème 1.5 (si $g \geq 2$). Nous employons le théorème 6.2 avec $\Sigma = \{0\}$ et en prenant pour $\mathcal{V}$ l'ensemble de tous les plongements $\sigma\colon K \hookrightarrow \mathbb{C}$. Nous choisissons r_σ comme nous l'avons indiqué avant la proposition 7.1. Nous imposons que les autres paramètres E_σ, x_σ, z_σ, ε_σ, η_σ, ψ_σ soient indépendants de σ et nous les notons donc sans l'indice σ. Nous adoptons la même simplification pour les quantités qui en dépendent, écrites ci-dessous simplement E', C ou η'. Le choix de r_σ assure que (C1) est remplie tandis que le choix de Σ rend

!

automatiques (C2) et (C3). Nous choisissons en conséquence $z=\psi=0$. Le théorème 6.2 donne donc

$$\frac{y}{D}\sum_{\sigma\in\mathcal{V}} r_\sigma^2 \leq \frac{2g^2}{\eta'\pi E^2}\left(\mathsf{m}_A^+ + \frac{1}{D}\sum_{\sigma\in\mathcal{V}}\log^+\frac{1}{xr_\sigma}\right).$$

Nous minorons r_σ grâce à la proposition 7.1, à gauche par l'assertion (4) et à droite simplement par $r_\sigma \geq C^{-1/2g}$ (assertion (3)). Il vient

$$\frac{y}{D}\sum_{\sigma\colon K\hookrightarrow\mathbb{C}} \lambda_{2g}(\Omega_{A_\sigma})^2 \leq \frac{8g^2C^2}{\eta'\pi E^2} d_{2g}^2 (48g-72)^{2g-1}\left(\mathsf{m}_A^+ + \log^+\frac{C^{1/2g}}{x}\right).$$

Puisque $\Sigma=\{0\}$, le membre de gauche coïncide avec celui du théorème 1.5 donc il nous suffit de majorer le membre de droite. Nous utilisons pour cela la proposition 7.2 qui nous permet d'écrire $\mathsf{m}_A^+ \leq \alpha_g g^3 \max(1, h_F(A), \log h^0(A,\mathcal{L}))$ où $\alpha_2=2$ et $\alpha_g=1{,}3$ si $g\geq 3$, ainsi que $d_{2g}\leq (3\varphi_g/4\pi)^g g!$ avec $\varphi_2=1{,}1$ et $\varphi_g=1$ si $g\geq 3$ (voir page 6). En intégrant ceci dans l'inégalité précédente, nous constatons que le membre de gauche du théorème 1.5 est majoré par $\max(1, h_F(A), \log h^0(A,\mathcal{L}))$ multiplié par

$$\frac{8g^5C^2}{\eta'\pi E^2}\left(\frac{3\varphi_g}{4\pi}\right)^{2g} g!^2 (48g-72)^{2g-1}\left(\alpha_g + \frac{1}{g^3}\log^+\frac{C^{1/2g}}{x}\right).$$

Avec la formule pour C, qui se trouve avant le théorème 6.2, ceci est inférieur à

$$\left(\varphi_g\cdot\frac{18(1+\eta)E^2}{\log E'}\right)^{2g}\frac{g^7}{6\eta'\pi E^2\varepsilon^2}\left(g-\frac{3}{2}\right)^{2g-1} \times\left(\alpha_g+\frac{1}{2g^3}\log^+\frac{(1+\eta)\pi E^2}{2x^2\log E'}+\frac{1}{2g^4}\log^+\frac{1}{\varepsilon(g-1)!}\right).$$

Nous choisissons maintenant les paramètres $E=8{,}2$, $x=10^{-3}$, $\eta=0{,}38$ et $\varepsilon=0{,}1$. Le calcul montre que l'expression précédente est alors majorée par

$$(2119\varphi_g)^{2g} g^7\left(g-\frac{3}{2}\right)^{2g-1}\frac{1}{1{,}6}\left(\alpha_g+\frac{10}{g^3}+\frac{1}{2g^4}\log^+\frac{10}{(g-1)!}\right).$$

Il reste à vérifier que ceci est plus petit que $(4^6 g)^{2g}$ lorsque $g\geq 2$, autrement dit

$$\left(\frac{2119\varphi_g}{4^6}\right)^{2g} g^6\left(1-\frac{3}{2g}\right)^{2g-1}\frac{1}{1{,}6}\left(\alpha_g+\frac{10}{g^3}+\frac{1}{2g^4}\log^+\frac{10}{(g-1)!}\right)\leq 1.$$

Nous faisons un calcul direct si $2\leq g\leq 4$. Pour $g\geq 5$ nous majorons

$$\frac{\alpha_g+10g^{-3}+(2g^4)^{-1}\log^+ 10(g-1)!^{-1}}{1{,}6} = \frac{1{,}3+10g^{-3}}{1{,}6}\leq 1$$

ainsi que

$$f(g)=\left(\frac{2119}{4^6}\right)^{2g} g^6\left(1-\frac{3}{2g}\right)^{2g-1}\leq 1$$

en vérifiant simplement $f(6)\leq f(5)\leq 1$ d'après le lemme suivant.

!

Lemme 7.3. *Soient u, v, ξ_1 et ξ_2 des nombres réels avec $u>0$, $v>0$ et $\xi_2>\xi_1>3/2$. Si la fonction $f\colon]\frac{3}{2},+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[$ définie par*

$$f(\xi)=u^{\xi}\xi^{v}\left(1-\frac{3}{2\xi}\right)^{2\xi-1}$$

satisfait $f(\xi_2)\leq f(\xi_1)$ alors $f(\xi)\leq f(\xi_2)$ pour tout $\xi\geq\xi_2$.

Démonstration. La dérivée seconde de $\log f$ en $\xi>3/2$ vaut

$$-\frac{v}{\xi^2}-\frac{3(2\xi+3)}{\xi^2(2\xi-3)^2}<0$$

donc $\log f$ est une fonction concave, d'où le résultat.

8. Courbes elliptiques

Dans cette partie, A est une courbe elliptique munie de sa polarisation principale $\mathcal{L}$. Nous allons utiliser l'inégalité fondamentale (théorème 6.2) pour établir les théorèmes de l'introduction dans ce cas.

La principale complication technique réside dans le choix entre les règles (P0) et (P1). Nous le conditionnons à un seuil de hauteur. Concrètement nous fixons un paramètre réel $C_0\geq 3/\pi$ et posons

$$H_0=\frac{\pi}{6}C_0-\frac{1}{2}\log\frac{2\pi^3 e}{3}C_0.$$

Nous supposons que C_0 est tel que $H_0\geq 1$. La dichotomie suivante fournit la règle à utiliser :

(P0) si $\max(1,h_F(A))<H_0$,
(P1) si $\max(1,h_F(A))\geq H_0$.

Dans le cas (P1) nous posons $H_1=H_0$ et choisissons un plongement quelconque $\sigma\colon K\hookrightarrow\mathbb{C}$. Dans le cas (P0) nous posons $H_1=1$ et choisissons $\sigma\colon K\hookrightarrow\mathbb{C}$ tel que $\lambda_1(\Omega_{A_\sigma})$ soit maximal. Dans les deux cas, nous avons $1\leq H_1\leq\max(1,h_F(A))$. Par la suite, nous noterons simplement λ_1 et λ_2 les minima du réseau Ω_{A_σ}. Les choix de H_0 et σ servent à assurer le fait suivant.

Lemme 8.1. *Dans le cas (P0), nous avons $\lambda_1^{-2}<C_0$.*

Démonstration. C'est une conséquence du lemme matriciel d'Autissier comme dans la proposition 3.2 de [16] : λ_1^{-2} minore la moyenne des $\lambda_1(\Omega_{A_{\sigma'}})^{-2}$ donc $T=\max(\lambda_1^{-2},3/\pi)$ vérifie

$$\pi T\leq 3\log T+6h_F(A)+3\log\frac{2\pi^3 e}{3}$$

!

(on rappelle $h_F(A) = h(A) - \log\sqrt{\pi}$) puis

$$\pi T - 3\log T < 6H_0 + 3\log\frac{2\pi^3 e}{3} = \pi C_0 - 3\log C_0$$

qui donne bien $T < C_0$.

Nous appliquerons ci-après le théorème 6.2 avec l'ensemble $\mathcal{V} = \{\sigma,\overline{\sigma}\}$ de cardinal 1 ou 2 selon que la place correspondante est réelle ou complexe. Remarquons dès à présent qu'il suffit de vérifier les conditions (C1) et (C3) du théorème pour σ en raison de l'invariance par conjugaison des paramètres et, pour (C3), de l'isométrie entre t_{A_σ} et $t_{A_{\overline{\sigma}}}$ (voir la proposition 2.2 de [16]). Pour alléger, nous supprimons l'indice σ dans tous les paramètres.

Cela signifie que nous considérons des nombres réels positifs $E,r,z,\varepsilon,\eta,\psi$ (avec $E^2 > 13/4$, $r > 0$, $\varepsilon > 0$, $0 < z < 1$), que nous associons à $(\Omega_{A_\sigma},E,r,1)$ un quintuplet (β,γ,E',Q,S') par la règle (P0) ou (P1) selon le cas et que nous définissons ensuite C et η' (par les formules qui précèdent le théorème 6.2). Nous supposons de plus que, dans le cas (P0), ces choix sont tels que $C = C_0$.

Dans la suite, tous les paramètres seront donnés par des constantes numériques excepté r et S' qui dépendent, dans le cas (P1), du minimum λ_1. Concrètement, nous faisons ce choix de sorte que

$$Cr^2 = S' = 1 + 2\left\lfloor\frac{r}{\lambda_1}\right\rfloor.$$

Dans le cas (P0) cela revient simplement à prendre $r = C^{-1/2}$ pour avoir la première égalité (avec $S' = 1$) tandis que la seconde découle de $r = C_0^{-1/2} < \lambda_1$ par le lemme 8.1 ci-dessus. Dans le cas (P1), où la seconde égalité est automatique, nous voyons que l'équation a toujours au moins une solution (en raisonnant comme dans la démonstration de la proposition 7.1). Cette valeur de r, dont l'avantage premier est de remplir la condition (C1) du théorème 6.2, permet aussi d'écrire les encadrements suivants.

Lemme 8.2. *Nous avons* $C^{-1/2} \leq r \leq \lambda_2$ *et* $r \geq \sqrt{3}\lambda_2/2C$.

