Une remarque sur l'exponentielle étoile

Dominique Manchon

Institut Elie Cartan
CNRS
BP 239
54506 Vandoeuvre les Nancy Cedex, France
e-mail : manchon@iecn.u-nancy.fr

Nous démontrons sur toute variété de Poisson M munie d'un étoile-produit bi-différentiel la convergence C^∞ pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$ de la série exponentielle-étoile définie par :

$$e^{*f} = \sum_{k\geq 0} \frac{f^{*k}}{k!}$$

Soit M une variété de Poisson munie d'un étoile-produit bidifférentiel $*$. On munit $C^\infty(M)[[\hbar]]$ de la topologie de la convergence C^∞ de chaque coefficient (pas forcément uniformément). La topologie C^∞ est la topologie de la convergence de toutes les dérivées sur tout compact. Elle est définie par la famille croissante de semi-normes :

$$\|f\|_{N,K} = \sup_{|\beta|\leq N} \sup_{x\in K} |D^\beta f(x)|$$

où K est un compact et β un multi-indice, et fait de $C^\infty(M)$ un espace de Fréchet. Le théorème suivant nous permet de définir l'exponentielle-étoile dans $C^\infty(M)[[\hbar]]$:

Theorème I.1.
Pour tout $f \in C^\infty(M)$ la série :

$$e^{*f} = \sum_{k\geq 0} \frac{f^{*k}}{k!}$$

converge dans $C^\infty(M)[[\hbar]]$ au sens de la topologie ci-dessus. De plus on a :

$$e^{*f} = e^f + O(\hbar^2)$$

Démonstration. On écrit :

$$f * g = \sum_r \hbar^r C_r(f,g)$$

et on suppose que C_r est un opérateur bi-différentiel de bi-ordre $(a(r), a(r))$. On pose :

$$\omega(r) = \sup_{s \leq r} a(s)$$

On écrit formellement :

$$e^{*f} = \sum_{k\geq 0} \sum_{r \geq 0} \frac{T_{r,k}(f)}{k!} \hbar^r$$

où $T_{r,k}(f)$ désigne le coefficient de $\hbar^r$ dans f^{*k}. Il s'agit donc de montrer la convergence C^∞ de la série :

$$T_r(f) = \sum_{k \geq 0} \frac{T_{r,k}(f)}{k!}$$

La méthode consiste à donner des estimations pour les semi-normes $\|T_{r,k}(f)\|_{N,K}$: on part des estimations pour les opérateurs bi-différentiels C_r:

$$\|C_s(f,g)\|_{N,K} \leq A_{s,N,K} \|f\|_{N+a(s),K} \|g\|_{N+a(s),K}$$

On note $B_{r,N,K}$ le sup. des meilleures constantes $A_{s,N,K}$ possibles pour $s \leq r$. Grâce à la formule de récurrence :

$$T_{r,k}(f) = \sum_{s=0}^{r} C_{r-s}(T_{s,k-1}f, f)$$

on démontre le résultat suivant :

Proposition I.2.
Pour tout $k \geq 2$ on a :

$$\|T_{r,k}(f)\|_{N,K} \leq (r+1)^{k-2} B^{k-1}_{r,N,K} \|f\|^k_{N+\omega(r),K}$$

Démonstration. La formule est vraie pour $k = 2$ car $T_{r,2}(f) = C_r(f,f)$. Supposons cette formule vraie au rang k. Alors on a d'après la formule de récurrence :

$$\|T_{r,k+1}(f)\|_{N,K} \leq \sum_{s=0}^{r} A_{s,N,K} \|T_{s,k}(f)\|_{N+\omega(r-s),K} \|f\|_{N+\omega(r-s),K}$$

d'où le résultat au rang $k+1$.

•

La proposition I.2 entraîne immédiatement la convergence de la série définissant l'exponentielle étoile. L'égalité de e^{*f} et de e^f à $O(\hbar^2)$ vient du fait que le terme d'ordre 1 est manifestement nul. Le théorème I.1. est donc démontré.

•

Remarque 1 : on a plutôt l'habitude, pour des raisons physiques, de définir l'exponentielle étoile [BFFLS] par la série :

$$\operatorname{Exp}(tf) = \sum_{k \geq 0} t^k (-i\hbar)^{-k} f^{*k}$$

L'inconvénient de cette formule est qu'on ne peut lui donner un sens que pour des étoile-produits convergents, c'est à dire pour lesquels on peut remplacer l'indéterminée $\hbar$ par une valeur particulière [Ar]. Mais on peut alors, dans le cas d'une variété *symplectique*, "faire de la théorie spectrale sans opérateurs", en définissant le spectre de f comme le support de la transformée de Fourier de la fonction $t \mapsto \operatorname{Exp}(tf)$.

Remarque 2 : tout récemment Maxim Kontsevich [K] a montré que toute variété de Poisson admettait un étoile-produit bidifférentiel, et a exhibé une formule explicite dans le cas de $\mathbb{R}^N$.

Références

[Ar] D. Arnal : *The *-exponential*, quantum theories and geometry, M. Cahen & M. Flato eds, 1988.

[BFFLS] F. Bayen *et al*, *deformation theory and quantization*, Annals of Physics 111, 1978.

[K] M. Kontsevich, *deformation quantization*, prépublication 1997.