Démonstration. Il est clair que $Cr^2 \geq 1$ tandis que l'inégalité d'Hadamard donne $\lambda_2^2 \geq \lambda_1\lambda_2 \geq 1$ donc (avec $C \geq 3$)

$$3r^2 \leq 1 + 2\left\lfloor\frac{r}{\lambda_1}\right\rfloor \leq 1 + \frac{2r}{\lambda_1} \leq \lambda_2^2 + 2r\lambda_2 \leq 3\max(r,\lambda_2)\lambda_2$$

ce qui entraîne $r \leq \lambda_2$. Enfin $1 + 2\lfloor r/\lambda_1\rfloor \geq r/\lambda_1$ montre $r \geq (C\lambda_1)^{-1}$ et le second théorème de Minkowski $\lambda_1\lambda_2 \leq 2/\sqrt{3}$ fournit bien la dernière minoration.

Notons à présent Σ l'ensemble des points rationnels $P \in A(K)$ de hauteur de Néron-Tate $h_{\mathcal{L}}(P)$ au plus $\psi\pi E^2 r^2/2D$ et ayant un logarithme dans t_{A_σ} de norme au plus zr. Ces points vérifient les conditions (C2) et (C3) du théorème 6.2. Nous contrôlons grâce à Σ un ensemble défini uniquement par une inégalité de hauteur (l'introduction d'un point P_0 ne sera utile que dans la partie suivante).

!

Lemme 8.3. *Pour tout $P_0 \in A(K)\otimes\mathbb{R}$, nous avons*

$$\operatorname{Card}\left\{P \in A(K) \mid h_{\mathcal{L}}(P-P_0) \le \psi\frac{\pi E^2 r^2}{8D}\right\} \le \left\lfloor \frac{2C}{z^2\sqrt{3}}\right\rfloor \operatorname{Card}\Sigma.$$

Démonstration. Notons X l'ensemble de l'énoncé. Nous le voyons dans le tore $t_{A_\sigma}/\Omega_{A_\sigma}$, ce qui permet d'appliquer la proposition 2.1 avec $\rho = zr$. Nous obtenons une partie $X_0 \subset X$. D'une part, pour tout point $P \in X$, il existe $P' \in X_0$ tel que $P-P'$ a un logarithme de norme au plus zr donc, puisque

$$h_{\mathcal{L}}(P-P') \le 2h_{\mathcal{L}}(P-P_0)+2h_{\mathcal{L}}(P'-P_0) \le \frac{\psi\pi E^2 r^2}{2D},$$

nous avons $P-P' \in \Sigma$. Ainsi $\operatorname{Card} X \le \operatorname{Card} X_0 \cdot \operatorname{Card}\Sigma$. D'autre part, nous avons

$$\operatorname{Card} X_0 \le d_2\left(\frac{2}{zr}\right)^2 \max\left(1,\frac{zr}{\lambda_1}\right)\max\left(1,\frac{zr}{\lambda_2}\right) \le \frac{2C}{z^2\sqrt{3}}$$

en utilisant $d_2 = 1/2\sqrt{3}$, $z<1$, $r \le \lambda_2$ (lemme 8.2) donc $\max(1,zr/\lambda_2) = 1$ puis $\max(1,zr/\lambda_1) \le 1+2\lfloor r/\lambda_1\rfloor = Cr^2$.

Il reste à employer l'inégalité fondamentale pour majorer $\operatorname{Card}\Sigma$. Posons

$$\Gamma = 2+\frac{1}{H_1}\log\max\left(\frac{C}{(1-z^2)^2},\frac{e^{H_1+1}C}{\eta' E^2}\right)$$

et

$$\Gamma' = 2+\log\max\left(\frac{C}{(1-z^2)^2},\frac{4e^3C^2}{3\eta' E^2}\right).$$

Proposition 8.4. *Nous avons*

$$\operatorname{Card}\Sigma \le \frac{C\Gamma}{\eta'\pi E^2}\left(1+\frac{\log(\Gamma H_1)}{\Gamma H_1-1}\right)D\max(1,h_F(A),\log D)$$

ainsi que

$$\operatorname{Card}\Sigma \le \frac{4C^2\Gamma'}{3\eta'\pi E^2}\left(1+\frac{\log\Gamma'}{\Gamma'-1}\right)\frac{D}{\lambda_2^2}\max\left(1,h_F(A),\frac{1}{2}\log\frac{D}{\lambda_2^2}\right).$$

Démonstration. Avec notre choix de $\mathcal{V}$, le théorème 6.2 donne

$$\eta'\frac{\pi y E^2 r^2}{2} \le \frac{D\,\mathsf{m}_A^+}{\operatorname{Card}\mathcal{V}}+\log^+\frac{1/r}{1-z^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{D}{\operatorname{Card}\mathcal{V}}-1\right)(1+\log^+\pi y).$$

Nous pouvons remplacer $\operatorname{Card}\mathcal{V}$ par 1 et majorer à droite $1/r \le \sqrt{C}$ (lemme 8.2) tandis que, comme A est simple et principalement polarisée, nous avons $y = \operatorname{Card}\Sigma$. Ainsi il vient

$$\operatorname{Card}\Sigma \le \frac{D}{\eta'\pi E^2 r^2}\left(2\mathsf{m}_A^+ + \log\max\left(\frac{C}{(1-z^2)^2}, e\pi\operatorname{Card}\Sigma\right)\right).$$

En vertu du lemme 3.18 de [5], nous en déduisons pour tout nombre réel $c>1$

$$\operatorname{Card}\Sigma \leq \frac{D}{\eta'\pi E^2 r^2}\left(1+\frac{\log c}{c-1}\right)\max\left(c, 2\,\mathsf{m}_A^+ + \log\max\left(\frac{C}{(1-z^2)^2}, \frac{eD}{\eta' E^2 r^2}\right)\right).$$

Pour la première majoration de la proposition, nous choisissons $c=\Gamma H_1$ et utilisons $1/r^2 \leq C$. Avec $\mathsf{m}_A^+ = \max(0, h_F(A))$ et $H_1 \leq \max(1, h_F(A))$, nous avons

$$2\,\mathsf{m}_A^+ + \log\max\left(\frac{C}{(1-z^2)^2}, \frac{eDC}{\eta' E^2}\right) \leq \Gamma \max(1, h_F(A), \log D)$$

d'où la formule souhaitée puisque ce majorant vaut au moins c. La seconde majoration de la proposition est entièrement analogue avec $c=\Gamma'$ et $1/r^2 \leq 4C^2/3\lambda_2^2$ (lemme 8.2).

En vue du théorème 1.1, nous utilisons la première assertion de cette proposition combinée avec le lemme 8.3 dans lequel nous minorons $r^2 \geq 1/C$ pour écrire

$$\begin{aligned}\operatorname{Card}&\left\{P \in A(K) \mid h_{\mathcal{L}}(P-P_0) \leq \frac{\psi\pi E^2}{8CD}\right\}\\ &\leq \left\lfloor \frac{2C}{z^2\sqrt{3}} \right\rfloor \frac{C\Gamma}{\eta'\pi E^2}\left(1+\frac{\log(\Gamma H_1)}{\Gamma H_1 - 1}\right) D \max(1, h_F(A), \log D).\end{aligned}$$

Il reste alors simplement à choisir des valeurs numériques pour établir les trois premiers théorèmes de l'introduction dans le cas elliptique.

Théorème 8.5. *Nous avons* $\operatorname{Card} A(K)_{\mathrm{tors}} \leq 8575\, D \max(1, h_F(A), \log D)$.

Démonstration. Pour contrôler la torsion (hauteur nulle), nous fixons $P_0=0$ et $\psi=0$. Nous choisissons $C_0=334$ d'où $H_0 \geq 169{,}9$. Dans le cas (P0), nous prenons $E=7{,}5$, $z=0{,}931$ et $\eta=3{,}3$. La valeur de ε pour avoir $C=C_0$ vérifie $\varepsilon \leq 0{,}565$. Nous avons alors $\eta' \geq 1{,}425$ et $\Gamma \leq 11{,}85$. Nous en déduisons la borne dans ce cas (avec $H_1=1$). Dans le cas (P1), nous prenons $E=7{,}2$, $z=1-10^{-5}$, $\eta=2{,}2$ et $\varepsilon=0{,}3$ de sorte que $C \leq 536{,}91$, $\eta' \geq 0{,}7279$ puis $\Gamma \leq 3{,}0216$. La borne souhaitée en découle à nouveau (avec $H_1=H_0$).

Nous avons donc montré le théorème 1.2 si $g=1$.

Théorème 8.6. *Si* $P \in A(K) \setminus A(K)_{\mathrm{tors}}$ *alors*

$$h_{\mathcal{L}}(P)^{-1} \leq (59827)^2 D^3 \max(1, h_F(A), \log D)^2.$$

Démonstration. Le nombre d'éléments de $\mathbb{Z}.P$ de hauteur au plus $\psi\pi E^2 (8CD)^{-1}$ s'écrit

$$1+2\left\lfloor \left(\frac{\psi\pi E^2}{8CDh_{\mathcal{L}}(P)}\right)^{1/2} \right\rfloor \geq \left(\frac{\psi\pi E^2}{2CDh_{\mathcal{L}}(P)}\right)^{1/2} - 1$$

donc $h_{\mathcal{L}}(P)^{-1}$ est majoré par

$$\frac{2C}{\psi\pi E^2}\left(\frac{1}{H_1} + \left\lfloor \frac{2C}{z^2\sqrt{3}} \right\rfloor \frac{C\Gamma}{\eta'\pi E^2}\left(1+\frac{\log(\Gamma H_1)}{\Gamma H_1 - 1}\right)\right)^2 D^3 \max(1, h_F(A), \log D)^2.$$

Il nous suffit donc d'évaluer cette borne dans les deux cas (P0) et (P1). Pour les distinguer, nous choisissons $C_0=741$ d'où $H_0 \geq 382$. Dans le cas (P0) nous prenons $E=11{,}5$,

!

$z = 0{,}935$, $\eta = 3{,}9$ et $\psi = 0{,}57$ de sorte que $\varepsilon \leq 0{,}5625$, $\eta' \geq 1{,}1319$ et $\Gamma \leq 12{,}755$. Dans le cas (P1), nous fixons $E = 9{,}63$, $z = 1 - 10^{-5}$, $\eta = 2{,}77$, $\varepsilon = 0{,}32$ et $\psi = 0{,}34$ d'où $C \leq 897{,}17$, $\eta' \geq 0{,}68659$ et $\Gamma \leq 3{,}0096$.

Le théorème 1.3 s'en déduit, y compris pour une polarisation non principale puisque $h_{\mathcal{L}^{\otimes n}}(P)^{-1} = n^{-1} h_{\mathcal{L}}(P)^{-1} \leq h_{\mathcal{L}}(P)^{-1}$ pour tout entier $n \geq 1$.

Théorème 8.7. *Pour tout $P_0 \in A(K) \otimes \mathbb{R}$, nous avons*

$$\operatorname{Card}\left\{ P \in A(K) \mid h_{\mathcal{L}}(P - P_0) \leq \frac{1}{256D} \right\} \leq 9880\, D \max(1, h_F(A), \log D).$$

Démonstration. Nous suivons toujours le même principe avec ici $C_0 = 383$ d'où $H_0 \geq 195$. Dans le cas (P0), $E = 8{,}5$, $z = 0{,}934$, $\eta = 3{,}1$ et $\psi = 0{,}0528$ donnent $\varepsilon \leq 0{,}5677$, $\eta' \geq 1{,}279$ et $\Gamma \leq 12{,}07$. Dans le cas (P1), $E = 7{,}75$, $z = 1 - 10^{-5}$, $\eta = 2{,}3$, $\varepsilon = 0{,}3$ et $\psi = 0{,}1016$ conduisent à $C \leq 613{,}1$, $\eta' \geq 0{,}7096$ et $\Gamma \leq 3{,}019$. Notons que dans les deux cas ces choix assurent $8C/\psi\pi E^2 \leq 256$.

Ceci entraîne bien le théorème 1.1 dans le cas $g = 1$ avec $P_0 = 0$ et la même remarque sur le cas d'une polarisation non principale.

Théorème 8.8. *Pour tout $P_0 \in A(K) \otimes \mathbb{R}$ et pour tout plongement $\sigma\colon K \hookrightarrow \mathbb{C}$, nous avons*

$$\operatorname{Card}\left\{ P \in A(K) \mid h_{\mathcal{L}}(P - P_0) \leq \frac{\lambda_2^2}{4^{14} D} \right\} \leq \frac{300^3 D}{\lambda_2^2} \max\left(1, h_F(A), \frac{1}{2} \log \frac{D}{\lambda_2^2}\right).$$

Démonstration. Nous utilisons cette fois-ci la deuxième majoration de la proposition 8.4 combinée avec le lemme 8.3 où nous minorons $r^2 \geq 3\lambda_2^2/4C^2$ (lemme 8.2). Nous voyons apparaître l'énoncé voulu dans lequel il reste à estimer numériquement les quantités

$$\frac{3\psi\pi E^2}{32C^2} \qquad \text{et} \qquad \left\lfloor \frac{2C}{z^2\sqrt{3}} \right\rfloor \frac{4C^2\Gamma'}{3\eta'\pi E^2} \left(1 + \frac{\log \Gamma'}{\Gamma' - 1}\right).$$

Nous choisissons C_0 tel que $H_0 = 1$. Ainsi le cas (P0) est exclu, ce qui permet de garder un plongement σ arbitraire. Nous faisons donc les calculs dans le cas (P1) avec les valeurs $E = 5{,}4$, $z = 0{,}989$, $\eta = 1{,}5$, $\varepsilon = 0{,}27$ et $\psi = 5.10^{-5}$ qui fournissent $C \leq 320{,}722$, $\eta' \geq 0{,}386$ et $\Gamma' \leq 15{,}42$.

Pour obtenir le théorème 1.4 dans le cas $g = 1$ (avec toujours $P_0 = 0$), nous commençons par écrire deux fois dans le membre de droite $1/\lambda_2^2 = h^0(A, \mathcal{L})/\lambda_2^2$. L'expression obtenue est alors totalement invariante par $\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}^{\otimes n}$ (le nombre λ_2^2 se voit multiplié par n car $\|\cdot\|^2_{\mathcal{L}^{\otimes n},\sigma} = n\|\cdot\|^2_{\mathcal{L},\sigma}$ sur t_{A_σ}). Il reste à majorer

$$\frac{1}{2} \log \frac{D h^0(A, \mathcal{L})}{\lambda_2^2} \leq \max\left(\log h^0(A, \mathcal{L}), \log \frac{D}{\lambda_2^2}\right)$$

et à constater $\widetilde{\lambda}_1 = \widetilde{\lambda}_2 = \lambda_2$.

Enfin, indépendamment de l'inégalité fondamentale, nous établissons le cas elliptique du dernier théorème de l'introduction.

!

Théorème 8.9. *Nous avons*

$$\frac{1}{D}\sum_{\sigma\colon K\hookrightarrow\mathbb{C}}\frac{\lambda_2(\Omega_{A_\sigma})^2}{h^0(A,\mathcal{L})}\leq 19\max(1,h_F(A)).$$

Démonstration. L'énoncé découle directement du second théorème de Minkowski

$$\lambda_1(\Omega_{A_\sigma})\lambda_2(\Omega_{A_\sigma})\leq\frac{2}{\sqrt{3}}$$

combiné avec le lemme matriciel sous la forme du théorème 1.1 de [16] dans lequel $\rho(A_\sigma,\mathcal{L}_\sigma)=\lambda_1(\Omega_{A_\sigma})$ et $\deg_{\mathcal{L}}A=h^0(A,\mathcal{L})=1$.

Ceci donne immédiatement le théorème 1.5 lorsque $g=1$ puisque, comme ci-dessus, l'inégalité est invariante par changement de polarisation.

9. Dimension supérieure

Dans cette partie, nous terminons les démonstrations des résultats de l'introduction, c'est-à-dire que nous établissons les théorèmes 1.1 à 1.4 dans le cas où $g\geq 2$. Le début de l'argument est commun aux quatre énoncés. Nous nous plaçons dans le cadre de la partie 6 (avec $g\geq 2$) et nous allons préciser progressivement les paramètres que nous utilisons. Tout d'abord, comme dans la partie précédente, nous choisissons $\mathcal{V}=\{\sigma,\overline{\sigma}\}$ pour un plongement arbitraire $\sigma\colon K\hookrightarrow\mathbb{C}$, nous remarquons qu'il suffit de vérifier les conditions (C1) et (C3) du théorème 6.2 pour σ et nous omettons donc l'indice σ dans tous les paramètres. Nous fixons ensuite r comme indiqué en partie 7 et nous disposons donc des égalités et encadrements de la proposition 7.1. En particulier, la condition (C1) est remplie. Nous imposons aussi dès à présent la valeur de z par

$$z=\min\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{g}{\sqrt{6(2g-3)}}\right).$$

Nous remarquons $\sqrt{1/2}\leq z\leq\sqrt{2/3}$ et posons encore $N=Cd_{2g}(2g/z)^{2g}$ (ainsi $N\leq Cd_{2g}8^g g^{2g}$). Avec ces premiers choix, nous tirons la conséquence suivante de l'inégalité fondamentale (théorème 6.2).

Proposition 9.1. *Soit $P_0\in A(K)\otimes\mathbb{R}$. Si Σ_0 est une partie de*

$$\left\{P\in A(K)\mid h_{\mathcal{L}}(P-P_0)\leq\frac{\psi\pi E^2r^2}{8g^2D}\right\}$$

alors il existe une sous-variété abélienne stricte B de A telle que, pour tout nombre réel $c>1$, on ait

$$\begin{aligned}&\left(\operatorname{Card}\left(\frac{\Sigma_0+B}{B}\right)\frac{h^0(B,\mathcal{L})}{Nh^0(A,\mathcal{L})}\right)^{1/(g-\dim B)}\\&\leq\frac{g^2D}{\eta'\pi E^2r^2}\left(1+\frac{\log c}{c-1}\right)\max\left(c,2\mathsf{m}_A^+ +\log\max\left(e,\frac{eD}{\eta'E^2r^2},\left(\frac{x/r}{x^2-z^2}\right)^2\right)\right).\end{aligned}$$

Démonstration. Les ingrédients reprennent principalement ceux employés pour le lemme 8.3 et la proposition 8.4 dans le cas elliptique. Nous appliquons le théorème 6.2 à l'ensemble Σ des points $P \in A(K)$ qui satisfont les conditions (C2) et (C3) de son énoncé. Avec le choix de $\mathcal{V}$, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\eta'\pi y E^2 r^2}{2g} &\leq \frac{gD\,\mathsf{m}_A^+}{\operatorname{Card}\mathcal{V}} + g\log^+\left(\frac{x/r}{x^2-z^2}\right) + \frac{g}{2}\left(\frac{D}{\operatorname{Card}\mathcal{V}}-1\right)\left(1+\log^+\frac{\pi y}{g^2}\right)\\ &\leq \frac{gD}{2}\left(2\,\mathsf{m}_A^+ + \log\max\left(e, \frac{e\pi y}{g^2}, \left(\frac{x/r}{x^2-z^2}\right)^2\right)\right).\end{aligned}$$

Le lemme 3.18 de [5] implique alors que y est majoré par le second membre de l'inégalité de l'énoncé. Vu la définition de y, il reste seulement à voir

$$\operatorname{Card}\left(\frac{\Sigma_0+B}{B}\right) \leq N \operatorname{Card}\left(\frac{\Sigma+B}{B}\right)$$

pour toute sous-variété abélienne B de A. Utilisons pour cela la proposition 2.1 avec $\rho = zr/g$ et $X = \Sigma_0$ vu dans le tore $t_{A_\sigma}/\Omega_{A_\sigma}$. Nous obtenons une partie $X_0 \subset \Sigma_0$. D'une part, pour tout $P \in \Sigma_0$, il existe $P' \in X_0$ tel que $P - P'$ a un logarithme de norme au plus zr/g donc, puisque

$$h_{\mathcal{L}}(P-P') \leq 2h_{\mathcal{L}}(P-P_0) + 2h_{\mathcal{L}}(P'-P_0) \leq \frac{\psi\pi E^2 r^2}{2g^2 D},$$

nous avons $P - P' \in \Sigma$. Ceci entraîne

$$\operatorname{Card}\left(\frac{\Sigma_0+B}{B}\right) \leq \operatorname{Card} X_0 \cdot \operatorname{Card}\left(\frac{\Sigma+B}{B}\right).$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}\operatorname{Card} X_0 &\leq d_{2g}\left(\frac{2g}{zr}\right)^{2g} h^0(A,\mathcal{L}) \prod_{i=1}^{2g} \max\left(1, \frac{zr}{g\lambda_i(\Omega_{A_\sigma})}\right)\\ &\leq d_{2g}\left(\frac{2g}{zr}\right)^{2g} h^0(A,\mathcal{L}) \prod_{i=1}^{2g} \left\lceil \frac{r}{\sqrt{6(2g-3)}\lambda_i(\Omega_{A_\sigma})}\right\rceil\end{aligned}$$

par définition de z et cette dernière quantité vaut N grâce aux assertions (1) et (2) de la proposition 7.1.

La différence majeure d'avec le cas elliptique réside bien sûr dans la présence de la sous-variété abélienne B dans cet énoncé. Si nous savions que B était nulle, nous en tirerions immédiatement une majoration de $\operatorname{Card}\Sigma_0$. Pour les théorèmes 1.1 et 1.4, nous n'avons pas d'autre choix que de déduire de l'inégalité de la proposition 9.1 des bornes supérieures pour $\operatorname{Card}(\Sigma_0 + B/B)$ et $h^0(B,\mathcal{L})$ puis de procéder par récurrence. En revanche, pour les théorèmes 1.2 et 1.3, des simplifications apparaissent et l'estimation suivante suffira. Nous y notons $M_b = Cd_{2b}(48g-72)^b$ pour $0 \leq b \leq g-1$.

!

Corollaire 9.2. *Si Σ_0 est une partie de*

$$\left\{P \in A(K) \mid h_{\mathcal{L}}(P) \leq \frac{\psi\pi E^2}{8g^2D}\left(\frac{h^0(A,\mathcal{L})}{C}\right)^{1/g}\right\}$$

alors il existe une variété abélienne stricte B de A telle que, pour tout nombre réel $c>1$, on ait

$$\left((NM_{\dim B})^{-1}\operatorname{Card}\left(\frac{\Sigma_0+B}{B}\right)\right)^{1/(g-\dim B)} \leq \frac{g^2D}{\eta'\pi E^2}\left(1+\frac{\log c}{c-1}\right)\max(c,\mathcal{Z})$$

où

$$\mathcal{Z} = 2\,\mathsf{m}_A^+ + \log\max\left(e, \max\left(\frac{eD}{\eta' E^2}, \left(\frac{x}{x^2-z^2}\right)^2\right)\left(\frac{C}{h^0(A,\mathcal{L})}\right)^{1/g}\right).$$

Démonstration. Il suffit de combiner la proposition 9.1 avec les inégalités

$$\frac{1}{r^2} \leq \left(\frac{C}{h^0(A,\mathcal{L})}\right)^{1/g} \qquad \text{et} \qquad \frac{h^0(A,\mathcal{L})}{r^{2(g-\dim B)}h^0(B,\mathcal{L})} \leq M_{\dim B}$$

provenant de la proposition 7.1.

Avant d'entrer dans le vif des démonstrations des théorèmes principaux, nous mentionnons trois lemmes auxiliaires. En premier lieu, dans tous nos raisonnements par récurrence, nous aurons besoin de contrôler la hauteur de Faltings. Afin d'exploiter le résultat de [33], posons pour une variété abélienne non nulle B sur K

$$\mathcal{H}(B) = \max\left(1, \frac{1}{2\dim B}\max(1, h_F(B), \log D) + \frac{3}{4}\right).$$

Lemme 9.3. *Nous avons $\mathcal{H}(A) \leq \max(1, h_F(A), \log D)$ tandis que, si B est une sous-variété abélienne non nulle de A ou le quotient de A par une sous-variété abélienne stricte, alors $(\dim B)\mathcal{H}(B) \leq g\mathcal{H}(A)$.*

Démonstration. La première inégalité résulte très simplement de $g \geq 2$. Pour la seconde, posons $b = \dim B$ et écrivons

$$(\dim B)\mathcal{H}(B) = \max\left(b, \frac{1}{2}+\frac{3}{4}b, \frac{1}{2}\log D + \frac{3}{4}b, \frac{1}{2}h_F(B) + \frac{3}{4}b\right).$$

Ceci est majoré par l'expression analogue pour A en utilisant $b \leq g$ dans les trois premiers termes puis $h_F(B) + \frac{3}{2}b \leq h_F(A) + \frac{3}{2}g$ qui découle du corollaire 1.2 de [33] avec $\kappa = \log(\pi\sqrt{2}) \leq 3/2$.

Nous majorons ensuite le degré d'une petite polarisation dans un cas particulier.

Lemme 9.4. *Si A est simple, nous pouvons choisir la polarisation $\mathcal{L}$ de sorte que $\log h^0(A,\mathcal{L}) \leq 17g^5\mathcal{H}(A)$.*

Démonstration. Nous nous basons sur les théorèmes 1.3, 1.4 et 1.8 de [19]. L'hypothèse de simplicité montre que les entiers $e(A)$ et n qui apparaissent dans ces énoncés sont des

!

diviseurs de $2g^2$. Si $\mathrm{End}(A)=\mathbb{Z}$ alors A est MM au sens de [19] et nous appliquons l'assertion (2) du théorème 1.4. Si $\mathrm{End}(A)\neq\mathbb{Z}$ alors $e(A)\neq 2g^2$ donc $e(A)\leq g^2$ et nous utilisons cette fois l'assertion (2) du théorème 1.3. Dans les deux cas, nous pouvons donc choisir $\mathcal{L}$ avec $h^0(A,\mathcal{L})\leq(8g)^{g/4}\Upsilon^{2g^2}$. Avec $g\geq 2$, nous écrivons $\log h^0(A,\mathcal{L})\leq g\log g+2g^2\log\Upsilon$. Dans le théorème 1.8 (qui majore Υ), nous choisissons $C=A$ et majorons $\max(1,\log D,h_F(A)+3g/2)\leq 2g\mathcal{H}(A)$ d'où

$$\Upsilon\leq 482g(2g^2)^5(2eg^2)^{4g^2}D\mathcal{H}(A)\leq 482e^{4g^2}g^{16g^2}D\mathcal{H}(A).$$

Nous faisons ensuite usage de $\log D\leq 2g\mathcal{H}(A)-3g/2=2g(\mathcal{H}(A)-1)+g/2$ et $\log\mathcal{H}(A)\leq\mathcal{H}(A)-1$ pour aboutir à

$$\log h^0(A,\mathcal{L})\leq g\log g+2g^2\log 482+8g^4+32g^4\log g+g^3+(4g^3+2g^2)(\mathcal{H}(A)-1).$$

Comme $4g^3+2g^2\leq 8g^4$ et $\mathcal{H}(A)\geq 1$, nous en déduisons

$$\frac{\log h^0(A,\mathcal{L})}{g^5\mathcal{H}(A)}\leq g^{-4}\log g+2g^{-3}\log 482+8g^{-1}+32g^{-1}\log g+g^{-2}.$$

Finalement, on constate sans difficulté que le second membre est décroissant en g et que sa valeur en $g=2$ est au plus 17.

Nous utiliserons encore les estimations numériques suivantes.

Lemme 9.5.

(1) *Si* $\varepsilon\geq 0{,}17$ *alors*

$$g^{-1}\left(\frac{C^{-1}N}{\varepsilon^2(g-1)!^2}\right)^{1/g}\leq\begin{cases}25{,}6 & \text{si } g=2,\\ 21{,}4 & \text{si } g\geq 3.\end{cases}$$

(2) *Si* $\varepsilon\leq 0{,}33$ *alors*

$$e\leq\frac{g}{(\varepsilon(g-1)!)^{1/g}}\leq\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

(3) *Pour tout entier* b *avec* $0\leq b\leq g-1$, *on a*

$$C^{-1}M_b\left(\frac{3}{5}\left(\frac{g}{2}\right)^5\right)^{g-b}\leq\left(\frac{2}{5}\right)^{3g}g^{5g}.$$

(4) *Pour tout entier* b *avec* $2\leq b\leq g-1$, *on a*

$$\left(C^{-1}M_b\right)(3g)^g\left(\frac{g^5}{72}\right)^{g-b}b^{2b(b-1)}\left(\frac{16g^3}{9}\right)^b\leq 200^{g-2}g^{2g^2}.$$

Démonstration. (1) Si $g=2$, nous faisons une vérification directe avec $d_4\leq 0{,}1313$. Si $g\geq 3$, nous employons $N\leq Cd_{2g}8^g g^{2g}$ et $d_{2g}\leq(3/4\pi)^g g!$. Ainsi la quantité à majorer est au plus

$$\frac{6}{\pi}\left(\frac{g^2}{\varepsilon^2 g!}\right)^{1/g}g.$$

Nous faisons à nouveau une estimation directe pour $g=3$ et $g=4$ tandis que si $g\geq 5$ avec $g!\geq (g/e)^g$ nous avons

$$\left(\frac{g^2}{\varepsilon^2 g!}\right)^{1/g} g \leq e\left(\frac{g}{\varepsilon}\right)^{2/g} \leq e\left(\frac{5}{\varepsilon}\right)^{2/5} \leq 11$$

d'où le résultat. (2) Si $g=2$, ceci découle de $\varepsilon\leq 4e^{-2}$. Pour $g\geq 3$, nous utilisons la formule de Stirling pour écrire

$$(g-1)! = \sqrt{\frac{2\pi}{g}}\left(\frac{g}{e}\right)^g e^{\theta/12} \qquad \text{où} \quad 0\leq\theta\leq 1.$$

Avec $1\leq\sqrt{g}\leq 3^{g/6}$, cela conduit à l'encadrement

$$\left(\frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}e^{1/12}}\right)^{1/g} e \leq \frac{g}{(\varepsilon(g-1)!)^{1/g}} \leq \left(\frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}}\right)^{1/g} 3^{1/6} e.$$

Comme $\varepsilon\sqrt{2\pi}\leq\varepsilon\sqrt{2\pi}e^{1/12}\leq 1$ nous en déduisons bien

$$e \leq \frac{g}{(\varepsilon(g-1)!)^{1/g}} \leq \left(\frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}}\right)^{1/3} 3^{1/6} e \leq \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}$$

où la dernière inégalité résulte de $\varepsilon\leq 128\pi e^{-6}/3$. (3) Par définition de M_b, l'inégalité à montrer est équivalente à

$$d_{2b}\left(\frac{160(16g-24)}{g^5}\right)^b \leq \left(\frac{256}{75}\right)^g.$$

Elle est donc claire si $b=0$. Si $b\geq 1$ est fixé, le membre de gauche est une fonction décroissante de g tandis que celui de droite est croissant. Ceci montre que, pour vérifier l'inégalité pour tous $1\leq b\leq g-1$, nous pouvons supposer $b=g-1$. Nous faisons alors un calcul direct pour $2\leq g\leq 5$ en employant $d_2=1/\sqrt{12}$, $d_4\leq 0{,}14$ et $d_{2b}\leq(3/4\pi)^b b!$ si $b\geq 3$. Lorsque $g\geq 6$, nous combinons cette dernière borne avec $b!\leq g^b$ et $16g-24\leq 16g$ pour écrire

$$d_{2b}\left(\frac{160(16g-24)}{g^5}\right)^b \leq \left(\frac{1920}{\pi g^3}\right)^b \leq 3^b \leq 3^g \leq \left(\frac{256}{75}\right)^g.$$

(4) Si $g=3$ (et donc $b=2$), nous faisons un calcul direct avec $d_4\leq 0{,}14$. Supposons donc $g\geq 4$. Avec $d_{2b}\leq(3/4\pi)^b(g-1)!$, le membre de gauche est majoré par

$$\left(\frac{g^6}{24}\right)^g (g-1)! b^{b(2b-3)}\left(\frac{96(g-1)(48g-72)}{\pi g^2}\right)^b.$$

Cette expression est une fonction croissante de b donc, pour montrer qu'elle est inférieure à $200^{g-2}g^{2g^2}$, nous pouvons supposer $b=g-1$. Nous vérifions ceci directement si $g=4$ ou $g=5$. Lorsque $g\geq 6$, nous utilisons $(g-1)!\leq 3! g^{g-4}\leq g^{g-3}$ ainsi que $96(g-1)(48g-72)\leq 4608g^2\leq 1467\pi g^2$ de sorte que l'expression précédente est au plus

$$\frac{62^g}{1467}\cdot g^{2g^2+2} \leq \frac{113^g}{1467}\cdot g^{2g^2}$$

en employant $g^2 \leq 6^{g/3}$. Nous concluons alors par

$$\frac{200^2}{1467} \leq \left(\frac{200}{113}\right)^6 \leq \left(\frac{200}{113}\right)^g.$$

Nous démontrons maintenant nos théorèmes principaux un par un en commençant par la torsion.

Théorème 9.6. *Nous avons* $\operatorname{Card} A(K)_{\mathrm{tors}}^{1/g} \leq (6g)^8 D\mathcal{H}(A)$.

Démonstration. Nous établissons ceci par récurrence sur la dimension. Nous supposons donc que, pour toute variété abélienne B sur K avec $2 \leq \dim B \leq g-1$, nous avons $\operatorname{Card} B(K)_{\mathrm{tors}}^{1/\dim B} \leq (6\dim B)^8 D\mathcal{H}(B)$. De plus cette majoration vaut aussi si $\dim B = 1$ en vertu du théorème 8.5 car dans ce cas $\max(1, h_F(B), \log D) \leq 2\mathcal{H}(B)$. Nous distinguons deux cas. Si A n'est pas simple, nous choisissons une sous-variété abélienne $0 \neq B \neq A$. Nous avons une suite exacte

$$0 \longrightarrow B(K)_{\mathrm{tors}} \longrightarrow A(K)_{\mathrm{tors}} \longrightarrow (A/B)(K)_{\mathrm{tors}}$$

donc

$$\begin{aligned}\operatorname{Card} A(K)_{\mathrm{tors}} &\leq \operatorname{Card} B(K)_{\mathrm{tors}} \times \operatorname{Card}(A/B)(K)_{\mathrm{tors}} \\ &\leq \left((6\dim B)^8 D\mathcal{H}(B)\right)^{\dim B} \times \left((6\dim A/B)^8 D\mathcal{H}(A/B)\right)^{\dim A/B}.\end{aligned}$$

Puisque $(\dim B)\mathcal{H}(B)$ et $(\dim A/B)\mathcal{H}(A/B)$ sont majorés par $g\mathcal{H}(A)$ (lemme 9.3), nous en déduisons la formule de l'énoncé dans ce cas. Nous supposons donc dorénavant que A est simple. Nous choisissons une polarisation $\mathcal{L}$ comme dans le lemme 9.4 puis nous appliquons le corollaire 9.2 à $\Sigma_0 = A(K)_{\mathrm{tors}}$, ce qui permet de choisir $\psi = 0$. Par simplicité, la sous-variété B obtenue est nulle donc (avec $M_0 = C$) nous avons pour tout $c > 1$

$$\operatorname{Card} A(K)_{\mathrm{tors}}^{1/g} \leq \frac{g^2 (NC)^{1/g} D}{\eta' \pi E^2} \left(1 + \frac{\log c}{c-1}\right) \max(c, \mathcal{Z}).$$

Nous utilisons $E = 25$, $x = 0{,}83$, $\eta = 1{,}6$ et $\varepsilon = 0{,}17$. Ceci entraîne $\eta' \geq 0{,}8$ et (avec $(\varepsilon(g-1)!)^{-1/g} \leq \varepsilon^{-1/g} \leq \varepsilon^{-1/2}$) $C^{1/g} \leq 4510$ puis, avec l'assertion (3) de la proposition 7.2 et $z^2 \leq 2/3$,

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} \leq\ & 10g^2 \max(1, h_F(A)) + 30g^3 + \log h^0(A, \mathcal{L}) + 1 \\ & + \max\left(0, \log D + 15 - \frac{1}{g} \log h^0(A, \mathcal{L})\right).\end{aligned}$$

L'expression obtenue est croissante en $\log h^0(A, \mathcal{L})$ que nous pouvons donc remplacer par $17g^5\mathcal{H}(A)$. Comme $15 + \log D \leq 17g^4\mathcal{H}(A)$, le maximum disparaît. En écrivant $\max(1, h_F(A)) \leq 2g\mathcal{H}(A) - 3g/2$, il vient (avec $\mathcal{H}(A) \geq 1$ et $g \geq 2$) $\mathcal{Z} \leq 26g^5\mathcal{H}(A)$. Ceci nous amène à choisir $c = 26 \times 32$ pour avoir $\max(c, \mathcal{Z}) \leq 26g^5\mathcal{H}(A)$. Enfin

$$\frac{g^2 (NC)^{1/g}}{\eta' \pi E^2} = \frac{\pi (1+\eta)^2 E^2}{4\eta' (\log E')^2} \times g^2 \left(\frac{C^{-1} N}{\varepsilon^2 (g-1)!^2}\right)^{1/g} \leq (39g)^3$$

par l'assertion (1) du lemme 9.5 et cela donne le résultat puisque $39^3 \times 26(1+\log c/(c-1)) \leq 6^8$.

Pour la minoration de hauteur, nous commençons par un cas particulier.

Proposition 9.7. *Si P n'est contenu dans aucun sous-groupe algébrique strict de A alors $h_{\mathcal{L}}(P)^{-1} \leq D\left((13{,}7g)^6 D\mathcal{H}(A)\right)^{2g}$.*

Démonstration. Nous appliquons le corollaire 9.2 à l'ensemble Σ_0 des multiples de P de hauteur au plus $(\psi\pi E^2/8g^2D)(h^0(A,\mathcal{L})/C)^{1/g}$. Nous obtenons donc une sous-variété abélienne stricte B de A et l'hypothèse sur P assure $\operatorname{Card}(\Sigma_0+B/B) = \operatorname{Card}\Sigma_0$ puisque si la projection $A(K) \to (A/B)(K)$ n'était pas injective sur $\mathbb{Z}.P$ alors P serait contenu dans un sous-groupe algébrique strict de A de la forme $[m]^{-1}B$ pour un entier $m \geq 1$. Nous choisissons à présent $E = 19$, $x = 0{,}83$, $\eta = 1$, $\varepsilon = 0{,}17$ et $\psi = 0{,}1$ d'où $\eta' \geq 0{,}27$ puis commençons par majorer la quantité $\mathcal{Z}$ du corollaire. Nous utilisons l'assertion (4) de la proposition 7.2 ainsi que $h^0(A,\mathcal{L}) \geq 1$, $z^2 \leq 2/3$ et, dans $C^{1/g}$, $(\varepsilon(g-1)!)^{-1/g} \leq \varepsilon^{-1/2}$ pour écrire

$$\mathcal{Z} \leq h^0(A,\mathcal{L})^{1/2g^2}\left(\frac{3}{2}g^2\max(1,h_F(A)) + 2{,}6g^3 + \max\left(5+\log D, 15+\frac{1}{10}\right)\right).$$

Les termes $\max(1,h_F(A))$ et $\log D$ sont tous deux majorés par $2g\mathcal{H}(A) - 3g/2$. Nous en déduisons

$$\max\left(5+\log D, 15+\frac{1}{10}\right) \leq 1{,}9g^3\mathcal{H}(A) \quad \text{puis} \quad \mathcal{Z} \leq 5{,}25g^3\mathcal{H}(A)h^0(A,\mathcal{L})^{1/2g^2}.$$

Nous fixons alors $c = 5{,}25 \times 8$ et il vient (pour un entier $0 \leq b \leq g-1$)

$$\left(\frac{\operatorname{Card}\Sigma_0}{NM_b}\right)^{1/(g-b)} \leq \frac{3}{5}\left(\frac{g}{2}\right)^5 D\mathcal{H}(A)h^0(A,\mathcal{L})^{1/2g^2}$$

puis

$$\begin{aligned}\operatorname{Card}\Sigma_0 &\leq NM_b\left(\frac{3}{2}\left(\frac{g}{2}\right)^5\right)^{g-b}(D\mathcal{H}(A))^g\, h^0(A,\mathcal{L})^{1/2g}\\ &\leq NC\left(\frac{2}{5}\right)^{3g} g^{5g}\,(D\mathcal{H}(A))^g\, h^0(A,\mathcal{L})^{1/2g}\end{aligned}$$

grâce à l'assertion (3) du lemme 9.5. En utilisant la première assertion de ce même lemme nous avons

$$NC = \frac{C^{-1}N}{\varepsilon^2(g-1)!^2}\left(\frac{(1+\eta)\pi E^2}{2\log E'}\right)^{2g} \leq (2{,}8.10^7 g)^g$$

d'où

$$\operatorname{Card}\Sigma_0 \leq \left(1{,}8.10^6 g^6 D\mathcal{H}(A)\right)^g h^0(A,\mathcal{L})^{1/2g}.$$

Maintenant, par définition, le cardinal de Σ_0 est

$$1+2\left\lfloor\left(\frac{\psi\pi E^2}{8g^2Dh_{\mathcal{L}}(P)}\right)^{1/2}\left(\frac{h^0(A,\mathcal{L})}{C}\right)^{1/2g}\right\rfloor \geq \left(\frac{\psi\pi E^2}{2g^2Dh_{\mathcal{L}}(P)}\right)^{1/2}\left(\frac{h^0(A,\mathcal{L})}{C}\right)^{1/2g}-1$$

donc

$$\begin{aligned} h_{\mathcal{L}}(P)^{-1} &\leq \frac{2g^2DC^{1/g}}{\psi\pi E^2}\frac{(1+\operatorname{Card}\Sigma_0)^2}{h^0(A,\mathcal{L})^{1/g}} \\ &\leq 44{,}7g^2(1+1{,}8.10^6)^{2g}g^{12g}D^{2g+1}\mathcal{H}(A)^{2g}. \end{aligned}$$

Nous obtenons bien la formule de l'énoncé en vérifiant $44{,}7g^2 \leq (13{,}4)^g$ puis $\sqrt{13{,}4}\times(1+1{,}8.10^6) \leq (13{,}7)^6$.

Cette première borne se combine avec l'estimation pour la torsion afin de donner le cas général.

Théorème 9.8. *Si $P \in A(K)\setminus A(K)_{\mathrm{tors}}$ alors $h_{\mathcal{L}}(P)^{-1} \leq D\left((6g)^8D\mathcal{H}(A)\right)^{2g}$.*

Démonstration. Considérons le plus petit sous-groupe algébrique de A contenant P. Sa composante neutre est une sous-variété abélienne non nulle B. L'image de P dans $(A/B)(K)$ est un point de torsion donc, avec $m=\operatorname{Card}(A/B)(K)_{\mathrm{tors}}$, nous avons $mP \in B(K)$ et ce point n'est contenu dans aucun sous-groupe algébrique strict de B. Par la proposition 9.7 si $\dim B \geq 2$ ou par le théorème 8.6 (étendu au cas d'une polarisation non principale) si $\dim B = 1$, nous avons

$$h_{\mathcal{L}}(mP)^{-1} \leq D\left((13{,}7\dim B)^6D\mathcal{H}(B)\right)^{2\dim B}.$$

Avec le lemme 9.3 et $(13{,}7)^6 \leq 6^8g^2$, nous en tirons

$$h_{\mathcal{L}}(mP)^{-1} \leq D\left((6g)^8D\mathcal{H}(A)\right)^{2\dim B}.$$

C'est le résultat souhaité si $B=A$ puisqu'alors $m=1$. Dans le cas contraire nous majorons m par le théorème 9.6 si $\dim B \leq \dim A-2$ et par le théorème 8.5 si $\dim B = \dim A-1$. En employant à nouveau le lemme 9.3, nous pouvons écrire

$$m \leq \left((6g)^8D\mathcal{H}(A)\right)^{g-\dim B}$$

et la conclusion découle alors de $h_{\mathcal{L}}(P)^{-1} = m^2h_{\mathcal{L}}(mP)^{-1}$.

En vue du théorème 1.1 où apparaît $h^0(A,\mathcal{L})$, nous introduisons la variante suivante de la notation $\mathcal{H}(\cdot)$: pour une sous-variété abélienne non nulle B de A, qui hérite de la polarisation induite par $\mathcal{L}$, nous posons

$$\mathcal{H}'(B) = \max\left(1, \frac{1}{2\dim B}\max\left(1, h_F(B), \log D, \log h^0(B,\mathcal{L})\right)+\frac{3}{4}\right).$$

Théorème 9.9. *Pour tout $P_0 \in A(K)\otimes\mathbb{R}$, nous avons*

$$\operatorname{Card}\left\{P \in A(K) \mid h_{\mathcal{L}}(P-P_0) \leq \frac{1}{256gD}\right\} \leq (200g)^{2g^2}\left(D\mathcal{H}'(A)\right)^g.$$

Démonstration. Nous procédons par récurrence sur $g \geq 2$. Nous notons Σ_0 l'ensemble de l'énoncé et imposons $\psi \geq \frac{gC^{1/g}}{32\pi E^2}$ de façon à ce qu'il vérifie l'hypothèse de la proposition 9.1 (avec $r^2 \geq C^{-1/g}$). Celle-ci nous fournit une sous-variété abélienne B de A, dont nous notons b la dimension, ainsi qu'une inégalité dont nous tirons deux conséquences : la première est identique à la formule du corollaire 9.2 (avec le même $\mathcal{Z}$)

$$\operatorname{Card}\left(\frac{\Sigma_0+B}{B}\right) \leq NM_b\left(\frac{g^2D}{\eta'\pi E^2}\left(1+\frac{\log c}{c-1}\right)\max(c,\mathcal{Z})\right)^{g-b}$$

tandis que pour la seconde nous gardons $h^0(B,\mathcal{L})$ en écrivant $\operatorname{Card}\left(\frac{\Sigma_0+B}{B}\right) \geq 1$ et $r^2 \geq (h^0(A,\mathcal{L})/C)^{1/g}$

$$h^0(B,\mathcal{L}) \leq NC\left(\frac{h^0(A,\mathcal{L})}{C}\right)^{b/g}\left(\frac{g^2D}{\eta'\pi E^2}\left(1+\frac{\log c}{c-1}\right)\max(c,\mathcal{Z})\right)^{g-b}.$$

Lorsque $P \in \Sigma_0$, la fibre de la projection $\Sigma_0 \to (\Sigma_0+B)/B$ contenant P s'écrit $\Sigma_0 \cap (P+B(K))$, en bijection avec son translaté $(\Sigma_0-P)\cap B(K)$. Par définition de Σ_0, l'image de Σ_0-P dans l'espace euclidien $(A(K)\otimes\mathbb{R},\sqrt{h_{\mathcal{L}}})$ est contenue dans la boule de centre P_0-P et de rayon $(16\sqrt{gD})^{-1}$. Si nous intersectons cette boule avec le sous-espace $B(K)\otimes\mathbb{R}$, nous obtenons une boule de rayon au plus $(16\sqrt{gD})^{-1}$ centrée en un point $P_0' \in B(K)\otimes\mathbb{R}$ (qui dépend de P). Ainsi nous avons

$$(\Sigma_0-P)\cap B(K) \subset \left\{P' \in B(K) \mid h_{\mathcal{L}}(P'-P_0') \leq \frac{1}{256gD}\right\}$$

puis, en faisant varier P,

$$\operatorname{Card}\Sigma_0 \leq \operatorname{Card}\left(\frac{\Sigma_0+B}{B}\right) \times \sup_{P_0' \in B(K)\otimes\mathbb{R}} \operatorname{Card}\left\{P' \in B(K) \mid h_{\mathcal{L}}(P'-P_0') \leq \frac{1}{256gD}\right\}.$$

Si $B=0$, le supremum vaut bien sûr 1. Sinon nous remplaçons $256gD$ par $256bD$ et majorons le supremum par l'hypothèse de récurrence si $b \geq 2$ et par le théorème 8.7 (étendu au cas non principal) si $b=1$ (dans ce cas $\max(1,h_F(B),\log D) \leq 2\mathcal{H}(B) \leq 2g\mathcal{H}(A) \leq 2g\mathcal{H}'(A)$ avec le lemme 9.3). Nous aboutissons à

$$\operatorname{Card}\Sigma_0 \leq \operatorname{Card}\left(\frac{\Sigma_0+B}{B}\right) \times \begin{cases} 1 & \text{si } b=0, \\ 19760g\,D\mathcal{H}'(A) & \text{si } b=1, \\ (200b)^{2b^2}\left(D\mathcal{H}'(B)\right)^b & \text{si } b \geq 2. \end{cases}$$

La borne pour $h^0(B,\mathcal{L})$ permettra de majorer $\mathcal{H}'(B)$ en fonction de $\mathcal{H}'(A)$. Il reste donc à faire les calculs. Nous choisissons pour cela $E=19$, $x=0{,}83$, $\eta=1$ et $\varepsilon=0{,}17$. Ces valeurs sont identiques à celles de la démonstration de la proposition 9.7 de sorte que certaines estimations seront les mêmes, comme $NC \leq (2{,}8.10^7 g)^g$. Par ailleurs l'assertion (2) du lemme 9.5 entraîne $2837 \leq gC^{1/g} \leq 5065$. En particulier $\frac{gC^{1/g}}{32\pi E^2} \leq 0{,}14$ donc nous choisissons $\psi=0{,}14$ de façon à remplir la condition imposée en début de démonstration. Il vient $\eta' \geq 0{,}23$. Nous majorons maintenant $\mathcal{Z}$. Grâce à l'assertion (1) de la proposition

!

7.2 et $h^0(A,\mathcal{L}) \geq 1$, nous avons

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} &\leq 2g^2 \max(1, h_F(A), \log h^0(A,\mathcal{L})) + 2{,}68g^3 + \max\left(5 + \log D, 15 + \frac{1}{10}\right)\\ &\leq 2g^2\left(2g\mathcal{H}'(A) - \frac{3g}{2}\right) + 2{,}68g^3 + \max\left(5 + 2g\mathcal{H}'(A), 15 + \frac{1}{10}\right)\\ &\leq 5{,}6g^3\mathcal{H}'(A).\end{aligned}$$

Remarquons aussi qu'en procédant de même avec l'assertion (2) de la proposition 7.2 nous obtenons $\mathcal{Z} \leq 3{,}3g^3\mathcal{H}'(A)$ si $g \geq 3$. Nous posons $c = 5{,}6 \times 8$ d'où

$$\frac{g^2 D}{\eta' \pi E^2}\left(1 + \frac{\log c}{c-1}\right)\max(c, \mathcal{Z}) \leq \frac{g^5}{42} D\mathcal{H}'(A)$$

et nous pouvons remplacer 42 par 72 si $g \geq 3$. Nous distinguons à présent les trois cas selon la valeur de b. Lorsque $b = 0$, nous avons avec la majoration de NC rappelée plus haut

$$\operatorname{Card}\Sigma_0 \leq NC\left(\frac{g^5}{42} D\mathcal{H}'(A)\right)^g \leq \left((10g)^6 D\mathcal{H}'(A)\right)^g$$

et ceci est (largement) plus petit que la borne souhaitée puisque $(10g)^3 \leq (200g)^g$. Lorsque $b = 1$, nos bornes entraînent (avec $d_2 = 1/2\sqrt{3}$)

$$\begin{aligned}\operatorname{Card}\Sigma_0 &\leq NM_1\left(\frac{g^5}{42}\right)^{g-1} \times 19760g\,(D\mathcal{H}'(A))^g\\ &\leq \left(\frac{2{,}8.10^7}{42} g^6\right)^g \times \frac{42 \times 9880(48g-72)}{g^4\sqrt{3}}\,(D\mathcal{H}'(A))^g.\end{aligned}$$

Nous aboutissons à nouveau au majorant de l'énoncé par un calcul direct si $g = 2$ et une inégalité facile de la forme $(10g)^{6g} \times 5.10^5 \leq (200g)^{2g^2}$ si $g \geq 3$. Il nous reste à traiter le cas $b \geq 2$. Ici nous avons toujours $g \geq 3$. En particulier, en revenant au calcul de NC avec la seconde partie de l'assertion (1) du lemme 9.5, nous pouvons écrire $NC \leq (2{,}4.10^7 g)^g$. Commençons par employer ceci dans l'estimation pour $h^0(B,\mathcal{L})$ en majorant également $\log h^0(A,\mathcal{L})$ et $\log D$ par $2g\mathcal{H}'(A) - 3g/2$ puis $\log \mathcal{H}'(A) \leq \mathcal{H}'(A) - 1$. Nous trouvons

$$\begin{aligned}\log h^0(B,\mathcal{L}) \leq\ & g\log(2{,}4.10^7 g) + b\left(2\mathcal{H}'(A) - \frac{3}{2} + \log\frac{g}{2837}\right)\\ &+ (g-b)\left(\log\frac{g^5}{72} + (2g+1)(\mathcal{H}'(A)-1) + \frac{g}{2}\right),\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\log h^0(B,\mathcal{L}) \leq\ & b\left(2\mathcal{H}'(A) + \log\left(\frac{2{,}4.10^7}{2837e^{3/2}} g^2\right)\right)\\ &+ (g-b)\left(\log\left(\frac{2{,}4.10^7}{72} g^6\right) + (2g+1)(\mathcal{H}'(A)-1) + \frac{g}{2}\right).\end{aligned}$$

Ce majorant est lui-même plus petit que $45\mathcal{H}'(A)$ si $g=3$ (et donc $b=2$). Lorsque $g\geq 4$ nous pouvons écrire

$$\log h^0(B,\mathcal{L}) \leq \left(\frac{10}{3}b+6(g-b)\right) g\mathcal{H}'(A) \leq \frac{10g^3}{3b}\mathcal{H}'(A)$$

(avec $6b\leq \frac{10}{3}(g+b)$) et ceci est donc vrai pour tout $g\geq 3$. Majorons à présent $\mathcal{H}'(B)$. Si $\mathcal{H}'(B)=\mathcal{H}(B)$, nous avons $\mathcal{H}'(B)\leq (g/b)\mathcal{H}'(A)$ par le lemme 9.3. Sinon

$$\mathcal{H}'(B) = \frac{1}{2b}\log h^0(B,\mathcal{L})+\frac{3}{4} \leq \frac{g^3}{b^2}\left(\frac{5}{3}+\frac{3(g-1)^2}{4g^3}\right)\mathcal{H}'(A) \leq \frac{16g^3}{9b^2}\mathcal{H}'(A)$$

(par décroissance de $g\mapsto (g-1)^2/g^3$) et cette borne vaut donc dans les deux cas. Nous reprenons alors les majorations de $\operatorname{Card}(\frac{\Sigma_0+B}{B})$ et $\operatorname{Card}\Sigma_0$ pour obtenir

$$\operatorname{Card}\Sigma_0 \leq NM_b\left(\frac{g^5}{72}\right)^{g-b}(200b)^{2b^2}\left(\frac{16g^3}{9b^2}\right)^b (D\mathcal{H}'(A))^g.$$

Grâce à l'assertion (4) du lemme 9.5, nous trouvons

$$\begin{aligned}\operatorname{Card}\Sigma_0 &\leq NC(3g)^{-g}\times 200^{2b^2+g-2}g^{2g^2}\,(D\mathcal{H}'(A))^g\\ &\leq (8.10^6)^g\times 200^{2(g-1)^2+g-2}g^{2g^2}\,(D\mathcal{H}'(A))^g\end{aligned}$$

qui est exactement la borne recherchée.

Nous établissons finalement un énoncé avec minima successifs. Le cheminement sera très proche de celui de la démonstration précédente à l'exception de l'utilisation de l'assertion (4) de la proposition 7.1 pour minorer r.

Nous étendons la notation de l'introduction pour les minima modifiés en posant pour une sous-variété abélienne B de A et $1\leq i\leq 2\dim B$

$$\widetilde{\lambda}_i(B) = \min\left\{\lambda_{2\dim B'}(\Omega_{B'_\sigma}) \mid B'\subset B \text{ et } i\leq 2\dim B'\right\}$$

où B' parcourt donc les sous-variétés abéliennes de B de dimension au moins $i/2$ (rappelons que le plongement σ est fixé depuis le début de cette partie). Par définition, nous avons $\widetilde{\lambda}_i(A)\leq \widetilde{\lambda}_i(B)$. Si nous notons simplement $\lambda_i=\lambda_i(\Omega_{A_\sigma})$ pour $1\leq i\leq 2g$, nous pouvons écrire $\widetilde{\lambda}_1(A)\leq\cdots\leq\widetilde{\lambda}_{2g}(A)=\lambda_{2g}$. Seules ces inégalités interviendront ci-dessous mais remarquons que les minorations mentionnées après le théorème 1.4 s'obtiennent aisément à partir de l'inégalité d'Hadamard : en effet, $\widetilde{\lambda}_1(A)\geq 1$ découle de $\lambda_{2\dim B'}(\Omega_{B'_\sigma})\geq h^0(B',\mathcal{L})^{1/2\dim B'}\geq 1$ tandis que $\lambda_{2\dim B'}(\Omega_{B'_\sigma})\geq\lambda_i(\Omega_{B'_\sigma})\geq\lambda_i$ (pour $1\leq i\leq 2\dim B'$) fournit $\widetilde{\lambda}_i(A)\geq\lambda_i$ (pour $1\leq i\leq 2g$) et donc $\widetilde{\lambda}_1(A)\cdots\widetilde{\lambda}_{2g}(A)\geq\lambda_1\cdots\lambda_{2g}\geq 1$. Pour énoncer notre résultat, écrivons encore, pour une sous-variété abélienne non nulle B de A,

$$\mathcal{H}''(B) = \max\left(1,\frac{1}{2\dim B}\max\left(1,h_F(B),\log\frac{D}{\widetilde{\lambda}_1(B)^2},\log h^0(B,\mathcal{L})\right)+\frac{3}{4}\right).$$

Théorème 9.10. *Pour tout $P_0 \in A(K)\otimes\mathbb{R}$, nous avons*

$$\operatorname{Card}\left\{P \in A(K) \mid h_{\mathcal{L}}(P-P_0) \leq \frac{\widetilde{\lambda}_1(A)^2}{(4^7 g)^{2g} D}\right\} \leq (1366g)^{3g^2} \frac{h^0(A,\mathcal{L})\,(D\mathcal{H}''(A))^g}{\widetilde{\lambda}_1(A)\cdots\widetilde{\lambda}_{2g}(A)}.$$

Démonstration. Nous notons ici $M = 2Cd_{2g}(48g-72)^{g-1/2}$ de sorte que l'assertion (4) de la proposition 7.1 se lit $r \geq \lambda_{2g}/M$. Nous démontrons l'inégalité de l'énoncé par récurrence sur $g \geq 2$. Nous désignons par Σ_0 l'ensemble qui y apparaît et nous demandons

$$\frac{\psi\pi E^2}{8g^2M^2} \geq \frac{1}{(4^7g)^{2g}}$$

de sorte que, avec $\lambda_{2g} \geq \widetilde{\lambda}_1(A)$, Σ_0 satisfait l'hypothèse de la proposition 9.1. Nous obtenons ainsi une sous-variété abélienne stricte B de A et une inégalité où nous minorons r par λ_{2g}/M la première fois, par $\widetilde{\lambda}_1(A)/M$ la deuxième et par $C^{-1/2g}$ la troisième. Avec $b = \dim B$, nous trouvons

$$\operatorname{Card}\frac{\Sigma_0+B}{B} \leq N\frac{h^0(A,\mathcal{L})}{h^0(B,\mathcal{L})}\left(\frac{M}{\lambda_{2g}}\right)^{2(g-b)}\left(\frac{g^2D}{\eta'\pi E^2}\left(1+\frac{\log c}{c-1}\right)\max(c,\mathcal{Z}')\right)^{g-b}$$

où

$$\mathcal{Z}' = 2\,\mathsf{m}_A^+ + \log\max\left(e, \frac{eM^2}{\eta' E^2}\cdot\frac{D}{\widetilde{\lambda}_1(A)^2}, \frac{x^2C^{1/g}}{(x^2-z^2)^2}\right).$$

Nous utiliserons ceci à la fois comme majoration de $\operatorname{Card}\frac{\Sigma_0+B}{B}$ (où intervient $h^0(B,\mathcal{L})$) et comme majoration de $h^0(B,\mathcal{L})$ (en minorant $\operatorname{Card}\frac{\Sigma_0+B}{B} \geq 1$). Exactement comme dans la démonstration précédente, $\operatorname{Card}\Sigma_0$ est au plus

$$\operatorname{Card}\left(\frac{\Sigma_0+B}{B}\right) \times \sup_{P_0'\in B(K)\otimes\mathbb{R}} \operatorname{Card}\left\{P' \in B(K) \mid h_{\mathcal{L}}(P'-P_0') \leq \frac{\widetilde{\lambda}_1(A)^2}{(4^7g)^{2g}D}\right\}.$$

Lorsque $b \neq 0$, nous pouvons majorer $\widetilde{\lambda}_1(A)^2(4^7g)^{-2g}$ par $\widetilde{\lambda}_1(B)^2(4^7b)^{-2b}$. Ainsi, si $b \geq 2$, nous employons l'hypothèse de récurrence pour remplacer le supremum par

$$(1366b)^{3b^2}\frac{h^0(B,\mathcal{L})}{\widetilde{\lambda}_1(B)\cdots\widetilde{\lambda}_{2b}(B)}\,(D\mathcal{H}''(B))^b.$$

Cette borne vaut également lorsque $b = 1$: en effet, cela résulte du théorème 8.8 une fois adapté au cas d'une polarisation quelconque (comme nous l'avons indiqué après son énoncé) et en employant

$$\max\left(1, h_F(B), \log\frac{D}{\widetilde{\lambda}_1(B)^2}, \log h^0(B,\mathcal{L})\right) \leq 2\mathcal{H}''(B).$$

Nous revenons à la majoration de $\operatorname{Card}\frac{\Sigma_0+B}{B}$ puis utilisons $\widetilde{\lambda}_i(A)\leq\widetilde{\lambda}_i(B)$ si $1\leq i\leq 2b$ et $\widetilde{\lambda}_i(A)\leq\lambda_{2g}$ si $2b<i\leq 2g$ pour trouver que $\operatorname{Card}\Sigma_0$ est majoré par

$$N\left(\frac{g^2M^2}{\eta'\pi E^2}\left(1+\frac{\log c}{c-1}\right)\frac{\max(c,\mathcal{Z}')}{\mathcal{H}''(A)}\right)^{g-b}(1366b)^{3b^2}\left(\frac{\mathcal{H}''(B)}{\mathcal{H}''(A)}\right)^b \\ \times\frac{h^0(A,\mathcal{L})}{\widetilde{\lambda}_1(A)\cdots\widetilde{\lambda}_{2g}(A)}(D\mathcal{H}''(A))^g$$

lorsque $b\geq 1$. Si $b=0$, nous obtenons la même borne en remplaçant $(1366b)^{3b^2}$ et $(\mathcal{H}''(B)/\mathcal{H}''(A))^b$ par 1. Nous voyons apparaître une inégalité de la forme voulue à condition de majorer $\mathcal{Z}'/\mathcal{H}''(A)$ et (si $b\neq 0$) $\mathcal{H}''(B)/\mathcal{H}''(A)$ par une expression ne dépendant que de la dimension. Nous ferons cela avec les valeurs explicites $E=16$, $x=0{,}817$, $\eta=0{,}75$, $\varepsilon=0{,}15$ et $\psi=10^{-3}$. Nous évaluons $\eta'\geq 0{,}215$ et $C\leq 771^g\varepsilon^{-1}(g-1)!^{-1}$. Lorsque $g=2$, avec $d_4\leq 0{,}1313$, cela donne $N\leq 3.10^8$ et $M\leq 1{,}224.10^8$. Lorsque $g\geq 3$, avec $d_{2g}\leq(3/4\pi)^g g!$, nous avons

$$N\leq Cd_{2g}(8g^2)^g\leq 1473^g\varepsilon^{-1}g^{2g+1}\leq(64g)^{2g}$$

grâce à $g/\varepsilon\leq(3/\varepsilon)^{g/3}$ puis

$$M\leq\frac{2}{\varepsilon}185^g g(48g-72)^{g-1/2}\leq 2\varepsilon 4^{7g}g^{g-1}\quad :$$

ici la seconde inégalité est équivalente à

$$f(g)=\left(\frac{8880}{4^7}\right)^g g^{3/2}\left(1-\frac{3}{2g}\right)^{g-1/2}\leq\varepsilon^2\sqrt{48}$$

et ceci découle de $f(4)\leq f(3)\leq\varepsilon^2\sqrt{48}$ en vertu du lemme 7.3 (appliqué à f^2). Remarquons que la majoration $M\leq 2\varepsilon 4^{7g}g^{g-1}$ vaut également si $g=2$ et donc nous avons dans tous les cas

$$\frac{\psi\pi E^2}{8g^2M^2}\geq\frac{8\psi\pi}{\varepsilon^2(4^7g)^{2g}}\geq\frac{1}{(4^7g)^{2g}}$$

comme requis en début de démonstration. Nous utilisons ensuite l'assertion (1) de la proposition 7.2 et majorons $\max(1,h_F(A),\log h^0(A,\mathcal{L}))$ et $\log(D/\widetilde{\lambda}_1(A)^2)$ par $2g\mathcal{H}''(A)-3g/2$ pour avoir

$$\mathcal{Z}'\leq 2g^2\left(2g\mathcal{H}''(A)-\frac{3}{2}g\right)+2{,}68g^3+\max\left(2g\mathcal{H}''(A)-\frac{3}{2}g+\log\frac{eM^2}{\eta'E^2},22\right).$$

Le terme $\log(eM^2/\eta'E^2)$ est au plus 34,3 si $g=2$ et au plus $2g\log(4^7g)\leq 8g^2$ si $g\geq 3$. Nous en déduisons $\mathcal{Z}'\leq 8{,}1g^3\mathcal{H}''(A)$ dans tous les cas. Nous choisissons alors $c=64{,}8$ et il vient

$$\frac{g^2}{\eta'\pi E^2}\left(1+\frac{\log c}{c-1}\right)\max(c,\mathcal{Z}')\leq\frac{g^5}{20}\mathcal{H}''(A).$$

En particulier nous avons

$$h^0(B,\mathcal{L}) \le N h^0(A,\mathcal{L}) \left(\frac{M^2 g^5}{20} \cdot \frac{D}{\widetilde{\lambda}_1(A)^2} \cdot \mathcal{H}''(A) \right)^{g-b}.$$

Nous majorons (brutalement) $\log h^0(A,\mathcal{L})$, $\log(D/\widetilde{\lambda}_1(A)^2)$ et même $\log \mathcal{H}''(A)$ par $2g\mathcal{H}''(A)$ puis $g-b$ par g pour écrire

$$\log h^0(B,\mathcal{L}) \le \log N + g \log \frac{M^2 g^5}{20} + 2g(2g+1)\mathcal{H}''(A) \le 15 g^3 \mathcal{H}''(A)$$

par évaluation directe si $g=2$ et $2g\log 64g + 14g^2 \log 4 + (2g+3)g\log g \le 9g^3$ si $g \ge 3$. Lorsque $b \ne 0$, avec le lemme 9.3,

$$\frac{1}{2b}\log h^0(B,\mathcal{L}) + \frac{3}{4} \le \frac{8g^3}{b}\mathcal{H}''(A) \quad \text{et} \quad \log \frac{D}{\widetilde{\lambda}_1(B)^2} \le \log \frac{D}{\widetilde{\lambda}_1(A)^2},$$

nous en déduisons $b\mathcal{H}''(B) \le 8g^3\mathcal{H}''(A)$ d'où

$$(1366b)^{3b^2} \left(\frac{\mathcal{H}''(B)}{\mathcal{H}''(A)} \right)^b \le (1366g)^{3b^2} (8g^2)^b.$$

En injectant ceci dans la borne obtenue pour $\operatorname{Card}\Sigma_0$ si $b \ne 0$ et en remarquant que $(1366g)^{3b^2}(8g^2)^b$ vaut 1 si $b=0$, nous constatons que l'énoncé sera établi si nous montrons, pour tout entier b avec $0 \le b \le g-1$,

$$N \left(\frac{M^2 g^5}{20} \right)^{g-b} (1366g)^{3b^2} (8g^2)^b \le (1366g)^{3g^2}.$$

Nous vérifions ceci par calcul direct si $g=2$. Lorsque $g \ge 3$, il suffit de voir

$$(64g)^{2g} \left(\frac{4^{14g} g^{2g+3}}{222} \right)^{g-b} (1366g)^{3b^2} (8g^2)^b \le (1366g)^{3g^2}.$$

Le membre de gauche est une fonction convexe de b donc nous pouvons supposer $b \in \{0, g-1\}$. Si $b=0$, il est majoré par

$$\left(19 \times 4^{14g} g^{2g+5}\right)^g \le \left(2^{31} g^3\right)^{g^2} \le (1366g)^{3g^2}$$

où nous avons utilisé $19g^5 \le (8g)^g$. Dans le cas $b = g-1$, le quotient des deux membres de l'inégalité à établir est au plus

$$4^{20g} g^{4g+3} (8g^2)^{g-1} (1366g)^{3-6g} \le \frac{2^{43g}}{1366^{5g}} g^4 \le \left(\frac{g}{4^g}\right)^4 \le 1.$$

Concluons en remarquant que les résultats de cette partie donnent bien les quatre premiers énoncés de l'introduction dans le cas $g \ge 2$. En effet, les théorèmes 9.6 et 9.8 entraînent directement les théorèmes 1.2 et 1.3 grâce à la première assertion du lemme 9.3 majorant $\mathcal{H}(A)$. De la même façon, avec les majorations analogues évidentes de $\mathcal{H}'(A)$ et $\mathcal{H}''(A)$, les théorèmes 1.1 et 1.4 découlent des théorèmes 9.9 et 9.10 où nous choisissons de plus $P_0 = 0$.

!

Références

[1] Anderson M et Masser D (1980) Lower bounds for heights on elliptic curves. *Math. Z.* **174**, 23–34.

[2] Ballaÿ F (2021) Successive minima and asymptotic slopes in Arakelov geometry. *Compositio Math.* **157**, 1302–1339.

[3] Bantegnie R (1970) Sur une propriété de transfert concernant les boules de $\mathbb{R}^n$. *Monatsh. Math.* **74**, 1–5.

[4] Blichfeldt HF (1914) A new principle in the geometry of numbers, with some applications. *Trans. Amer. Math. Soc.* **15**, 227–235.

[5] Bosser V et Gaudron É (2019) Logarithmes des points rationnels des variétés abéliennes. *Canadian J. Math.* **71**, 247–298.

[6] Bost JB (1996) Intrinsic heights of stable varieties and abelian varieties. *Duke Math. J.* **82**, 21–70.

[7] Carrizosa M (2009) Petits points et multiplication complexe. *Int. Math. Res. Not. IMRN* **16**, 3016–3097.

[8] Clark P et Pollack P (2015) The truth about torsion in the CM case. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **353**, 683–688.

[9] Cohn H et Elkies N (2003) New upper bounds on sphere packings I. *Ann. Math.* **157**, 689–714.

[10] David S (1991) Fonctions thêta et points de torsion des variétés abéliennes. *Compositio Math.* **78**, 121–160.

[11] David S (1993) Minorations de hauteurs sur les variétés abéliennes. *Bull. Soc. Math. France* **121**, 509–544.

[12] David S (1997) Points de petite hauteur sur les courbes elliptiques. *J. Number Theory* **64**, 104–129.

[13] Gaudron É (2014) Minorations simultanées de formes linéaires de logarithmes de nombres algébriques. *Bull. Soc. Math. France* **142**, 1–62.

[14] Gaudron É (2019) Some explicit computations in Arakelov geometry of abelian varieties. *J. Ramanujan Math. Soc.* **34**, 433–447.

[15] Gaudron É (2021) Minima and slopes of rigid adelic spaces. In *Arakelov Geometry and Diophantine Applications*, édité par E. Peyre et G. Rémond. Lecture Notes in Math. 2276. Cham : Springer, 37–76.

[16] Gaudron É et Rémond G (2014) Théorème des périodes et degrés minimaux d'isogénies. *Comment. Math. Helv.* **89**, 343–403.

[17] Gaudron É et Rémond G (2014) Polarisations et isogénies. *Duke Math. J.* **163**, 2057–2108.

[18] Gaudron É et Rémond G (2018) Torsion des variétés abéliennes CM. *Proc. Amer. Math. Soc.* **146**, 2741–2747.

[19] Gaudron É et Rémond G (2023) Nouveaux théorèmes d'isogénie. *Mém. Soc. Math. France* **176**, vi+123 p.

[20] Lang S (1975) Division points of elliptic curves and Abelian functions over number fields. *Amer. J. Math.* **97**, 124–132.

[21] Masser D (1977) Division fields of elliptic functions. *Bull. London Math. Soc.* **9**, 49–53.

[22] Masser D (1981) Small values of the quadratic part of the Néron-Tate height. *Sémin. Delange-Pisot-Poitou, Paris 1979–80*, *Prog. Math.* **12**, 213–222.

[23] Masser D (1984) Small values of the quadratic part of the Néron-Tate height on an abelian variety. *Compositio Math.* **53**, 153–170.

[24] Masser D (1987) Small values of heights on families of abelian varieties. In *Diophantine Approximation and Transcendence Theory (Springer, Bonn, 1985)*, *Lecture Notes in Math.* **1290**. 109–148.
[25] Masser D (1986) Lettre à Daniel Bertrand. 17 novembre 1986. 6 pages.
[26] Masser D (1989) Counting points of small height on elliptic curves. *Bull. Soc. Math. France* **117**, 247–265.
[27] Masser D (1993) Large period matrices and a conjecture of Lang. *Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1991–92*, *Progr. Math.* **116**, 153–177.
[28] Merel L (1996) Bornes pour la torsion des courbes elliptiques sur les corps de nombres. *Invent. Math.* **124**, 437–449.
[29] Moret-Bailly L (1985) Pinceaux de variétés abéliennes. *Astérisque* **129**.
[30] Nakamaye M (2007) Multiplicity estimates on commutative algebraic groups. *J. reine angew. Math.* **607**, 217–235.
[31] Parent P (1999) Bornes effectives pour la torsion des courbes elliptiques sur les corps de nombres. *J. reine angew. Math.* **506**, 85–116.
[32] Rémond G (2018) Conjectures uniformes sur les variétés abéliennes. *Quart. J. Math.* **69**, 459–486.
[33] Rémond G (2022) Propriétés de la hauteur de Faltings. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **23**, 1589–1596.
[34] Serre JP (2013) Résumé des cours au Collège de France 1985–1986. In *Œuvres/ Collected papers. IV. 1985–1998*. Springer, 33–37.
[35] Silverberg A (1988) Torsion points on abelian varieties of CM-type. *Compositio Math.* **68**, 241–249.